**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации**

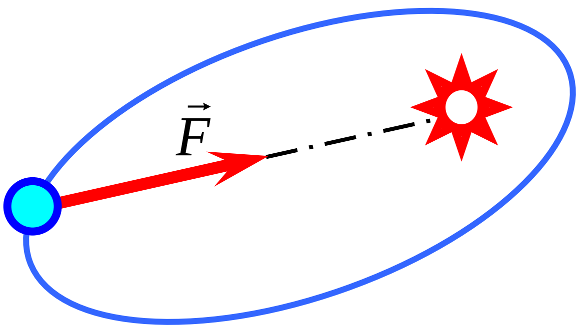
**ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

Н.П. Сигаев, А.В. Бегова, А.И. Зимин, А.Л. Суменков

Сборник расчётных заданий по теоретической механике

Часть 1



**Новомосковск
2011**

УДК 531
ББК 22.21
С 232

Рецензенты:
заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика»
к.т.н., доцент Филимонов В.Н.
(Владимирский государственный университет
им. А.Г. и Н.Г.Столетовых)
заведующий кафедрой «Оборудование химических производств»
д.т.н., профессор Сафонов Б.П.
(Новомосковский институт РХТУ им. Д.И. Менделеева)

Сигаев Н.П., Бегова А.В., Зимин А.И., Суменков А.Л.

Т 338 **Сборник расчетных заданий по теоретической механике. Часть 1.** Учебное пособие для самостоятельной работы студентов/ФГБОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Новомосковск, 2011. - 112 с.

Учебное пособие по теоретической механике, подготовленное преподавателями кафедр «Техническая механика» и «Оборудование химических производств», предназначено для самостоятельной работы студентов - выполнению расчётных заданий, предусмотренных учебными программами по теоретической механике (механике). Особое внимание обращено на алгоритмы решения задач.

Пособие может быть использовано студентами всех специальностей и всех форм обучения, изучающими курс теоретической механики в НИ РХТУ им. Д.И. Менделеева.

УДК 531
ББК 22.21

Предисловие

Государственными образовательными стандартами для студентов большинства специальностей Новомосковского института РХТУ им. Д.И. Менделеева предусмотрено изучение теоретической механики, а соответствующими учебными программами - выполнение расчётных заданий, имеющее своей целью приобретение твёрдых навыков в решении задач.

Необходимость подготовки настоящего учебного пособия по теоретической механике обусловлена двумя основными факторами. Во-первых, со времени выхода из печати серии соответствующих методических указаний, призванных помочь студентам НИ РХТУ в выполнении курсовых работ, прошло около 25 лет. За это время изменилось многое: содержание учебных программ по теоретической механике, объём самостоятельной работы студентов, средний уровень и содержание довузовского образования. Во-вторых, уровень развития вычислительной техники, широкое распространение мощных пакетов математического моделирования (MathCAD и др.), не требующих специальных знаний в программировании и вполне доступных для студентов, позволяет не только расширить область решаемых задач и уменьшить трудоёмкость вычислений, но и уделять большее внимание анализу полученных результатов.

Настоящее учебное пособие по теоретической механике является пособием для самостоятельной работы студентов. Оно состоит из учебно-методических материалов, представляющих все основные разделы курса теоретической механики, предусмотренные учебными программами. Структура каждого из 8 расчётных заданий, составляющих предлагаемое пособие, одинакова: задание содержит краткие сведения из теории, указания по выполнению задания, собственно задание, пример выполнения задания. Решение задач механики невозможно без изучения теории (хотя бы в минимальном объёме). Исходя из этого, пособие содержит лишь краткие сведения из теории; поэтому обучающимся следует учитывать, что необходимым условием полного овладения курсом является использование учебника (учебников) и конспекта лекций.

Особое внимание обращено на алгоритмы решения задач, некоторые из которых являются собственными методическими разработками авторов.

Примеры выполнения заданий заканчиваются анализом полученных результатов.

Настоящее учебное пособие подготовлено преподавателями кафедр «Техническая механика» и «Оборудование химических производств»: расчётные задания К-1, Д-1 – профессором Сигаевым Н.П., С-1, С-3, Д-2 – доцентом Беговой А.В., С-2, К-2 – доцентом Зиминым А.И., Д-3 - доцентом Суменковым А.Л.

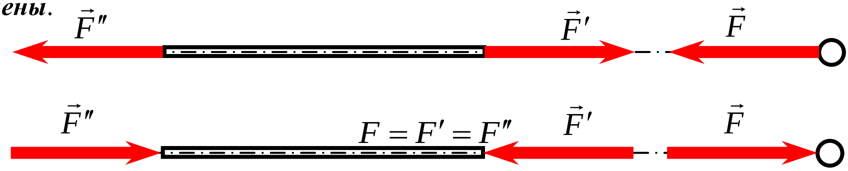
Общее редактирование осуществлялось Сигаевым Н.П.

Замечания и пожелания по содержанию и оформлению пособия просьба направлять на кафедру «Техническая механика» (tehmeh@mail.ru).

С1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

С1.1. Краткие сведения из теории

Под ***стержнем*** в механике понимают тело, поперечными размерами которого можно пренебречь по сравнению с его длиной. Точка, в которой пересекаются несколько стержней, называется ***узлом***. Конструктивно узел можно представить как геометрическую точку (центр), к которой шарнирно присоединяются стержни. В задании рассматриваются конструкции, состоящие из прямолинейных стержней. Поскольку при выполнении задания трением в шарнирах и собственным весом стержней пренебрегают, а внешние нагрузки приложены в узлах, можно считать, что на каждый стержень действуют лишь две силы, приложенные по его концам. Так как по условиям задачи стержень находится в равновесии, силы эти должны находиться на одной прямой, быть равными по величине и противоположно направленными. Очевидно, что если силы, **действующие на стержень** и приложенные к его концам, направлены от стержня, то стержень растянут, в противном случае он сжат. С другой стороны, **силы, действующие на узел со стороны стержней**, в соответствии с III законом Ньютона, равны по величине **силам, действующим на стержни со стороны узлов, и *противоположно направлены***.



Следовательно, **если сила**, действующая на узел, **направлена от** этого **узла**, **то** соответствующий **стержень растянут**; **если** же **сила**, действующая на узел, **направлена к** этому **узлу**, **то стержень сжат**.

На каждый узел заданной стержневой конструкции действует пространственная система сил, сходящихся в точке. Для такой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия, с помощью которых можно определить три неизвестных усилия в стержнях:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_X &= 0, \\ \sum F_Y &= 0, \\ \sum F_Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(C1.1)}$$

Поэтому определение усилий проще начинать с узла, в котором сходится не более трех стержней.

С1.2. Указания по выполнению задания

При выполнении задания усилия в стержнях можно обозначить буквой S с индексом соответствующего стержня. Поскольку направления этих усилий, как правило, неизвестны, их обычно направляют от узлов, считая, таким образом, все стержни растянутыми. Отрицательный знак при подсчитанной величине усилия означает, что соответствующий стержень сжат. При переходе от узла к узлу необходимо, учитывать закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона), и, следовательно, изменив направление соответствующего усилия на противоположное, подставлять численное значение подсчитанного усилия **с учётом полученного** знака.

