

**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации**

**ГОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

Механика. Прикладная механика

Часть первая. Сопротивление материалов.

Конспект лекций

Учебно – методическое пособие

**Новомосковск
2009**

УДК 378
ББК 74.58
Ц 476

Рецензенты:

доктор технических наук Б.П. Сафонов
доктор технических наук А.А. Подколзин

Составители Цыцора В.Я., Суменков А.Л. Ц 476 Механика. Прикладная механика. Часть первая. Сопротивление материалов. Конспект лекций./ ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал). Новомосковск, 2009. 92с.

В пособии приведены основные сведения по тем темам первого раздела прикладной механики (механики) - «Сопротивление материалов». Пособие предназначено для студентов всех форм обучения.

УДК 378
ББК 74.58

©Новомосковский институт
Российского химико-технологического университета
им. Д.И. Менделеева, 2009

Капля выдалбливает камень не силой, а частотой своего падения; так и человек становится знающим не силой, а непрерывностью своего обучения. А.П.Минаков.

Сопротивление материалов – первый раздел прикладной механики. Но это особенный раздел, напрямую сориентированный на решение задач. Сформированные в этом разделе умения и навыки будут служить средством выполнения расчётов в других разделах, поэтому решение задач является не просто необходимой, а основной частью процесса усвоения. Главное – научиться самостоятельно решать задачи. Следует сразу осознать, что усвоить ту или иную тему означает не только уметь сформулировать определения, правила, содержащиеся в ней, но и уметь решить любую задачу по данной теме. Есть только один способ научиться решать задачи – решать их. Другого способа просто не существует. Методике решения задач, организации самостоятельной работы советуем уделять особое внимание...

Лекция 1. Основные положения

Литература: [1] Глава 1.

Первые лекции покажутся Вам очень трудными. Не расстраивайтесь, это испытывает каждый, кто осваивает сопротивление материалов. Такова специфика этой дисциплины. Не всё будет легко и просто и дальше. Изучение предмета потребует от Вас значительной затраты труда и умственной энергии. Но не надо бояться трудностей, надо спокойно, настойчиво продолжать работу, готовиться ко всем видам учебных занятий. Перед каждой новой лекцией изучите (хотя бы просмотрите) материал предыдущей лекции, продумайте её содержание. В противном случае новый материал, который нередко основывается на предыдущем, Вам будет непонятен, а лекция «неинтересной». Если лекция по какой-либо причине была пропущена, её следует своевременно переписать или законспектировать, основываясь на материале данного пособия. Если в лекции Вам что-то непонятно и Вы не успели получить пояснения преподавателя, обратитесь к указанной в заголовке литературе. Скоро Вы убедитесь, что трудности преодолимы, что Ваши усилия не пропадают даром. Набор формул, определений постепенно упорядочится, станет понятной их сущность, наступит перелом. Вы почувствуете, что изучаете не только важную, но и интересную, с единой, чётко построенной структурой науку, в которой отсутствуют эмпирические зависимости и громоздкие формулы, а все вопросы находятся в чёткой логической взаимосвязи...

1.1 Задачи сопротивления материалов

В статике Вы рассматривали твёрдые тела как абсолютно твёрдые. В действительности абсолютно твёрдых тел в природе не существует...

Твёрдые тела под действием приложенных к ним сил изменяют свою форму и размеры, то есть **деформируются**. При этом расстояния между каждыми двумя точками тела изменяются. Подтвердим сказанное простыми примерами.

Нагрузим силой F двутавровую балку AC , изображённую на рис. 1, методами статики определим реакцию шарнирно-неподвижной опоры A и усилие в стержне R_c . Под нагрузкой балка изогнётся, а стержень CB удлинится примерно так, как показано штриховыми линиями на рис.1 (*полагаем, что при этом ни стержень, ни балка не разрушатся*).

Теперь удалим нагрузку. Возможны два варианта поведения конструкции.

Вариант 1. После снятия нагрузки балка и стержень полностью восстанавливают начальную форму и размеры. В этом случае говорят, что в элементах конструкции возникали лишь упругие деформации.

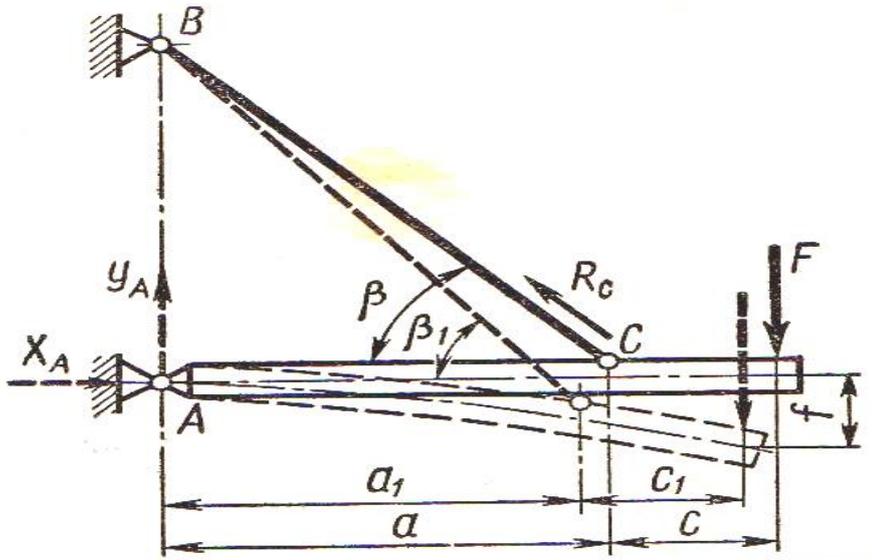


Рис.1. Пример деформации конструкции под нагрузкой.

Вариант 2. После снятия нагрузки деформации балки и стержня уменьшаются, но полностью не исчезают. Это означает, что в конструкции возникли не только упругие, но и пластические (*остаточные*) деформации. Последнее означает нарушение её работоспособности. Поэтому размеры сечения стержня и номер двутавра надо выбрать такими, чтобы ни стержень, ни двутавр не разрушились и чтобы в них не возникли пластические деформации (*надо рассчитать конструкцию на прочность*).

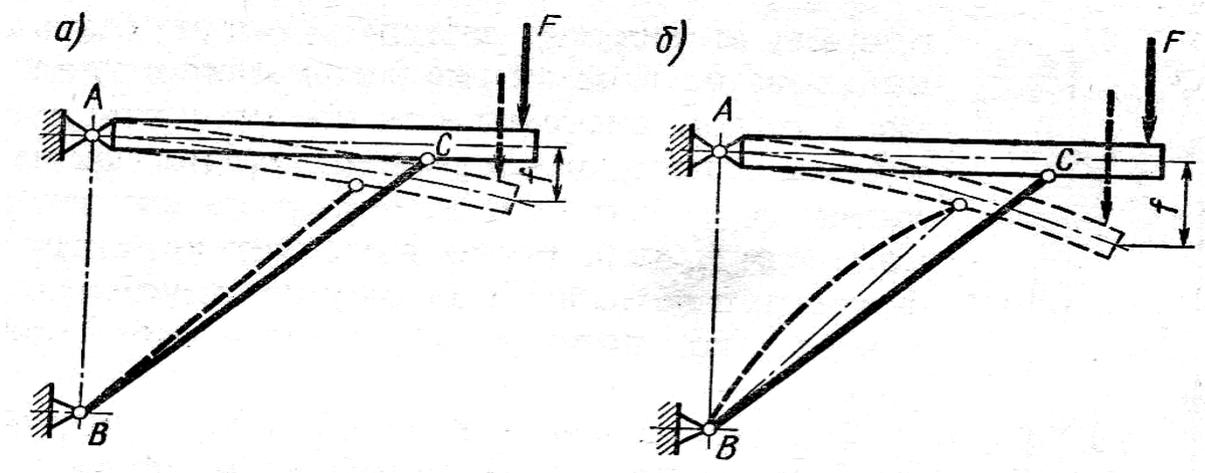


Рис. 1.2. Потеря устойчивости сжатым стержнем BC.

Очевидно, что при нагрузке упругие деформации элементов конструкции неизбежны. Неизбежны и вызванные этими деформациями перемещения отдельных точек конструкции. Так, конец балки получает некоторое вертикальное перемещение f . Может оказаться, что значение f превысит допустимую по условию нормальной работы конструкции величину. В этом случае говорят,

что конструкция имеет недостаточную жёсткость. Значит, надо выбрать такие размеры элементов конструкции, при которых упругие перемещения не будут превышать допускаемых значений (*надо рассчитать конструкцию на жёсткость*).

Обратимся ещё к одному примеру (рис.1.2а), который отличается от первого лишь тем, что стержень ВС испытывает не растяжение, а сжатие. Если стержень будет тонким и достаточно длинным, то при некоторой силе F он может внезапно изогнуться (*выпучиться*), как показано на рис. 1.2б пунктирной линией, и перейти к новой форме равновесия, но без разрушения, без остаточных деформаций.

Иными словами, при достижении нагрузкой некоторого критического значения прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой и возникнет новая устойчивая форма равновесия – криволинейная. В этом случае говорят, что сжатый стержень потерял **устойчивость**. Для нормальной работы конструкции потеря устойчивости недопустима. Расчёт конструкции должен исключать и такие явления.

Подведём итог. Причинами выхода конструкции из строя могут быть: разрушение её на части или появление пластических деформаций, недопустимое перемещение какой-то части конструкции, потеря устойчивости.

*В сопротивлении материалов рассматриваются основы расчёта элементов конструкций на **прочность, жёсткость и устойчивость**.*

- **Прочность** – способность элемента конструкции воспринимать нагрузки без разрушения и без пластических деформаций.
- **Жёсткость** – способность элемента конструкции сопротивляться упругим деформациям.
- **Устойчивость** – способность элемента конструкции сохранять под нагрузкой начальную форму равновесия.

1.2 Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов

Сопротивление материалов не занимается реальными конструкциями со всеми их индивидуальными особенностями. В ней рассматриваются расчётные схемы этих конструкций, на основе которых по сравнительно простым инженерным формулам определяются перемещения, деформации и напряжения. Задача расчётчика – выбрать такую расчётную схему, которая ближе всего подходит к реальной конструкции, учесть наиболее существенные факторы, влияющие на её работоспособность, пренебречь второстепенными факторами. От выбора расчётной схемы зависит точность расчётов. Удачно выбранная расчётная схема даст результаты расчёта, близкие к реальным. При неудачном выборе – результат расчёта будет далёк от истины...

При выборе расчётной схемы и расчётах мы будем использовать ряд гипотез и упрощающих допущений, позволяющих получать для расчётов простые инженерные формулы. Перечислим основные.

• **Схематизация формы тел**

Формы элементов конструкций весьма разнообразны, их упрощают и приводят к форме бруса, пластины или оболочки.

Брус – тело, у которого один из размеров (длина) намного больше размеров поперечного сечения (например, вал редуктора). На расчетной схеме бруса изображается только его ось.

В теоретической механике взамен термина «брус» Вы использовали термин «стержень». Мы будем пользоваться термином «брус», а термин «стержень» относить к брусу, работающему только на растяжение или сжатие.

Балка – брус, работающий на изгиб.

Оболочка – тело, у которого один из размеров намного меньше двух других (например, резервуар для жидкостей и газов).

Пластина – частный случай оболочки, у которой срединная поверхность – плоскость.

• Схематизация внешних сил

К внешним силам относятся заданные (активные) нагрузки, а также вызываемые ими реакции связей (реактивные силы). Их делят на объёмные и поверхностные.

Объёмные силы – силы, которые приложены к каждой частице тела по всему его объёму (например, силы тяжести, силы инерции).

Поверхностные силы делятся на сосредоточенные и распределённые силы.

Сосредоточенные силы – силы, приложенные к малой поверхности, размеры которой малы по сравнению с размерами самого тела.

Распределённые нагрузки бывают распределёнными по поверхности (характеризуются давлением, H/m^2) или по длине тела (характеризуются интенсивностью нагрузки q , H/m).

По характеру изменения во времени внешние силы бывают **статические, динамические и переменные**.

Статические нагрузки – нагрузки, в процессе приложения которых возникающие силы инерции так малы, что ими можно пренебречь.

Динамические нагрузки – нагрузки, меняющие свою величину в течение малого промежутка времени (например, ударные нагрузки).

Повторно-переменные нагрузки – нагрузки, многократно изменяющиеся по тому или иному закону (например, циклические нагрузки).

• **Справедлив закон Гука.** Деформации пропорциональны напряжениям.

• **Гипотеза малости деформаций (принцип начальных размеров)**

Деформации малы по сравнению с размерами тела. При составлении уравнений равновесия тела деформациями пренебрегают.

• **Гипотеза сплошности, однородности и изотропности материала**

В сопротивлении материалов считают, что материал:

однороден, то есть свойства его во всех точках тела одинаковы;

сплошной, т.е. материал полностью заполняет весь объём тела;

изотропен, т.е. свойства материала во всех направлениях одинаковы.

• **Принцип независимости действия сил.**

Результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил группы в отдельности (рис.1.3).

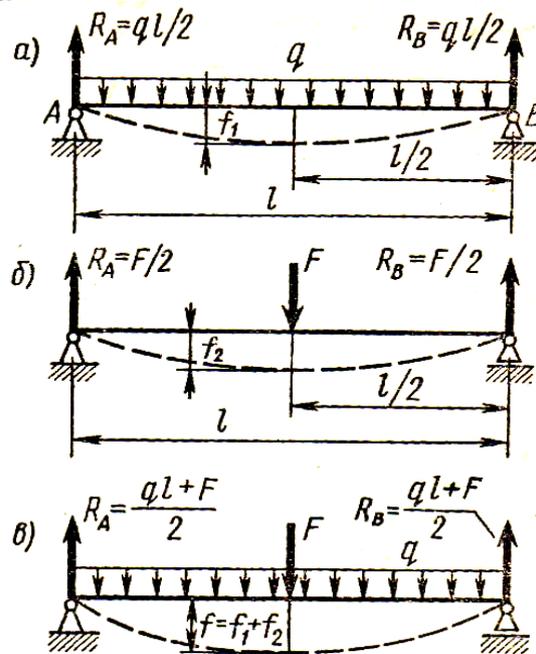


Рис. 1.3. Принцип независимости действия сил

При решении задач по сопротивлению материалов широко используются уравнения равновесия различных систем сил, полученные в статике твёрдого тела. Однако не все приёмы и методы статики могут быть использованы в сопротивлении материалов. Например, недопустимо заменять одну систему сил другой, статически ей эквивалентной. На рис. 1.4,а показана балка, нагруженная равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q , а на рис. 1.4,б такая же балка нагружена равнодействующей этой нагрузки – силой $F = ql$. Опорные реакции одинаковы, однако наибольший прогиб второй балки f_2 в 1,6 раза больше, чем наибольший прогиб f_1 первой балки, а допускаемая по условию её прочности нагрузка, как показывают расчёты, вдвое меньше.

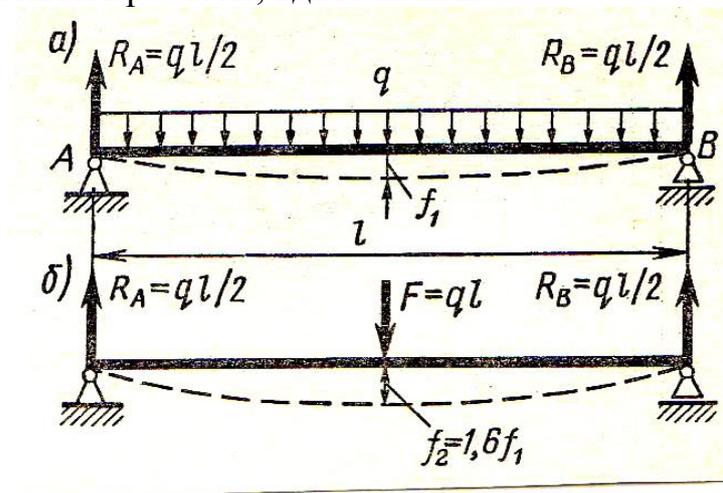


Рис. 1.4. Картина изменения деформации балки при замене одной системы сил другой системой, эквивалентной первой.

1.3 Метод сечений. Внутренние силовые факторы

Хорошее усвоение метода сечений крайне необходимо для успешного изучения предмета. Постарайтесь обстоятельно, без спешки усвоить его сущность ...

Будем считать, что твёрдые тела состоят из отдельных частиц, которые при отсутствии внешних сил не взаимодействуют между собой. Под действием внешних сил тела деформируются, положение частиц одна относительно другой изменяется. Между частицами появляются силы взаимодействия, которые мы будем называть **внутренними силами**. Эти силы стремятся вернуть частицы в исходное положение. Они самоуравновешены и не влияют на условия равновесия тела в целом. При расчётах на прочность и жёсткость внутренние силы определяют по заданным внешним силам. Основу для такого расчёта даёт **метод сечений**.

Рассмотрим сущность этого метода.

Пусть на тело (рис. 1.5) действует уравновешенная система внешних сил $F_1...F_n$. Мысленно **рассечём** тело в интересующем нас месте сечением $n-n$ на две части, **отбросим** одну часть, например, правую, и рассмотрим равновесие оставшейся левой части, на которую действует система внешних сил $F_1...F_k$. Если бы не было внутренних сил, оставшаяся часть бруса начала бы двигаться под действием приложенных к ней внешних сил. **Заменим** действие отброшенной правой части внутренними силами и **уравновесим** оставшуюся часть бруса. Эти силы приложены к каждой частице тела, расположенной в плоскости сечения, поскольку материал тела сплошной. Приведем внутренние силы к центру тяжести сечения – точке C . В результате такого приведения мы получим главный вектор $R_{вн}$ и главный момент $M_{вн}$ внутренних сил.

Для лучшего запоминания метода сечений Вы можете дать ему название «метод РОЗУ», то есть название, составленное из начальных букв наименований четырёх его этапов: **р**ассекаем, **о**тбрасываем, **з**аменяем, **у**равновешиваем.

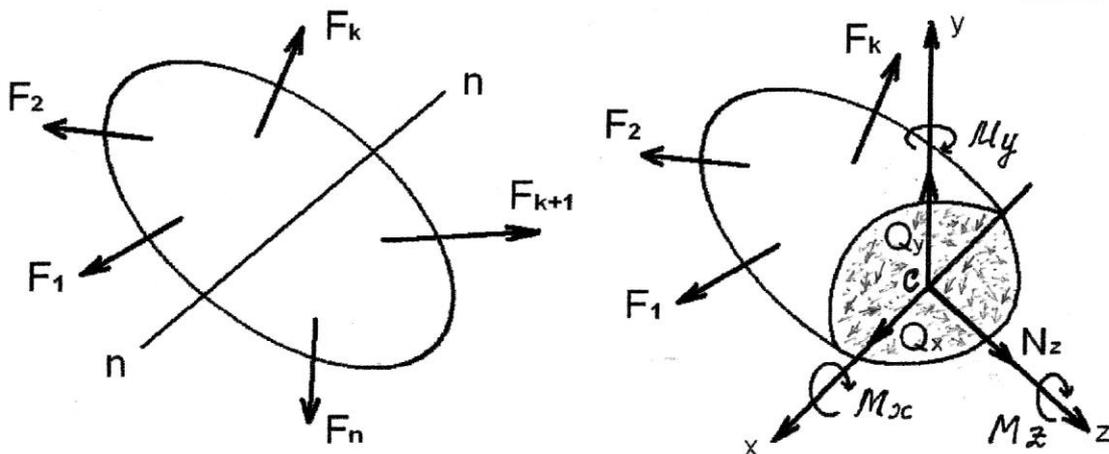


Рис.1.5. Определение ВСФ методом сечений.

Однако удобнее определять не главный вектор и главный момент, а их составляющие на оси X, Y, Z , которые называют **внутренними силовыми факторами (ВСФ)**. Расположим начало координат в точке C , ось Z направим по внеш-

ней нормали к сечению, а оси X и Y расположим в плоскости сечения.

$$\text{Тогда} \quad \bar{R}_{\text{вн}} = \bar{N}_z + \bar{Q}_x + \bar{Q}_y; \quad \bar{M}_{\text{вн}} = \bar{M}_z + \bar{M}_x + \bar{M}_y$$

Всего $BC\Phi$ шесть, их можно определить из шести уравнений равновесия оставшейся части бруса. Составим эти уравнения:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} + Q_x &= 0 & \sum m_x(F_k) + M_x &= 0 \\ \sum F_{ky} + Q_y &= 0 & \sum m_y(F_k) + M_y &= 0 \\ \sum F_{kz} + N_z &= 0 & \sum m_z(F_k) + M_z &= 0 \end{aligned}$$

Решая систему из 6-и уравнений с 6-ью неизвестными, определяем $BC\Phi$.

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum F_{KX}; & Q_y &= \sum F_{KY}; & N_z &= \sum F_{KZ}; \\ M_x &= \sum m_x(F_K); & M_y &= \sum m_y(F_K); & M_z &= \sum m_z(F_K) \end{aligned}$$

Сформулируем общее правило для определения любого $BC\Phi$.

N_z , Q_x и Q_y равняются алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x , y , или z .

M_x , M_y и M_z равняются алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, относительно соответствующей осей x , y , или z , проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

Каждый $BC\Phi$ связывают с определенным видом деформации бруса.

Растяжение (сжатие) – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только **продольная сила** N_z , а все остальные $BC\Phi$ равны нулю.

Сдвиг – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только **поперечная сила** Q_x , или Q_y , или $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$.

Кручение – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только **крутящий момент** M_z .

Чистый изгиб – деформация, при которой в поперечном сечении бруса возникает только **изгибающий момент** M_x или M_y .

Сложное сопротивление – состояние, при котором брус одновременно подвергается нескольким видам деформаций (например, изгибу и кручению).

1.4 Напряжения

Внутренние силы распределены сплошь по выбранному сечению тела, причём в общем случае их величина и направление в отдельных точках различны.

Интенсивность внутренних сил в определённой точке сечения называется напряжением.

Выделим в окрестности какой-либо точки сечения весьма малую площадку ΔA и допустим, что равнодействующая внутренних сил на этой площадке равна ΔR . Полное среднее напряжение на этой площадке $P_{cp} = \Delta R / \Delta A$. Полное напряжение в данной точке $\vec{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$. Напряжение является векторной величиной. Из теоретической механики Вам известно, что сила определяется тремя элементами: модулем, направлением и точкой приложения. Но в следующей лекции будет показано, что напряжение в данной точке зависит ещё от ориентации в пространстве площадки, на которой оно определяется, поэтому для полной характеристики напряжения указанных трёх элементов будет недостаточно, надо обязательно указывать и ориентацию площадки, на которой оно возникает.

В качестве единицы напряжения принят паскаль (*Па*).

П а с к а л ь – это напряжение, при котором на площадке в 1 м^2 возникает внутренняя сила, равная 1 Н .

Эта единица очень мала, поэтому на практике используют кратную ей единицу – ***мегапаскаль***, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$.

Разложим вектор полного напряжения \vec{P} на три составляющие, направленные параллельно координатным осям (рис. 1.6). Эти составляющие снабдим двумя индексами: первый индекс будет показывать, какой оси параллельна нормаль к данной площадке, второй индекс – какой оси параллельна сама составляющая. Для нормальных напряжений оба символа совпадают, поэтому пишут лишь один. Если направление напряжения не играет роли, то индексы опускают. Зависимость между полным напряжением и тремя его составляющими выражается следующей формулой:

$$P_z = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_z^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2},$$

где σ - (***сигма***) – нормальное напряжение, направленное по нормали к сечению;

τ - (***тау***) – касательное напряжение (*расположено в плоскости сечения*).

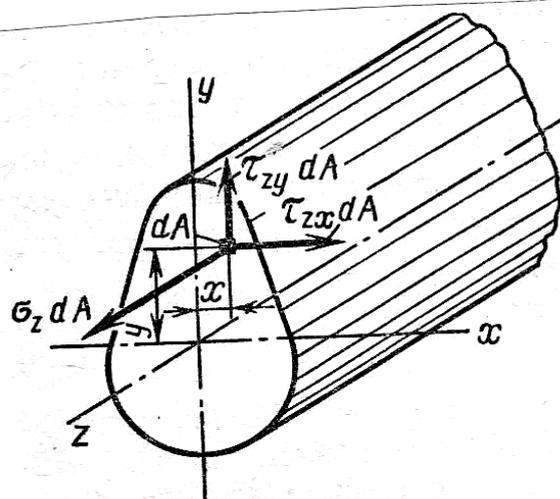


Рис. 1.6. Элементарные внутренние силы на площадке dA .

Установим связь напряжений с ВСФ. Умножим σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} на dA , получим элементарные внутренние силы на площадке dA :

$$dN_z = \sigma_z dA; \quad dQ_x = \tau_{zx} dA; \quad dQ_y = \tau_{zy} dA.$$

Возьмём интегралы от приведенных выражений по всей площади сечения:

$$N_z = \int_A \sigma_z dA; \quad Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA.$$

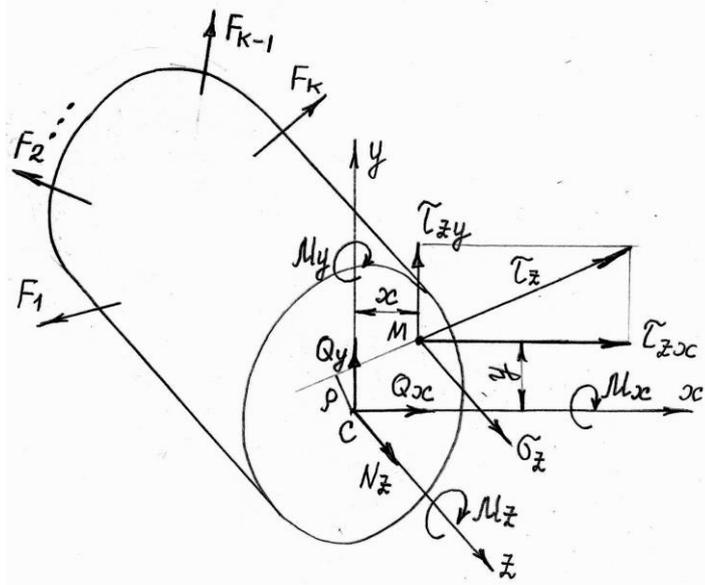


Рис. 1.7 Связь между внутренними силовыми факторами и напряжением

Найдём зависимости, отображающие связь напряжений с изгибающими и крутящими моментами.

Элементарные моменты внутренних сил относительно осей x , y и z .

$$dM_x = (\sigma_z dA)y; \quad dM_y = (\sigma_z dA)x; \quad dM_z = (\tau_x dA)y - (\tau_y dA)x.$$

Выражение для крутящего момента станет проще, если предварительно найти

суммарное касательное напряжение $\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$,

тогда $dM_z = (\tau_z dA)\rho$

Интегрируя элементарные моменты по всей площади сечения, получим:

$$M_x = \int_A \sigma_y dA; \quad M_y = \int_A \sigma_x dA; \quad M_z = \int_A \tau_z \rho dA.$$

Чтобы использовать эти выражения для определения напряжений в любой точке сечения, надо знать закон распределения напряжений по сечению. Его устанавливают наблюдением за характером деформации резиновых моделей, на поверхность которых наносят сетку из продольных и поперечных рисок, используя при этом ещё одну гипотезу – гипотезу плоских сечений (*с нею мы познакомимся в следующей лекции*).

Ошибка! Студент говорит, что метод сечений служит для определения напряжений. Такое утверждение лишено смысла. Метод сечений даёт возможность определить лишь главный вектор и главный момент внутренних сил. Для определения напряжений надо знать закон распределения внутренних сил по сечению, а установление этого закона требует введения дополнительных гипотез геометрического характера...

Проверочные вопросы.

Что называется прочностью, жёсткостью, устойчивостью?

Что называется брусом, оболочкой, пластиной, массивным телом?

По каким признакам и как классифицируются внешние силы?

В каких единицах выражаются сосредоточенные силы, моменты, интенсивность распределённых нагрузок?

В чём состоят принцип независимости действия сил и принцип начальных размеров?

Какие деформации называют упругими, какие – пластическими?

Что представляют собой внутренние силы?

Раскройте сущность метода сечений.

Перечислите ВСФ и соответствующие им виды деформаций.

Сформулируйте общее правило для определения любого ВСФ и напишите формулы для определения их значений (по модулю).

Что называется напряжением? В каких единицах оно выражается?

Какова зависимость между полным, нормальным и касательным напряжением в данной точке?

Напишите формулы, отображающие зависимости между ВСФ и напряжениями.

Лекция 2. Растяжение и сжатие

Литература: [1] Глава 2.

Растяжение и сжатие – самые распространённые виды деформаций. Но значение этой темы определяется не только сведениями по расчётам на растяжение и сжатие. Эта тема содержит сведения о механических характеристиках материалов, о предельных напряжениях, о коэффициентах запаса прочности, о допускаемых напряжениях. В этой теме Вы познакомитесь с интересными задачами – расчётами статически неопределимых систем...

2.1 Основные определения. Внутренние силовые факторы

Только чёткое и глубокое понимание материала позволяет формулировать любое определение, не прибегая к заучиванию его на память...

Осевым растяжением (сжатием) называют деформацию, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила N_z , а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Чтобы брус испытывал осевое растяжение (сжатие), равнодействующая внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, должна быть направлена вдоль его оси. Только тогда все остальные пять ВСФ будут равны нулю.

Прямые брусья, работающие только на растяжение или сжатие, называют стержнями.

Продольная сила определяется с помощью метода сечений (рис. 2.1).

Брус мысленно рассекается плоскостью, перпендикулярной его оси (поперечным сечением) на две части, одна из которых отбрасывается, а её действие на оставшуюся часть заменяется неизвестной продольной силой N_z . Затем составляется уравнение равновесия оставшейся части, из которого определяется значение N_z .

Продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось Z всех внешних сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения:

$$N_z = \sum F_{KZ} .$$

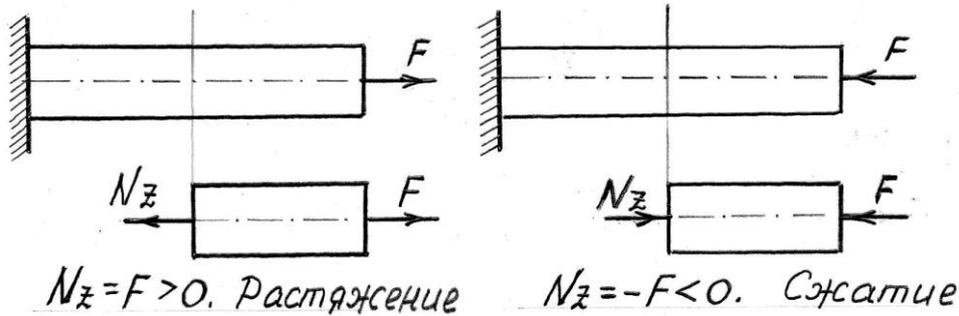


Рис. 2.1. Определение продольной силы при растяжении и сжатии

Условимся продольную силу при растяжении (*направленную от сечения*) считать **положительной**, при сжатии (*направленную к сечению*) – **отрицательной**. Знак продольной силы мы будем определять по внешним силам. Если внешняя сила направлена от сечения, то она берётся в указанной сумме со знаком плюс, если внешняя сила направлена к сечению – со знаком минус. Это правило знаков мы будем использовать при построении **эпюр продольных сил** $N_z = f(Z)$, то есть графиков, показывающих изменение продольной силы вдоль оси бруса. Эпюры мы будем строить для того, чтобы найти наибольшее (*расчётное*) значение продольной силы и положение сечения, в котором она возникает.