В уравнения равновесия, составленные для двух узлов, входят тригонометрические функции углов. Поскольку в настоящем задании даны размеры конструкции, легко вычислить необходимые значения этих функций по известным размерам. При этом подсчитывать значения углов нет необходимости.

В качестве проверки необходимо составить уравнение равновесия узла D, записав уравнение суммы проекций сил, приложенных к этому узлу, на ось, совпадающую с главной диагональю параллелепипеда, и сравнить полученную сумму с нулём.

Результаты расчетов удобно свести в таблицу.

Последовательность выполнения задания.

1. Уяснить условие задания, выполнить рисунок.
2. Выбрать тело (узел), равновесие которого будет рассматриваться сначала.
3. Изобразить силы, действующие на выбранный узел: активные и реакции связей (стержней). Установить вид полученной системы сил.
4. Выбрать удобные оси координат.
5. Записать соответствующие полученной системе сил уравнения равновесия и решить их.
6. Выбрать второй узел, равновесие которого будет рассматриваться теперь.
7. Выполнить действия 3-5 для второго узла.
8. Выполнить проверку, составив уравнение суммы проекций сил, приложенных к узлу D, на ось, совпадающую с главной диагональю параллелепипеда, и сравнить полученную сумму с нулём. Подсчитать относительную погрешность.
9. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

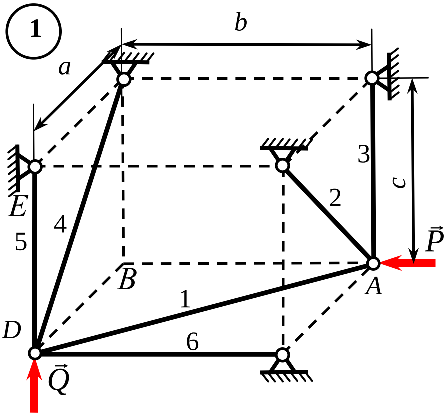
С1.3. Собственно задание

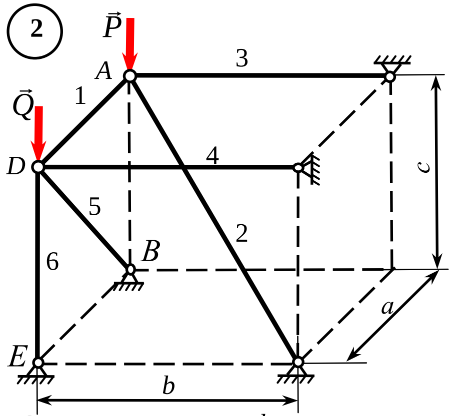
Методом вырезания узлов найти усилия в стержнях шарнирно - стержневой конструкции. Сила $\vec{P}$ действует в направлении AB, сила $\vec{Q}$ - в направлении DE. Данные для расчета приведены в таблице **С1.1**, расчетные схемы – в таблице **С1.2**.

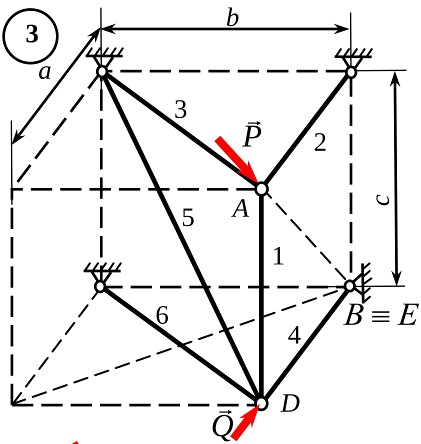
Таблица С1.1. Исходные данные.

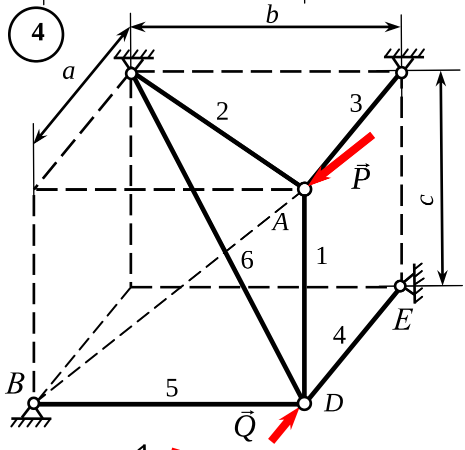
№	*P* *кН*	*Q* *кН*	*a* *м*	*b* *м*	*c* *м*	№	*P* *кН*	*Q* *кН*	*a* *м*	*b* *м*	*c* *м*
1.	2	3	3,0	2,0	2,0	**16.**	9	4	3,0	3,5	4,0
2.	4	5	2,0	4,5	1,0	**17.**	2	5	4,0	5,0	3,0
3.	6	2	1,0	3,0	2,0	**18.**	4	7	2,0	3,0	4,0
4.	8	4	2,5	4,0	3,0	**19.**	6	3	3,0	2,5	3,0
5.	3	1	3,0	4,5	2,0	**20.**	8	3	4,0	3,5	4,0
6.	5	2	4,0	5,0	3,0	**21.**	3	8	2,0	3,0	4,0
7.	7	4	4,0	5,5	4,0	**22.**	5	4	4,0	5,0	4,0
8.	9	6	3,0	4,0	3,0	**23.**	7	2	3,0	3,5	2,0
9.	2	3	2,0	3,0	4,0	**24.**	9	4	2,0	3,0	4,0
10.	4	2	4,0	5,0	3,0	**25.**	2	9	3,0	4,0	3,0
11.	6	5	2,0	2,0	4,0	**26.**	4	6	4,0	5,0	3,0
12.	8	7	3,0	4,0	3,0	**27.**	6	3	2,0	3,0	4,0
13.	3	9	4,0	5,0	4,0	**28.**	8	2	2,5	3,0	4,0
14.	5	2	2,0	4,5	2,0	**29.**	3	7	3,0	4,0	3,0
15.	7	4	3,0	5,0	2,0	**30.**	5	2	4,0	3,0	4,0

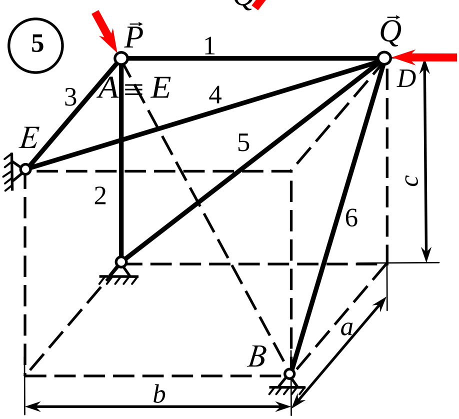
Таблица С1.2. Расчётные схемы.

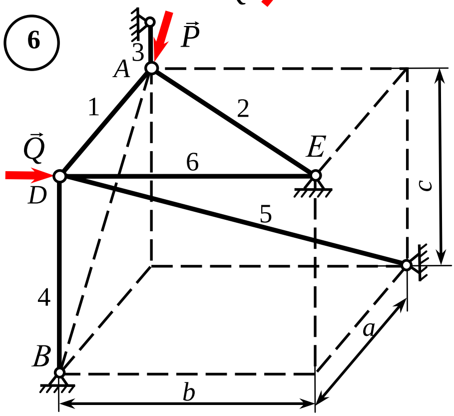




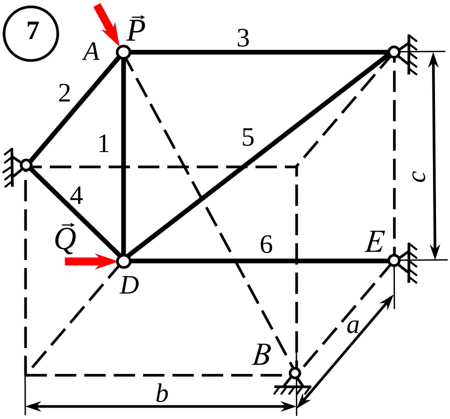




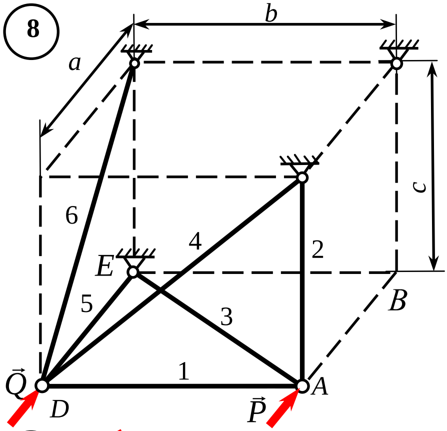




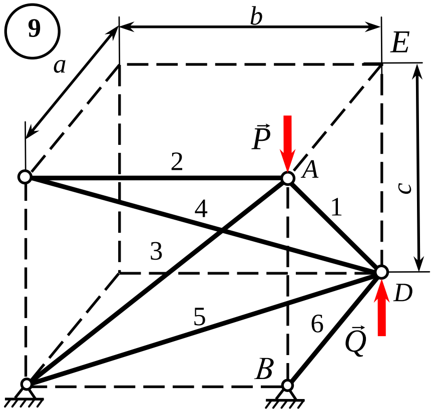
7


$\vec{P}$
A
3
2
1
5
4
$\vec{Q}$
6
E
D
c
B
a
b

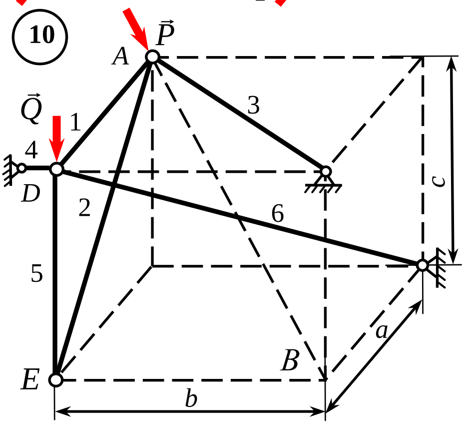
8


b
a
c
6
4
2
E
5
3
B
1
$\vec{Q}$
A
D
$\vec{P}$

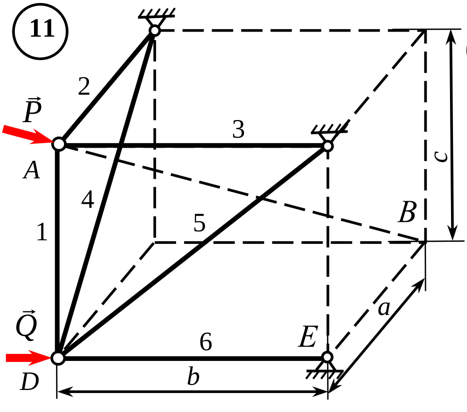
9


b
E
a
c
$\vec{P}$
2
A
4
1
3
D
5
6
$\vec{Q}$
B

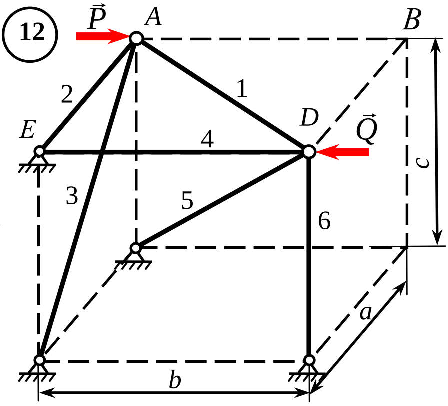
10

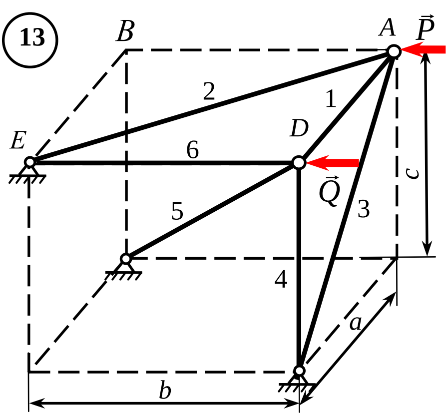

$\vec{P}$
A
3
$\vec{Q}$
1
4
D
2
6
c
5
a
B
E
b

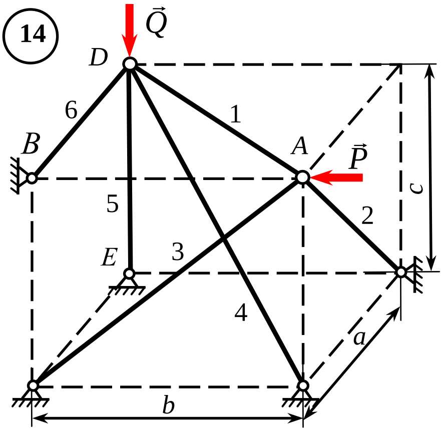
11

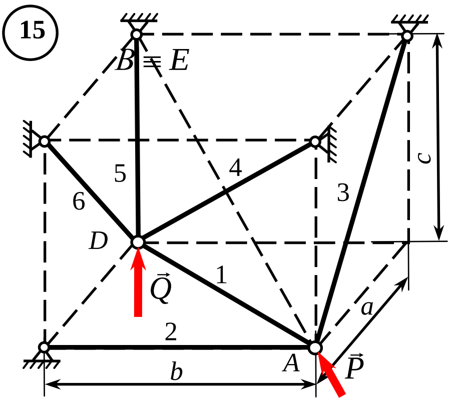

2
$\vec{P}$
3
c
A
4
5
B
1
$\vec{Q}$
6
E
a
D
b

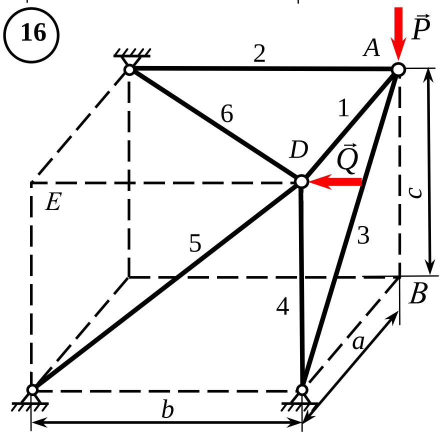
12

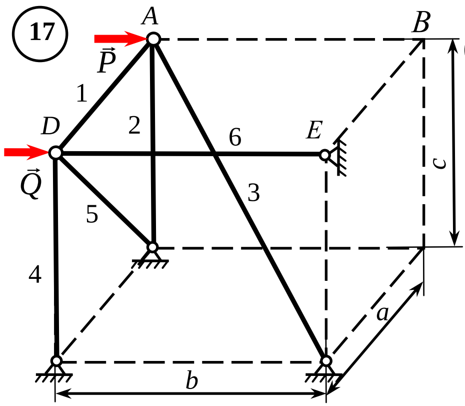

$\vec{P}$
A
B
1
2
E
D
$\vec{Q}$
4
c
3
5
6
a
b

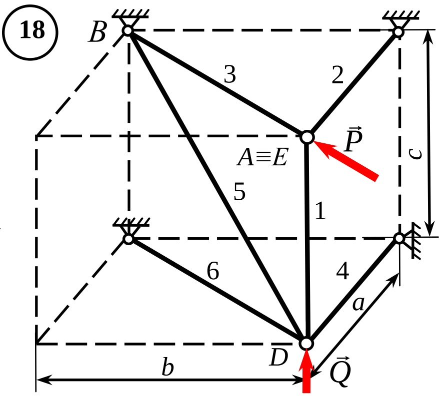

13
B
A
P
2
1