Для балок, закреплённых одним концом, эпюры строят, идя со свободного конца балки без определения реакции опоры.

Построение эпюр ВСФ и нахождение максимальных их значений – важнейший этап расчёта на прочность. Вам предстоит научиться свободно владеть навыками построения эпюр ВСФ при всех видах деформаций и усвоить правила контроля правильности их построения. Методику построения эпюр продольных сил рассмотрим на примере...

1. **Пример:** Построить эпюру продольных сил для бруса, жёстко закреплённого одним концом и нагруженного двумя осевыми силами (рис. 2.2).

2. Разобьём брус на два участка, начиная от свободного конца. Границей участков является сечение B , в котором приложена внешняя сила.

3. Возьмём произвольное сечение на каждом участке. Применяя метод сечений, отбросим левую часть, чтобы не определять реакцию заделки.

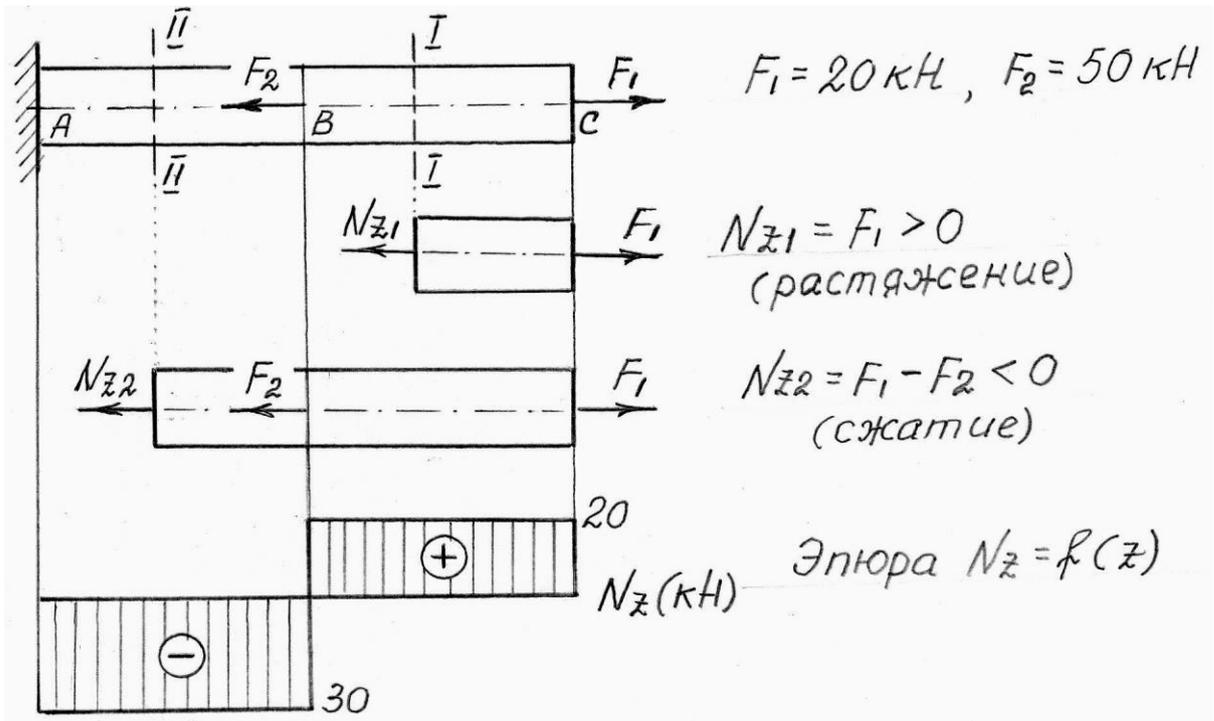
4. Заменяем действие отброшенной части бруса продольной силой. Определим продольную силу из условия равновесия оставшейся правой части бруса:

$$I \text{ участок } N_{z1} = F_1 = 20 \text{ кН} = \text{const} \text{ (растяжение),}$$

$$II \text{ участок } N_{z2} = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{ кН} = \text{const} \text{ (сжатие).}$$

3. По полученным значениям N_z строим эпюру продольных сил. Проведём параллельно оси бруса прямую линию – ось абсцисс. Значения N_z откладываем в выбранном масштабе перпендикулярно оси абсцисс: положительные – вверх, отрицательные – вниз от оси. Штрихуем эпюру перпендикулярными к оси отрезками. Каждый такой отрезок показывает в принятом масштабе значение продольной силы в соответствующем поперечном сечении бруса.

Убеждаемся, что в местах приложения сосредоточенных сил на эпюре наблюдаются «скачки», равные этим силам.

Рис. 2.2. Расчётная схема бруса и эпюра продольных сил N_z

2.2 Напряжения в поперечных сечениях бруса

Ведение аккуратно оформленного конспекта, особенно качественное выполнение чертежей и рисунков, способствует лучшему усвоению курса...

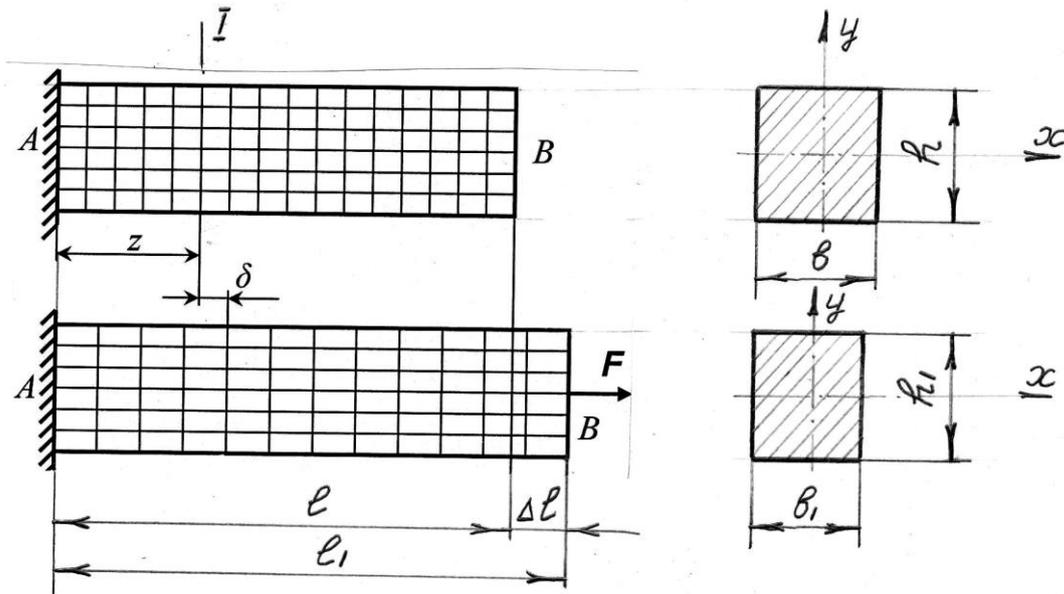


Рис. 2.3. Деформация бруса при центральном растяжении

Продольная сила – это равнодействующая элементарных нормальных внутренних сил, распределенных по выбранному сечению: $N_z = \int_A \sigma dA$. Эту формулу мы используем для определения напряжения в любой точке сечения. Закон распределения напряжений по сечению устанавливают наблюдением за деформацией резинового образца, на поверхность которого предварительно наносят про-

...

дольные и поперечные риски (рис. 2.3).

Такие наблюдения показывают, что при растяжении длина бруса увеличивается, а размеры поперечного сечения уменьшаются (*при сжатии – наоборот*).

При этом подтверждается **гипотеза Я. Бернулли**:

сечения бруса, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации. При растяжении поперечные сечения перемещаются параллельно самим себе.

Выделим сечение $I-I$ на расстоянии Z от заделки, а брус представим как совокупность бесконечно большого числа волокон площадью поперечного сечения dA . Произвольное сечение $I-I$ переместится на величину δ вправо (*при сжатии – влево*) параллельно самому себе, при этом все волокна получают одинаковое удлинение, а равным удлинениям по закону Гука соответствуют равные напряжения. Таким образом, при растяжении и сжатии нормальные напряжения распределены по поперечному сечению равномерно, то есть $\sigma = \text{const}$.

$$\text{Тогда } N_z = \int_A \sigma dA = \sigma A. \quad \text{Отсюда } \sigma = \frac{N_z}{A}.$$

Для нормальных напряжений принимают то же правило знаков, что и для продольных сил, то есть: ***при растяжении нормальные напряжения считают положительными, при сжатии – отрицательными.***

2.3 Деформации и перемещения. Закон Гука

Мы убедились, что деформация растяжения и сжатия проявляется в изменении длины и поперечных размеров бруса. Для количественной оценки деформации используют следующие величины (рис. 2.3):

$\Delta l = l_1 - l$ – абсолютная продольная деформация бруса;

$\Delta h = h_1 - h$, $\Delta b = b_1 - b$ – абсолютные поперечные деформации.

Для определения Δl , Δb , Δh введем понятия относительной продольной и поперечной деформаций.

Выделим из бруса элементарный участок длиной dZ . При деформации его длина увеличивается на $\Delta(dZ)$, а размеры поперечного сечения уменьшаются на Δb и Δh соответственно.

Относительная продольная деформация участка длиной dZ : $\varepsilon = \frac{\Delta(dZ)}{dZ}$.

Относительная поперечная деформация: $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta h}{h}$ (материал изотропен).

Опытным путем установлена зависимость $\varepsilon' = -\nu \varepsilon$, где ν – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом Пуассона** и являющийся физической константой материала. Для изотропных материалов $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Например, для стали $\nu = 0,25 \dots 0,33$, для алюминия $\nu = 0,32 \dots 0,36$, для резины

$V = 0,5$. Экспериментально установлена зависимость между относительным удлинением и нормальным напряжением: $\sigma = E\varepsilon$.

Эта зависимость является аналитическим выражением *закона Гука при растяжении – сжатии*.

Коэффициент пропорциональности E называют *модулем продольной упругости материала*. Он характеризует упругие свойства материала, размерность E та же, что и размерность напряжения (ε – величина безразмерная).

Абсолютная продольная деформация элементарного участка длиной dZ будет равна: $\Delta(dZ) = \varepsilon dZ = \frac{\sigma}{E} dZ = \frac{NdZ}{AE}$.

Произведение AE называют жесткостью поперечного сечения бруса при растяжении и сжатии. Конечно, этот термин условен. Сечение не имеет жёсткости. Выразим сущность этого термина так: произведение EA отражает влияние на жёсткость бруса материала и размеров поперечного сечения.

Абсолютную продольную деформацию участка бруса длиной l определим суммированием деформаций элементарных участков: $\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{AE}$. Если в преде-

лах участка бруса N_z , A , E не зависят от координаты Z , то есть постоянны по длине, то $\Delta l = \frac{N_z l}{AE}$.

Эта формула выражает закон Гука при растяжении (сжатии) в развёрнутом виде.

Пользуясь этой формулой, можно определять не только абсолютные продольные деформации бруса и его участков, но и взаимные перемещения одного поперечного сечения относительно другого.

Взаимное перемещение двух сечений относительно друг друга равно изменению длины участка бруса, заключенного между этими сечениями.

Полную качественную характеристику напряженного и деформированного состояния бруса при центральном растяжении и сжатии дают эпюры продольных сил N_z , напряжений σ и перемещений поперечных сечений δ по длине бруса.

2.4. Механические характеристики материалов

Как во всякой естественной науке, первоисточником, из которого возникли при зарождении сопротивления материалов её основные понятия и основные законы, являлись непосредственные наблюдения, повседневный опыт и практическая деятельность человека...

Основные механические характеристики материалов определяют опытным путём по результатам испытаний стандартных образцов на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб. По характеру нагружения различают испытания статические, динамические и испытания на усталость (*при переменных напряжениях*).

Наибольшее распространение получили испытания на растяжение при малой скорости нагружения (*при статическом нагружении*). Форма и размеры стандартных цилиндрических образцов показаны на рис. 2.4. Образцы бывают десяти-

кратные (*длинные*) (рис. 2.4 а,б) с отношением начальной расчётной длины l_0 к начальному диаметру образца d_0 , равном 10, то есть $l_0/d_0=10$, и – пятикратные (*короткие*) (рис. 2.4в) с отношением $l_0/d_0=5$.

Испытания проводят на специальных разрывных машинах. В процессе испытаний образец устанавливают в захватах разрывной машины и медленно растягивают вплоть до разрушения. Одновременно диаграммный аппарат машины записывает диаграмму зависимости между нагрузкой F , растягивающей образец, и удлинением образца Δl .

Чтобы исключить влияние размеров образца, эту диаграмму перестраивают: все ординаты делят на начальную площадь поперечного сечения A_0 , а все абсциссы – на начальную расчётную длину l_0 . Полученная диаграмма в координатах $\sigma = F/A_0$, $\varepsilon = \Delta l/l_0$ называется условной диаграммой растяжения, которая не зависит от размеров образца, а характеризует только свойства материала.

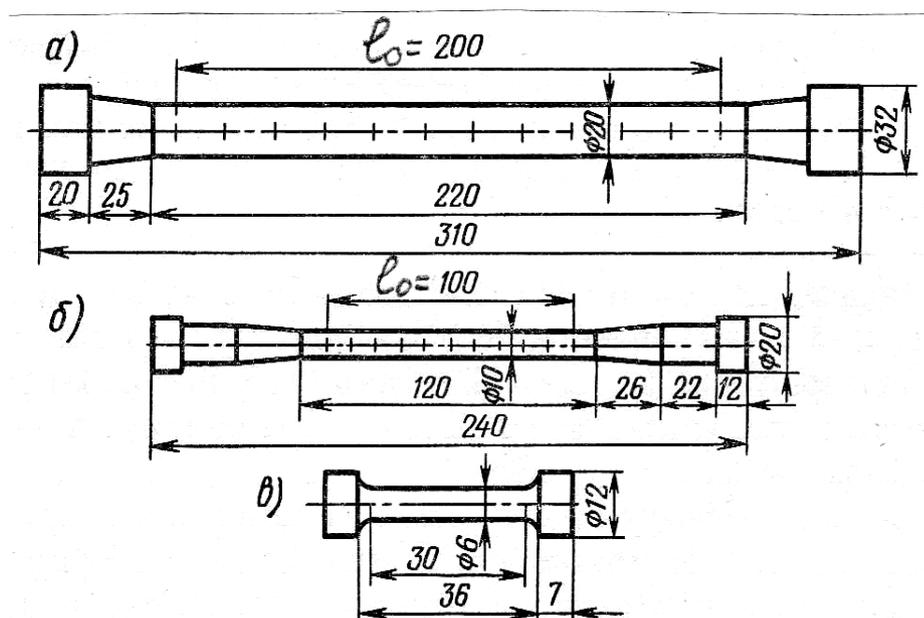


Рис. 2.4. Стандартные образцы для испытаний материалов на растяжение

По этой диаграмме определяют характеристики прочности, а непосредственными замерами образца до и после деформации определяют характеристики пластичности.

На рис. 2.5 показан примерный вид диаграммы растяжения, полученной при испытании образца из малоуглеродистой стали Ст3.

Рассмотрим основные участки этой диаграммы и дадим определения основных механических характеристик, которым соответствуют наиболее характерные точки диаграммы.

Участок ОА – зона пропорциональности – прямая линия, заканчивающаяся точкой А, соответствующей пределу пропорциональности σ_{pr} .

Предел пропорциональности σ_{pr} – наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука. Для стали Ст3 $\sigma_{pr} = 210$ МПа.

σ_e – **предел упругости** – наибольшее напряжение, до которого отсутствуют остаточные деформации. На диаграмме ему соответствует точка В.

Для стали Ст3 $\sigma_e = 220$ МПа

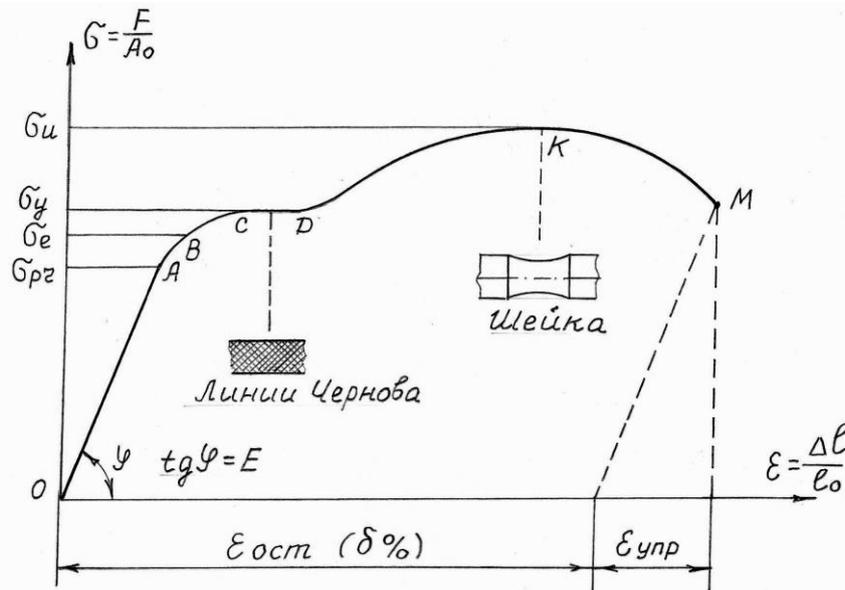


Рис. 2.5. Диаграмма растяжения образцов из малоуглеродистой стали

Участок СД – площадка текучести (*горизонтальная*), которая соответствует физическому пределу текучести σ_y .

Физический **предел текучести** σ_y (или σ_T) – напряжение, при котором деформация образца растёт без увеличения нагрузки. Участок СД, на котором наблюдается явление текучести, называют площадкой текучести. Для стали Ст3 $\sigma_y = 230$ МПа. Текучесть сопровождается значительными взаимными сдвигами кристаллов. Поверхность образца становится матовой, на ней можно видеть сетку из линий, наклонённых к оси образца примерно под углом 45° (*линии Людерса-Чернова*). Эти линии соответствуют площадкам, на которых при растяжении образца возникают наибольшие касательные напряжения. Это подтверждает гипотезу о том, что текучесть материала и сдвиг кристаллов обусловлены касательными напряжениями.

Многие сплавы цветных металлов и легированные стали, обладающие достаточно высокой пластичностью, дают диаграмму растяжения без площадки текучести. Для таких материалов введено понятие **условного предела текучести** $\sigma_{0,2}$, представляющего собой напряжение, соответствующее относительному остаточному удлинению, равному 0,2%. Для большинства материалов в справочниках в качестве предела текучести приводится именно условный предел текучести, причём в большинстве стандартов и физический, и условный пределы текучести обозначаются одинаково – σ_y (или σ_T).

Участок ДК – зона упрочнения материала.

Удлинившись на некоторую величину на площадке текучести СД при постоянном значении силы, материал снова приобретает способность сопротивляться

растяжению (*упрочняется*). Диаграмма за точкой Д вновь поднимается вверх, хотя и более полого, чем на участке ОА, вплоть до верхней точки диаграммы – точки К.

Напряжение, которое соответствует максимальной нагрузке на образец (в точке К) называется **пределом прочности** и обозначается σ_u (индекс *u* от английского слова *ультиматум* – предельное).

Для материалов, образцы из которых дают перед разрывом шейку вместо термина **предел прочности** используют термин **временное сопротивление разрыву**.

Участок КМ – зона местной деформации. В точке К на образце появляется местное сужение – шейка. Площадь сечения образца в шейке быстро уменьшается, уменьшается и нагрузка, необходимая для дальнейшего деформирования, а в точке М происходит хрупкий разрыв образца по наименьшему сечению шейки.

Все перечисленные характеристики $\sigma_{pr}, \sigma_e, \sigma_y, \sigma_u$ являются характеристиками прочности материала.

Характеристики пластичности

Пластичностью материала называют свойство материала получать перед разрушением значительные остаточные деформации.

Оценивают пластичность двумя величинами: δ и ψ

- $\delta = \frac{l_{разр} - l_0}{l_0} 100\%$ – относительное остаточное удлинение образца (отношение остаточной продольной деформации образца к начальной расчётной длине l_0 , выраженное в %).

где $l_{разр}$ – длина расчётной части образца после разрыва, измеряемая после соединения обеих частей разорванного образца.

Для стали Ст3 $\delta > 21\%$.

- $\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} 100\%$ – относительное остаточное сужение (отношение изменения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади образца A_0).

где $A_{ш}$ – площадь поперечного сечения разорванного образца в наиболее тонком месте шейки. Для стали Ст3 $\psi = 50...60\%$.

Значение δ для одного и того же материала зависит от отношения длины рабочей части образца к диаметру d_0 . С ростом l_0/d_0 величина δ уменьшается. Для пятикратных образцов относительное удлинение при разрыве больше, чем для десятикратных, т.е. $\delta_5 > \delta_{10}$. Поэтому величина ψ характеризует свойства пластичности более точно, чем δ , поскольку она меньше зависит от формы и размеров образца. Чем выше δ и ψ , тем пластичнее материал. Свойства пластичности используется при штамповке, вытяжке и т.д.

Хрупкость – способность материала разрушаться при очень малых остаточных деформациях (величина относительного удлинения при растяжении для хрупких материалов не превышает 2...5%), то есть, хрупкость – это свойство, противоположное пластичности. К хрупким материалам относятся стекло, кирпич, чугун, высокоуглеродистая сталь.

На рис. 2.6 представлена диаграмма растяжения образцов из чугуна. Из диаграммы видно, что даже в начальной стадии растяжения хрупкие материалы плохо подчиняются закону Гука. При практических расчётах отклонение от закона Гука не учитывают, диаграмму спрямляют прямой линией, (на рисунке – штриховая линия), что позволяет при расчетах пользоваться законом Гука вплоть до разрушения образца. Разрыв образца наступает внезапно без образования шейки. При таком виде диаграммы для хрупких материалов определяют только одну характеристику прочности – предел прочности σ_u .

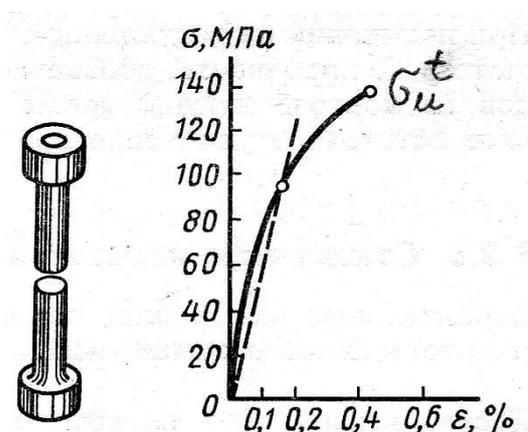


Рис. 2.6. Диаграмма растяжения образцов из чугуна

Статические испытания на сжатие

На сжатие испытывают строительные материалы (бетон, цемент, кирпич), сталь испытывают на сжатие значительно реже. Для испытаний на сжатие применяют образцы в форме кубиков или невысоких цилиндров высотой $h < 3d$, так как при более длинных образцах может происходить их изгиб.

Типичная диаграмма сжатия образца из пластичного материала (малоуглеродистой стали) показана на рис. 2.7.

Вначале диаграмма имеет вид, аналогичный диаграмме растяжения. Но далее ввиду того, что при пластической деформации, в отличие от упругой, объём образца не меняется, с уменьшением высоты образца при сжатии площадь поперечного сечения его увеличивается, нагрузка соответственно возрастает, кривая идёт круто вверх. Разрушения образца при этом не происходит. Он просто расплющивается. Цилиндрический образец при сжатии превращается в бочонок (*бочкообразная форма вызвана силами трения между образцом и поверхностью пресса*). Поэтому для пластичного материала понятия «предел прочности при сжатии» не существует, при испытаниях определяют только предел текучести при

сжатии σ^c_y . Заметим, что для стали пределы пропорциональности и пределы текучести при сжатии и при растяжении одинаковы.

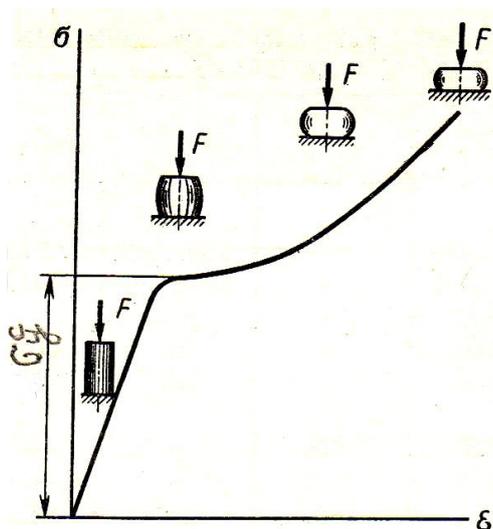


Рис. 2.7. Условная диаграмма сжатия образца из малоуглеродистой стали.

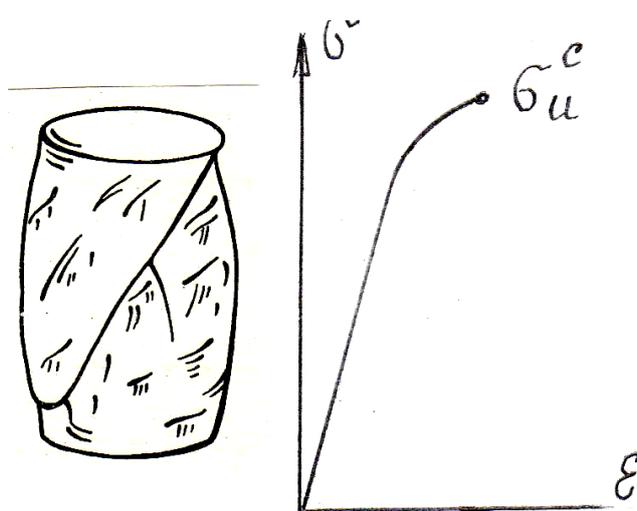


Рис. 2.8. Условная диаграмма сжатия образца из чугуна.

Если стальной образец при сжатии не разрушается вовсе, то чугунный разрушается путём среза под углом, приближающимся к 45° . В плоскости среза отчётливо видны признаки сдвига.

На рис. 2.8 показана диаграмма сжатия образца из чугуна. При возникновении первых трещин нагрузка резко падает и испытания прекращается. Таким образом, при растяжении чугун разрушается хрупко из-за отрыва частиц, вызванного нормальными напряжениями, а при сжатии – пластично из-за сдвига частиц, вызванного касательными напряжениями.

Особо отметим, что предел прочности чугуна при сжатии в 3...4,5 раза выше, чем предел прочности при растяжении, то есть $\sigma_u^c = (3..4,5) \sigma_u^t$, или, иными словами, чугун, как и другие хрупкие материалы, значительно лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению.

Следует помнить, что речь идёт о характеристиках, выявляемых при испытаниях на растяжение (на одноосное напряжённое состояние) при комнатной температуре и малой скорости деформации. При изменении условий эксплуатации конструкции (температуры, скорости деформации, продолжительности работы) и вида напряжённого состояния свойства материалов могут очень сильно изменяться. При этом хрупкие материалы могут вести себя как пластичные, а пластичные – как хрупкие. Поэтому деление материалов на пластичные и хрупкие является весьма условным, строго говоря, говорить можно лишь о пластичном или хрупком состоянии (разрушении) материала.

2.5 Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности

Возникновение текучести или признаков хрупкого разрушения хотя бы в одной точке конструкции означает нарушение прочности, выход из строя конструкции в целом. Расчёт на прочность, основанный на таком представлении об опасном состоянии конструкции, называют **расчётом по опасной точке** или **расчётом по допускаемым напряжениям**. Применяются и другие методы расчёта (по предельным нагрузкам, по предельным состояниям), основанные на иных представлениях об опасных состояниях конструкции, но мы эти методы рассматривать не будем...

Испытания материалов на растяжение показывают, что в зависимости от напряжённого состояния материал может находиться в трёх состояниях (рис. 2.9):

- а) упругое допустимое, безопасное);
- б) пластическое (характеризуется заметными остаточными деформациями из – за сдвига частиц);
- в) состояние разрушения (характеризуется явлением отрыва частиц).

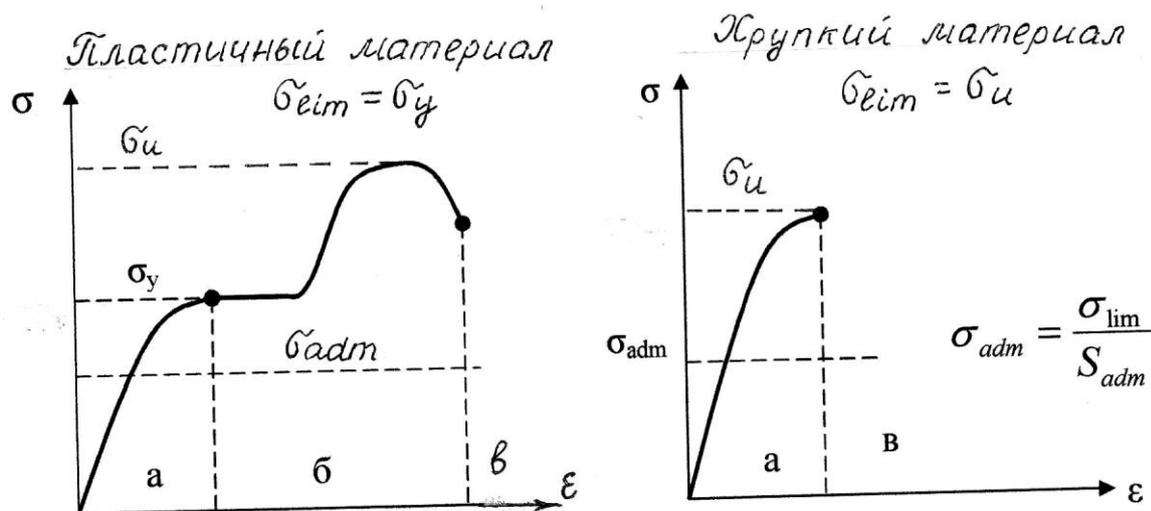


Рис. 2.9. К выбору допускаемых напряжений

Последние два состояния являются опасными, недопустимыми. Напряжение, при котором происходит переход материала из упругого состояния в опасное, называют предельным напряжением и обозначают его как σ_{lim} .

Из диаграммы растяжения видно, что для пластичных материалов $\sigma_{lim} = \sigma_y$, для хрупких - $\sigma_{lim} = \sigma_{и}$. Прочность конструкции будет обеспечена, если во всех её точках соблюдается условие $\sigma \leq \sigma_{lim}$. Это условие называют физическим условием прочности. Однако для надёжной работы конструкция должна обладать определённым запасом прочности (надёжности). Ведь при эксплуатации конструкции возможно непредвиденное и неучтённое расчётами возрастание нагрузки, механические характеристики материала рассчитываемой детали при определённых видах получения заготовки могут оказаться ниже справочных значений, полученных при испытании образца из того же материала. К

тому же сама величина σ_{lim} , определяемая опытным путём, уже содержит некоторую неточность. Таким образом, расчётное напряжение должно быть несколько меньше предельного его значения, то есть деталь должна обладать определённым коэффициентом запаса прочности (*надёжности*).

С учётом сказанного условие прочности (*техническое*) будет иметь вид:

$$S = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma} \geq [S]$$

где S – расчётный коэффициент запаса прочности;

$[S]$ – требуемый (*нормативный, минимальный*) коэффициент запаса прочности. В полном объёме вопрос о выборе требуемого коэффициента запаса прочности рассматривается в деталях машин. Он выбирается по справочникам в зависимости от условий эксплуатации и многих других факторов.

Перечислим лишь основные:

- точность сведений о величине и характере нагрузки и точность используемых методов расчёта. Чем меньше мы уверены в достоверности сведений о действительной нагрузке и в точности используемых методов расчёта, тем большим следует принимать коэффициент запаса прочности;

- способ получения заготовки, влияющий на степень однородности и стабильность механических характеристик материала;

- последствия, к которым может привести выход детали из строя. Если рассчитывается неотвечественная деталь, которую в случае поломки легко заменить, то требуемый коэффициент запаса можно взять минимальным ($[S]=1,2\dots1,5$). А если возможная поломка детали может привести к гибели людей, например, разрыв каната лифта, требуемый коэффициент запаса должен быть намного большим: $[S] = 10\dots12$. Перепишем условие прочности в виде:

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{[S]};$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, то есть напряжение, при котором обеспечивается безопасная работа конструкции с требуемым коэффициентом запаса прочности. Условие прочности должно соблюдаться для всех точек рассчитываемого элемента, поэтому *под расчётным напряжением σ следует понимать наибольшее напряжение.*

2.6 Расчёты на прочность и жёсткость

Надеемся, что Вы разобрались с сущностью и формой записи условия прочности, изложенного в предыдущем параграфе. Это условие должно быть составлено для **опасного сечения**. Что такое опасное сечение? Это сечение, напряжения в котором наиболее близки к предельным напряжениям (опасное сечение может и не совпадать с сечением, в котором продольная сила имеет наибольшее значение). Скажем иными словами. Это сечение, для которого коэффициент запаса прочности минимален. Такое определение мы вводим не только для расчётов на растяжение и сжатие, оно будет общим для всех видов деформаций. Правда, при изгибе и кручении нам придётся говорить не только об опасном сечении, но и об опасной точке в этом сечении...

Расчёты на прочность.

Запишем ещё раз условие прочности, расшифровав в нём расчётное напряжение, т.е. $\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$. Вам надо не просто помнить эту форму записи условия прочности, а надо ясно понимать содержание написанного: *расчётное напряжение, равное частному от деления продольной силы N_z на площадь сечения A , не должно превышать допускаемого напряжения $[\sigma]$.*

Традиционно принято решать три вида задач, различающихся формой использования условия прочности:

- проверочный,
- проектный (*подбор сечения*),
- определение допускаемой нагрузки (*грузоподъёмности конструкции*).

Такая классификация видов задач является общей для всех деформаций, а не только для растяжения.

Поясним эти виды задач на примере стержня, работающего на растяжение.

• Проверочный расчёт.

По известным значениям продольных сил и размеров поперечных сечений требуется определить расчётные напряжения на всех участках бруса. Полученное при этом наибольшее расчётное напряжение сравнивают с допускаемым.

• Проектный расчёт (подбор сечения).

По известным значениям продольной силы и допускаемого напряжения требуется определить потребную (минимально допустимую) площадь поперечного сечения бруса. Этот тип задач наиболее распространён.

• Определение грузоподъёмности конструкции.

По известным значениям площади поперечного сечения бруса и допускаемого напряжения требуется определить допускаемое значение продольной силы. Затем, используя связь между продольной силой и нагрузкой, определяют допускаемую нагрузку.

Расчёты на жёсткость

При расчётах на жёсткость работоспособность конструкции определяется величиной допускаемой деформации. Не забывая, что закон Гука справедлив только до предела пропорциональности, мы будем использовать такое условие работоспособности конструкции: $\Delta l = \frac{Nl}{AE} \leq [\Delta l]$.

Это неравенство называют условием жёсткости, а расчёты, проводимые с использованием этого неравенства, - расчётами на жёсткость.

Различают три вида задач на жёсткость, которые аналогичны приведенным выше видам задач на прочность.

2.7. Статически неопределимые системы

Особое внимание уделяйте терминологии, следите за безупречно правильным употреблением встречающихся терминов. Например, растяжение и удлинение отнюдь не синонимы, так же, как сжатие и укорочение. Так, в статически неопределимой шарнирно-стержневой системе, изображённой на рис.2.12, при нагревании стержня 1 он удлиняется, но при этом испытывает сжатие, а при охлаждении он укорачивается, но при этом испытывает растяжение...

Статически неопределимыми называются системы, внутренние усилия в которых нельзя определить с помощью одного метода сечений, так как они имеют лишние связи.

Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для такой системы, называют степенью статической неопределимости.

Пусть брус (рис. 2.10) жёстко закреплён обоими концами и нагружен осевой силой F . В заделках возникают реакции R_A и R_B . Таким образом, на брус действует система сил, направленных по одной прямой линии, статика для линейной системы сил даёт одно уравнение равновесия, а неизвестных реакций две. Задача один раз статически неопределима.

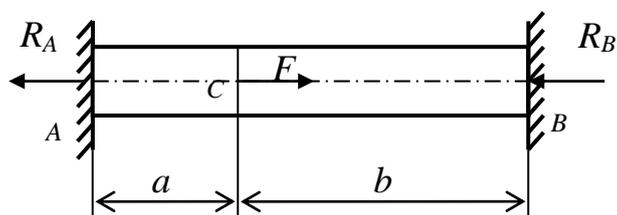


Рис. 2.10. Расчётная схема статически неопределимого бруса.

Основным преимуществом статически неопределимых систем является их большая надёжность, а основным недостатком – возможность появления в них **температурных напряжений**, возникающих при изменении температуры, и **монтажных напряжений**, возникающих при неточном изготовлении отдельных элементов конструкции. Поясним сказанное примерами.

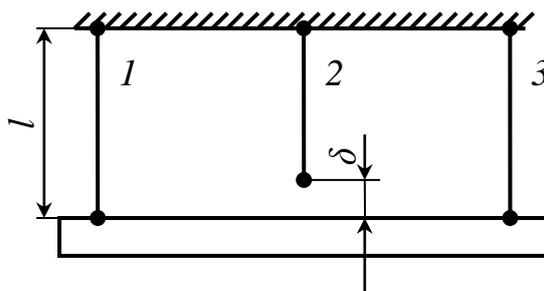


Рис. 2.11. К появлению монтажных напряжений при неточном изготовлении элементов статически неопределимой системы

В изображенной на рис. 2.11 статически неопределимой конструкции с тремя параллельными стержнями все стержни должны иметь одинаковую длину l . Если

один из стержней (пусть стержень 2) будет изготовлен короче на δ , то после монтажа в стержнях возникнут монтажные напряжения. Стержень 2 будет растянут, а стержни 1 и 3 – сжаты.

В статически неопределимой шарнирно-стержневой системе, изображённой на рис. 2.12, при нагревании стержня 1 он стремится удлиняться, но свободному температурному удлинению его препятствуют другие стержни и нагретый стержень 1 удлиняется меньше, чем мог бы удлиняться в свободном состоянии. В результате все стержни оказываются сжатыми.

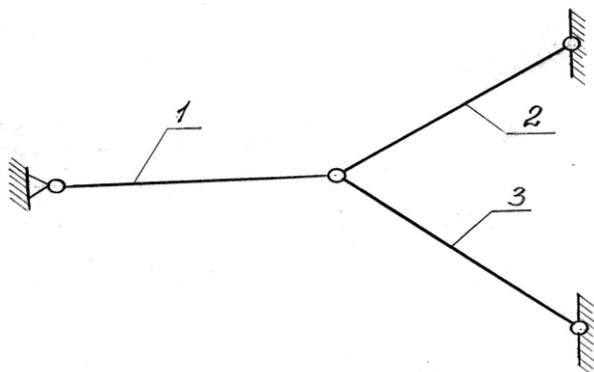


Рис. 2.12. Статически неопределимая шарнирно-стержневая система.

Для решения статически неопределимых задач необходимо составлять дополнительные уравнения – так называемые уравнения перемещений, учитывающие характер деформации системы. Всегда можно составить столько дополнительных уравнений, сколько необходимо их для решения задачи.

Дать исчерпывающие указания по составлению уравнений перемещений, которые были бы пригодны для всего многообразия задач, невозможно. Рассмотрим самые типичные конкретные примеры составления дополнительных уравнений.

Пример 1. Абсолютно жёсткий брус AB , имеющий шарнирно-неподвижную опору A , нагружен силой F и удерживается в горизонтальном положении двумя стержнями длиной l_1 и l_2 , площадью сечения A_1 и A_2 , и модулями упругости материала E_1 и E_2 соответственно (рис. 2.13). Определить усилия в стержнях N_1 и N_2 и реакцию шарнира A

Эта задача решается методом сравнения перемещений (деформаций). Для составления дополнительных уравнений систему изображают в деформированном состоянии и устанавливают связи между перемещениями (деформациями) отдельных точек (элементов)...

Решение

Запишем уравнения равновесия действующей на брус плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad R_{Ay} + N_1 + N_2 - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0 \quad N_1 a + N_2 b - Fc = 0 \quad (3)$$

Уравнений статики три, неизвестных – четыре. Система один раз статически неопределима, для ее решения нам необходимо составить одно дополнительное уравнение. Изобразим систему в деформированном состоянии и сравним удлинения стержней. Брус AB – абсолютно жёсткий, поэтому он, сохраняя прямолинейность, повернётся вокруг шарнира A и займёт положение AB_1 . Шарниры C и D при этом перемещаются вертикально вниз в положение C_1 и D_1 соответственно (горизонтальным перемещением точек C и D пренебрегаем). Стержень 1 удлинится на $\Delta l_1 = CC_1$, стержень 2 удлинится на $\Delta l_2 = DD_1$.

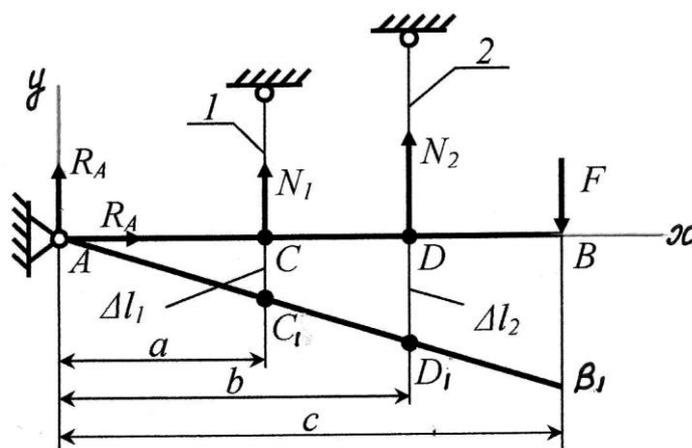


Рис. 2.13. Статически неопределимая система

Из подобия треугольников ACC_1 и ADD_1 находим $\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{b}$.

По закону Гука $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E_2}$, тогда $N_1 = \frac{a l_2}{b l_1} \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} N_2$ (4)

Решаем уравнение (4) совместно с уравнениями статики, находим реакцию шарнира A и усилия в стержнях.

Пример 2. Прямой однородный брус AB жёстко закреплён обоими концами (рис.2.14). Модуль упругости материала E , площадь сечения бруса A , температурный коэффициент линейного расширения α , длина бруса l . Определить температурные напряжения в брус при нагревании его на Δt °C.

Эта задача решается **методом сил**. Лишние связи отбрасывают, получают статически определимый брус, (последующие действия показаны в решении задачи)...

Решение

При нагревании бруса его длина стремится увеличиться, но опоры в данной конструкции препятствуют этому. В опорах возникают реакции, вызывающие сжатие бруса. Эти реакции направлены вдоль оси бруса, поэтому для бруса можно составить лишь одно уравнение статики: $\sum F_{kz} = 0$; откуда $R_A = R_B$.

Задача один раз статически неопределима. Мысленно отбросим одну лишнюю

связь – опору В. Получим статически определимый брус, который называют основным. Основной брус должен быть нагружен и должен деформироваться точно так же, как и заданный статически неопределимый брус. Воспользуемся принципом независимости действия сил. Сначала нагреем основной брус на $\Delta t^0 \text{C}$. Длина бруса при нагревании увеличится на $\Delta l(t)$, на столько же сечение В переместится вправо. Затем нагрузим брус такой сжимающей силой R_B , которая вернёт сечение В в начальное положение.

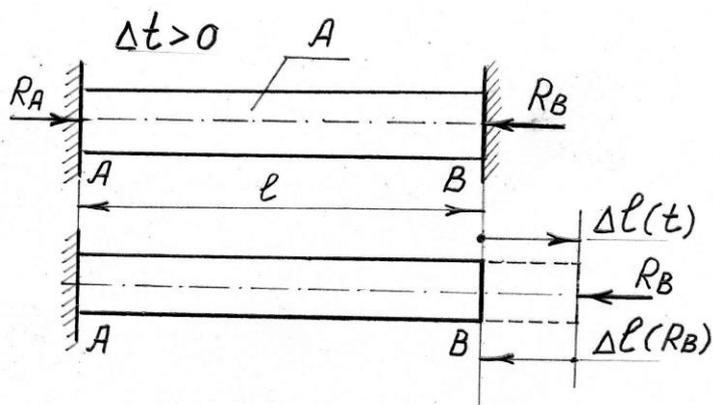


Рис.2.14. К решению статически неопределимой задачи методом сил.

Составим дополнительное уравнение, выражающее тот факт, что общая длина бруса не меняется, то есть:

$$\Delta l = \Delta l(t) + \Delta l(R) = \alpha l \Delta t - \frac{R_B l}{AE} = 0$$

Отсюда. $R_B = \alpha \Delta t A E$ Далее решаем статически определимый брус.

Продольная сила в любом поперечном сечении будет равна $N_z = -R_B$.

$$\text{Температурные напряжения: } \sigma_t = \frac{N_z}{A} = -\alpha E \Delta t .$$

В заключение отметим, что при охлаждении такого бруса он, не имея возможности свободно укорачиваться, будет испытывать растяжение.

Проверочные вопросы.

Какой вид деформации называется центральным растяжением (сжатием)?

Как определяется значение продольной силы в поперечном сечении бруса?

Как используется гипотеза плоских сечений для выяснения закона распределения нормальных напряжений по поперечному сечению бруса?

Как распределены нормальные напряжения по поперечному сечению бруса при центральном растяжении (сжатии) и чему они равны?

Что называется абсолютной и относительной продольной деформацией бруса? Напишите формулы для определения продольной относительной и абсолютной деформаций?

Что называется жёсткостью поперечного сечения бруса при растяжении (сжатии)?

Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении и сжатии? Что называется коэффициентом Пуассона и какие он имеет значения?

В каких координатах строится диаграмма растяжения?

Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением)?

Что называется условным пределом текучести? Для каких материалов определяется эта механическая характеристика?

Что называется остаточным относительным удлинением образца и остаточным относительным сужением шейки образца? Какое свойство материала они характеризуют?

Что называется допускаемым напряжением? Как оно выбирается для пластичных и хрупких материалов?

Что называется коэффициентом запаса прочности и от каких основных факторов он зависит?

Какие три вида задач встречаются при расчёте прочности и жёсткости конструкции? Напишите условия прочности и жёсткости для каждого из этих видов?

Какие системы называются статически неопределимыми? Что называется степенью статической неопределимости системы?

Какие напряжения называют монтажными, какие – температурными?

Лекция 3. Основы теории напряжённого состояния

Литература: [1] Глава 2.

3.1 Напряжения в наклонных сечениях при центральном растяжении

Теперь мы знаем, что при растяжении (сжатии) в поперечных сечениях бруса касательные напряжения отсутствуют, знаем, что в этих сечениях возникают только нормальные напряжения. Но у нас нет уверенности, что эти напряжения самые большие, что именно по их значению надо оценивать прочность бруса. Ведь мы не знаем, каковы напряжения в других (наклонных) сечениях. А опыты показывают, что разрушение растянутых брусьев происходит не только по поперечным, но и по наклонным сечениям. Чтобы правильно оценить прочность бруса, необходимо уметь определять напряжения по любому сечению. К решению этой задачи мы и приступаем...

Проведём через какую либо точку растянутого силой F бруса (рис. 3.1) наклонное сечение под углом α к поперечному сечению, мысленно отбросим верхнюю часть бруса, заменим ее внутренней силой N_z , которая из условия равновесия нижней части будет равна F . Очевидно, что полное напряжения по этому

сечению распределяются равномерно, поэтому $p_\alpha = \frac{N_z}{A_\alpha} = \frac{N_z}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$,

где A_α - площадь наклонного сечения, $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$. Найдём нормальную

σ_α и касательную τ_α составляющие полного напряжения p_α :

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = 0.5 \sigma \sin 2\alpha$$

Как видим, в одной и той же точке растянутого стержня напряжение зависит от ориентации проведенного через эту точку сечения.

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\alpha \max}$ возникают в поперечных сечениях бруса (при $\cos \alpha = 1$, то есть при угле $\alpha = 0$). Минимальные нормальные напряжения $\sigma_{\alpha \min}$ возникают в продольных сечениях бруса и равны 0, как

мы и предполагали ранее (при $\cos \alpha = 0$, то есть при угле $\alpha = 90^\circ$).

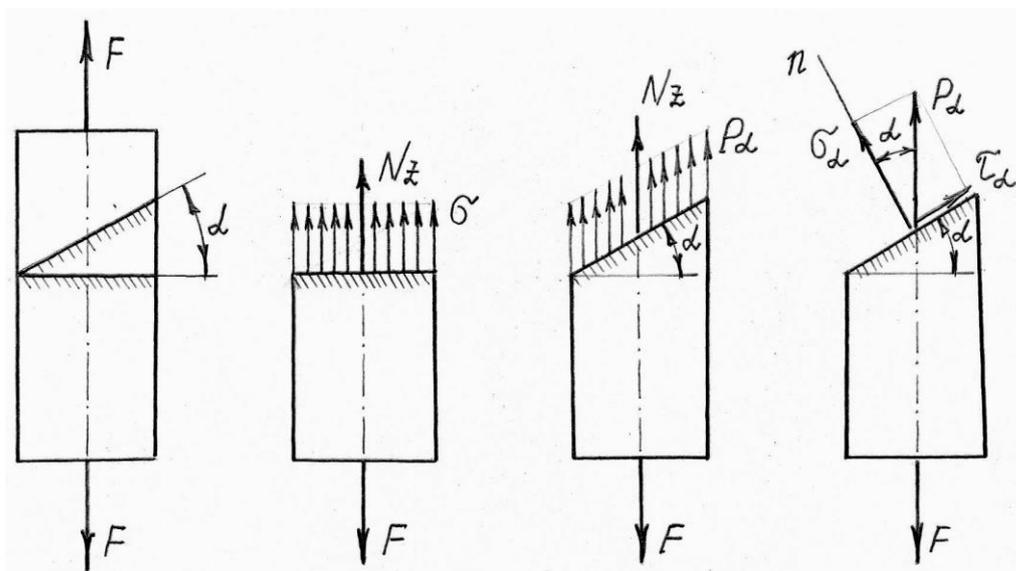


Рис.3.1 Внутренние усилия и напряжения в наклонных сечениях при растяжении.

Заметим, что касательные напряжения и в поперечных сечениях (при $\alpha = 0$), и в продольных сечениях (при $\alpha = 90^\circ$) равны нулю.

Следовательно, растяжение бруса можно представить как растяжение пучка не связанных друг с другом волокон, не взаимодействующих между собой по боковым поверхностям.

Найдем величину наибольших касательных напряжений.

$$\tau_{\max} = 0,5\sigma \text{ при } \sin 2\alpha = 1, \text{ то есть при } \alpha = 45^\circ.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают на площадках при $\alpha = 45^\circ$.

Нормальные напряжения в площадках, проведенных под углом 45° к оси бруса, равны $\sigma_\alpha = 0,5\sigma$.

Итак, запомним, что при растяжении (сжатии) максимальные нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях бруса, минимальные, равные нулю, – в продольных сечениях. При этом и в продольных, и в поперечных сечениях касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения возникают на наклонных площадках при $\alpha = 45^\circ$.

3.2 Напряженное состояние в точке

В предыдущем параграфе мы установили, что на различных площадках, проходящих через данную точку тела, возникают различные напряжения. При изменении ориентации площадки нормальные и касательные напряжения в точке меняются. А ведь через любую точку можно провести бесчисленное множество различно сориентированных площадок...

Совокупность нормальных и касательных напряжений для бесчисленного множества площадок, проходящих через рассматриваемую точку, характеризует напряжённое состояние (Н.С.) в этой точке.

Естественно, что нас в первую очередь интересуют наибольшие значения σ и τ для данной точки тела, а для их определения надо знать напряжения на всех площадках, проведенных через эту точку.

Выделим в окрестности точки бесконечно малый элемент в форме кубика так, чтобы его грани были параллельны координатным плоскостям (рис. 3.2).

Разложим полное напряжение на каждой площадке на три составляющих по координатным осям.

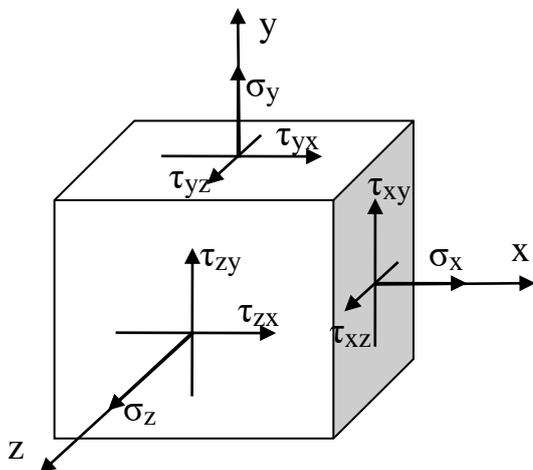


Рис. 3.2. Компоненты напряжённого состояния в точке

На трех взаимно перпендикулярных площадках мы получили 9 составляющих (компонентов) напряженного состояния (на невидимых гранях возникают такие же, но противоположно направленные напряжения). Первый индекс при составляющих указывает, какой оси перпендикулярна рассматриваемая площадка. Второй индекс указывает ось, параллельно которой направлено напряжение.

Равнодействующие внутренних сил приложены к центру тяжести граней, при этом рассматриваемый кубик находится в равновесии.

Составим уравнение моментов этих сил относительно оси X.

$$\sum m_x = 0 \quad 2\tau_{yz}d_x d_z 0.5d_y - 2\tau_{zy}d_x d_y 0.5d_z = 0 \quad \text{Отсюда} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Аналогично можно доказать, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

На двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны по модулю и направлены либо к ребру, либо от ребра.

Этот вывод выражает закон парности касательных напряжений.

Значит, независимых компонентов не девять, а всего шесть.

При изменении ориентации кубика компоненты Н.С. меняются. Из теории упругости известно, что в любой точке есть такое положение кубика, при котором на всех его гранях касательные напряжения равны нулю.

Такие три площадки называют **главными**, а нормальные напряжения на них – **главными напряжениями**, их обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Главные напряжения индексируют так, чтобы выполнялось алгебраическое неравенство $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (напряжения сжатия считают отрицательными). Главные напряжения имеют экстремальные значения, то есть в данной точке σ_1 - самое большое, а σ_3 - самое маленькое.

Различают три вида напряжённого состояния:

- **линейное** (одноосное) – когда два главных напряжения равны нулю,
- **плоское** (двухосное) – когда одно из главных напряжений равно нулю,
- **объемное** (трехосное) – когда все главные напряжения не равны нулю.

Примеры индексации главных напряжений показаны на рис. 3.3.

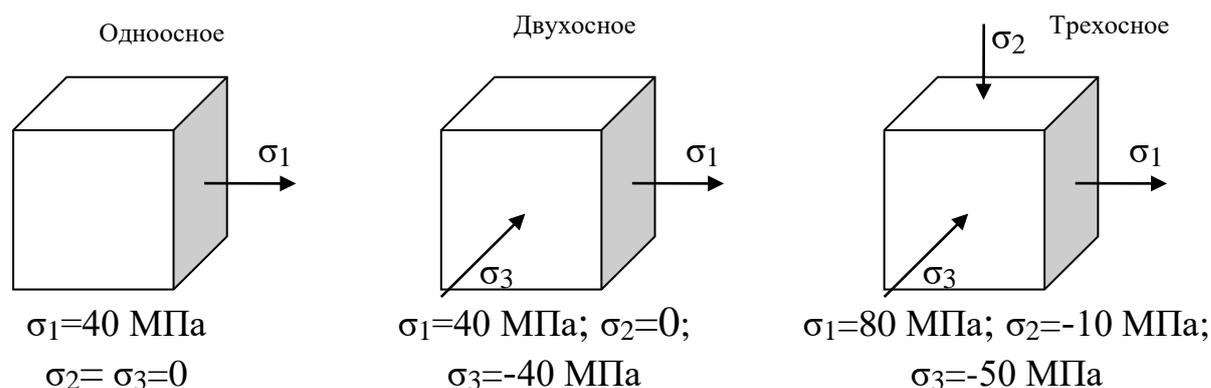


Рис.3.3. Примеры индексации главных напряжений.

3.3 Исследование двухосного напряжённого состояния

При двухосном (плоском) Н.С. на одной из главных площадок нормальное напряжение равно нулю. Эту площадку мы будем совмещать с плоскостью чертежа, а рассматривать будем только площадки, перпендикулярные плоскости чертежа. При этом полученные выводы будут справедливы и для объемного Н.С., так как напряжения, возникающие на площадках, не зависят от главного напряжения, параллельного этим площадкам.

При инженерных расчетах приходится решать две задачи: прямую и обратную.

Прямая задача.

В этой задаче исследуется напряжённое состояние в точке при известных главных напряжениях...

Пусть известны главные напряжения σ_1 и σ_2 , ($\sigma_3=0$). Совместим главную площадку, на которой нормальное напряжение равно 0, с плоскостью чертежа (рис. 3.4). Определим напряжения на наклонной площадке при известном угле α . Внешнюю нормаль к этой площадке обозначим через n_α . Угол α откладываем от большего главного напряжения, то есть от направления σ_1 (положительный угол α откладываем против хода, отрицательный – по ходу часовой стрелки).

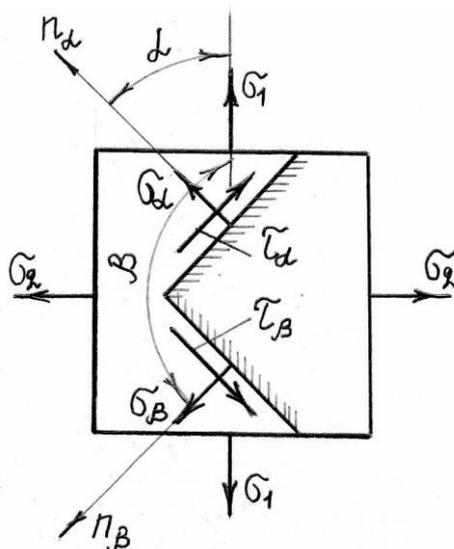


Рис. 3.4. Прямая задача при анализе напряжённого состояния

Примем следующие правила знаков для нормальных и касательных напряжений.

Растягивающее нормальное напряжение σ будем считать положительным, сжимающее – отрицательным.

Касательное напряжение τ будем считать положительным, если изображающий его вектор стремится вращать выделенный элемент по часовой стрелке, и наоборот.

При решении задачи используем принцип независимости действия сил: двухосное Н.С. представим как сумму двух одноосных Н.С.

Тогда нормальные и касательные напряжения в произвольной наклонной площадке, положение которой определяется нормалью $\underline{n_\alpha}$, будут равны

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad \tau_\alpha = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

По аналогии на площадке, перпендикулярной рассмотренной, то есть при $\beta = \alpha + 90^\circ$, $\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$; $\tau_\beta = -0.5(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$.

Итак, $\tau_\alpha = -\tau_\beta$. Эта зависимость выражает **закон парности касательных напряжений**.

Определим экстремальные значения касательных напряжений. Как видим, $\tau_{\alpha \max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2)$ при $\sin 2\alpha = 1$, то есть $\alpha = 45^\circ$. Площадки, на которых $\tau_\alpha = \tau_{\alpha \max}$, наклонены к главным площадкам под углами $\alpha = 45^\circ$.

Если не равны нулю σ_1 и σ_3 , то $\tau_{\alpha \max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Если не равны нулю σ_2 и σ_3 , то $\tau_{\alpha \max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Так как $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то максимальное касательное напряжение равно по модулю $\tau_{\alpha \max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3)$ и возникает оно на площадках, параллельных глав-

ному напряжению σ_2 и наклоненных к двум другим главным площадкам под углом 45° .

Легко убедиться, что $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = const$.

Нормальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках различны, но их сумма постоянна и равна сумме главных напряжений.

Обратная задача.

В этой задаче по известным напряжениям в двух взаимно перпендикулярных площадках требуется определить главные напряжения и положение главных площадок...

Дано: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\alpha > \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$. Определить: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha_0$ (рис.3.5).

Для плоского напряжённого состояния известны напряжения в двух «наклонных» взаимно перпендикулярных площадках α и β (индексы α и β ставим так, чтобы соблюдалось условие $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$), а также τ_α и τ_β (рис. 3.5).

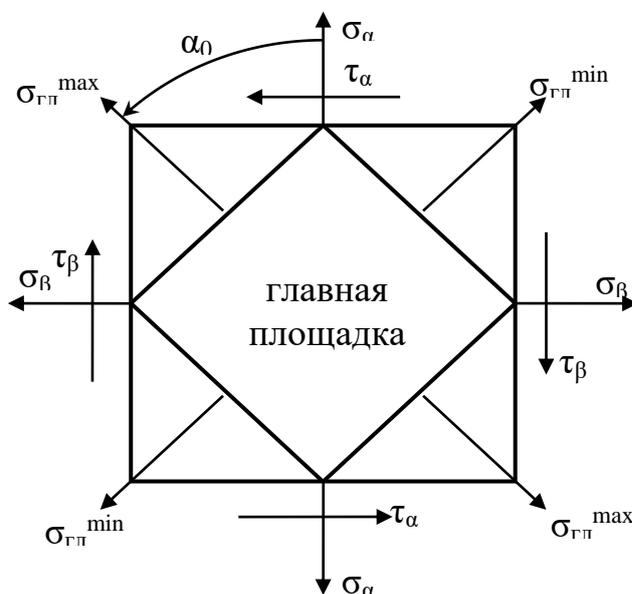


Рис. 3.5. Обратная задача при анализе напряжённого состояния

Требуется определить главные напряжения и положение главных площадок (угол α_0). Эта задача при инженерных расчетах встречается особенно часто, так как с помощью главных напряжений оценивается прочность при сложном напряженном состоянии.