E
D
6
Q
5
3
c
4
a
b

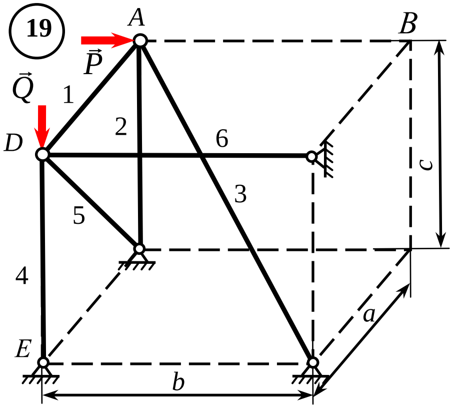

14
Q
D
6
1
B
A
P
5
2
c
E
3
4
a
b

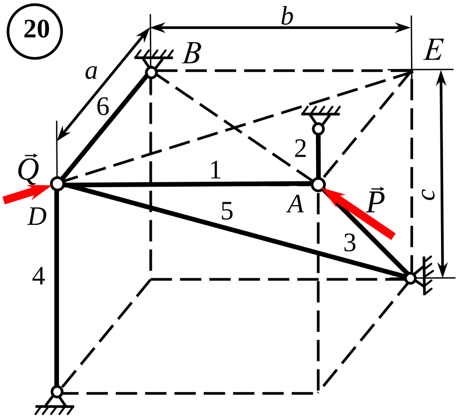

15
B ≡ E
5
4
3
c
6
D
1
Q
2
a
A
P
b

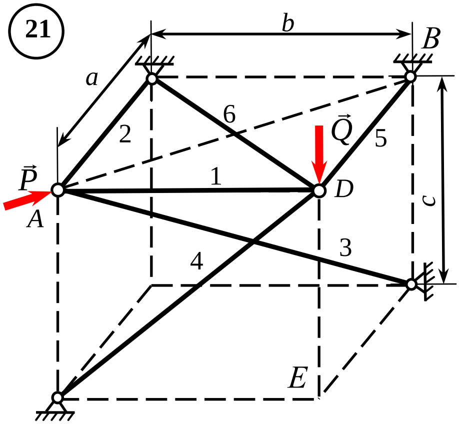

16
P
2
A
6
1
D
Q
E
c
5
3
B
4
a
b

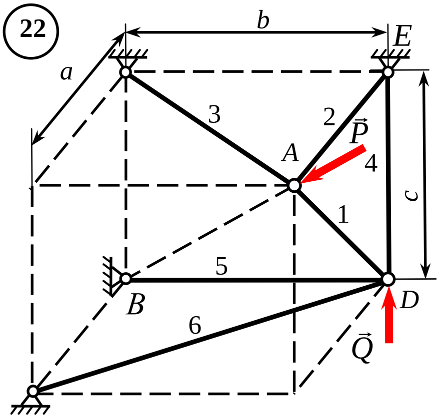

17
A
B
P
1
D
2
6
E
Q
c
3
5
4
a
b

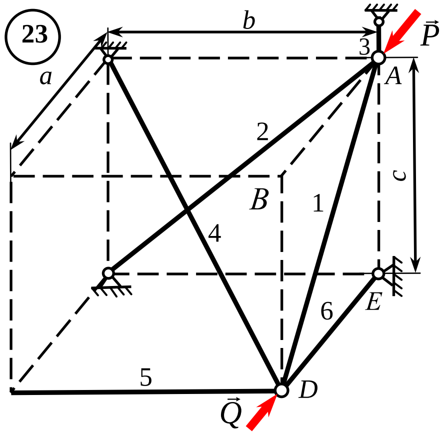

18
B
3
2
A≡E
P
c
5
1
6
4
a
D
b
Q

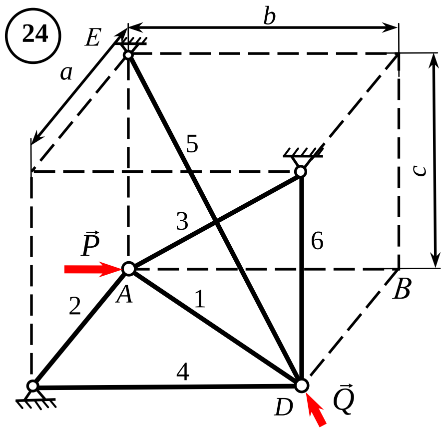

19
A
B
$\vec{P}$
$\vec{Q}$
1
2
6
D
3
c
5
4
a
E
b

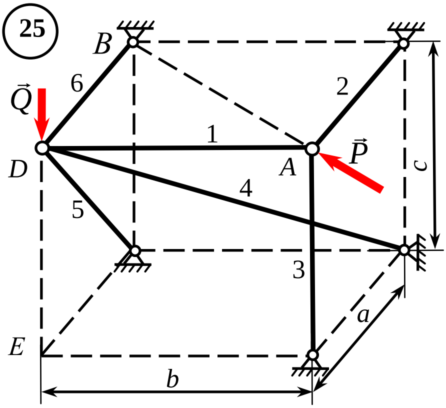

20
b
a
B
E
6
2
$\vec{Q}$
1
A
$\vec{P}$
c
D
5
3
4


21
b
B
a
6
$\vec{Q}$
5
2
$\vec{P}$
1
D
c
A
3
4
E

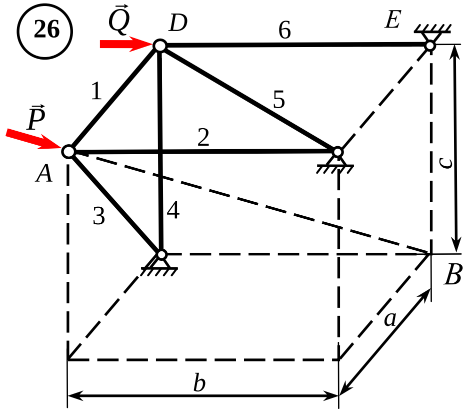

22
b
E
a
3
2
$\vec{P}$
A
4
c
1
5
B
D
6
$\vec{Q}$


23
b
$\vec{P}$
3
a
A
2
c
B
1
4
6
E
5
$\vec{Q}$
D

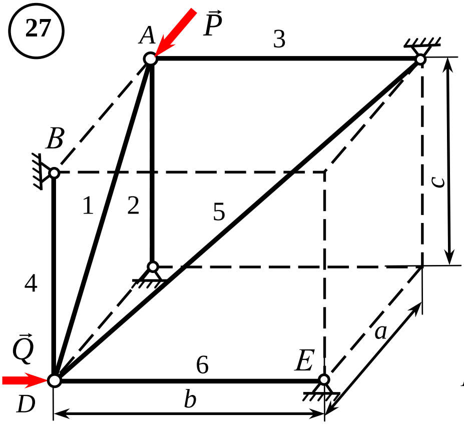

24
E
b
a
c
5
3
6
$\vec{P}$
A
B
2
1
4
D
$\vec{Q}$



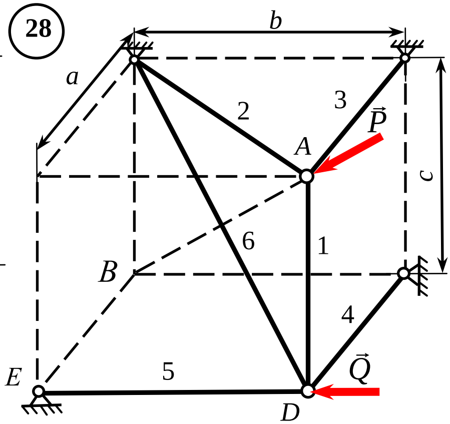
25
B
6
Q⃗
2
1
D
A
P⃗
4
c
5
3
a
E
b



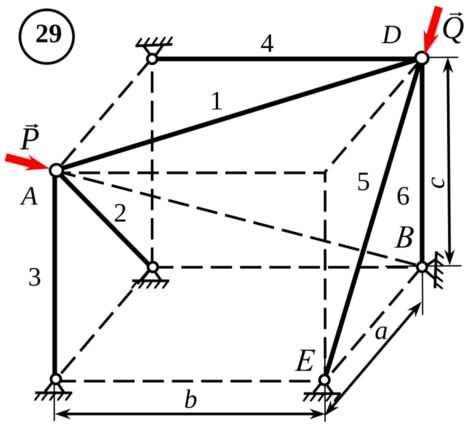
26
Q⃗
D
6
E
1
5
P⃗
2
A
c
3
4
B
a
b



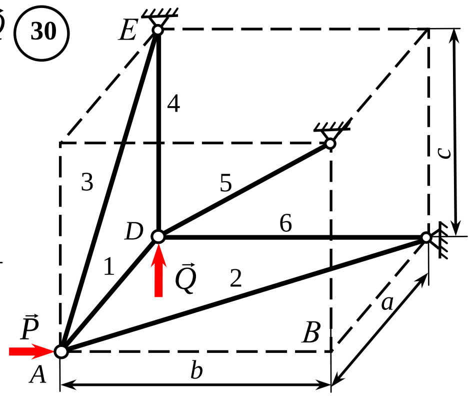
27
A
P⃗
3
B
c
1
2
5
4
Q⃗
6
E
a
D
b



28
b
a
2
3
P⃗
A
c
6
1
B
4
Q⃗
E
5
D



29
4
D
Q⃗
1
P⃗
A
5
6
c
2
B
3
E
a
b



30
E
4
3
5
D
6
c
1
Q⃗
2
a
P⃗
B
A
b

С1.4. Пример выполнения задания

С1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Дано:

$P = 5кН$,

$Q = 2кН$,

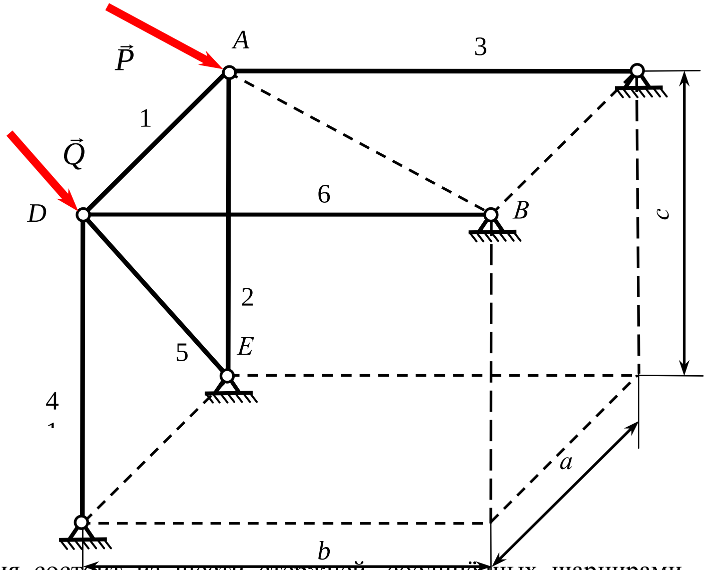
$a = 2{,}0м$,

$b = 2{,}5м$,

$c = 3{,}0м$.

Опр.

$S_1 - S_6$.



Решение:

Конструкция состоит из шести стержней, соединённых шарнирами, при этом в узлах A и D приложены активные силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$.

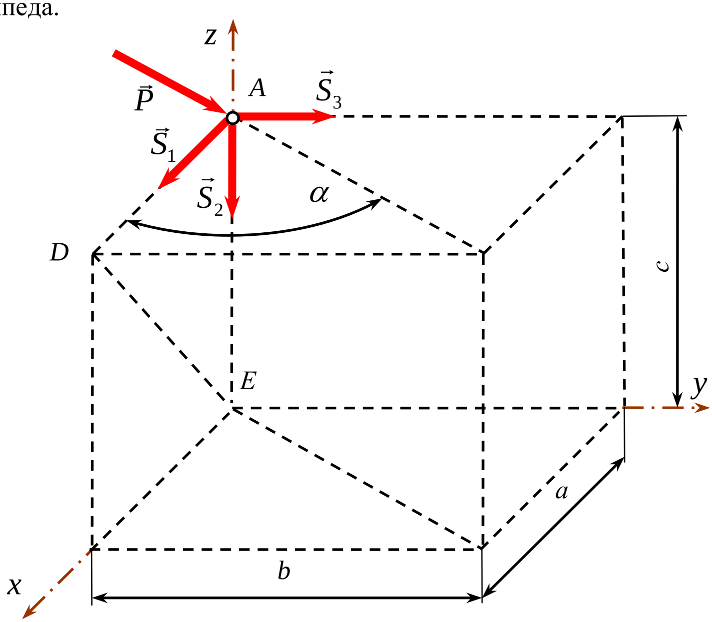
Рассмотрим сначала равновесие узла A, в котором сходятся три стержня.