Положение одной главной площадки известно (на рис. 3.5 она совмещена с плоскостью чертежа). Известно, что главные площадки взаимно перпендикулярны. Поэтому положение двух других главных площадок определяем поворотом кубика вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа, на угол α_0 .

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}$$

Положительный угол α_0 надо откладывать от направления σ_α против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки. Этот угол определяет положение нормали к той главной площадке, на которой будет большее из двух определяемых главных напряжений.

Вторая главная площадка будет перпендикулярна ей. Величину главных напряжений определяют по формуле:

$$\sigma_{\text{гл}}^{\max/\min} = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0,5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2}.$$

Индексы главным напряжениям присваивают после определения их числовых значений (*третье главное напряжение известно, оно равно нулю*).

3.4 Объемное напряжённое состояние. Обобщенный закон Гука

Рассмотрим трехосное растяжение: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ (рис. 3.6).

Выделим в окрестности точки элементарный кубик, грани которого совпадают с главными площадками. Определим относительные деформации ребер, параллельных главным напряжениям. По принципу независимости действия сил представим объемное напряжённое состояние как сумму трех одноосных напряжённых состояний.

Получим: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3)$.

$$\varepsilon_1(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1(\sigma_2) = -\nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1(\sigma_3) = -\nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

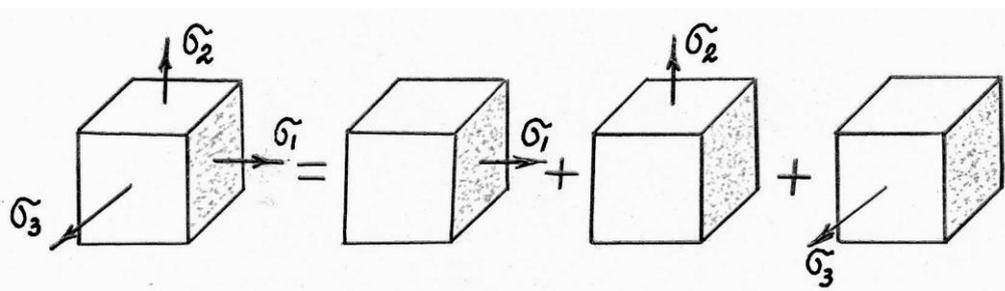


Рис. 3.6. Разложение объёмного Н.С. на три одноосных Н.С.

Суммируя эти величины, получим: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

По аналогии: $\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Полученные выражения, устанавливающие связь между деформациями и

напряжениями при трехосном напряженном состоянии, носят название *обобщенного закона Гука*.

Объёмная деформация

Пусть длина ребер элементарного кубика до деформации была равна $dl_1=dl_2=dl_3=dl$ (рис. 3.6). После приложения внешних сил вдоль ребер кубика возникают главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Эти напряжения вызывают относительное удлинение ребер, равное $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Объем кубика: до деформации $V_0 = dl^3$, при деформации: $V = dl(1 + \varepsilon_1) \cdot dl(1 + \varepsilon_2) \cdot dl(1 + \varepsilon_3)$. Так как величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ малы по сравнению с длиной ребер dl , их произведения пренебрегаем. Тогда $V = dl^3(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$. Относительное изменение объема $\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Подставив сюда значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из обобщенно-

го закона Гука, получим $\varepsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Эти формулы выражают *объемный закон Гука*.

Потенциальная энергия деформации

При одноосном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия деформации равна $u = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$. По принципу независимости действия сил полную удельную потенциальную энергию деформации при объемном напряженном состоянии можно определить так: $u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3}{2}$.

Заменив относительные деформации их значениями из обобщенного закона Гука, получим: $u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$.

При деформации изменяется и объем кубика, и его форма, поэтому полную удельную потенциальную энергию деформации условно делят на две составляющие: удельную потенциальную энергию, которая расходуется на изменение объема u_V , и удельную потенциальную энергию, которая расходуется на изменение формы u_ϕ . Эти составляющие определяются по следующим формулам (приводим без выводов):

$$u_V = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$u_\phi = u - u_V = \frac{1 + \nu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1].$$

Эти формулы используются в гипотезах прочности.

Проверочные вопросы.

Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях при растяжении (сжатии)?

В каких сечениях растянутого бруса возникают наибольшие нормальные и в каких - наибольшие касательные напряжения?

Что называют напряжённым состоянием в точке?

Какие площадки, и какие напряжения называют главными?

Какие виды напряжённого состояния встречаются?

Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?

Сущность закона парности касательных напряжений.

Сущность прямой и обратной задачи плоского напряжённого состояния.

Что называется обобщённым законом Гука?

Лекция 4. Геометрические характеристики плоских сечений

Литература: [1] §§27...33.

Мы убедились, что при равномерном распределении напряжений по поперечному сечению (при растяжении, сжатии, сдвиге) геометрической характеристикой прочности и жёсткости бруса является площадь поперечного сечения. В следующей лекции Вы узнаете, что при кручении напряжения по поперечному сечению распределяются неравномерно, прочность и жесткость круглого и кольцевого бруса зависят уже от более сложной геометрической характеристики – от полярного момента инерции. При расчётах на изгиб будут использоваться новые геометрические характеристики, характерные только для сопротивления материалов. Строго говоря, геометрические характеристики представляют собой часть интегральных выражений расчётных формул сопротивления материалов, которая зависит только от размеров и формы сечения. Для упрощения использования расчётных формул удобно эти выражения для различных форм сечения подсчитать заранее. Задача это чисто математическая, но математики этими вопросами заниматься, как видите, не хотят. Поэтому не удивляйтесь, если преподаватель предложит Вам самостоятельно проработать и законспектировать эту тему. Этот материал легко доступен для самостоятельного изучения...

4.1 Статические моменты плоских сечений

Статические моменты используются при определении касательных напряжений при поперечном изгибе, а также при определении положения центра тяжести сечений...

Статическим моментом плоского сечения относительно оси (рис.4.1) называется взятая по всей площади сечения интегральная сумма произведений элементарных площадок на их расстояние до этой оси:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad \text{Размерность статического момента} - L^3.$$

В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Известно, что координаты центра тяжести фигуры x_c, y_c определяются по формулам: $x_c = \frac{S_y}{A}, y_c = \frac{S_x}{A}$. Отсюда $S_x = Ay_c, S_y = Ax_c$.

Из этих формул вытекает весьма важное следствие: **статический момент сечения относительно любой центральной оси (оси, проходящей через центр тяжести сечения) равен нулю.**

Для симметричных фигур определение положения центра тяжести значительно упрощается. При наличии двух осей симметрии центром тяжести является точка пересечения этих осей (прямоугольник, двутавр, круг). Если сечение имеет одну ось симметрии (швеллер), то центр тяжести лежит на этой оси. Для определения его положения достаточно найти только одну координату – вдоль оси симметрии.

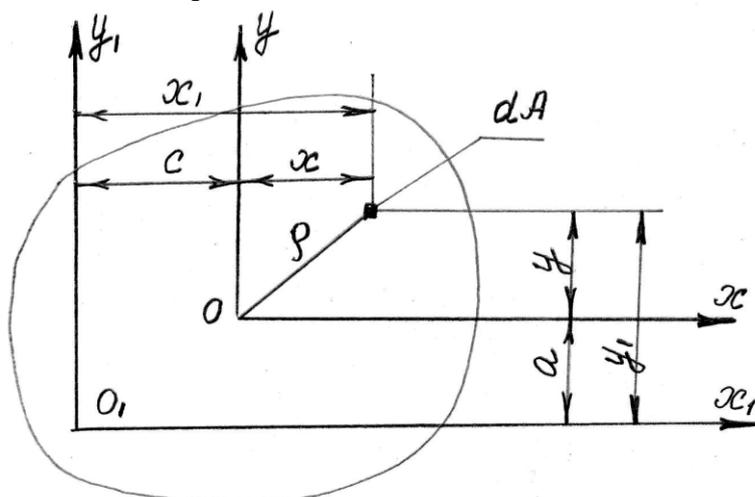


Рис. 4.1. Схема к определению геометрических характеристик сечений

Если сложное сечение может быть разбито на простые составные части, площади и координаты центров тяжести которых известны, то положение центра тяжести всего сечения определяют по формулам

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} + \dots + A_n y_{cn}}{A}, \quad x_c = \frac{A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} + \dots + A_n x_{cn}}{A}.$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – площади отдельных частей сечения;

x_{ci}, y_{ci} – координаты их центров тяжести.

Каждое из слагаемых, стоящих в числителе, представляет собой статический момент данной части сечения относительно соответствующей оси.

4.2 Моменты инерции плоских сечений

Моменты инерции сечений используются при определении напряжений и перемещений при кручении и при изгибе...

Осевые моменты инерции: $J_x = \int_A y^2 dA$; $J_y = \int_A x^2 dA$

Осевой момент инерции плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в той же плоскости, представляет собой распространённую на всю площадь сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси.

Полярный момент инерции: $J_\rho = \int_A \rho^2 dA$

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно некоторого полюса, лежащего в той же плоскости, называется распространённая на всю площадь сумма произведений

элементарных площадок на квадраты их расстояний до этого полюса.

Учитывая, что $\rho^2 = x^2 + y^2$, получим:

$$J_{\rho} = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y.$$

Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов относительно двух, взаимно перпендикулярных осей, проходящих через этот полюс.

Центробежный момент инерции:
$$J_{xy} = \int_A xy dA.$$

Центробежный момент инерции плоской фигуры относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в той же плоскости, представляет собой распространённую на всю площадь сумму произведений элементарных площадок на расстояния до этих осей.

Заметим, что J_x , J_y , J_{ρ} всегда больше нуля, а J_{xy} в зависимости от расположения осей может быть положительным, отрицательным или, в частных случаях, равен нулю.

Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть: x , y – центральные оси. Проведем оси x_1 и y_1 параллельно центральным осям соответственно на расстоянии a и c от них. Определим J_{x_1} , J_{y_1} ..

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

По определению: $\int_A y^2 dA = J_x$, $\int_A y dA = S_x$, тогда $J_{x_1} = J_x + 2aS_x + Aa^2$.

Так как ось x – центральная ось, то $S_x = 0$. Тогда $J_{x_1} = J_x + a^2 A$.

Аналогично:
$$J_{y_1} = J_y + c^2 A.$$

Осевой момент инерции плоской фигуры относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен осевому моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями.

Из всех моментов инерции относительно семейства параллельных осей минимальными являются моменты инерции относительно центральных осей.

Докажите самостоятельно справедливость аналогичной зависимости для центробежных моментов инерции $J_{x_1 y_1} = J_{xy} + acA$

При вычислении моментов инерции сложных фигур руководствуются следующим правилом:

момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных частей:
$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots$$

Это правило вытекает из известного свойства определенного интеграла:

интеграл суммы нескольких слагаемых равен сумме интегралов этих слагаемых.

4.3 Моменты инерции некоторых простейших сечений

Вычислим моменты инерции прямоугольника, круга и кольца относительно центральных осей x и y .

Пример 1. Найти момент инерции прямоугольника с основанием b и высотой h относительно оси x_1 , проходящей через основание, и относительно центральной оси x (рис.5.2).

Момент инерции относительно оси x_1 равен
$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA.$$

Разобьем сечение на элементарные полоски (прямоугольники) шириной b и высотой dy , тогда $dA = bdy$. Подставляя dA в формулу и интегрируя в пределах

от 0 до h , получим:
$$J_{x_1} = \int_0^h y_1^2 b dy = \frac{by_1^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3},$$

Итак
$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad \text{аналогично:} \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}.$$

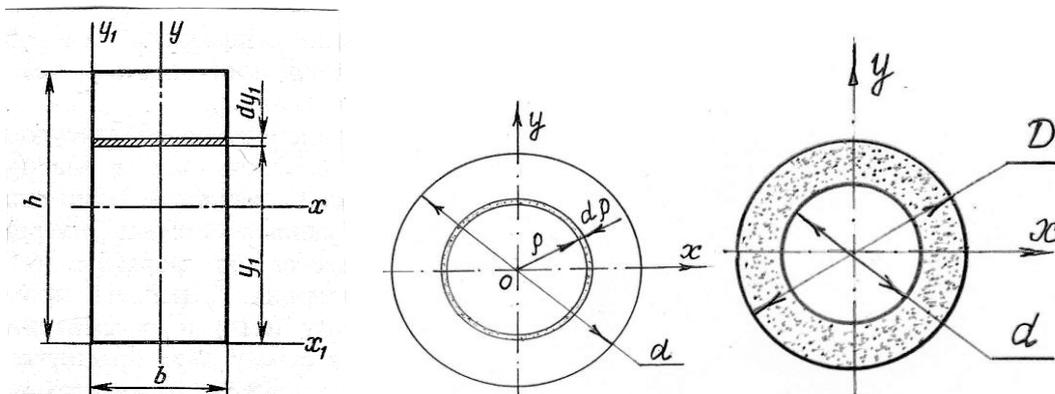


Рис. 4.2. Простейшие сечения брусьев

Определим моменты инерции относительно центральных осей x и y , используя зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

$$J_{x_1} = J_x + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A; \quad \text{откуда} \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = J_y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 A; \quad \text{откуда} \quad J_y = \frac{hb^3}{12}$$

Пример 2. Определить полярный момент инерции J_ρ круга диаметром d относительно центра O и осевые моменты инерции J_x и J_y относительно центральных осей x и y (рис 4.2).

Вычислим сначала полярный момент инерции
$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

За dA принимаем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$, то есть $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда

$$J_{\rho} = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho, \text{ откуда } J_{\rho} = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32} = 0.1d^4.$$

$$\text{В силу симметрии } J_x = J_y = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64} = 0.05d^4.$$

Пример 3. Определить полярный момент инерции J_{ρ} кольца относительно центра O и осевые моменты инерции относительно центральных осей x и y (рис 4.2).

Осевые моменты инерции кольца вычислим как разность моментов инерции внешнего и внутреннего кругов.

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - C^4), \text{ где } C = \frac{d}{D}$$

$$\text{Полярный момент инерции } J_{\rho} = J_x + J_y = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4).$$

Геометрические характеристики прокатных профилей приведены в таблицах.

4.4 Главные оси и главные моменты инерции

Поместим в точке O изображенной на рисунке 4.3 фигуры начало координат, проведем оси x и y , а моменты инерции относительно этих осей обозначим J_x и J_y . Посмотрим, изменятся ли осевые моменты инерции при повороте осей на некоторый угол α . Новые оси обозначим через x_1 и y_1 . Расстояние элементарной площадки dA до новых осей координат изменилось, следовательно, изменятся и осевые моменты инерции фигуры. Известно, что сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат. Значит, с одной стороны, имеем $J_{\rho} = J_x + J_y$, с другой $J_{\rho} = J_{x1} + J_{y1}$, откуда $J_x + J_y = J_{x1} + J_{y1}$, то есть:

при повороте осей координат сумма осевых моментов инерции остается неизменной.

Взаимно перпендикулярные оси всегда можно расположить так, что центробежный момент инерции относительно этих осей будет равен нулю.

Такие оси координат называют **главными осями инерции** сечения.

Сформулируем без доказательства важное свойство главных осей инерции: *моменты инерции J_x и J_y относительно главных осей всегда имеют экстремальное значение: один из них максимален, а другой минимален.*

Главные моменты инерции вычисляются по известным моментам инерции относительно произвольных осей X и Y по формуле:

$$J_{\max, \min} = 0.5(J_x + J_y) \pm 0.5\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}$$

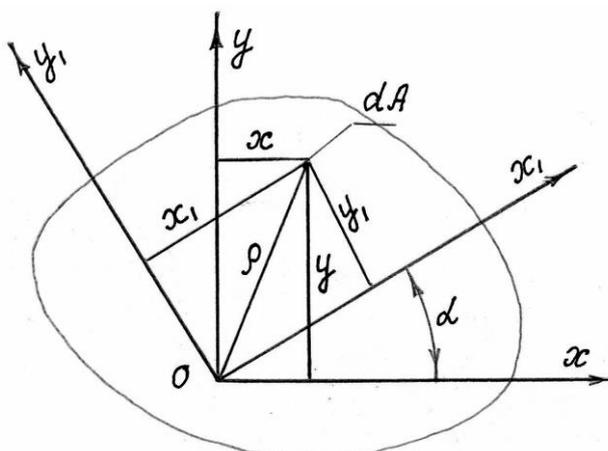


Рис. 4.3. Связь координат точки при повороте осей

Положение главных осей определяют поворотом осей X, Y на угол α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

Угол α_0 откладывают от той оси, относительно которой

осевой момент инерции имеет большее значение, при $\alpha_0 > 0$ – против хода часовой стрелки, при

$\alpha_0 < 0$ – по ходу часовой стрелки. Этот угол определяет положение той главной оси, относительно которой осевой момент инерции максимален. Вторая главная ось перпендикулярна ей.

Через любую точку можно провести главные оси инерции. Однако на практике используют обычно главные оси, проходящие через центр тяжести сечения.

Такие оси называют **главными центральными осями инерции сечения**, а моменты инерции относительно этих осей – **главными центральными моментами инерции**.

Для нахождения положения главных центральных осей сечения, имеющего ось симметрии, достаточно найти положение центра тяжести. Одной из главных центральных осей является ось симметрии, вторая ось ей перпендикулярна.

Проверочные вопросы.

Что называется статическим моментом сечения относительно оси?

Чему равен статический момент относительно центральной оси?

Как определяются координаты центра тяжести сложного сечения?

Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?

Чему равна сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?

Выведите зависимости между осевыми моментами инерции сечения для параллельных осей.

Если в плоскости сечения проведен ряд параллельных осей, относительно какой из них осевой момент инерции имеет наименьшее значение?

Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей, параллельных его сторонам?

Чему равны осевые моменты инерции круга и кольца относительно центральных осей?

Чему равны полярные моменты инерции круга и кольца относительно их центров?

Какие оси называют главными осями инерции?

Какие оси называют главными центральными осями инерции?

В какой последовательности вычисляют моменты инерции сложного сечения, имеющего ось симметрии?

Лекция 5. Сдвиг и кручение

5.1. Чистый сдвиг

Литература: [1] §§23...26.

Фридрих Энгельс заикался на 20 языках не потому, что плохо их знал, а потому, что от рождения был заикой. Чтобы написать «Диалектику природы», Энгельс прочитал 90 книг, процитировал 260 авторов. Писал он книгу 13 лет...

Чистым сдвигом называют такое плоское напряжённое состояние, при котором в окрестности данной точки можно выделить элемент таким образом, чтобы на четырёх его гранях были только равные между собой касательные напряжения.

Этот вид нагружения в чистом виде неосуществим, так как наряду с поперечной силой возникает и изгибающий момент, но он невелик и им пренебрегают...

Примером чистого сдвига можно считать разрезание ножницами листа бумаги (металла). В очень узкой области между ножницами создаётся область сдвига. Вырежем в этой области элемент $ABCD$ и рассмотрим его деформацию (рис. 5.1). Будем считать нижнюю грань неподвижной. При деформации элемент перекашивается. Грань BC смещается в положение B_1C_1 (сближением граней пренебрегаем). Мерой угловой деформации при сдвиге служит угол сдвига γ

Между углом сдвига и соответствующим касательным напряжением существует прямая пропорциональность – закон Гука при сдвиге: $\tau = \gamma G$;

где G – упругая постоянная материала, характеризующая его жёсткость при сдвиге и называемая модулем сдвига (модулем упругости второго рода).

Для изотропного материала между тремя упругими постоянными – модулем продольной упругости E , коэффициентом Пуассона μ и модулем сдвига G существует следующая зависимость (приведём её без вывода): $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$.

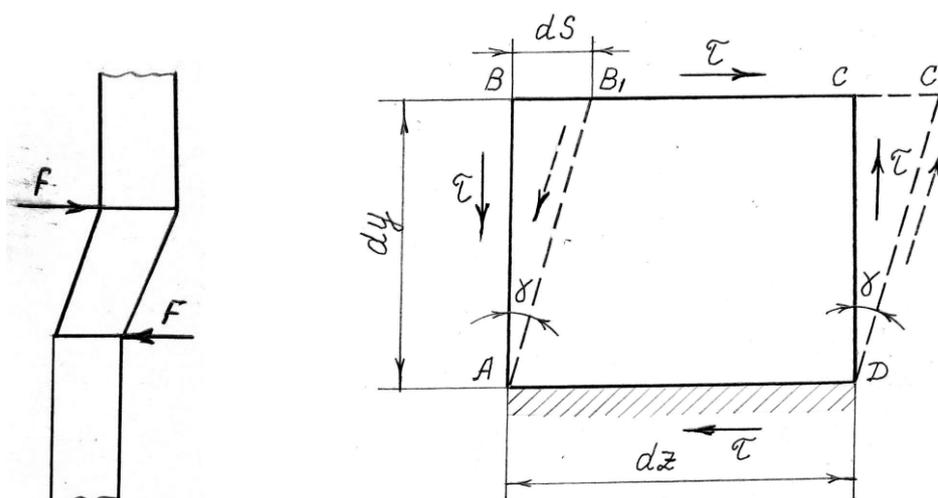


Рис. 4.1. Чистый сдвиг.

Известно, что коэффициент Пуассона μ лежит в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$. Тогда $G = (0,33... 0,5)E$.

Для многих металлов и сплавов можно приближённо принимать $G \approx 0,4 E$, в частности, для стали $G = 0,4E = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Исследуем напряжённое состояние при чистом сдвиге более подробно.

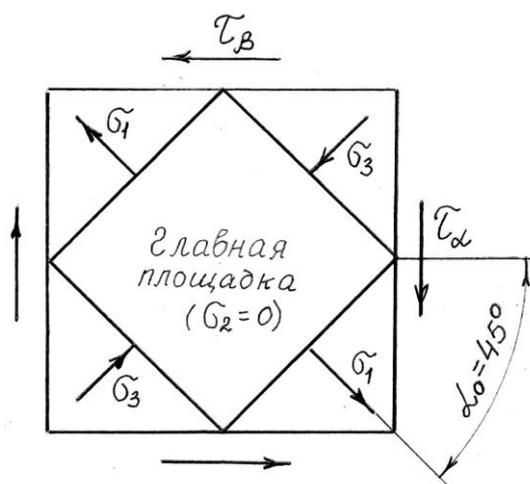


Рис. 5.2. К исследованию чистого сдвига

Выделим бесконечно малый кубик (рис. 5.2), главную площадку совместим с плоскостью чертежа. Пусть на остальных четырех площадках действуют только касательные напряжения, направленные в прилегающих площадках по закону парности либо к ребру, либо от ребра. Обозначим площадку, на которой $\tau > 0$ индексом α , тогда $\tau_\alpha = \tau$, вторую площадку – индексом β , тогда $\tau_\beta = -\tau$; $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$, но будем считать, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$. Определим положение двух дру-

гих главных площадок.
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} = -\infty; \quad \alpha_0 = -45^\circ.$$

Откладываем α_0 от направления σ_α по ходу часовой стрелки, так как $\alpha_0 < 0$

Главные напряжения:
$$\sigma_{\max} = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0,5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} = \pm \tau.$$

Индексируем главные напряжения: $\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau.$

Таким образом, возможно другое определение чистого сдвига, вытекающее из проведенного исследования:

чистый сдвиг – это частный случай плоского напряжённого состояния, при котором не равные нулю главные напряжения равны по значению и противоположны по знаку.

Удельная потенциальная энергия при чистом сдвиге определяется по формуле (приведём без вывода): $u = \tau^2 / 2G.$

Анализируя сдвиг как частный случай плоского напряжённого состояния

($\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau$), легко убедиться, что при сдвиге объём элемента не меняется, изменяется только его форма.

Чистый сдвиг испытывает работающая на кручение тонкостенная труба.

Проверочные вопросы.

Что называют чистым сдвигом?

Что называется абсолютным и относительным сдвигом?

Как формулируется закон Гука при сдвиге?

Как связаны между собой модуль продольной упругости E и модуль сдвига G ?

Покажите, что чистый сдвиг – частный случай плоского напряжённого состояния.

5.2 Кручение

Литература: [1] §§35...38; 42; 44.

Эта тема считается одной из важнейших тем курса. Вы впервые столкнётесь с неравномерностью распределения напряжений по поперечному сечению, впервые будете использовать при расчётах новые геометрические характеристики сечений. Велико и практическое значение этой темы. Кручение в чистом виде, а также в сочетании с изгибом или растяжением будет встречаться Вам при расчётах деталей машин достаточно часто...

5.2.1 Основные понятия. Внутренние силовые факторы

Кручение – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает лишь один ВСФ – крутящий момент M_z .

В технике наиболее часто кручению подвергаются брусья круглого или кольцевого поперечного сечений. Расчёт таких брусьев мы и рассмотрим.

Деформацию кручения вызывают пары сил, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси бруса (рис. 5.3). Моменты этих пар будем называть **скручивающими (для валов – вращающими) моментами** и обозначать буквой T . Крутящий момент определяется с помощью метода сечений.

$$M_z = \sum m_z (F_K).$$

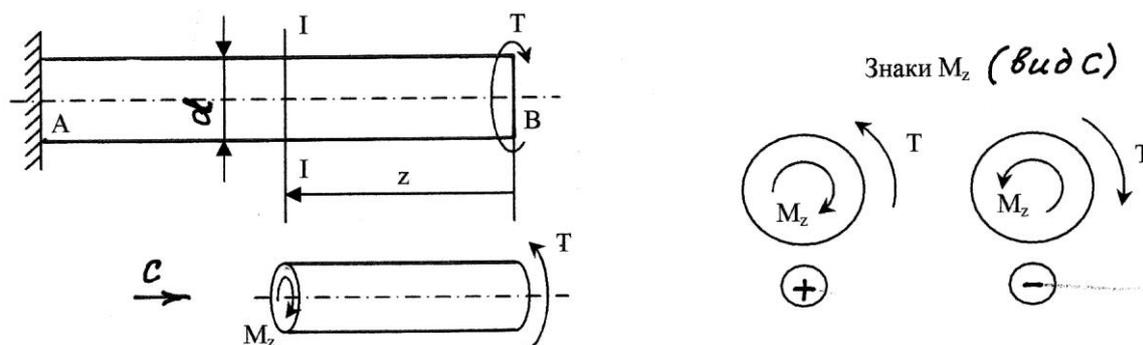


Рис. 5.3. Внутренние силовые факторы при кручении.

Крутящий момент M_z численно равен алгебраической сумме скручивающих (вращающих) моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения и направлен в противоположную сторону их равнодействующему моменту.

График, показывающий изменение крутящего момента по длине бруса, называют **эпюрой крутящих моментов**.

Прочность бруса при кручении зависит только от величины крутящего момента и не зависит от его направления. Тем не менее, для определённости при построении эпюр условимся о следующем правиле знаков. Как и при растяжении, знак крутящего момента будем определять по направлению внешних скручивающих (вращающих) моментов.

Крутящий момент M_z будем считать положительным, если при взгляде от сечения внешний скручивающий момент представляется направленным против хода часовой стрелки.

График изменения величины крутящего момента по длине бруса называется эпюрой крутящего момента.

Построение эпюр крутящих моментов совершенно аналогично построению эпюр продольных сил. Если Вы научились строить эпюры продольных сил, то построение эпюр крутящих моментов не вызовет особых затруднений.

Пример. Построить эпюру крутящих моментов для бруса, изображённого на рис. 5.4.

Решение. Разбиваем брус на четыре участка, начиная от свободного (правого) конца и определяем M_z в произвольных сечениях на каждом участке через внешние скручивающие моменты, расположенные справа от выбранного сечения, что позволяет не определять реактивный момент в заделке.

$$M_{z1} = T; \quad M_{z2} = T + 2T = 3T;$$

$$M_{z3} = T + 2T - 3T = 0; \quad M_{z4} = T + 2T - 3T - T = -4T$$

По полученным значениям строим эпюру. Из эпюры видим, что опасным является четвёртый участок.

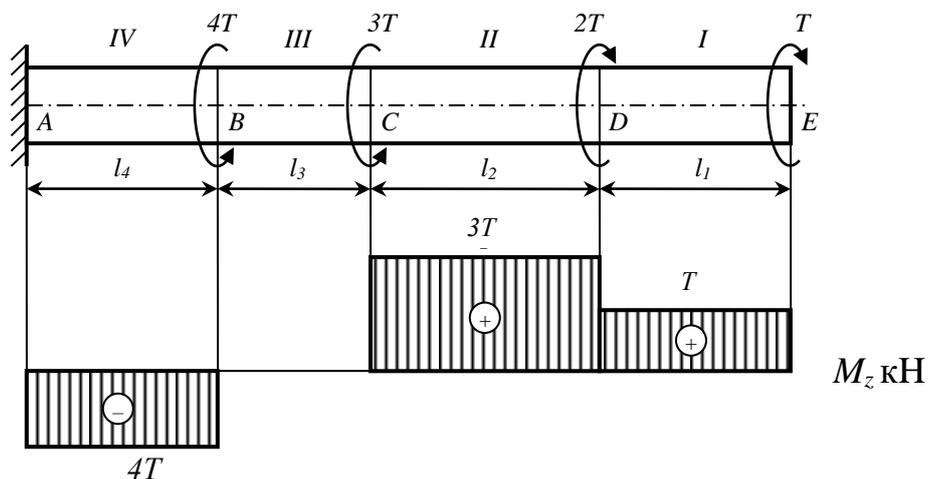


Рис. 5.4. Расчётная схема бруса. Эпюра крутящих моментов

5.2.2 Напряжения и перемещения при кручении

Сразу предупреждаю: будет трудное, длинное доказательство, будьте внимательны...

Представление о характере деформации брусков при кручении даёт такой эксперимент. На поверхность резинового бруса круглого поперечного сечения наносят сетку из поперечных и продольных рисок, нагружают брус скручивающим моментом и наблюдают за его деформацией (рис. 5.5).

Изменение формы элемента сетки позволили сделать следующие допущения, упрощающие расчёты:

- поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации (гипотеза Бернулли);
- поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга как жёсткое целое вокруг оси бруса. Прямолинейные радиусы в поперечных сечениях не искривляются. Круглое сечение остаётся круглым;
- расстояния между поперечными сечениями не меняются. Ось бруса остаётся прямой и не деформируется;
- материал бруса при деформации следует закону Гука.