Вырежем мысленно узел A, отбросив стержни 1, 2, 3, и рассмотрим его равновесие.

На узел A действует активная сила $\vec{P}$. Действие отброшенных стержней заменим соответствующими реакциями $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, равными усилиям в стержнях. Поскольку направления усилий в стержнях неизвестны, будем направлять их от узла, считая все стержни растянутыми.

Система сил, действующих на узел A, представляет собой пространственную систему сил, линии действия которых сходятся в одной точке. Для такой системы сил можно записать 3 независимых уравнения равновесия, а именно 3 уравнения проекций.

Выберем оси координат, направив их по сторонам прямоугольного параллелепипеда.



Запишем соответствующие полученной системе сил уравнения равновесия и решим их.

$$\sum F_X = 0; \;\; S_1 + P\cos\alpha = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_Y = 0; \;\; S_3 + P\sin\alpha = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum F_Z = 0; \;\; -S_2 = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Из уравнения **(1)**:

$$S_1 = -P\cos\alpha .$$

Из уравнения **(2)** найдём:

$$S_3 = -P\sin\alpha .$$

Из уравнения **(3)**:

$$S_2 = 0 .$$

Значения тригонометрических функций углов α и β определим исходя из расчётной схемы и размеров параллелепипеда:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2{,}5^2}} = 0{,}625 ,$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{2^2 + 2{,}5^2}} = 0{,}781 \cdot$$

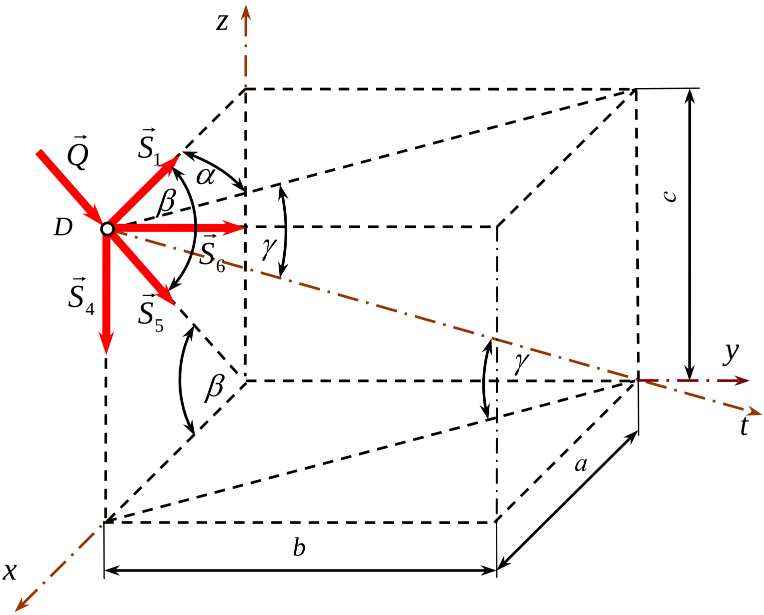
Вычислим величины усилий.

$$S_1 = -P\cos\alpha = -5 \cdot 0{,}625 = -3{,}125\, кН\,.$$

$$S_3 = -P\sin\alpha = -5 \cdot 0{,}781 = -3{,}905\, кН\,.$$

Для определения усилий в стержнях 4, 5, 6 вырежем теперь мысленно узел D и, отбросив эти стержни, рассмотрим его равновесие.

На узел D действует активная сила $\vec{Q}$. Действие отброшенных стержней заменим соответствующими реакциями $\vec{S}_1$, $\vec{S}_4$, $\vec{S}_5$, $\vec{S}_6$, равными усилиям в стержнях. При этом будем учитывать III закон Ньютона: усилие $\vec{S}_1$ направлено в сторону, противоположную направлению соответствующего усилия, приложенному к узлу A. Как и ранее, усилия в стержнях будем направлять от узла, считая все стержни растянутыми.



Полученная система сил представляет собой пространственную систему сил, линии действия которых сходятся в одной точке. Для такой системы сил можно записать 3 независимых уравнения равновесия, а именно 3 уравнения проекций.

Составим уравнения равновесия узла D.

$$\sum F_X = 0;\ -S_1 - S_5 \cos\beta - Q\cos\beta = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum F_Y = 0;\ S_6 = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

$$\sum F_Z = 0;\ -S_4 - S_5 \sin\beta - Q\sin\beta = 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Решая систему уравнений ***(d)***, ***(e)*** и ***(f)***, получим:

Из уравнения **(4)**:

$$S_5 = -\frac{S_1}{\cos\beta} - Q\,.$$

Из уравнения **(5)**:

$$S_6 = 0.$$

Из уравнения **(6)**:

$$S_4 = -(S_5 + Q)\sin\beta\,.$$

Значения тригонометрических функций угла β определим исходя из расчётной схемы и размеров параллелепипеда. Найдем также значения тригонометрических функций угла γ, необходимые для выполнения проверки.

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0{,}555,$$

$$\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0{,}832\,.$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2^2 + 2{,}5^2}}{\sqrt{2^2 + 2{,}5^2 + 3^2}} = 0{,}730,$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 2{,}5^2 + 3^2}} = 0{,}684\,.$$

Вычислим величины усилий.

$$S_5 = -\frac{S_1}{\cos\beta} - Q = -\frac{-3{,}125}{0{,}555} - 2 = 3{,}631\ кН.$$

$$S_4 = -(S_5 + Q)\sin\beta = -(3{,}631 + 2)\cdot 0{,}832 = -4{,}685\ кН.$$

В качестве проверки составим уравнение равновесия узла D, записав уравнение суммы проекций сил, приложенных к этому узлу, на ось, совпадающую с главной диагональю параллелепипеда, и сравним полученную сумму с нулём.

$$\sum F_t = S_1 \cos\alpha\cos\gamma + S_4 \sin\gamma + S_6 \sin\alpha\cos\gamma + \left(S_5 + Q\right)\cos\beta\cos\alpha\cos\gamma +$$

$$+\left(S_5+Q\right)\sin\beta\sin\gamma=\left(-3{,}125\right)\cdot 0{,}625\cdot 0{,}730+\left(-4{,}685\right)\cdot 0{,}684+0+$$
$$+(3{,}631+2)\cdot 0{,}555\cdot 0{,}625\cdot 0{,}730+(3{,}631+2)\cdot 0{,}832\cdot 0{,}684=-4{,}6303+4{,}6304=$$
$$=-0{,}001\approx 0.$$

Относительная погрешность составляет:

$\delta=\dfrac{\left|-0{,}001\right|}{4{,}6304}\cdot 100\%=0{,}021\%$, что вполне допустимо в технических расчетах.