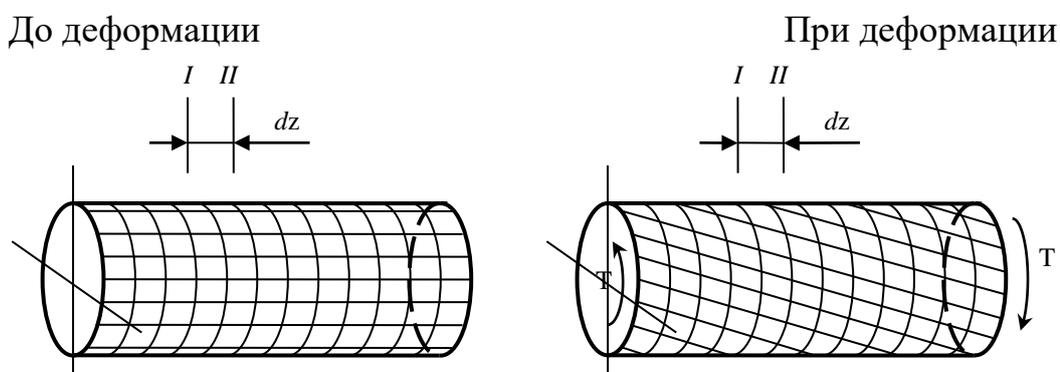


Рис. 5.5. Деформация прямоугольной сетки при кручении.

Из этих допущений следует, что нормальные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют, в них возникают только касательные напряжения (*поперечные сечения являются площадками чистого сдвига*). Выразим крутящий момент в сечении через касательные напряжения. При этом учтем, что касательное напряжение перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку (рис. 4.6).

Это следует из характера деформации. При повороте жёсткого сечения каждая его точка перемещается по дуге окружности, то есть и перемещение точки, и возникающие в этой точке касательные напряжения перпендикулярны радиусу. Элементарная внутренняя сила равна τdA , а ее момент относительно оси Z $dM_z = \tau \rho dA$. Суммируя элементарные моменты, получим: $M_z = \int_A \tau \rho dA$ (1).

Это выражение мы используем для определения касательных напряжений, но для этого надо знать закон их распределения по сечению. Поэтому рассмотрим деформацию кручения более подробно.

Выделим из бруса двумя смежными сечениями элемент dZ , а из него двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ бесконечно тонкое кольцо (рис. 5.6). На поверхности кольца проведем волокно AB и рассмотрим его деформацию.

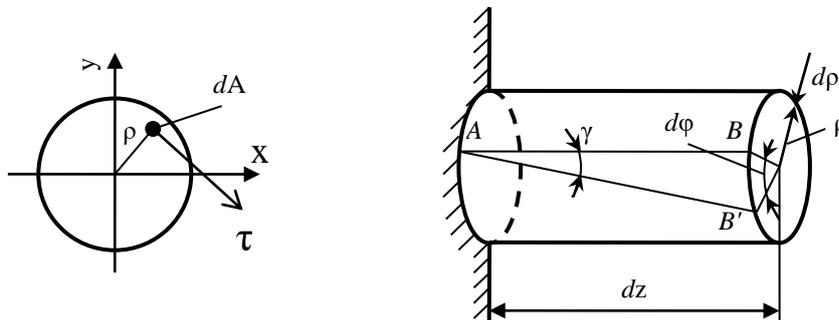


Рис. 5.6. Напряжения и деформации при кручении круглого бруса.

Мысленно остановим левое сечение I . Правое сечение II повернется на угол $d\varphi$, точка B в этом сечении переместится в положение B' . Волокно AB займёт положение $A B'$. Из прямоугольного треугольника ABB' , учитывая, что $BB' = \rho d\varphi$, получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{BB'}{AB} = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \text{ Здесь } \frac{d\varphi}{dz} \text{ относительный угол закручивания.}$$

Так как кручение является частным случаем изгиба, по закону Гука для чистого сдвига $\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$ (2)

Чтобы воспользоваться этой формулой, надо знать $\frac{d\varphi}{dz}$.

Подставим τ из уравнения (2) в уравнение (1): $M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA$ (3).

Интегральное выражение $\int_A \rho^2 dA$ представляет собой геометрическую харак-

теристику сечения – **полярный момент инерции** сечения $J_\rho, \text{ м}^4$.

Тогда $M_z = G \frac{d\varphi}{dz} J_\rho$, откуда $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho}$ (4).

Подставим $\frac{d\varphi}{dz}$ из уравнения (4) в уравнение (2), получим: $\tau = \frac{M_z \rho}{J_\rho}$ (5)

Итак: **касательные напряжения при кручении круглого бруса распределяются по сечению неравномерно: наиболее напряжены волокна у поверхности бруса, при углублении же внутрь сечения напряжения постепенно уменьшаются, обращаясь в нуль на оси бруса** (рис. 5.7).

Отсюда следует сделать вывод, что вследствие неполного использования материала в центральной части круглого бруса более экономично применять валы кольцевого сечения (трубчатые) с удалённой сердцевиной.

При $\rho = 0$ (в центре круга) $\tau = 0$. Введём новую геометрическую характеристику $W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}$ – полярный момент сопротивления сечения, (m^3).

Тогда при $\rho = \rho_{\max}$ (в точках у контура сечения).

$$\tau_{\max} = \frac{M_z \rho_{\max}}{J_\rho} = \frac{M_z}{W_\rho} \quad (6).$$

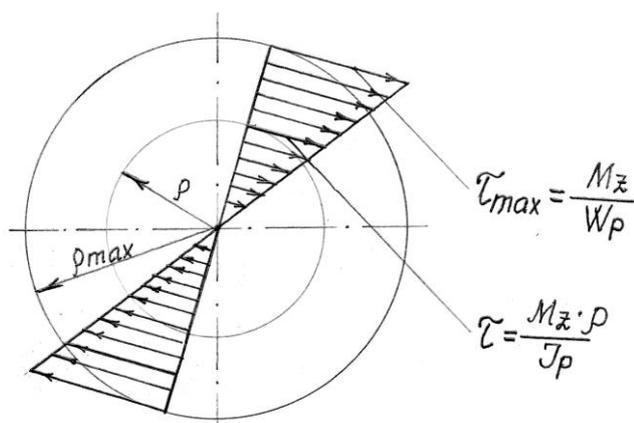


Рис. 5.7. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению круглого бруса.

Для круга
$$W_\rho = \frac{J_\rho}{0.5d} = \frac{\pi d^3}{16} = 0.2d^3$$

Для кольца с наружным диаметром D , внутренним – d и отношением $C = d/D$:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{0.5D} = \frac{\pi D^4 (1 - C^4)}{32 \cdot 0.5D} = \frac{\pi D^3 (1 - C^4)}{16} \approx 0.2D^3 (1 - C^4).$$

Ошибка! Некоторые студенты допускают грубейшую ошибку, определяя полярный момент сопротивления для кольцевого сечения как разность полярных моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов. Подумайте, почему в отличие от полярного момента инерции J_ρ полярный момент сопротивления W_ρ сложного сечения (кольца) не равен алгебраической сумме моментов сопротивления составных частей?

Ошибка! Студент говорит: «Определим диаметр вала, передающего крутящий момент...». Но ведь крутящий момент – внутренний силовой фактор, возникающий при работе бруса на кручение; передать его никуда нельзя. Это пример небрежного отношения к употреблению термина. Надо говорить: «Определим диаметр вала, передающего вращающий момент...».

5.2.3 Расчёты на прочность и жёсткость при кручении

Условие прочности при кручении $\tau_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_{\rho}} \leq \tau_{adm}$

Допускаемые напряжения $\tau_{adm} = (0,5 \dots 0,6) \sigma_{adm}$

Определим угол закручивания участка бруса длиной l путём интегрирования

выражения (4), то есть $\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_{\rho}}$.

Если на участке $M_z = const$, $GJ_{\rho} = const$, то: $\varphi = \frac{M_z l}{GJ_{\rho}}$;

где GJ_{ρ} – жёсткость поперечного сечения бруса при кручении,

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4 \text{ – для сплошного сечения}$$

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4) \text{ – для кольцевого сечения, где } C = \frac{d}{D}.$$

Условие жёсткости при кручении $\varphi_{0 \max} = \frac{M_{z \max}}{GJ_{\rho}} \leq \varphi_{0 adm}$,

где $\varphi_{0 \max}$ – относительный угол закручивания (угол закручивания на единицу длины бруса).

$\varphi_{0 adm}$ – допускаемый относительный угол закручивания, рад/м.

Его значения зависят от назначения вала (бруса). В общем машиностроении

$\varphi_{0 adm}$ принимают в пределах: $0,005 \dots 0,05 \text{ рад/м}$ ($0,25 \dots 2,5 \text{ град/м}$).

Условия прочности и жёсткости дают возможность выполнять три вида расчётов: проверять, выполняется ли условие прочности (жёсткости), определять допускаемую нагрузку, подбирать требуемые размеры поперечного сечения бруса.

Проверочные вопросы.

Что называется кручением?

Как определяется значение крутящего момента в поперечном сечении бруса?

Какое правило знаков принято для крутящих моментов?

Какие напряжения возникают в поперечных сечениях бруса при кручении и как они направлены?

Напишите выражения полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечений.

Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он выражается и чему он равен для круга и кольца?

Выведите формулу для определения напряжений в поперечных сечениях скручиваемого бруса.

Напишите условие прочности при кручении.

Сопоставьте площади поперечных сечений круглого и кольцевого бруса равной прочности на

кручение. Во сколько раз брус кольцевого сечения легче круглого. Чем это объяснить?
 Как выбираются допускаемые напряжения при расчёте на кручение?
 Выведите формулу для определения относительного и полного угла закручивания круглого бруса. Напишите условие жёсткости при кручении
 Что называется жёсткостью сечения при кручении?
 Как проводится расчёт скручиваемого бруса на жёсткость?

Лекция 6. Прямой изгиб

Литература: [1] §§45...53; 58.

Традиционно тема «Изгиб» считается центральной, самой важной и самой трудной в сопротивлении материалов. Особенности трудности возникают при определении перемещений и решении статически неопределимых задач. Но мы этим заниматься не будем. Мы в этой теме изучим лишь один сравнительно простой вопрос – расчёт на прочность по нормальным напряжениям. Правда, для его изучения потребуются уделить значительное внимание вспомогательному материалу – построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов...

6.1 Терминология и определения

Изгибом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты.

Изгиб имеет ряд разновидностей.

Если изгибающий момент – единственный ВСФ, возникающий в поперечных сечениях, то изгиб называют ***чистым***. Такой изгиб вызывают пары сил, действующих в плоскости, проходящей через продольную ось бруса.

Если помимо изгибающего момента в поперечных сечениях возникают и поперечные силы, то изгиб называют ***поперечным***. Такой изгиб возникает под действием сил, перпендикулярных продольной оси бруса.

При изгибе ось бруса искривляется.

Брус, работающий на изгиб, называют ***балкой***.

В этой лекции мы рассмотрим изгиб только таких брусьев, поперечные сечения которых имеют хотя бы одну ось симметрии (известно, что эта ось является главной центральной осью), а силовая плоскость (плоскость, в которой действуют нагрузки) при этом совпадает с плоскостью, проходящей через продольную ось и ось симметрии.

*Такой изгиб называют **прямым** (в противном случае - **косым**).*

При прямом изгибе деформация бруса происходит в силовой плоскости, при косом – изогнутая ось бруса находится в плоскости, не совпадающей с силовой. На рис. 6.1 показана схема двухопорной балки. Расстояние между опорами балки l называют её пролетом, а часть балки, расположенную по одну сторону от опор, – консолью.

q – интенсивность равномерно распределённой нагрузки, Н/м;

F – сосредоточенная сила, Н;

M – пара сил с моментом M , Нм.

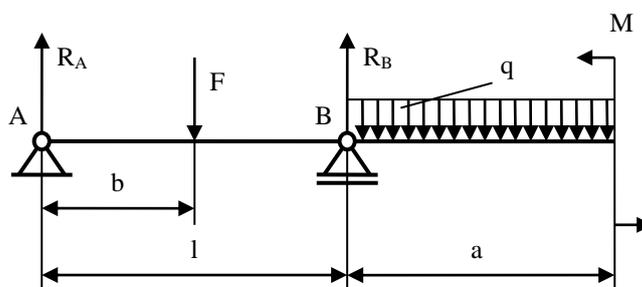


Рис. 6.1. Схема двухопорной балки

6.2 Опоры и опорные реакции

Реакции возникают там, где имеются связи (опоры). Если опора ограничивает какое-либо из возможных перемещений тела, то в этом направлении возникает реакция: реактивная сила, если опора ограничивает линейное перемещение, или реактивный момент, если ограничивается угловое перемещение...

Опоры балок разделены на следующие три основных типа (рис. 6.2):

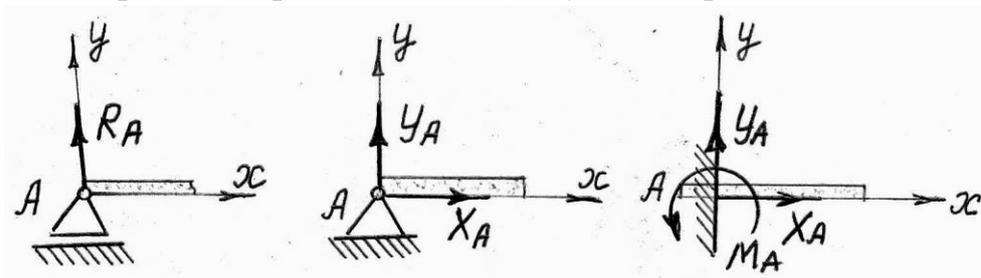


Рис.6.2 Опоры балок

- **Шарнирно – подвижная опора** допускает не только свободный поворот опорного сечения, но и продольное смещение балки, препятствуя лишь поперечному смещению. Такая опора даёт лишь одну реакцию, неизвестную по величине, но известную по направлению (реакция перпендикулярна опорной плоскости).

- **Шарнирно – неподвижная опора** допускает свободный поворот опорного сечения балки, но препятствует смещению его как в продольном, так и в поперечном направлениях. Неизвестную по величине и направлению реакцию такой опоры мы будем заменять двумя составляющими: одной вертикальной Y_A , другой – горизонтальной X_A ;

- **Жёсткое защемление (заделка)** не допускает ни поворота опорного сечения, ни продольного или поперечного его смещения. В общем случае плоского нагружения в заделке возникают реактивный момент M_A и реактивная сила, которую обычно раскладывают на две составляющие: Y_A и X_A .

6.3 Поперечные силы и изгибающие моменты

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную сосредоточенной силой (рис. 6.3). Будем считать, что опорные реакции известны.

ВСФ определяют методом сечений.

$$M_x = \sum m_x(F_K) \quad Q_y = \sum F_{Ky}$$

Изгибающий момент M_x в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно оси x (относительно центра тяжести сечения).

Поперечная сила Q_y в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось y .

Напомним, что оси x , y лежат в плоскости выбранного сечения, а начало координат расположено в центре тяжести сечения.

Установим правила знаков M_x и Q_y (рис. 6.4).

Внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки по часовой стрелке, вызывает положительную поперечную силу, и наоборот.

Внешняя сила или момент, изгибающие отсеченную часть балки выпуклостью вниз (растягиваются нижние волокна), создают положительный изгибающий момент, и наоборот.

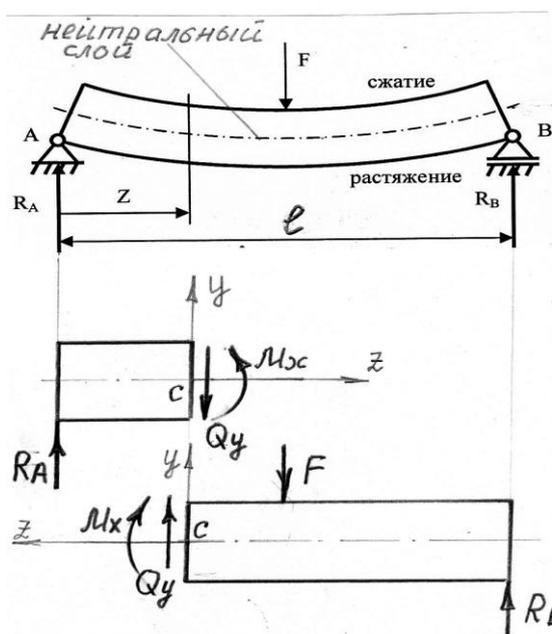


Рис. 6.3. Внутренние силовые факторы при изгибе

При таком правиле знаков внешние силы, направленные вверх, всегда дают положительный изгибающий момент вне зависимости от того, по какую сторону от сечения они приложены.

Иными словами, эпюру изгибающих моментов строят на сжатых волокнах.

Полезно использовать мнемонический приём для запоминания этого правила – правило «рюмки – зонтика». Если на балку льётся вода и она не стекает, то изгибающий момент положителен, если стекает – отрицателен.

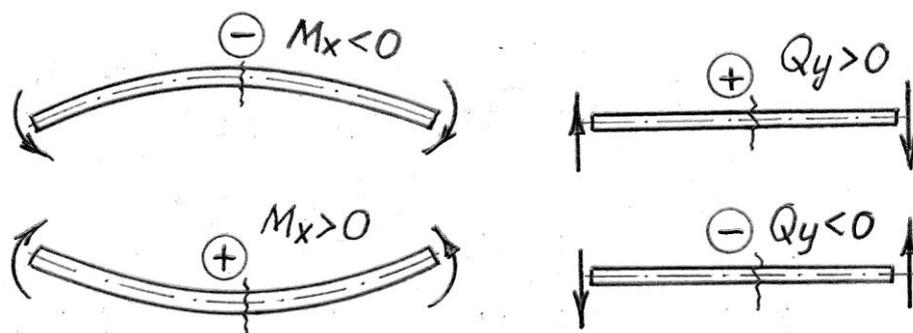
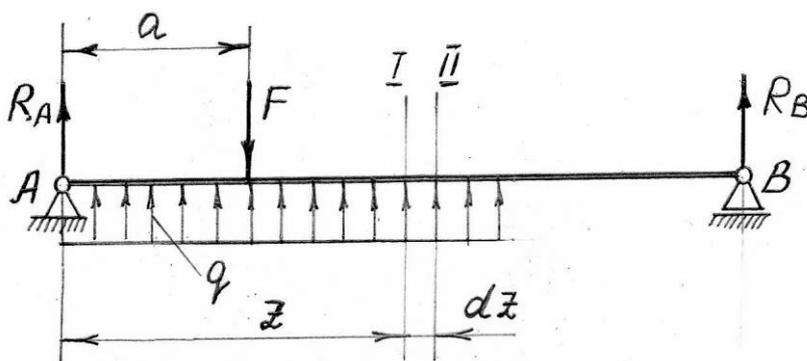


Рис. 6.4. Правила знаков ВСФ при изгибе

6.4 Дифференциальная зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил существенно облегчается при использовании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки. На основе этих зависимостей выведены правила контроля правильности построения эпюр, которые приведены в сборнике [3] с.50. Рекомендуем при построении эпюр смотреть эти правила, а постепенно в процессе решения задач они Вам запомнятся...

Определим для изображённой на рис. 6.5 балки ВСФ в двух смежных сечениях I и II через внешние силы, расположенные слева от сечения.

Рис. 6.5. К выводу дифференциальных зависимостей между M_x , Q_y и q .

Поперечная сила. Сечение I: $Q_y = R_A - F + qz$

Сечение II: $Q_y' = R_A - F + q(z + dz)$

Приращение dQ_y на участке dz равно: $dQ_y = Q_y' - Q_y = qdz$, откуда $q = \frac{dQ_y}{dz}$.

Первая производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределённой нагрузки в сечении q .

Изгибающий момент.

Сечение I: $M_x = R_A z - F(z - a) + qz^2 / 2$.

$$\text{Сечение II: } M_x' = R_A(z + dz) - F(z + dz - a) + q(z + dz)^2 / 2.$$

Приращение dM_x на участке dz равно: $dM_x = M_x' - M_x = Q_y dz$.

$$\text{Откуда } Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

При определении dM_x бесконечно малая величина высшего порядка была отброшена.

Таким образом, **первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе.**

Из полученных зависимостей следует также, что **интенсивность распределённой нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по длине балки:**

$$q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}$$

6.5 Эюры изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_y .

Представьте себе, что перед Вами стоит задача не просто научиться плавать, а получить разряд по плаванию. Опытный тренер читает Вам лекцию о технике, о способах плавания, затем ассистент демонстрирует различные способы плавания в бассейне. И лекцией, и демонстрацией Вы остались довольны. Затем тренер выдаёт Вам задание на самостоятельную работу. Он предлагает Вам переплыть реку, говорит, что будет ждать Вас на противоположном берегу. Способны Вы выполнить такое задание самостоятельно? Конечно, нет. А вот после упорных тренировок, может быть, Вы и добьётесь успеха. Примерно то же самое с построением эюр. Успеха Вы добьётесь лишь после упорных тренировок – самостоятельного решения большого числа задач. Наряду с обязательными расчётно-проектировочными заданиями полезны устные решения простых тестовых задач. Примеры таких задач приведены в пособии [4]...

Пример 6.1. Построить эюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, закреплённой одним концом и нагруженной на свободном конце парой сил с моментом M (рис.6.6).

Проведём произвольное поперечное сечение на расстоянии z от свободного конца балки ($0 \leq z \leq l$). Чтобы не определять реакции заделки, определим ВСФ через внешние силы, расположенные левее выбранного сечения. Очевидно, что $Q_y = 0$ (пара сил ни на одну ось не проецируется). $M_x = M = \text{const}$ (момент пары относительно любой точки плоскости есть величина постоянная, равная произведению силы пары на плечо пары).

$M_x > 0$, так как балка изгибается выпуклостью вниз.

Балка испытывает **чистый изгиб** (случай, когда $M_x = \text{const}$, $Q_y = 0$).

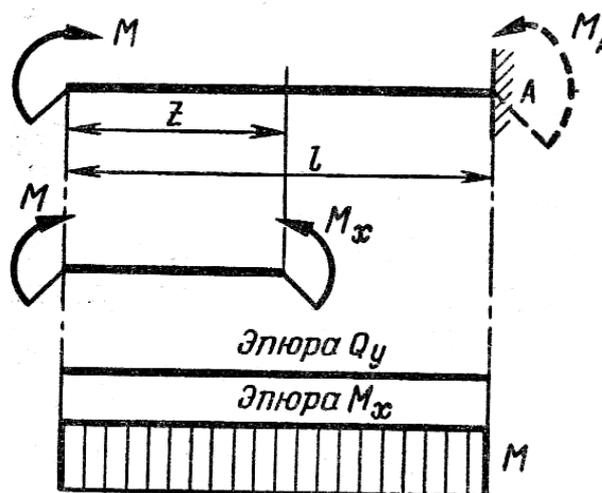


Рис. 6.6 Эюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки.

Пример 6.2. Построить эюры изгибающих моментов и поперечных сил для двухопорной балки, нагруженной силой F (рис. 6.7) .

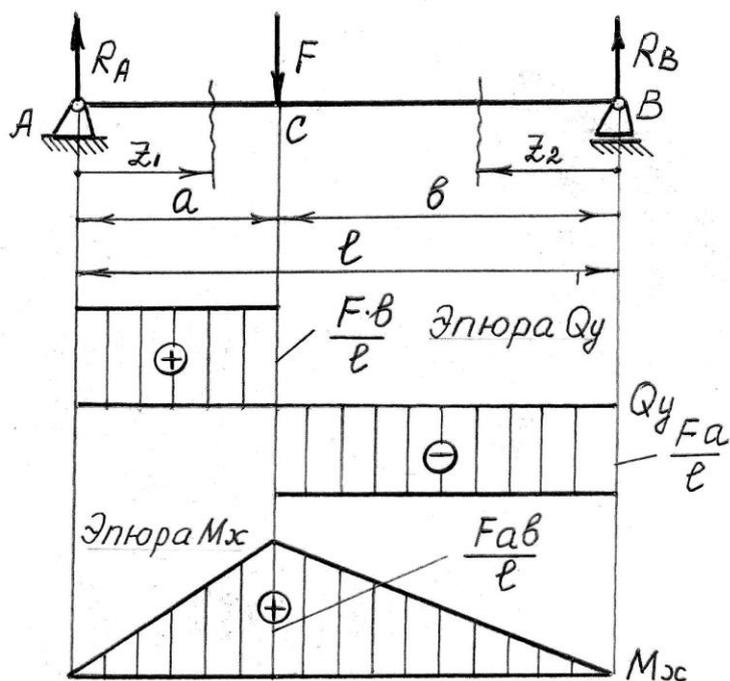


Рис. 6.7. Эюры поперечных сил и изгибающих моментов двухопорной балки

1. Определяем реакции опор.

$$\sum m_A(F_k) = 0 \quad R_B l - F a = 0 \quad R_B = \frac{F a}{l}$$

$$\sum m_B(F_k) = 0 \quad -R_A l + F b = 0 \quad R_A = \frac{F b}{l}$$

Знаки плюс у реакций показывают, что их направление выбрано верно.

$$\text{Проверка: } \sum F_{ky} = 0 \quad R_A + R_B - F = 0$$

$0 = 0$. Реакции определены верно.

Строим эпюры M_x и Q_y аналитическим способом.

При использовании аналитического способа балку разбивают на участки. Участком балки называют ту ее часть, в пределах которой законы изменения поперечной силы и изгибающего момента остаются постоянными. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние (активные или реактивные) силы или пары сил, а также сечения, в которых изменяется интенсивность распределённой нагрузки.

Балка имеет два участка.

I участок: $0 \leq z_1 \leq a$ $M_x = R_A z_1$, это уравнение прямой линии

при $z_1 = 0$ $M_x = 0$

при $z_1 = a$ $M_x = \frac{Fab}{l}$ $Q_y = R_A = \frac{Fb}{l} - const$

II участок: $0 \leq z_2 \leq b$. Так как справа от сечения внешних сил меньше, чем слева, то ВСФ определяем через внешние силы, расположенные правее от выбранного сечения. $M_x = R_B z_2$ – это уравнение прямой линии

при $z_2 = 0$ $M_x = 0$

при $z_2 = b$ $M_x = \frac{Fab}{l}$ $Q_y = -R_B = -\frac{Fa}{l} - const$

По найденным значениям M_x и Q_y строим эпюры. Убеждаемся, что дифференциальная зависимость между M_x и Q_y соблюдается на каждом участке балки.

Проблемный вопрос. Чему равна поперечная сила в сечении С, где приложена сила F?

Студенты нередко предлагают такие ошибочные ответы: Fb/l , $-Fa/l$ или F .

Подумайте, почему третий ответ содержит самую грубую ошибку.

Правильный ответ. Скачок – это следствие использования общепринятой абстракции – сосредоточенной силы. Таких сил не существует, а потому ответить прямо на поставленный вопрос нельзя. Можно лишь сказать, что бесконечно близко слева от сечения поперечная сила равна Fb/l , а бесконечно близко справа $-Fa/l$. Фактически на каком-то малом участке продольная сила изменяется от первого до второго значения. Но кривую, отображающую характер этого изменения, установить мы не можем и заменяем её скачком.

Пример 6.3. Построить эпюры M_x и Q_y для двухопорной балки, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q (рис. 6.8).

1. Определяем реакции опор. Ввиду симметрии $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

2. Строим эпюры M_x и Q_y . Брус имеет один участок $0 \leq z \leq l$

$Q_y = R_A - qz$ (это уравнение прямой линии).

При $z = 0$ $Q_y = R_A = \frac{ql}{2}$; при $z = l$ $Q_y = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}$

$$M_x = R_A z - qz \frac{z}{2} = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2} \quad (\text{это уравнение параболы}).$$

$$\text{При } z = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z = l \quad M_x = 0. \quad \text{Так как в пределах участка } Q_y, \text{ непрерывно изменя-}$$

ясь, меняет знак, определим положение сечения, в котором $Q_y = 0$ (в этом сечении M_x будет иметь максимальное значение, так как Q_y меняет знак с «плюса»

$$\text{на «минус»}). \quad Q_y = \frac{ql}{2} - qz_0 = 0 \quad z_0 = \frac{l}{2}$$

$$\text{при } z = z_0 = \frac{l}{2} \quad M_{x \max} = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

По найденным значениям строим эпюры Q_y и M_x и убеждаемся, что дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки соблюдаются на каждом участке.

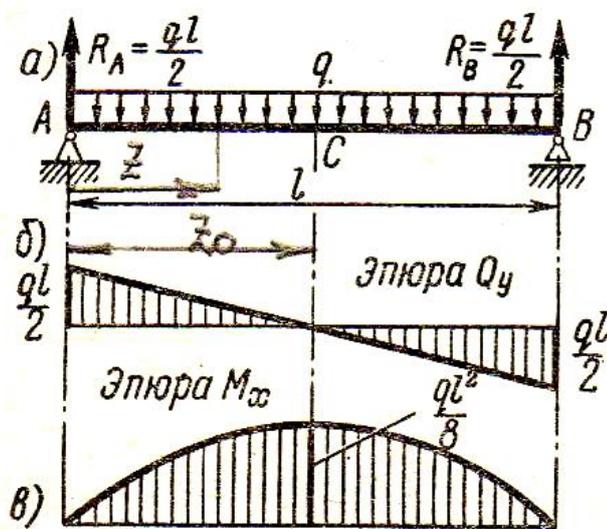


Рис. 6.8. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов двухопорной балки

6.6 Нормальные напряжения при чистом изгибе

Ранее мы установили, что $M_x = \int_A \sigma y dA$ (1). Чтобы использовать это выра-

жение для определения σ , надо знать закон распределения σ по сечению бруса. Этот закон устанавливают наблюдением за деформацией резинового образца. На боковые грани резинового образца прямоугольного поперечного сечения наносят сетку из параллельных и перпендикулярных оси рисок (рис. 6.9). Затем к образцу прикладывают по его концам изгибающие моменты M , действующие в плоскости симметрии, т.е. подвергают брус чистому прямому изгибу.