Результаты решения сведем в таблицу.

Ответ:

№стержня	1	2	3	4	5	6
Усилие в $кН$	-3,125	0	-3,905	-4,685	3,631	0

Анализ результатов показывает, что стержень 5 растянут, стержни 1, 3 и 4 сжаты, стержни 2 и 6 не нагружены.

Наиболее нагруженным является стержень № 4.

С2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

С2.1 Краткие сведения из теории

Произвольной плоской называют систему сил, линии действия которых как угодно расположены в одной плоскости. Для тела, находящегося в равновесии под действием такой системы сил, можно составить три независимых уравнения равновесия, например:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_X = 0, \\ &\sum F_Y = 0, \\ &\sum m_O\left(\vec{F}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(C2.1)}$$

В инженерной практике часто встречаются случаи, когда некоторая система сил действует на механическую систему, например, на составную конструкцию.

В этом случае основная идея решения задачи состоит в следующем. Если конструкция, находящаяся под действием произвольной плоской системы сил, состоит из N тел, то для одного из этих тел можно составить 3 независимых уравнения равновесия, а для системы N тел – $3N$ уравнений, что позволяет определить $3N$ неизвестных. При этом, переходя от одного тела конструкции к другому необходимо учитывать закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона).

Другой особенностью решения такой задачи является необходимость проверки статической определимости задачи, иначе говоря, проверки возможности решения задачи исключительно методами статики.

Задача является статически определимой, если число неизвестных силовых факторов равно числу независимых уравнений равновесия. Если число неизвестных силовых факторов превышает число независимых уравнений равновесия, то задача статически неопределима, и для её решения к уравнениям равновесия необходимо добавлять дополнительные соотношения[1].

При составлении уравнений равновесия следует иметь в виду, что пара сил (или момент пары) на ось не проецируется (поскольку сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю), а входит лишь в уравнение моментов.

---

[1] Раскрытие статической неопределимости изучается в курсе сопротивления материалов.

С2.2. Указания по выполнению задания

В задании С2 рассматривается конструкция, состоящая из двух материальных тел, соединенных промежуточным шарниром; находящихся под действием произвольной плоской системы сил.

Прежде чем приступить к определению реакций опор и давлению в промежуточном шарнире, необходимо выяснить, является ли данная задача статически определимой. Для этого необходимо подсчитать число неизвестных силовых факторов, представляющих собой в данном случае составляющие реакций внешних связей (опор конструкции) и внутренней связи (промежуточного шарнира), и сравнить его с числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной задачи.

Особенность решения данной задачи состоит в том, что для конструкции, состоящей из двух частей $(N = 2)$, необходимо последовательно рассмотреть равновесие двух тел (механических систем). При этом возможны три варианта:

а) сначала рассматривается равновесие одного из тел системы, затем – другого;

б) сначала рассматривается равновесие одного из тел системы, затем – всей конструкции в целом;

в) сначала рассматривается равновесие другого тела системы, затем – всей конструкции в целом.

Выбор варианта определяется удобством решения шести независимых уравнений равновесия, записанных для данной задачи.

Для вычисления момента силы относительно центра иногда бывает удобно разложить силу на составляющие и определить, в соответствии с теоремой Вариньона, сумму моментов этих составляющих относительно этого центра.

При вычислении момента от сил, равномерно распределённых вдоль отрезка прямой, следует учитывать, что величина равнодействующей такой нагрузки равна произведению интенсивности нагрузки на длину отрезка; точка приложения равнодействующей находится в середине этого отрезка.

В качестве проверки необходимо составить уравнение равновесия для всей конструкции, записав уравнение суммы моментов сил относительно произвольной точки, и сравнить полученную сумму с нулём.

В качестве дополнительного исследования представляет интерес изучение влияния размеров конструкции на величины определяемых реакций. Такое исследование удобно проводить с использованием компьютера.

Результаты расчетов целесообразно свести в таблицу, а при необходимости - представить в виде графиков.

Последовательность выполнения задания.

10. Уяснить условие задания, выполнить рисунок.
11. Выбрать тело (механическую систему), равновесие которого (которой) будет рассматриваться сначала.
12. Изобразить силы, действующие на выбранное тело: активные и реакции связей. Установить вид полученной системы сил.
13. Выбрать удобные оси координат, центр моментов.
14. Записать соответствующие полученной системе сил уравнения равновесия.
15. Выбрать тело (механическую систему), равновесие которого (которой) будет рассматриваться теперь.
16. Выполнить действия 3-5 для второго тела.
17. Решить полученную систему уравнений.
18. Выполнить проверку, составив для всей конструкции уравнение суммы моментов; центр моментов (моментную точку) выбрать так, чтобы в проверочное уравнение вошли все внешние реакции, величины которых были определены. Сравнить полученную сумму с нулём, и подсчитать относительную погрешность.
19. В случае необходимости, провести дополнительное исследование.
20. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

С2.3. Собственно задание

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции. Данные для расчета приведены в таблице **С2.1**, расчетные схемы – в таблице **С2.2**.

Выполнить проверку: составить для всей конструкции уравнение суммы моментов; центр моментов (моментную точку) выбрать так, чтобы в проверочное уравнение вошли все внешние реакции, величины которых были определены. Сравнить полученную сумму с нулём, и подсчитать относительную погрешность.

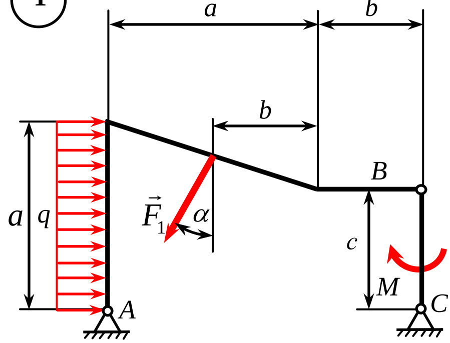
В качестве дополнительного исследования найти аналитическую зависимость реакции, указанной в таблице **С2.1**, от величины угла α и построить соответствующий график.

Таблица С2.1. Исходные данные.