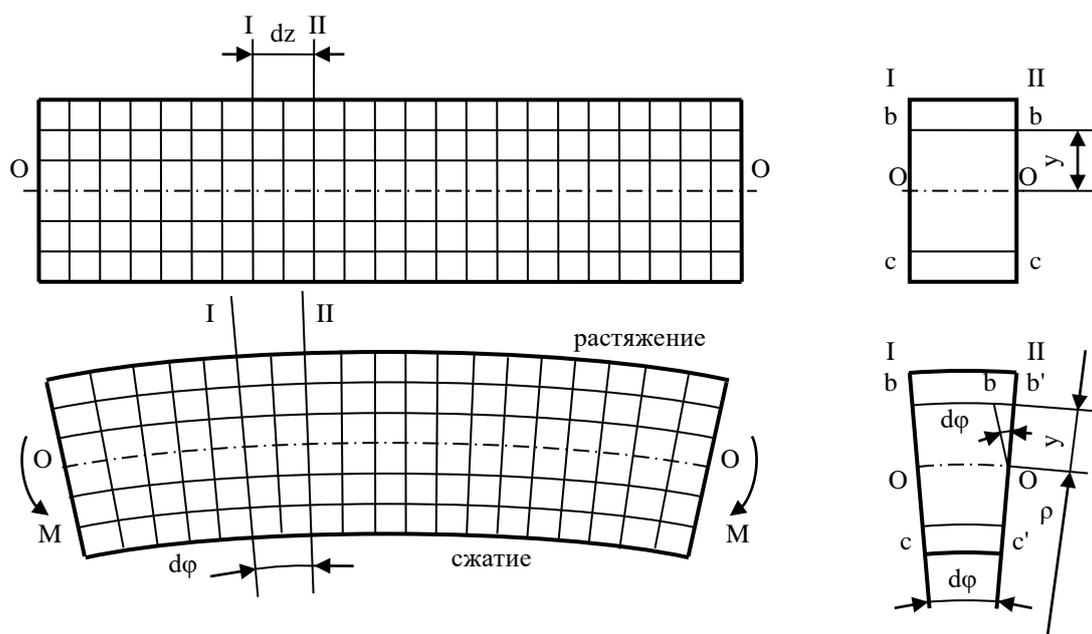


Рис. 6.9. Модель и схема деформации балки при чистом изгибе

Эти наблюдения позволили сделать следующие допущения:

- *поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и во время деформации. Они поворачиваются друг относительно друга на некоторые углы $d\varphi$;*
- *слои бруса не давят друг на друга, расстояния между слоями не меняется;*
- *при изгибе меняется форма поперечного сечения: в области сжатых волокон сечение становится шире, в области растянутых – уже (так как $\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon$).*

При чистом изгибе не равен нулю только один ВСФ – M_x . Остальные пять ВСФ, в том числе и продольная сила N_z , равны нулю, то есть: $N_z = \int_A \sigma dA = 0$.

Следовательно, элементарные силы σdA в поперечном сечении внутренне уравновешены. Это означает, что часть волокон (на выпуклой стороне балки) растянуты, другая их часть (на вогнутой стороне) сжаты. Очевидно, что между растянутыми и сжатыми слоями должен находиться некоторый слой **ОО**, который не испытывает ни растяжения, ни сжатия. Этот слой называют **нейтральным**, а радиус кривизны нейтрального слоя при изгибе обозначают буквой ρ . Таким образом, нам надо найти положение и радиус кривизны нейтрального слоя, а также установить закон распределения напряжений по сечению.

Двумя смежными сечениями *I* и *II* выделим элемент dz . Рассмотрим деформацию волокна bb , расположенного на выпуклой стороне на расстоянии y от нейтрального слоя. Сечение *II* повернется относительно сечения *I* на угол $d\varphi$. При этом длина волокна **ОО**, расположенного на нейтральном слое, не изменится, длина волокна bb увеличится, а волокна cc , расположенного на вогнутой

стороне, - уменьшится.

Абсолютная продольная деформация волокна bb : $\Delta l = bb' - bb = yd\varphi$.

Относительная продольная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{bb} = \frac{yd\varphi}{OO} = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$.

По закону Гука $\sigma = \varepsilon E = E \frac{y}{\rho}$ (2)

Формулу мы получили, но чтобы пользоваться ею, надо знать радиус кривизны ρ и положение нейтрального слоя. Подставим σ из уравнения (2) в равенство (1). Получим: $N_z = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$. $\frac{E}{\rho} \neq 0$, значит $\int_A y dA = 0$. Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси S_x . Известно: если статический момент относительно оси равен нулю, то эта ось – центральная, т.е. проходит через центр тяжести сечения.

Таким образом, **нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.**

Подставим значение σ из уравнения (2) в уравнение (1), получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} J_x \quad (3)$$

Интеграл $\int_A y^2 dA = J_x$ называется *осевым моментом инерции* и является одной из геометрических характеристик плоского сечения.

Из выражения (3) получаем формулу для определения кривизны нейтрального слоя:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (4).$$

Величина EJ_x называется жесткостью поперечного сечения балки при изгибе. Подставив значение $\frac{1}{\rho}$ из равенства (4) в уравнение (2), получим:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{M_x y}{J_x} \quad (5).$$

Нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки распределяются по линейному закону: они пропорциональны расстоянию от нейтрального слоя.

На уровне нейтрального слоя при $y = 0$ $\sigma = 0$. Максимальные напряжения растяжения σ^t_{\max} в области растянутых волокон и сжатия σ^c_{\max} в области сжатых волокон возникают в наиболее удаленных от нейтрального слоя точках.

По модулю они равны: $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$.

Здесь выражение $\frac{J_x}{y_{\max}} = W_x$ называется *осевым моментом сопротивления*.

6.7 Расчеты на прочность

Расчет балок на прочность при чистом и, в большинстве случаев, при поперечном изгибе ведут по наибольшим нормальным напряжениям. При поперечном изгибе балок в сечениях возникают и нормальные, и касательные напряжения, но последние обычно невелики и при расчетах не учитываются.

Мы ограничимся расчетами балок, поперечные размеры которых по всей длине постоянны. Для таких балок опасными будут те сечения, в которых возникает наибольший по модулю изгибающий момент $M_{x \max}$ (или $M_{y \max}$).

В опасном сечении должно соблюдаться условие прочности:

$$\text{при изгибе в вертикальной плоскости} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

$$\text{при изгибе в горизонтальной плоскости} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{adm}$$

Моменты сопротивления круга, кольца, прямоугольника определим по при-

веденным ранее формулам:
$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}.$$

$$\text{Круг:} \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad x_{\max} = y_{\max} = \frac{d}{2}; \quad W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3.$$

$$\text{Кольцо:} \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - C^4); \quad x_{\max} = y_{\max} = \frac{D}{2}.$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - C^4) \approx 0.1D^3(1 - C^4).$$

Прямоугольник с размерами $b \times h$:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad x_{\max} = \frac{b}{2}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Для прокатных стандартных профилей значения W_x и W_y даны в таблицах.

Условие прочности позволяет решать три типа задач: проверочный расчёт, проектный расчёт (*подбор сечения*), определение предельно допускаемого изгибающего момента (*определение несущей способности конструкции*).

Подбор сечения при изгибе существенно отличается от подбора его при растяжении (сжатии). При растяжении (сжатии) благодаря равномерному распределению напряжений по сечению он сводится лишь к определению потребной площади, а форма сечения принимается исключительно из конструктивных соображений. При изгибе прочность определяется моментом сопротивления, который зависит не только от размеров, но и от формы сечения. Можно получить большой момент сопротивления при малой площади и, наоборот, малый – при большой площади. Очевидно, что первый вариант выгоднее с точки зрения расхода материала, хотя он может оказаться невозможным по конструктивным соображениям. При изгибе выгодны такие формы поперечного сечения, у которых основная часть площади сечения удалена подальше от

нейтральной линии. Этому условию в первую очередь удовлетворяет двутавровое сечение. Менее выгодно прямоугольное сечение, особенно если оно вытянуто вдоль нейтральной линии. Ещё менее выгодно круглое сечение, так как оно имеет наибольшую толщину на уровне нейтральной линии. Полое сечение всегда выгоднее сплошного, равноценного по площади. В этом Вы убедитесь при выполнении расчётно-проектировочного задания. Таким образом, подбор сечения при изгибе должен начинаться с выбора рациональной формы, одновременно удовлетворяющей конструктивным требованиям. При проектировании металлических конструкций широко применяют прокатные профили (двутавры, швеллеры, уголки, трубы и др.).

Допускаемые напряжения

Допускаемое напряжение σ_{adm} принимается при статическом нагружении балки таким же, как и при растяжении (*сжатии*) бруса из того же материала.

Симметрическое сечение

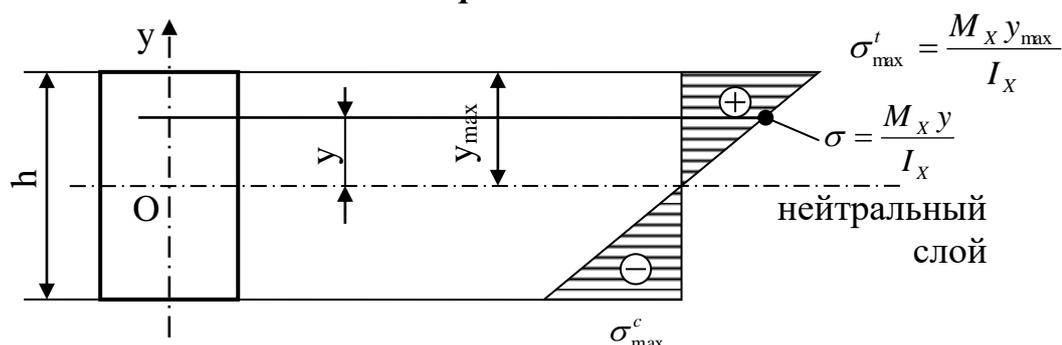


Рис. 6.10. Распределение нормальных напряжений при изгибе по симметричному поперечному сечению балки.

Для пластичных материалов $\sigma_{adm}^t = \sigma_{adm}^c = \sigma_{adm}$, поэтому при симметричном относительно оси X сечении безразлично, для каких волокон (*растянутых или сжатых*) проверяется прочность (рис. 6.10).

Хрупкие материалы работают на сжатие значительно лучше, чем на растяжение, поэтому при симметричном относительно оси X сечении в качестве допускаемого напряжения принимают σ_{adm}^t .

Применение симметричных сечений для балок из хрупкого материала не рационально, т.к. материал в сжатой зоне будет значительно недогружен.

Для балок из хрупких материалов целесообразно применять сечения, не симметричные относительно нейтральной оси, например, тавровые (рис. 6.11). Для таких балок надо делать две проверки на прочность: отдельно для сжатых и для растянутых волокон, условие прочности балки выражается двумя неравенствами:

$$\sigma_{\max}^t = \frac{M_{x \max} h_2}{J_x} \leq \sigma_{adm}^t; \quad \sigma_{\max}^c = \frac{M_{x \max} h_1}{J_x} \leq \sigma_{adm}^c$$

Наиболее рационально материал будет использоваться при $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_{adm}^c}{\sigma_{adm}^t}$.

где h_1 и h_2 – расстояния от нейтральной оси до наиболее удалённых точек соответственно сжатой и растянутой зон сечения

Несимметричное (тавровое) сечение.

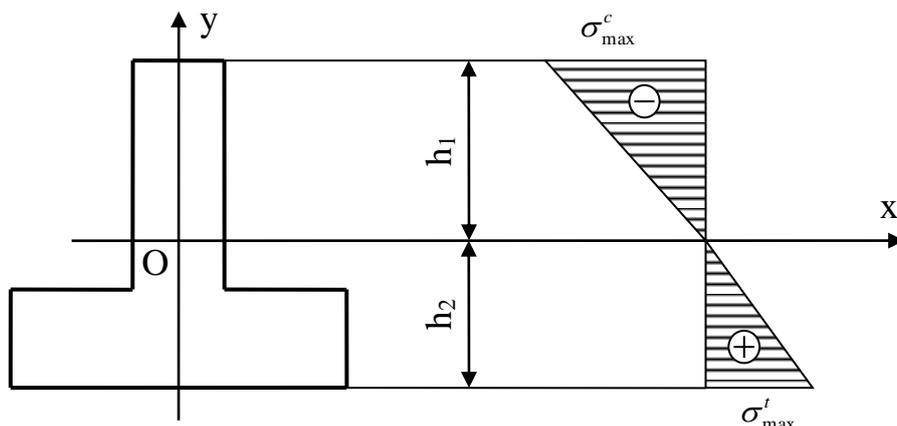


Рис. 6.11. Распределение нормальных напряжений по несимметричному поперечному сечению балки.

6.8. Перемещения при изгибе и расчёты на жёсткость

Для правильной работы передач и подшипников оси и валы должны быть достаточно жёсткими, то есть такими, при которых перемещения при изгибе - прогибы и углы поворота сечений - не превышают допустимых значений...

Изогнутая ось балки называется упругой линией. Уравнение упругой линии в общей форме имеет вид: $y = f(z)$.

Деформация балки характеризуется двумя величинами: прогибом y , то есть перемещением точки оси балки перпендикулярно к её недеформированной оси, и углом поворота сечения ϑ . Наибольший прогиб f называется стрелой прогиба.

Для обеспечения жёсткости на изгиб необходимо, чтобы действительное значение ϑ_{\max} и f не превышали допустимых значений, то есть: $\vartheta_{\max} \leq [\vartheta]$, $f \leq [f]$.

При малых углах поворота (на практике $\vartheta \leq 1^\circ$): $\vartheta = \frac{dy}{dz}$; и $\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

Приближённое дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x$$

где

E – модуль упругости материала;

I_x – осевой момент инерции сечения;

M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

Для определения перемещений дифференциальное уравнение необходимо проинтегрировать. При этом постоянные интегрирования определяются из граничных условий. Существует несколько способов определения перемещений при изгибе: графоаналитический метод, по универсальным уравнениям, метод Мора. Эти методы изложены в учебнике [1] §§ 59, 60, 62. Знакомство с этими способами не предусмотрено программой дисциплины. При расчёте валов на жёсткость валов мы будем пользоваться готовыми таблицами, в которых даны прогибы и углы поворота сечений при типовых случаях нагружения.

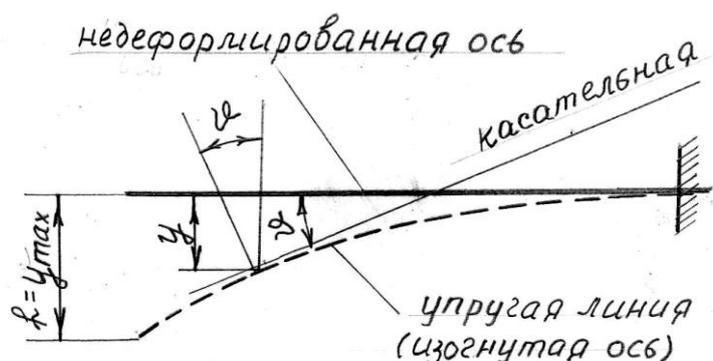


Рис. 6.12. К определению перемещений при изгибе

Проверочные вопросы.

Какой изгиб называют чистым, какой - поперечным?

Перечислите типы опор балок.

Как определить изгибающий момент и поперечную силу в каком либо сечении балки?

Как формулируются правила знаков при определении величин изгибающих моментов и поперечных сил?

Сделайте вывод дифференциальной зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки.

Выведите формулу для определения нормальных напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе.

Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях балки?

Чему равна кривизна оси балки при чистом изгибе?

Что представляет собой нейтральный слой и нейтральная ось и как они расположены?

Что называется моментом сопротивления при изгибе и какова его размерность?

По каким формулам определяются моменты сопротивления прямоугольника, круга, кольца?

По какой формуле производится расчёт балок при чистом изгибе?

Как выгоднее нагрузить балку прямоугольного сечения при изгибе?

Лекция 7. Сложное сопротивление

(Литература: [1] §§73; 75; 76;77).

В этой лекции Вы познакомитесь с расчётами брусьев, в поперечных сечениях которых возникает не менее двух ВСФ, одновременно учитываемых при расчёте. Такое состояние бруса называют **сложным сопротивлением**. При сложном сопротивлении в опасной точке может возникать двухосное Н.С., в этом случае при расчётах Вам потребуется применение так называемых гипотез прочности (с такими расчётами Вы познакомитесь в следующих лекциях). Но косой изгиб, изгиб с растяжением, внецентренное растяжение, которые рассматриваются в этой лекции, – самые простые случаи сложного сопротивления. При этих деформациях в опасных точках возникает одноосное Н.С., применять гипотезы прочности необходимости нет. Строго говоря, в этой лекции новые теоретические вопросы вообще не рассматриваются. Для выполнения рассматриваемых в этой лекции расчётов вполне достаточно знаний, полученных Вами при изучении растяжения – сжатия и прямого изгиба, и умелого использования принципа независимости действия сил...

7.1 Косой изгиб

Определение напряжений – не самоцель; конечная цель – расчёт на прочность, поэтому необходимо добиться ясного понимания того, какая точка опасна (или предположительно опасна) и как составлять для неё условие прочности...

Изгиб называется косым, если силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных осей бруса.

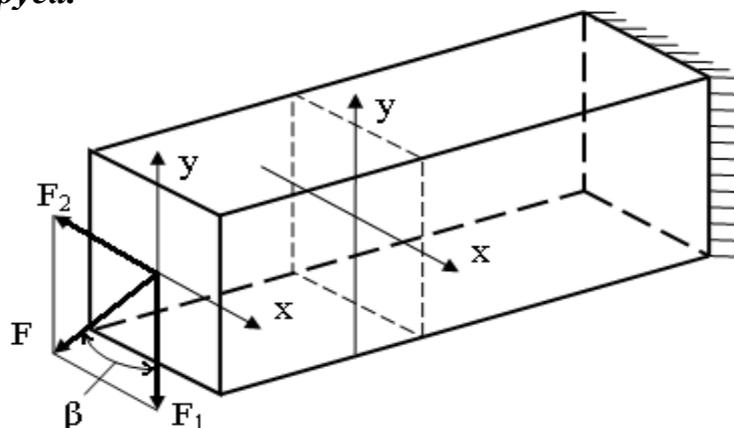


Рис. 7.1. Косой изгиб балки прямоугольного сечения

Пусть консольный брус прямоугольного поперечного сечения, закреплённый одним концом, нагружен силой F , приложенной в торце так, что линия действия силы образует угол β с главной центральной осью OY (рис. 7.1).

Представим косой изгиб как совокупность двух прямых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях относительно осей x и y . Для этого разложим силу F на две составляющие:

$$F_1 = F \cos \beta; \quad F_2 = F \sin \beta$$

В произвольном сечении возникнут четыре внутренних силовых фактора:

$$M_x = F_1 z; \quad M_y = F_2 z; \quad Q_x = F_2; \quad Q_y = F_1$$

Расчет на прочность будем вести только по нормальным напряжениям, так как в опасных точках касательные напряжения либо равны нулю, либо малы по сравнению с нормальными напряжениями. Тогда в произвольной точке M (рис. 7.2) поперечного сечения на основе принципа независимости действия сил

напряжение будет равно:
$$\sigma = \sigma(M_x) + \sigma(M_y) = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

В этой формуле:

M_x, M_y – изгибающие моменты в рассматриваемом поперечном сечении относительно главных центральных осей x и y ;

x, y – координаты точки, в которой отыскивается напряжение;

J_x, J_y – моменты инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей x и y .

Знаки каждого слагаемого будем определять по характеру деформации (если точка в растянутой части, то «плюс», если в сжатой – «минус»).

Наглядное представление о распределении напряжений по поперечному сечению дают соответствующие эпюры (рис. 7.2).

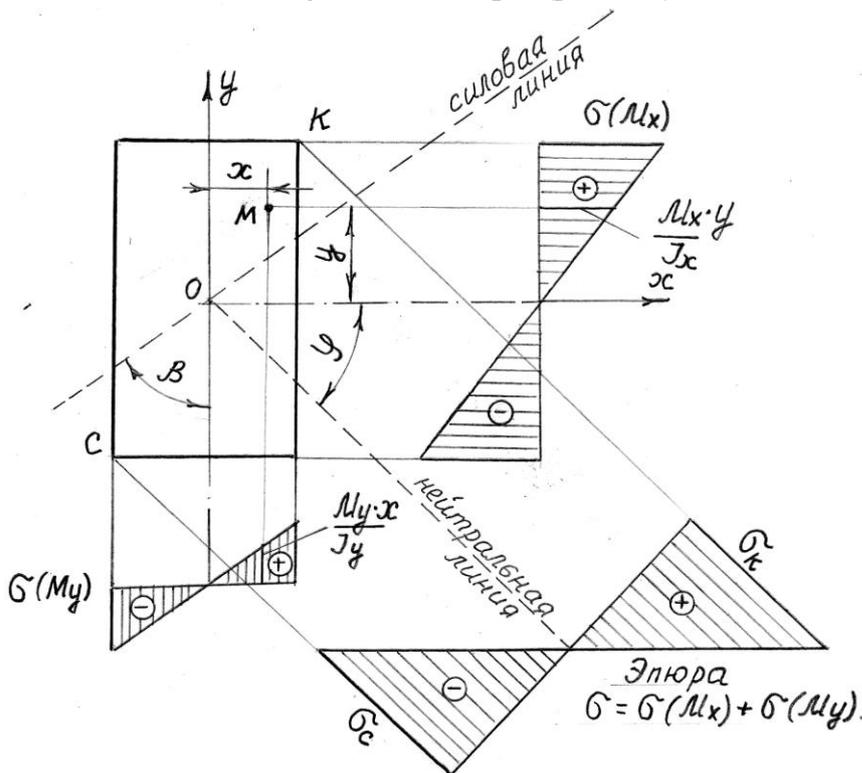


Рис. 7.2. Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению при косом изгибе

Для построения эпюры суммарных напряжений σ надо найти положение нейтральной линии, т.е. геометрическое место точек сечения, в которых $\sigma = 0$.

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0, \text{ откуда } y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y} x.$$

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения и наклонена к горизонтальной оси x на угол φ

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{F_2}{F_1} = \frac{M_y}{M_x}$$

Как видим, силовая и нейтральная линия не будут взаимно перпендикулярны, так как $(\operatorname{tg} \varphi \neq \operatorname{tg} \beta)$.

В отличие от прямого изгиба при косом изгибе изогнутая ось бруса расположена в плоскости, которая не совпадает с силовой плоскостью.

Именно эта особенность деформации учтена в названии **косой изгиб**.

Лишь в частном случае, когда $J_x = J_y$ угол между силовой и нейтральной плоскостями будет прямым ($\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \beta$), т.е. изгиб будет прямым (для сечений типа круга, квадрата косой изгиб невозможен).

Для расчёта бруса на прочность надо найти опасное сечение и опасную точ-

ку в этом сечении. Для рассматриваемого бруса положение опасного сечения очевидно (в заделке), так как в этом сечении и M_x и M_y максимальны одновременно. При более сложных схемах нагружения M_x и M_y могут достигать своих наибольших значений в разных сечениях, в этом случае расчет выполняют для нескольких предположительно опасных сечений (обычно для двух). В каждом таком сечении опасными будут точки, наиболее удалённые от нейтральной линии.

Для бруса из хрупкого материала проверяют два условия прочности:

$$\sigma_k = \sigma_{\max}^t = \frac{M_x}{J_x} Y_k + \frac{M_y}{J_y} X_k \leq \sigma_{adm}^t;$$

$$\sigma_c = \sigma_{\max}^c = \frac{M_x}{J_x} Y_c + \frac{M_y}{J_y} X_c \leq \sigma_{adm}^c$$

Для бруса из пластичного материала проверяют лишь одно условие прочности, соответствующее большему по модулю напряжению.

Для сечений с двумя осями симметрии, которые имеют выступающие точки, максимально удаленные от обеих главных центральных осей, то есть для прямоугольника, двутавра, применима формула:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm}^t.$$

7.2 Изгиб с растяжением (сжатием) бруса большой жёсткости

Оговорка о том, что рассчитывается брус большой жёсткости, не случайна. Расчёт бруса малой жёсткости на совместное действие изгиба и сжатия называют расчётом на продольно-поперечный изгиб (смотри [1] глава X)...

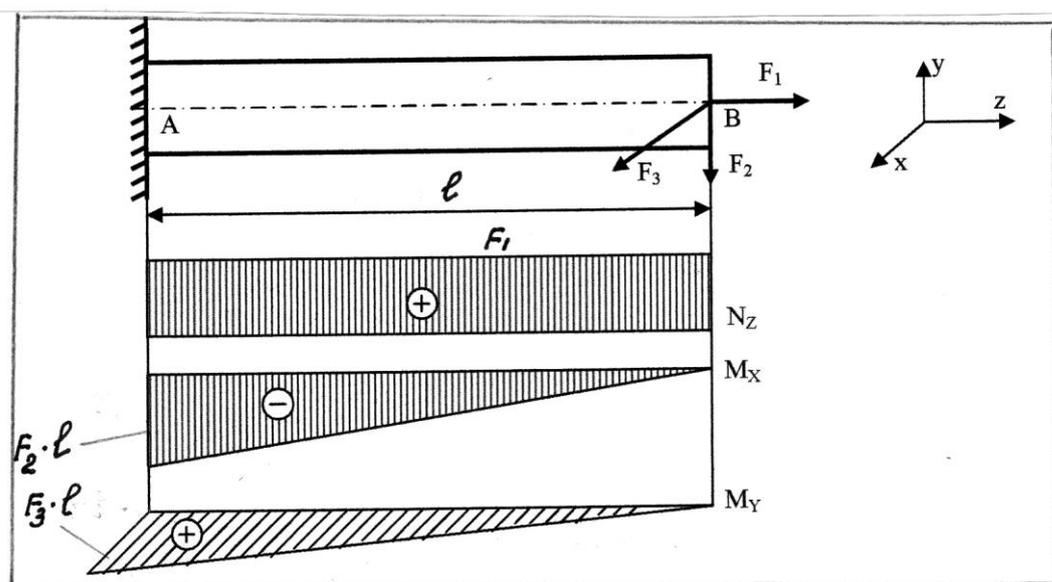


Рис. 7.3. Эпюры ВСФ при изгибе с растяжением

Рассмотрим расчет на прочность бруса, изображённого на рис.7.3. В поперечных сечениях бруса возникают одновременно продольная сила N_z , изгибающие моменты M_x и M_y , а также поперечные силы Q_y и Q_x .

Влияние поперечных сил учитывать не будем, расчет проведем только по нормальным напряжениям.

Строим эпюры N_z , M_x и M_y . Эпюры M_x и M_y строим со стороны сжатых волокон бруса (рис.7.3). Расчет ведем по опасному сечению (очевидно, что опасное сечение – сечение заделки). Напряжения в произвольной точке опасного сечения с

координатами x и y будут равны: $\sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$. Как и при косом изгибе, сечение будет поделено нейтральной линией на две части: в одной возникнут

напряжения сжатия, в другой – растяжения (рис.7.4).

Полагая $\sigma = 0$, найдём уравнение нейтральной линии:

$\frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$. Как видим, нейтральная линия не проходит через центр

тяжести сечения, т.к. при $x = y = 0$ $\sigma_0 = \frac{N_z}{A}$. Она будет отсекает на осях отрезки,

равные $a_x = -\frac{N_z J_y}{A M_y}$, $a_y = -\frac{N_z J_x}{A M_x}$. Для бруса из пластичного материала опас-

ной будет точка сечения, наиболее удалённая от нейтральной линии (*точка А*), в которой возникают наибольшие по модулю напряжения. Если брус изготовлен из хрупкого материала, то в сечении есть две предположительно опасные точки: в одной из них возникают наибольшие напряжения, а в другой – сжатия. Условия прочности для этих точек будут иметь вид: $\sigma_{\max}^t \leq \sigma_{adm}^t$, $\sigma_{\max}^c \leq \sigma_{adm}^c$.

Для сечений с двумя осями симметрии, имеющих выступающие точки, наиболее удалённые одновременно от обеих главных осей, расчет упрощается. Для нахождения опасной точки не надо определять положение нейтральной линии. Проставляя в угловых точках знаки напряжений от каждого $BC\Phi$, без построения эпюры суммарных напряжений σ устанавливаем, что наибольшие напряжения растяжения и сжатия возникают в точках *А* и *В* соответственно.

Для бруса из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, условия прочности будут иметь вид:

$$\sigma_{\max}^t = \sigma_A = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma^t]$$

$$\sigma_{\max}^c = \sigma_B = \frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma^c]$$

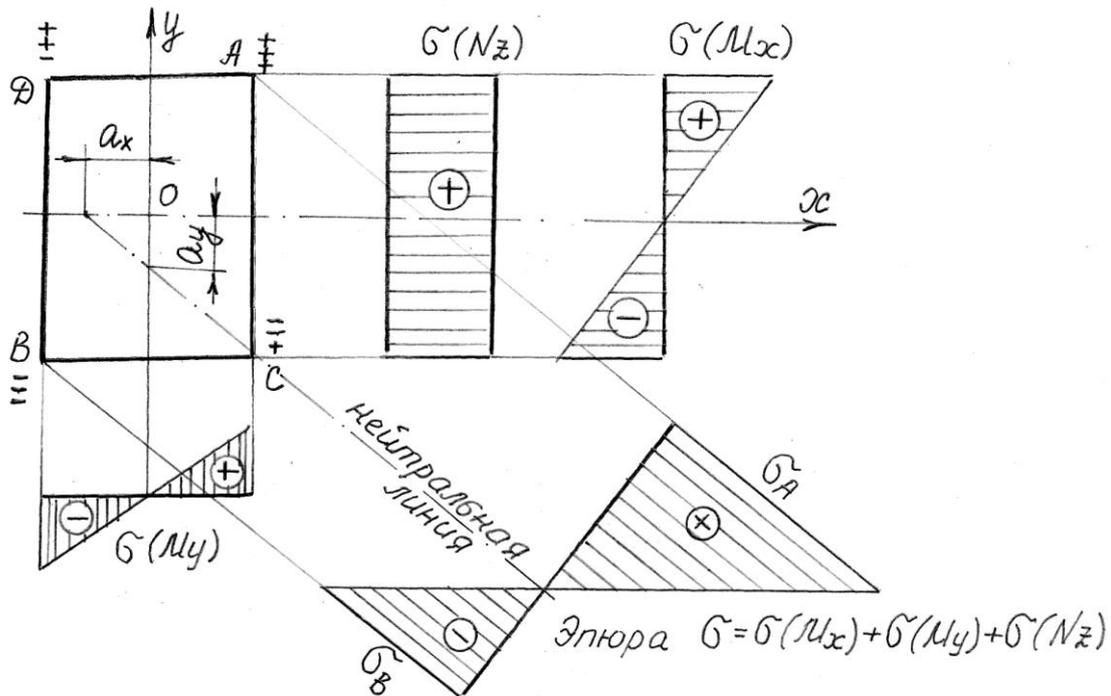


Рис. 7.4. Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению при изгибе с растяжением.

Для бруса из пластичного материала используется одно условие – то, которое соответствует наибольшему по модулю напряжению. Для бруса круглого сечения все центральные оси – главные, нормальные напряжения изгиба определяют непосредственно по суммарному изгибающему моменту $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$

$$\sigma_{\max}^t = \frac{N_z}{A} + \frac{M_u}{W_u} \leq [\sigma^t]; \quad \sigma_{\max}^c = \frac{N_z}{A} - \frac{M_u}{W_u} \leq [\sigma^c]$$

7.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренное растяжение (сжатие) возникает тогда, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно оси бруса и остаётся ей параллельной.

Пусть брус прямоугольного сечения нагружен в торцовом сечении в точке M растягивающей силой F (рис. 7.5). Координаты точки M обозначим X_F, Y_F . Все поперечные сечения равноопасны, так как во всех сечениях действуют одни и те же внутренние силовые факторы. Это:

$$N_z = F; \quad M_x = FY_F; \quad M_y = FX_F.$$

Внецентренное растяжение можно представить как сочетание центрального растяжения (сжатия) с косым чистым изгибом. Для этого силу F надо перенести параллельно самой себе из точки M в центр тяжести сечения. Получим осевую силу, равную F , и момент M , равный моменту силы F относительно точки O , который разложим на два момента: $M_x = FY_F$ и $M_y = FX_F$

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения с коор-

динатами x , y будут равны:
$$\sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

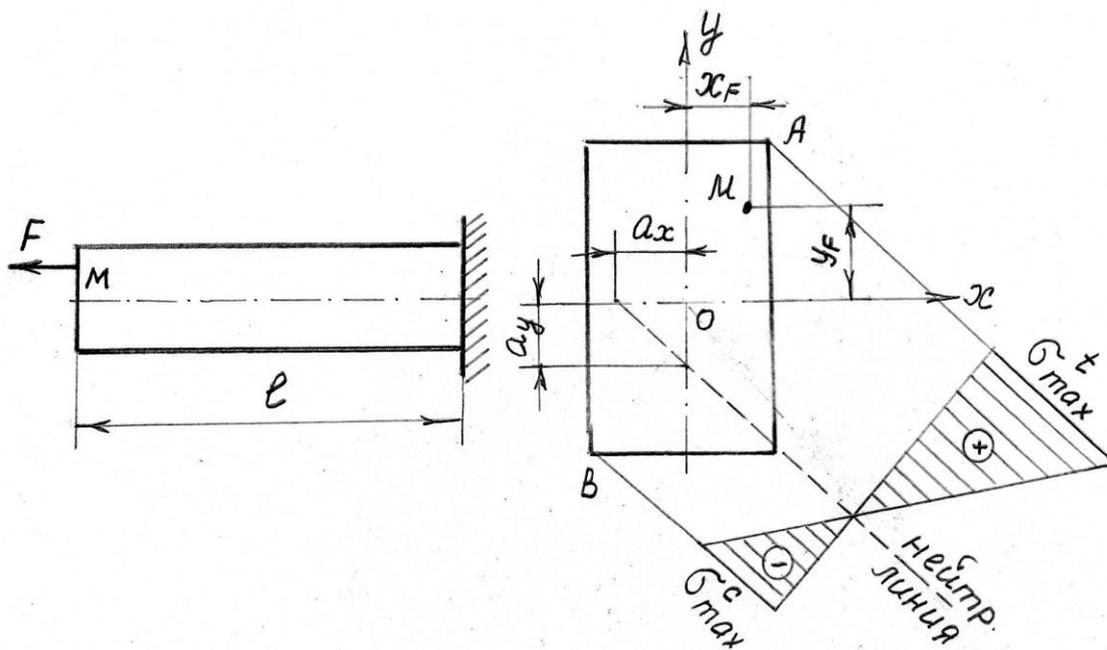


Рис. 7.5. Внецентренное растяжение.

В отношении правила знаков напряжений остаётся в силе сказанное относительно косоугольного изгиба и осевого растяжения.

Полагая $\sigma = 0$, найдём уравнение нейтральной линии:
$$\frac{1}{F} + \frac{X_0}{J_y} X + \frac{Y_0}{J_x} Y = 0$$

Нейтральная линия не проходит через начало координат. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии.

Проверочные вопросы.

Что называется сложным сопротивлением?

Почему при косоугольном изгибе, изгибе с растяжением, внецентренном растяжении (сжатии) мы не используем гипотезы прочности?

Какой изгиб балки называется косоугольным?

Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косоугольный изгиб?

По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при косоугольном изгибе?

Выведите формулу нейтральной оси при косоугольном изгибе.

В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косоугольном изгибе?

Напишите уравнение нулевой линии при сочетании изгиба в двух плоскостях с растяжением.

Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения при изгибе с растяжением?

Какое сложное сопротивление называется внецентренным растяжением (или сжатием)?

Как определяется положение нейтральной оси при внецентренном растяжении и сжатии?

По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении и сжатии?

Лекция 8. Гипотезы прочности

Литература: [1] §§68...72; 79...81.

Без гипотез прочности невозможно выполнять расчёты в случаях, когда Н.С. в опасной точке не одноосное, а двухосное. Такое Н.С. возникает при самых распространённых видах нагружения деталей машин: при растяжении с кручением, при изгибе с кручением. Гипотезы прочности позволяют заменить С.Н.С. равноопасным ему линейным Н.С., то есть позволяют оценивать прочность при С.Н.С. по прочностным характеристикам материалов, полученных при осевом растяжении (сжатии)...

8.1 Назначение и физическая сущность гипотез прочности

Испытания материалов на растяжение показывают, что в зависимости от напряжённого состояния в точке (в дальнейшем Н.С.) материал может находиться в трех состояниях (рис. 8.1):

а) упругое Н.С.;

б) пластическое Н.С., которое характеризуется заметными пластическими деформациями из – за сдвига частиц;

в) состояние разрушения, которое характеризуется появлением признаков хрупкого отрыва частиц, появлением микротрещины хотя бы в одной точке.

Два последних вида Н.С. являются недопустимыми, предельными. Цель расчёта на прочность – предупредить переход материала из упругого Н.С. в предельное (недопустимое) Н.С.

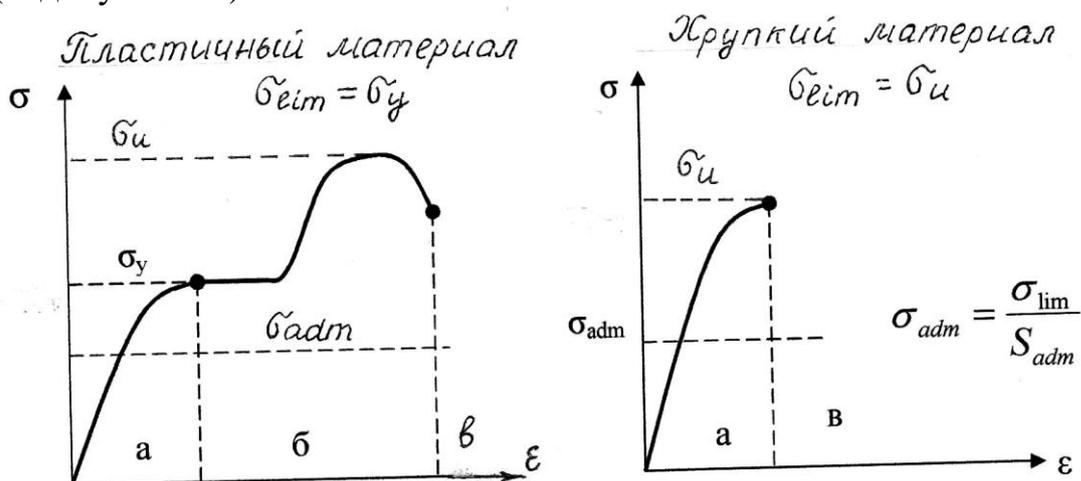


Рис. 8.1. Диаграммы растяжений для пластичного и хрупкого материала.

Момент перехода материала из упругого состояния в предельное при линейном Н.С. (растяжении, сжатии, чистом изгибе) и при простейшем двухосном Н.С. (чистом сдвиге, кручении) определяют экспериментальными испытаниями образцов. Это даёт возможность непосредственно сопоставлять напряжение, возникающее в опасной точке детали, с предельным напряжением и тем самым оценивать прочность детали. Для пластичных материалов предельным напряжением является предел текучести, для хрупких – предел прочности. Но при сложном Н.С. этот

способ расчета неприемлем. Во-первых, механические свойства материалов, а, значит, и предельные значения главных напряжений зависят от вида Н.С., т.е. от соотношения между σ_1 , σ_2 и σ_3 . При изменении вида Н.С. предельные значения главных напряжений меняются, может меняться даже характер разрушения. Так, чугун, хрупкий при линейном Н.С., при трехосном равномерном сжатии становится пластичным и, наоборот, пластичные при одноосном растяжении материалы при определенных соотношениях между главными напряжениями могут разрушаться как хрупкие. Значит, для оценки прочности этим способом при сложном Н.С. напряжения в опасной точке надо сопоставлять с предельными напряжениями, определенными для подобного Н.С., то есть для такого предельного Н.С., у которого такое же соотношение между главными напряжениями.

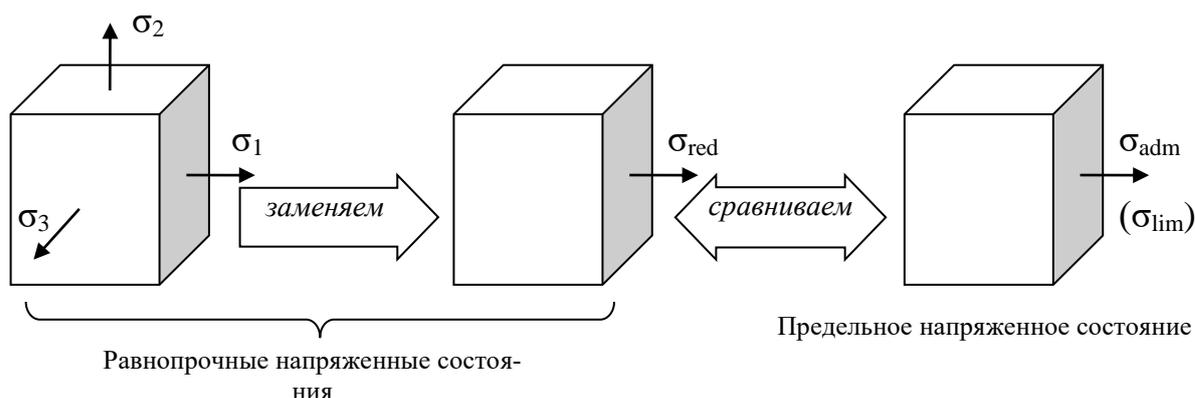


Рис. 8.2. Схема замены сложного Н.С. эквивалентным ему одноосным Н.С.

Если использовать этот способ, то для расчета в условиях сложного Н.С. необходимо было бы иметь экспериментально определённые значения предельных напряжений для всех возможных соотношений главных напряжений. Количество таких соотношений безгранично велико. Практически реализовать экспериментально бесчисленное множество таких напряжённых состояний невозможно. Поэтому пришлось оценивать прочность в условиях сложного Н.С., располагая только экспериментальными данными, полученными при линейном Н.С. Это стало возможным при применении так называемых **гипотез прочности**.

С помощью гипотез прочности реальный брус, в опасной точке которого возникает сложное Н.С., заменяют эквивалентным брусом (равнопрочным, с таким же коэффициентом запаса прочности), который испытывает осевое растяжение (рис. 8.2). Напряжение в поперечном сечении такого бруса назвали эквивалентным напряжением σ_{red} . Условие прочности для любого сложного напряженного состояния может быть записано в виде $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$.

Проблема заключается в том, как выразить σ_{red} через σ_1 , σ_2 и σ_3 , ведь это разные виды Н.С. Что считать критерием равнопрочности, или, иными словами, причиной перехода материала из рабочего в предельное состояние? Ими могут быть σ , τ , ε , u , u_f и т.д. Возникли предположения (гипотезы прочности) о преимущественном влиянии лишь одного из этих критериев. Каждая гипотеза прочности выбирает лишь один критерий и игнорирует остальные. Оказалось,

что не все гипотезы прочности подтверждаются на практике.

Рассмотрим лишь три классические гипотезы прочности, которые чаще всего сейчас используются (первая и вторая гипотезы почти не применяются).

8.2 Определение эквивалентных напряжений по различным гипотезам прочности

Единственным критерием истинности гипотез прочности является опыт, практика. Любая гипотеза прочности только тогда может считаться верной, когда она хорошо согласуется с действительностью, с наблюдаемыми фактами...

8.2.1 Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья Г.П.)

В основу этой гипотезы лежат известные данные о том, что пластическая деформация реализуется за счёт сдвига частиц, вызванного касательными напряжениями. Поэтому в качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое принято наибольшее касательное напряжение в точке. По этой гипотезе два Н.С. равноопасны, если максимальные касательные напряжения для них одинаковы.

Заданное Н.С.	Эквивалентное Н.С.	Предельное Н.С.
$\tau_{\max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) =$	$\tau_{\max} = 0.5\sigma_{red}^{III} \leq$	$\tau_{adm} = 0.5\sigma_{adm}$
Условие прочности:	$\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$	

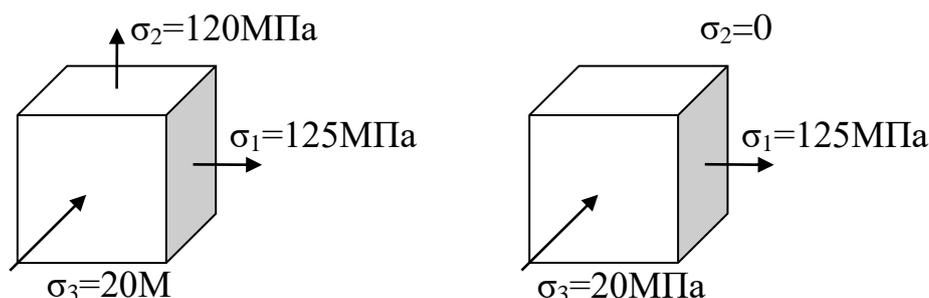


Рис. 8.3. Равноопасные по 3-й гипотезе прочности напряжённые состояния

Эта гипотеза прочности пригодна только для пластичных материалов. Для хрупких материалов она не применима. Очевидным недостатком её является пренебрежение влиянием промежуточного главного напряжения σ_2 . Так, по этой гипотезе напряжённые состояния, изображенные на рис. 8.3, равноопасны. У первого напряжённого состояния $\sigma_2 \approx \sigma_1$, а у второго $\sigma_2 = 0$, но эквивалентные напряжения для них одинаковы.

$$\sigma_{red}^I = \sigma_{red}^{II} = 125 - (-20) = 145 \text{ МПа}$$

Тщательно поставленные опыты показывают, что расхождение теории с экспериментом при использовании этой гипотезы достигает 15%.

8.2.2 Гипотеза удельной потенциальной энергии изменения формы (четвертая Г.П.)

По этой гипотезе два Н.С. равноопасны, если их удельные потенциальные энергии изменения формы равны.

Условие прочности: $u_{\phi} \leq u_{\phi adm}$.

Для трехосного Н.С. :

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1);$$

для эквивалентного одноосного Н.С.: $u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{red}^2$;

для предельного Н.С. $u_{\phi adm} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{adm}^2$,

Условие прочности по четвертой гипотезе прочности имеет вид:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_{adm}$$

Как видим, критерий эквивалентности содержит все три главные напряжения. Эта гипотеза точнее согласуется с опытными данными для пластичных материалов, чем гипотеза наибольших касательных напряжений. Для хрупких материалов она не применима.

Третья и четвертая гипотезы прочности базируются на правдоподобных гипотезах. Формулы для определения эквивалентного напряжения выводятся на основе принятого критерия эквивалентности. Эти гипотезы хорошо показывают, почему материал не разрушается при равномерном всестороннем сжатии, но не могут объяснить, почему он разрушается при равномерном трёхосном растяжении. Ведь при этом $\tau_{max} = 0$, $u_{\phi} = 0$, т.е. касательные напряжения вообще отсутствуют, форма не меняется, поэтому $\sigma_{red}^{III} = \sigma_{red}^{IV} = 0$.

Кроме рассмотренных было предложено большое количество других гипотез. Из них заслуживает внимания прежде всего гипотеза прочности О. Мора, позволяющая учесть различное сопротивление материалов растяжению и сжатию.

8.2.3 Гипотеза Мора (пятая Г.П.)

Мор обобщил и систематизировал опытные данные, приняв допущение, что главное напряжение σ_2 не влияет на прочность, и получил формулу для эквивалентного напряжения в таком виде:

$$\sigma_1 - m\sigma_3 = \sigma_1 - m\sigma_3$$

Отсюда вытекает условие прочности: $\sigma_{red}^V = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq \sigma_{adm}$.

Здесь для хрупких материалов: $m = \frac{\sigma_u^t}{\sigma_u^c} < 1$

для пластичных материалов: $m = \frac{\sigma_y^t}{\sigma_y^c} = 1$

Для пластичных материалов $m = 1$, поэтому $\sigma_{red}^V = \sigma_{red}^{III}$, то есть для пластичных материалов эквивалентные напряжения, вычисленные по третьей и пятой гипотезам одинаковы.

Пятая гипотеза, как и третья, пренебрегает главным напряжением σ_2 . Это существенный её недостаток. Эта гипотеза широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов. Но при этом достаточно точные результаты она даёт лишь для случаев, когда σ_1 и σ_3 имеют разные знаки, т.е. $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$ (в частных случаях σ_1 или σ_3 может быть равно 0). Отметим, что при решении задач Н.С. такого вида встречаются чаще всего.

8.3 Применение гипотез прочности для расчётов при упрощенном плоском напряжённом состоянии

Упрощенным плоским напряжённым состоянием называют такое напряжённое состояние, при котором в поперечном сечении возникают и нормальные и касательные напряжения, а на одной из продольных площадок по закону парности касательных напряжений – только касательные (рис. 8.4).

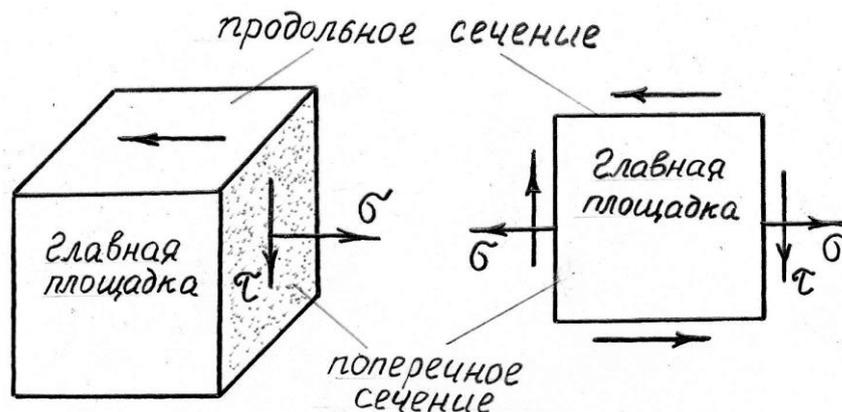


Рис. 8.4. Упрощенное плоское напряжённое состояние

Другая продольная площадка, перпендикулярная поперечному сечению, является главной площадкой. Такое Н.С. является для бруса наиболее общим случаем. Оно возникает почти во всех точках поперечных сечений брусьев, испытывающих изгиб с кручением, кручение с растяжением (сжатием), кручение с изгибом и растяжением при условии, что мы пренебрегаем касательными напряжениями, возникающими от поперечных сил.

Проанализируем упрощенное плоское Н.С. более подробно.

Совместим главную площадку (продольную площадку, на которой отсут-

ствуют и σ , и τ) с плоскостью чертежа (рис.8.4). Определим величину главных напряжений. Для этого временно проиндексируем напряжения в поперечном сечении индексом α (σ_α и τ_α), в продольном сечении – индексом β ($\sigma_\beta = 0, \tau_\beta = -\tau_\alpha$).

Тогда значения главных напряжений будут равны:

$$\sigma_{\min}^{\max} = 0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \pm 0.5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} = 0.5\sigma \pm 0.5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

В этой формуле второе слагаемое по модулю больше первого, то есть $\sigma_{\max} > 0, \sigma_{\min} < 0$. Итак, при упрощенном Н.С. $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$.

С учетом этого присваиваем индексы главным напряжениям:

$$\sigma_1 = 0.5\sigma + 0.5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0.5\sigma - 0.5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Положение главных площадок определять не будем.

По третьей гипотезе прочности: $\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$

По четвертой гипотезе прочности $\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2};$

По пятой гипотезе прочности $\sigma_{red}^V = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$

В дальнейшем мы будем определять эквивалентные напряжения σ_{red} непосредственно через напряжения σ и τ в поперечном сечении бруса. Это более удобно, так как при этом не потребуется каждый раз находить главные напряжения. По любой Г.П. условие прочности будет иметь вид: $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$.

Полученные расчётные формулы для упрощенного Н.С. используют для расчёта брусьев круглого поперечного сечения. Рассмотрим самый общий случай нагружения бруса, когда в поперечном сечении бруса одновременно возникают все шесть внутренних силовых факторов. Как мы условились ранее, влияние поперечных сил Q_x и Q_y учитывать не будем, поэтому опасные точки всегда совпадают с одной из точек контура поперечного сечения.

При этом расчётные напряжения для опасной точки будут равны:

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_u = \frac{N_z}{A} + \frac{M_u}{W_u}, \quad \text{где } M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; \quad \tau = \frac{M_z}{W_\rho}.$$

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm} \quad \sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$$

При расчёте валов, работающих на изгиб с кручением, учитывают, что $W_\rho = 2W_u$, и для упрощения условия прочности приводят к виду:

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{Mu}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{2W_\rho}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_z^2}}{W_u} \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{2W_\rho}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_z^2}}{W_u} \leq \sigma_{adm}$$

Валы изготавливают из среднеуглеродистой или легированной стали, их расчёт ведут по третьей или по четвёртой гипотезам прочности, поэтому значения σ_{red}^V определять не будем.

Проверочные вопросы.

Какая точка тела называется опасной?

В каких состояниях может находиться материал в зависимости от напряжённого состояния?

Какова цель расчёта на прочность?

Почему причина возникновения опасного состояния при одноосном напряжённом состоянии не имеет значения?

Чем характеризуется опасное состояние для пластичных и для хрупких материалов?

Почему расчёт при сложном напряжённом состоянии приходится вести на основе результатов опытов, полученных при испытаниях на одноосное напряжённое состояние?

В чём задача гипотез прочности? Почему существует несколько гипотез прочности?

В чём сущность третьей гипотезы прочности? Напишите условие прочности по этой гипотезе.

Укажите её недостатки и область применения.

В чём сущность четвёртой гипотезы прочности? Напишите условие прочности по этой гипотезе. Укажите область её применения.

Как определяются эквивалентные напряжения по гипотезе Мора? Укажите область применения гипотезы Мора.

Лекция 9. Сопротивление усталости

Литература: [1] §§99...105.

Эта тема имеет большое практическое значение, так как большинство деталей машин испытывает переменные, циклически изменяющиеся во времени напряжения и разрушается из-за «усталости». В этой лекции Вы познакомитесь с характеристиками циклов переменных напряжений, с причинами их возникновения. Познакомитесь Вы и с природой усталостного разрушения, с испытаниями образцов на выносливость, с основными факторами, влияющими на выносливость, с практическими расчётами деталей машин при переменных напряжениях...

9.1 Циклы переменных напряжений

Мы рассматривали расчёты на прочность деталей лишь при статическом нагружении. Однако преобладающая часть деталей машин при работе испытывает переменные, циклические напряжения. Это вызывается не только соответствующим характером нагрузки. Переменные напряжения могут возникать и при постоянных нагрузках в результате изменения положения детали по отношению к нагрузке. Например, при вращении детали, испытывающей изгиб, произвольная точка сечения оказывается то в растянутой зоне, то в сжатой (рис.9.3). Напряжения в таких точках циклически изменяются от σ_{\min} до σ_{\max} и обратно.

Совокупность всех последовательных значений напряжений за один период их изменения называют циклом напряжений.

Законы изменения напряжений в течение цикла представляют в форме простейших синусоид или косинусоид.

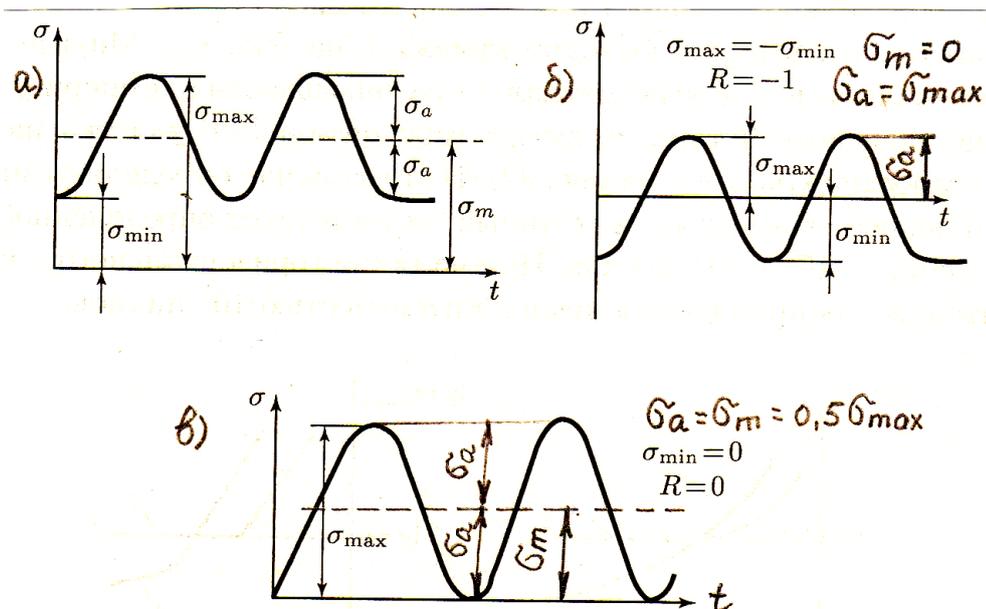


Рис. 9.1 Распространённые циклы переменных напряжений

Каждый цикл характеризуется следующими параметрами:

σ_{\max} – максимальное напряжение цикла;

σ_{\min} – минимальное напряжение цикла;

$\sigma_m = 0.5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$ – среднее напряжение цикла;

$\sigma_a = 0.5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$ – амплитуда цикла;

$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ – коэффициент асимметрии цикла (циклы, имеющие одинаковые коэффициенты асимметрии, называют подобными).

Напряжения σ_{\max} , σ_{\min} и σ_m могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Амплитуда цикла σ_a всегда положительна.

Рассмотрим самые распространённые циклы.

а) **асимметричный цикл** (рис.9.1а) (здесь – знакопостоянный, поэтому $R_\sigma > 0$);

б) **симметричный (синусоидальный) цикл** (рис.9.1.б), знакопеременный: $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $R = -1$. Это наиболее опасный цикл. По такому циклу изменяются напряжения изгиба во вращающихся валах;

в) **пульсирующий (отнулевой) цикл** (рис.9.1.в) $\sigma_{\min} = 0$, $R = 0$.

По такому циклу изменяются касательные напряжения кручения во вращающихся валах (в случае переменных касательных напряжений все приведенные

термины и соотношения остаются в силе с заменой σ на τ).

9.2 Природа усталостного разрушения

Усталостью материала называется процесс постепенного накопления необратимых повреждений материала при действии повторно-переменных напряжений, приводящий к образованию и росту трещин и последующему хрупкому разрушению...

Анализ поломок деталей машин показывает, что при переменных напряжениях разрушение деталей происходит при напряжениях цикла σ_{\max} , значительно меньших предельных σ_y и σ_u , но не сразу, а после определенного числа циклов нагружения. Разрушение при этом имеет хрупкий характер.

Это явление назвали **усталостным разрушением**.

Выделяют три стадии этого процесса:

I стадия – процесс накопления микроскопических повреждений в зонах концентрации напряжений, который приводит к появлению макротрещин.

II стадия – процесс роста усталостной трещины, в результате чего площадь сечения бруса уменьшается.

III стадия – внезапный излом, вызванный ослаблением сечения.

Сказанное подтверждает внешний вид поверхности излома деталей (рис. 9.2).

Даже пластичный материал в месте излома имеет две ярко выраженные зоны: *зона 1* – гладкая, отшлифованная (зона роста макротрещины, поверхности которой многократно трутся друг о друга и при этом шлифуются);

зона 2 – зона, имеющая крупнозернистый вид, шероховатая, матовая, т.е. характерная для хрупкого излома (*зона внезапного излома*).

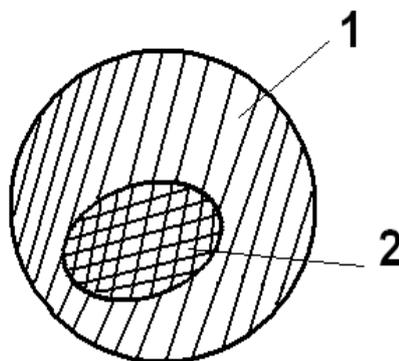


Рис. 9.2. Внешний вид поверхности излома детали

9.3 Испытания на выносливость. Предел выносливости

*Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения называют **выносливостью**, а проверку прочности при действии таких напряжений – расчётом на выносливость (расчётом на усталостную прочность)...*

Механические характеристики материала, необходимые для расчётов на

усталостную прочность, определяют экспериментально испытаниями образцов. Испытанию подвергают стандартные образцы, имеющие в рабочей части диаметр $d = 7 \dots 10$ мм и шероховатость не грубее $R_a = 0,32$.

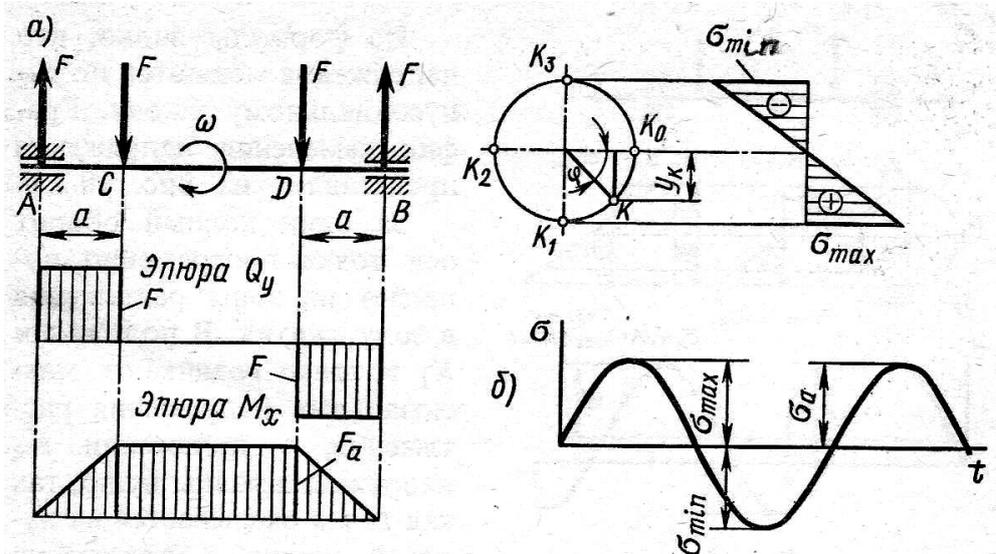


Рис. 9.3 Схема испытаний образца на усталостную прочность

Наиболее распространены испытания на изгиб при симметричном цикле напряжений, как самые легко осуществимые (рис.9.3). Напряжения в точке К при вращении образца изменяются по синусоидальному циклу.

$$\sigma_K = \frac{M_x}{J_x} y_K = \frac{M_x}{J_x} r \sin \omega t = \sigma_{\max} \sin \omega t, \text{ так как } \varphi = \omega t$$

Первый образец нагружают так, чтобы максимальное напряжение цикла было равно $\sigma_{\max} \approx 0.7\sigma_y$, в следующих образцах нагрузку постепенно уменьшают. Для каждого образца фиксируют с помощью счетчика оборотов число циклов до разрушения N .

По результатам испытаний строят графики зависимости числа циклов нагружения, которое выдержал образец до разрушения, от максимального напряжения цикла в образце σ_{\max} . Эти графики называют кривыми усталости (рис. 9.4).

По мере уменьшения σ_{\max} число циклов до разрушения быстро возрастает. Для мало и среднеуглеродистых сталей и ряда других материалов кривая усталости имеет горизонтальную асимптоту. Следовательно, при максимальном напряжении цикла, меньшем некоторой величины, образцы могут проработать, не разрушаясь, неограниченно долго.

Максимальное напряжение цикла, при котором не происходит усталостного разрушения образца после неограниченно большого числа циклов, называют пределом длительной выносливости.

Его обозначают σ_R (при симметричном цикле – σ_{-1} , при отнулевом – σ_0). При наличии горизонтального участка испытания ограничивают некоторым пределом - базовым числом циклов N_0 . Для стали $N_0 = 10^7$ циклов. Для углероди-

стой стали $\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_u$. Для легированной стали $\sigma_{-1} = 0,35 \sigma_u + (70 \dots 120) \text{ МПа}$

Для всех марок стали $\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1}$. Кривые усталости при $R_\sigma = -1$ описываются уравнением:

$$\sigma_{\max}^m N = \sigma_{-1}^m N_0 = \text{const}.$$

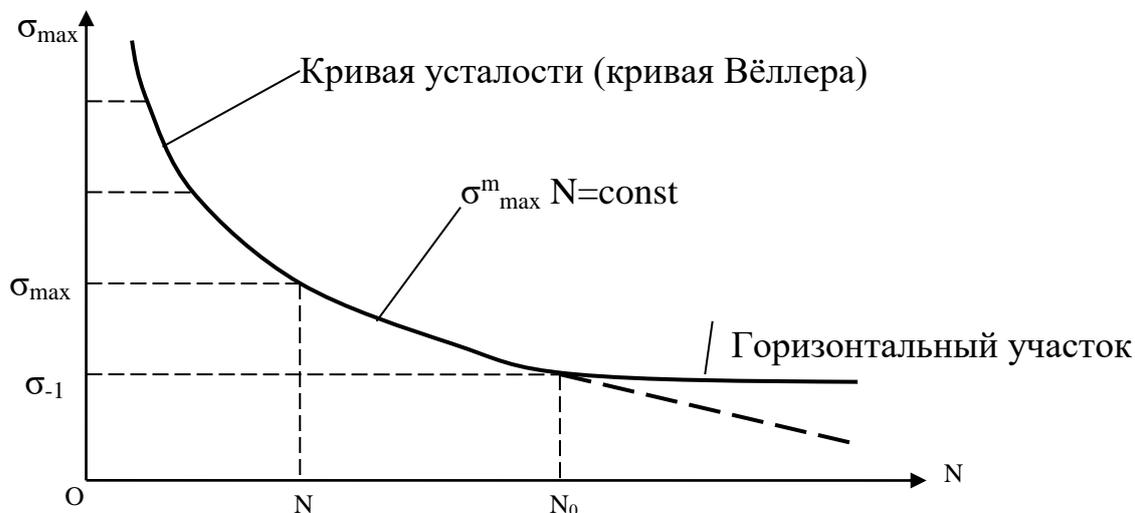


Рис. 9.4. Экспериментальная кривая усталости

Это позволяет при расчете деталей, не предназначенных для длительной эксплуатации, по известному напряжению цикла σ_{\max} определять число циклов нагружения до разрушения (ресурс)

$N = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\max}} \right)^m$, или, при известном числе циклов, которое должен выдержать образец, определять допускаемое значение максимального напряжения цикла

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}}.$$

Кривые усталости цветных металлов и сплавов, некоторых легированных сталей не имеют горизонтальной асимптоты, то есть эти материалы могут при достаточно большом числе циклов разрушаться даже при весьма малых напряжениях (*пунктирный участок кривой усталости*). В этом случае вводят понятие предела ограниченной выносливости, под которым понимают наибольшее напряжение цикла, при котором образец ещё не разрушается при числе циклов $N_0 = 10^8$.

Детали машин при работе испытывают напряжения, изменяющиеся во времени по самым разнообразным циклам. Для их расчета надо знать величину предела выносливости при циклах с различными коэффициентами асимметрии. Поэтому наряду с испытаниями при симметричном цикле проводятся испытания образцов при асимметричных циклах напряжений. Результаты таких испытаний обобщаются построением различных диаграмм предельных циклов и приведены в рекомендуемой литературе.

9.4 Основные факторы, влияющие на предел выносливости

Испытания на выносливость проводят на стандартных образцах для получения сопоставимых данных. А если образцы будут другого типа, то предел выносливости не изменится? Реальные детали существенно отличаются от стандартных образцов, можно ли при их расчётах пользоваться значениями предела выносливости, полученными испытаниями стандартных образцов? Ответ на эти вопросы отрицательный - нельзя. Значит, надо изучить, как и почему отличаются пределы выносливости деталей от пределов выносливости образцов...

Практика эксплуатации деталей машин показывает, что предел выносливости зависит от формы, размеров детали и целого ряда других факторов. Самое существенное влияние на предел выносливости оказывают концентрация напряжений, абсолютные размеры детали и состояние поверхности.

Влияние концентрации напряжений

В местах резкого изменения формы детали происходит значительное возрастание напряжений по сравнению с расчётными. Явление местного повышения напряжений называют концентрацией напряжений, а причина, вызывающая их, – концентратором напряжений. Типичными концентраторами напряжений являются: надрезы, выточки, шпоночные пазы, шлицы и т. д.

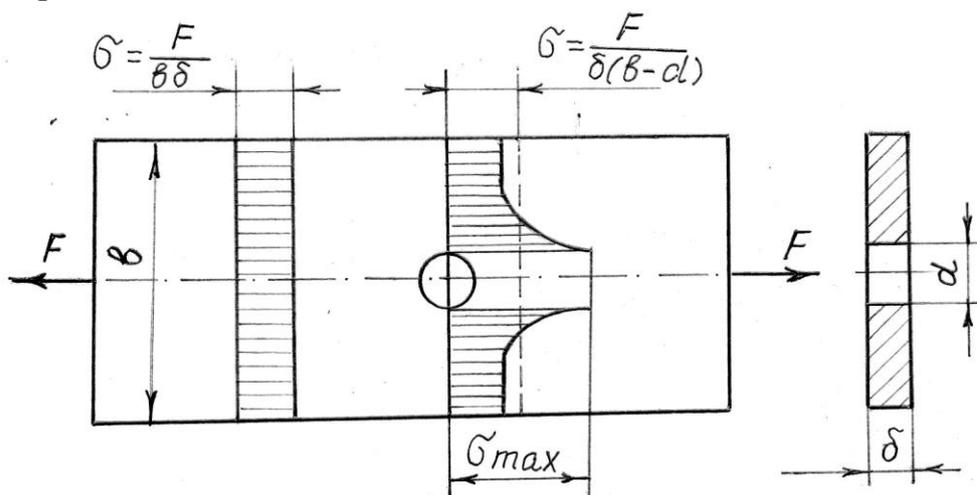


Рис.9.5. Концентрация напряжений в растянутой полосе

На рис. 9.5 показан пример концентрации напряжений в растянутой полосе, имеющей небольшое сквозное отверстие диаметром d . Опасным будет сечение, ослабленное отверстием, площадь которого $A = \delta(b - d)$.

Истинная картина распределения напряжений в этом сечении показывает, что в непосредственной близости к отверстию напряжения резко возрастают, а на небольшом удалении выравниваются. В теории упругости концентрацию напряжений оценивают теоретическим коэффициентом концентрации $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}$. Его значения могут достигать очень больших значений (до нескольких сотен).

При статической нагрузке для деталей из пластичных материалов концентрацию напряжений не учитывают. σ_{\max} не может быть больше предела текучести σ_y , при $\sigma_{\max} = \sigma_y$ возникают местные пластические деформации, что не влияет на прочность детали в целом, при этом происходит перераспределение нагрузки на соседние волокна и выравнивание напряжений. Волокна же хрупких материалов при $\sigma_{\max} = \sigma_u$ разрываются, вся нагрузка передаётся на соседние волокна, которые тоже разрываются, появляется микротрещина. Трещина быстро увеличивается, что приводит к разрушению детали.

При циклически изменяющихся напряжениях наличие концентратора снижает прочность и хрупких, и пластичных материалов. Это снижение учитывают экспериментально установленным экспериментально *эффективным коэффициентом концентрации напряжений* K_σ , который представляет собой отношение предела выносливости образца без концентрации напряжений к пределу выносливости такого же образца с концентратором напряжений:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}; \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}.$$

Уменьшить концентрацию напряжений можно различными конструктивными мерами (увеличением радиусов кривизны галтелей в местах ступенчатого изменения размеров поперечных сечений, разгружающими надрезами и т.д.).

Влияние абсолютных размеров поперечного сечения

С увеличением размеров сечений образцов предел выносливости снижается. Влияние размеров деталей учитывают *масштабным коэффициентом* ε :

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}; \quad \varepsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{\tau_{-1}},$$

где $(\sigma_{-1})_d$ – предел выносливости детали размером сечения d .

σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца диаметром $d = 7 \dots 10$ мм.

Эффект влияния абсолютных размеров сечения особенно существенно проявляется при изгибе и кручении и в меньшей степени при растяжении и сжатии.

Влияние шероховатости и качества поверхности детали

Шероховатость поверхности оказывает существенное влияние на предел выносливости. Это связано с тем, что усталостные микротрещины начинаются обычно с поверхности. Влияние шероховатости и качества поверхности на предел

выносливости учитывают коэффициентом K_F .:
$$K_F = \frac{(\sigma_{-1})_n}{\sigma_{-1}},$$

где σ_{-1} – предел выносливости образца с полированной поверхностью;

$(\sigma_{-1})_n$ – предел выносливости такого же образца с реальной шероховатостью поверхности.

Повысить усталостную прочность деталей можно тщательной обработкой поверхности, поверхностным упрочнением (дробеструйным наклепом, накаткой поверхности роликами, упрочнением ТВЧ, цементацией).

9.5 Расчеты на усталостную прочность

В настоящее время физические основы теории твёрдого тела не достигли такой стадии развития, чтобы на их базе можно было создать методы расчётов на усталостную прочность...

Все рассмотренные ранее расчёты носят приближённый характер и используются обычно лишь на стадии эскизного проектирования, потому что они не учитывают перечисленные выше факторы, существенно влияющие на работоспособность конструкции. Так как предел выносливости детали зависит от формы, размеров детали, состояния поверхности и при расчете все эти факторы надо учитывать, то расчет на усталостную прочность выполняют всегда как проверочный:

для предположительно опасных сечений (таких сечений может быть несколько) определяют коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативным (допускаемым) S_{adm} .

При таком расчёте условие прочности имеет вид: $S \geq S_{adm}$.

Значение нормативного коэффициента запаса прочности зависит от целого ряда обстоятельств, основными из которых являются:

- последствия, к которым приведет разрушение детали (степень ответственности детали);
- точность определения действующих на деталь нагрузок;
- способ получения заготовки.

Опыты показывают, что концентрация напряжений, размеры детали, состояние поверхности практически не влияют на предельные средние напряжения, поэтому их относят только к амплитудному напряжению цикла.

Коэффициенты запаса прочности соответственно по нормальным и по касательным напряжениям определяют по формулам (*запишем без вывода*):

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma} \sigma_a}{\varepsilon_{\sigma} K_F} + \psi \sigma_a} \quad S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau} \tau_a}{\varepsilon_{\tau} K_F} + \psi_{\tau} \tau_m}$$

Общий коэффициент запаса прочности при двухосном напряжённом состоянии (при расчёте бруса на изгиб с кручением, кручение с растяжением и т. п.) определяют по формуле:

$$S = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} \geq S_{adm}.$$

Полный вывод этих формул дан в учебнике [1] §104. Эти формулы справедливы для случая, когда σ и τ изменяются синхронно, т.е. одновременно дости-

гают своих экстремальных значений. Расчеты на прочность при несоблюдении этого условия даются в специальной литературе.

Проверочные вопросы.

Что называется циклом переменных напряжений?

Что называется средним, максимальным и минимальным напряжением, амплитудой, коэффициентом асимметрии цикла переменных напряжений?

Что представляют собой симметричный и пульсирующий циклы?

Что называется усталостью? Опишите характер усталостного разрушения.

Что представляет собой кривая усталости (кривая Веллера) и как её получают?

Что называется пределом выносливости?

Какую величину называют базовым числом цикла?

Какие напряжения называют местными?

Что такое концентратор напряжения? Приведите примеры концентраторов напряжений.

Что называют теоретическим коэффициентом концентрации напряжений?

Что называют эффективным коэффициентом концентрации напряжений?

Как влияют размеры детали на предел выносливости? Что такое масштабный коэффициент?

Как влияет на предел выносливости шероховатость поверхности?

Как влияют на предел выносливости обкатка поверхности роликами и обдувка её дробью?

Почему уточнённые расчёты на усталостную прочность выполняют как проверочные?

Как определяют коэффициент запаса прочности для вала, работающего на совместное действие изгиба и кручения?

Лекция 10. Расчеты сжатых стержней на устойчивость

Литература: [1] §§83...91.

Выражения «потеря устойчивости», «расчет на устойчивость» мы употребляем для краткости речи. На самом деле при силе, равной критической, форма устойчивого равновесия стержня (прямолинейная) сменяется формой неустойчивого равновесия (криволинейной). Но с позиций практики эта криволинейная форма не устраивает, так как она связана с возникновением недопустимо больших перемещений и напряжений, с выходом конструкции из строя.

10.1 Устойчивые и неустойчивые формы равновесия

Равновесное положение системы считается устойчивым, если после случайного отклонения система стремится к своему первоначальному положению. Наиболее простым случаем является потеря устойчивости центрально-сжатого стержня.

Пока сила F мала, длинный стержень сохраняет первоначальную форму равновесия (рисунок 10.1 а). Если попытаться отклонить его в сторону, стержень после ряда колебаний возвратится к первоначальной прямолинейной форме. При увеличении силы F стержень все медленней возвращается в первоначальное положение, а при некотором значении $F_{кр}$, называемом критическим, прямолинейная форма перестает быть устойчивой формой равновесия, стержень внезапно искривляется (рисунок 10.1 б).

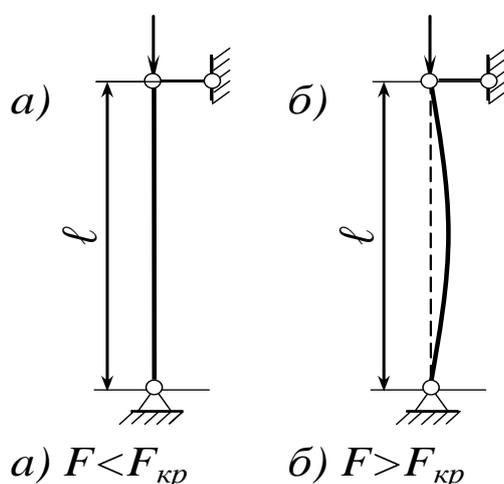


Рисунок 10.1 Пример потери устойчивости центрально – сжатого стержня

10.2 Формула Эйлера для критической силы

Для нормальной работы конструкции потеря устойчивости не допустима. Для обеспечения определённого запаса устойчивости должно соблюдаться условие $F \leq [F] = F_{кр} / S_y$, где S_y – заданный (требуемый) коэффициент запаса устойчивости. Критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \pi^2 E J_{\min} / (\mu \cdot \ell)^2,$$

где J_{\min} – минимальный момент инерции поперечного сечения;

ℓ – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня (рисунок 10.2).

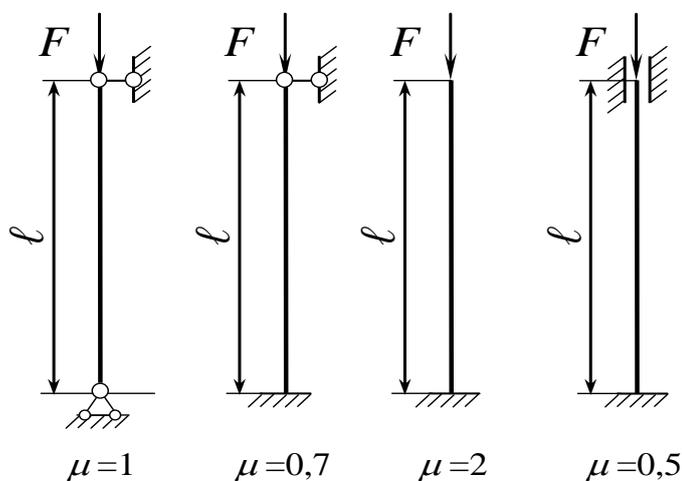


Рисунок 10.2 Способы закрепления концов сжатого стержня

Напряжения, возникающие в стержне при $F = F_{кр}$, называют критическими

$$\sigma_{кр} = F_{кр} / A = \pi^2 E / \lambda^2,$$

где $\lambda = \mu \ell / i_{\min}$ – гибкость стержня;

$i_{\min} = \sqrt{(J_{\min} / A)}$ – минимальный главный радиус инерции сечения стержня.

10.3 Пределы применимости формулы Эйлера. Практическая формула для расчёта на устойчивость

Формула Эйлера применима при условии, что критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$ не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{\text{пр}}$, то есть $\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 \cdot E / \lambda^2 \leq \sigma_{\text{пр}}$.

Обычно условие применимости формулы Эйлера выражают через гибкость стержня: $\lambda \geq \lambda_{\text{н}} = \sqrt{(\pi^2 \cdot E / \sigma_{\text{пр}})}$.

Как показывают опыты, стержень может потерять устойчивость и при $\lambda < \lambda_{\text{н}}$ (в пластической стадии), когда формула Эйлера неприменима. В этом случае значение критического напряжения вычисляют по формуле Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda,$$

где a, b – опытные коэффициенты (таблица 10.1).

Таблица 10.1. Значения $\lambda_0, \lambda_{\text{н}}$, коэффициентов a и b для некоторых сталей.

Материал	$a, \text{МПа}$	$b, \text{МПа}$	λ_0	$\lambda_{\text{н}}$
Сталь Ст2	264	0,7	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20	328	1,15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85

При некотором значении гибкости λ_0 (таблица 10.1) величина $\sigma_{\text{кр}}$, вычисленная по формуле Ясинского Ф.С., становится равной предельному напряжению при сжатии, то есть пределу текучести σ_y для пластичных или пределу прочности σ_b для хрупких материалов. Поэтому стержни, у которых $\lambda \leq \lambda_0$, называют стержнями малой гибкости и их рассчитывают только на прочность.

На практике при расчёте на устойчивость принято пользоваться не допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma_y]$, а допускаемым напряжением на сжатие $[\sigma_c]$, умноженным на коэффициент φ .

Расчётная формула имеет вид $\sigma = F / A \leq \varphi \cdot [\sigma_c]$,

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения сжатия (коэффициент продольного изгиба (таблица 10.2)).

Таблица 10.2 Значения коэффициента φ для сталей Ст2, Ст3, Ст4.

Гибкость $\lambda = \mu \ell / i$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ	1	0.99	0.96	0.94	0.92	0.89	0.86	0.81	0.75	0.69

Продолжение таблицы 10.2

Гибкость $\lambda = \mu \ell / i$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
φ	0,6	0,52	0,45	0,4	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21

10.4 Виды расчётов на устойчивость. Пример расчёта

Различают два вида расчёта на устойчивость: проверочный и проектировочный.

• Проверочный расчёт

Заданы размеры, форма сечения, длина стержня, материал, нагрузка, условия закрепления концов. Определяют $[\sigma_c]$, J_{\min} , A , i_{\min} , λ . Зная λ , находят коэффициент φ и выясняют, удовлетворяется ли условие прочности $\sigma = F / A \leq \varphi \cdot [\sigma_c]$.

Аналогично определяют допускаемую нагрузку $[F]$.

• Проектировочный расчёт

Площадь поперечного сечения определяют по формуле:

$$A = F / (\varphi \cdot [\sigma_c]).$$

В эту формулу входят две неизвестные величины: A и φ . Поэтому коэффициентом φ предварительно задаются, при подборе сечения используют метод последовательных приближений.

При первом приближении принимают $\varphi_1' = 0,5$. Затем определяют A , подбирают сечение, вычисляют J_{\min} , i_{\min} , λ и устанавливают фактическое значение φ_1 .

Если φ_1 значительно отличается от φ_1' , повторяют расчёт, приняв $\varphi_2' = (\varphi_1 + \varphi_1') / 2$. Если потребуется третье приближение, то принимают $\varphi_3' = 0,5 (\varphi_2 + \varphi_2') / 2$. и т.д.

Обычно на практике двух-трёх приближений бывает достаточно, чтобы сечение вполне определилось.

Задача 10.1

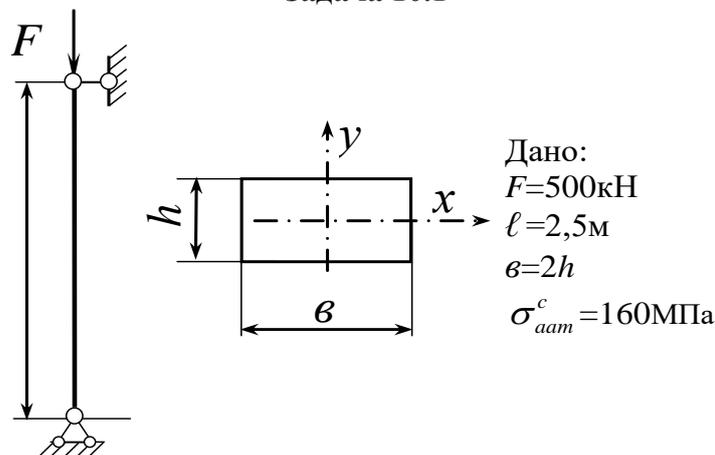


Рисунок 10.3 К задаче 10.1

Стальная стойка прямоугольного поперечного сечения сжата осевой силой $F = 500 \text{ кН}$ (ри-

сунок 10.3). Отношение сторон прямоугольного сечения $b/h = 2$. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c] = 160$ МПа. Длина стойки $\ell = 2,5$ м. Один конец стойки закреплен с помощью шарнирно - неподвижной, другой – с помощью шарнирно - подвижной опоры, следовательно, коэффициент приведения длины $\mu = 1$.

Определить размеры сечения $b \times h$, значение критической силы $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости.

Решение.

Опасной является потеря устойчивости в плоскости YZ , так как момент инерции поперечного сечения относительно оси X имеет наименьшее значение. $J_{min} = J_x = b \cdot h^3 / 12 = h^4 / 6$. Минимальный радиус инерции $i_{min} = \sqrt{(J_{min} / A)} = \sqrt{(h^4 / (6 \cdot b \cdot h))} = 0,29 \cdot h$. Гибкость стержня $\lambda = \mu \ell / i_{min} = 1 \cdot 2,5 / (0,29 \cdot h) = 8,62 / h$.

Принимаем сначала $\varphi_1' = 0,5$. Определяем h из формулы $A = b \cdot h = 2 \cdot h^2 \leq F / (\varphi_1' \cdot [\sigma_c])$. $h = \sqrt{(F / (2 \cdot \varphi_1' \cdot [\sigma_c]))} = \sqrt{(500 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6))} = 0,056$ м. Тогда гибкость стержня $\lambda = 1 \cdot 2,5 / (0,29 \cdot h) = 1 \cdot 2,5 / (0,29 \cdot 0,056) = 154$. По таблице 10.2 при $\lambda = 154$ $\varphi_1 = 0,308$. Следовательно, выбранное значение φ_1' сильно завышено.

Во втором приближении принимаем $\varphi_2' = 0,5$ ($\varphi_1' + \varphi_1$) = $0,5$ ($0,5 + 0,308$) = $0,404$. Тогда $h = \sqrt{(500 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,404 \cdot 160 \cdot 10^6))} = 0,062$ м. $\lambda = 1 \cdot 2,5 / (0,29 \cdot 0,062) = 139$. По таблице 10.2 при $\lambda = 139$ $\varphi_2 = 0,364$. Значение φ_2' является завышенным.

Сделаем третью попытку. Принимаем $\varphi_3' = 0,5$ ($\varphi_2' + \varphi_2$) = $0,5$ ($0,404 + 0,364$) = $0,384$. Тогда $h = \sqrt{(500 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,384 \cdot 160 \cdot 10^6))} = 0,064$ м. $\lambda = 1 \cdot 2,5 / (0,29 \cdot 0,064) = 135$. По таблице 10.2 при $\lambda = 135$ $\varphi_3 = 0,38$, что близко к принятому значению $\varphi_3' = 0,385$.

Таким образом, окончательно принимаем $h = 0,064$ м = 64 мм; $b = 2 \cdot h = 2 \cdot 64 = 128$ мм.

Площадь сечения $A = b \cdot h = 0,128 \cdot 0,064 = 8,2 \cdot 10^{-3}$ м².

Допускаемое напряжение на устойчивость: $[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,38 \cdot 160 = 60,8$ МПа.

Определим критическую силу. Так как гибкость стержня $\lambda = 135$ больше $\lambda_{пред} = 100$, то критическую силу определяем по формуле Эйлера. $F_{кр} = \pi^2 E J_{min} / (\mu \ell)^2 = 3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} / (1 \cdot 2,5)^2 = 928 \cdot 10^3$ Н. Здесь $J_{min} = b \cdot h^3 / 12 = 0,128 \cdot 0,064^3 / 12 = 2,8 \cdot 10^{-6}$ м⁴.

Расчётный коэффициент запаса устойчивости:

$$S_y = F_{кр} / F = 928 \cdot 10^3 / 500 \cdot 10^3 = 1,86.$$

Проверочные вопросы

В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?

Что называют критической силой?

По какой формуле следует определять критическую силу для стержней большой гибкости?

Для каких стержней применима формула Ф.С. Ясинского?

Какие параметры влияют на величину критической силы?

Что называется гибкостью стержня?

Для каких значений гибкости стержня применима формула Эйлера?

Как учитывается влияние способа закрепления концов стержня?

Что такое коэффициент φ и от чего зависит его числовое значение?

Что такое коэффициент запаса устойчивости?

Рекомендация к экзамену. Не в количестве знаний заключается образование, а в полном понимании и умелом применении того, что знаешь... Студент, не решивший экзаменационную задачу, не может получить удовлетворительную оценку...

Рекомендуемая литература

1. Степин П.А. Сопротивление материалов: Учебник для студентов горно-металлургических, химико-технологических, теплоэнергетических, электромашиностроительных и инженерно - экономических специальностей вузов. М.: Высшая школа, 1983. – 312с.
2. Иосилевич Г.Б, Строганов Г.Б., Маслов Г.С. Прикладная механика: Учебник для немашиностроительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1989.-351с.
3. Цыцора В.Я. Механика. Сборник индивидуальных заданий и методических указаний. Часть I. Сопротивление материалов. НИ РХТУ им. Д.И. Менделеева. Новомосковск, 2008. – 80с
4. Цыцора В.Я. Тесты по прикладной механике. Учебно-методическое пособие. /Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт. Новомосковск, 2005. – 87с.

Содержание

Лекция 1. Основные положения	
1.1	Задачи сопротивления материалов..... 3
1.2	Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов.....5
1.3	Метод сечений. Внутренние силовые факторы.7
1.4	Напряжения.....9
	Проверочные вопросы.....11
Лекция 2. Растяжение и сжатие	
2.1	Основные определения. Внутренние силовые факторы.....12
2.2	Напряжения в поперечных сечениях.....14
2.3	Деформации и перемещения. Закон Гука.....15
2.4	Механические характеристики материалов.....16
2.5	Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности.....22
2.6	Расчеты на прочность и жесткость.....23
2.7	Статически неопределимые системы.....25
	Проверочные вопросы.....28
Лекция 3. Основы теории напряжённого состояния	
3.1	Напряжения в наклонных сечениях при центральном растяжении.....29
3.2	Напряжённое состояние в точке.....31
3.3	Исследование двухосного напряжённого состояния.....32
3.4	Объемное напряжённое состояние. Обобщённый закон Гука.....35
	Проверочные вопросы.....37
Лекция 4. Геометрические характеристики плоских сечений	
4.1	Статические моменты плоских сечений.....37
4.2	Моменты инерции плоских сечений.....38
4.3	Моменты инерции некоторых простейших сечений.....40
4.4	Главные оси и главные моменты инерции.....41
	Проверочные вопросы.....42

Лекция 5. Сдвиг и кручение	
5.1 Чистый сдвиг.....	43
Проверочные вопросы.....	45
5.2 Кручение.....	45
5.2.1 Основные понятия. Внутренние силовые факторы	45
5.2.2 Напряжения и перемещения при кручении.....	47
5.2.3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	50
Проверочные вопросы.....	51
Лекция 6. Прямой изгиб	
6.1 Терминология и определения.....	51
6.2 Опоры и опорные реакции.....	52
6.3 Поперечные силы и изгибающие моменты.....	53
6.4 Дифференциальная зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки.....	54
6.5 Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.....	55
6.6 Нормальные напряжения при чистом изгибе.....	58
6.7 Расчеты на прочность при изгибе.....	61
6.8 Расчёт на жёсткость при изгибе.....	63
Проверочные вопросы.....	64
Лекция 7. Сложное сопротивление	
7.1 Косой изгиб.....	65
7.2 Изгиб с растяжением (сжатием) бруса большой жёсткости.....	67
7.3 Внецентренное растяжение и сжатие.....	69
Проверочные вопросы.....	70
Лекция 8. Гипотезы прочности	
8.1 Назначение и физическая сущность гипотез прочности.....	71
8.2 Определение эквивалентных напряжений по различным гипотезам прочности.....	73
8.3 Применение гипотез прочности для расчётов при упрощенном плоском.....	
напряжённом состоянии	75
Проверочные вопросы.....	77
Лекция 9. Сопротивление усталости	
9.1 Циклы переменных напряжений.....	77
9.2 Природа усталостного разрушения.....	79
9.3 Испытания на выносливость. Предел выносливости.....	79
9.4 Основные факторы, влияющие на предел выносливости.....	82
9.5 Расчеты на усталостную прочность	84
Проверочные вопросы.....	85
Лекция 10. Расчёты сжатых стержней на устойчивость	
10.1 Устойчивые и неустойчивые формы равновесия.....	85
10.2 Формула Эйлера для критической силы.....	85
10.3 Пределы применимости формулы Эйлера. Практическая формула для расчёта на устойчивость.....	86
10.4 Виды расчётов на устойчивость. Пример расчёта.....	87
Рекомендуемая литература.....	90

Учебное издание

Механика. Прикладная механика.

Часть первая. Сопротивление материалов

Конспект лекций

Учебно – методическое пособие

Составитель: Цыцора Владимир Яковлевич
Суменков Александр Леонидович

Текст репродуцирован с оригинала автора.

Подписано в печать. Формат 60×84 1/16
Бумага «Sveto Copy». Отпечатано на ризографе.
Усл. печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ №

ГОУ ВПО «Российский химико - технологический университет им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.
Адрес университета: 125047. Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульская обл., Дружбы, 8.