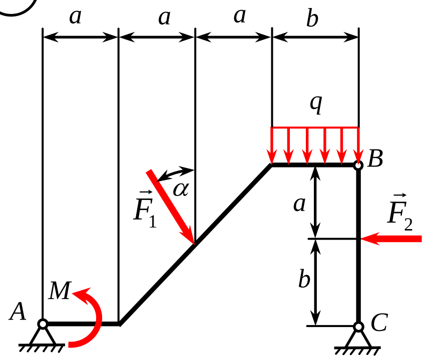
№	F_1 кН	F_2 кН	q кН/м	M кНм	a м	b м	c м	d м	α гр.	Дополнительное исследование
1.	5	-	0,8	24	5,6	2,8	3,5	-	30	$R_A = f(\alpha)$
2.	6	10	1,0	22	2,1	2,4	-	-	30	$R_C = f(\alpha)$
3.	7	9	1,2	20	6,6	2,7	2,0	-	45	$R_B = f(\alpha)$
4.	8	-	1,4	18	1,3	4,3	6,6	2,0	30	$R_B = f(\alpha)$
5.	9	-	1,6	16	5,3	2,3	3,7	1,9	40	$R_B = f(\alpha)$
6.	10	8	1,8	25	2,4	1,3	3,4	-	45	$R_B = f(\alpha)$
7.	1	7	2,0	20	4,3	3,5	5,0	-	60	$R_A = f(\alpha)$
8.	12	6	2,2	15	4,2	2,6	2,8	2,0	60	$R_B = f(\alpha)$
9.	13	-	2,4	10	3,3	2,6	3,5	-	45	$R_C = f(\alpha)$
10.	10	-	2,6	12	2,5	3,9	1,3	-	45	$M_A = f(\alpha)$
11.	15	5	2,8	14	2,4	1,8	-	-	30	$R_B = f(\alpha)$
12.	10	4	3,0	16	4,0	2,3	3,3	1,0	45	$R_C = f(\alpha)$
13.	9	6	3,2	18	1,7	2,7	-	-	30	$R_B = f(\alpha)$
14.	6	-	3,4	20	3,7	-	-	-	30	$M_A = f(\alpha)$
15.	5	8	3,6	22	1,4	2,7	2,0	-	30	$R_B = f(\alpha)$
16.	7	10	3,8	14	1,3	3,4	2,0	2,8	30	$R_A = f(\alpha)$
17.	9	12	4,0	26	3,0	1,5	2,0	0,8	30	$R_B = f(\alpha)$
18.	11	10	3,5	18	2,6	2,1	-	-	45	$R_B = f(\alpha)$
19.	13	9	3,0	30	2,9	3,5	-	-	30	$M_C = f(\alpha)$
20.	15	-	2,5	25	3,5	4,5	2,0	-	45	$R_B = f(\alpha)$
21.	10	7	2,0	20	3,3	2,6	1,43	-	45	$R_A = f(\alpha)$
22.	5	6	1,5	15	4,0	3,4	1,4	4,9	45	$R_C = f(\alpha)$
23.	8	5	1,4	10	3,0	5,9	1,3	-	60	$R_A = f(\alpha)$
24.	11	4	1,3	5	3,2	5,5	2,5	-	30	$M_A = f(\alpha)$
25.	14	6	1,2	7	2,5	1,7	0,7	-	45	$R_C = f(\alpha)$
26.	12	8	1,1	9	3,3	1,4	-	-	30	$R_A = f(\alpha)$
27.	10	7	1,0	11	2,6	5,9	9,3	2,0	45	$R_B = f(\alpha)$
28.	8	9	1,2	13	3,1	2,3	4,4	-	60	$R_A = f(\alpha)$
29.	6	10	1,4	15	3,9	2,8	4,7	2,7	30	$R_B = f(\alpha)$
30.	10	12	1,6	17	2,5	1,9	3,0	-	30	$M_A = f(\alpha)$

Таблица С2.2. Расчётные схемы.

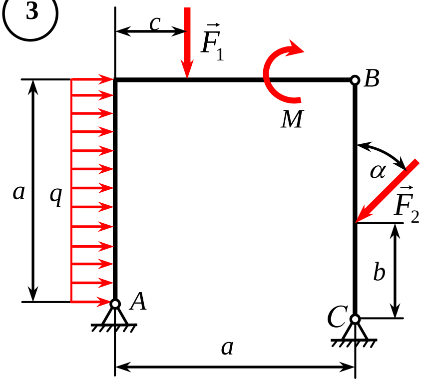
1


a
b
b
B
a
q
F1
α
c
M
A
C

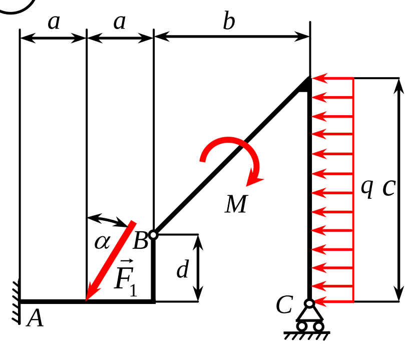
2


a
a
a
b
q
B
α
F1
a
F2
b
M
A
C

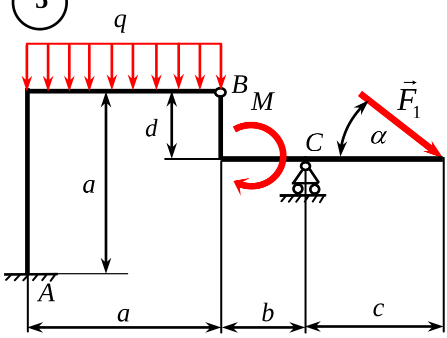
3


c
F1
B
M
a
q
α
F2
b
A
C
a

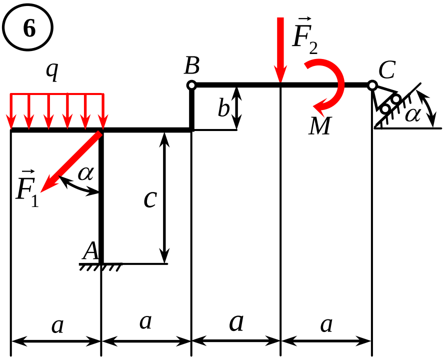
4


a
a
b
M
q
c
α
B
F1
d
A
C

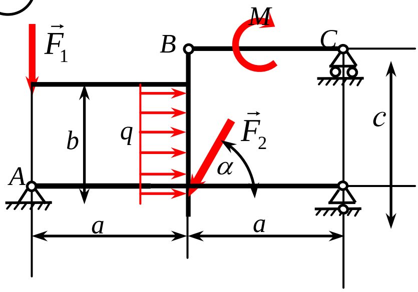
5


q
B
M
F1
d
C
α
a
A
a
b
c

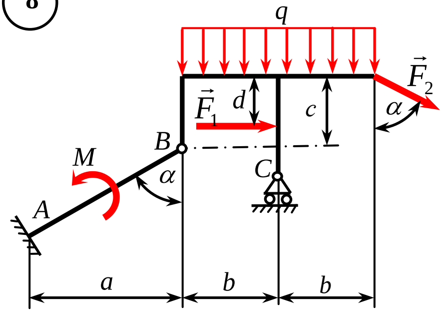
6


F2
q
B
C
b
M
α
F1
α
c
A
a
a
a
a

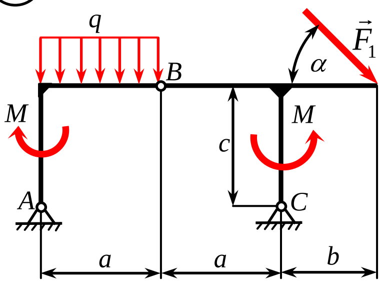
7


$\vec{F}_1$
M
B
C
c
b
q
$\vec{F}_2$
α
A
a
a

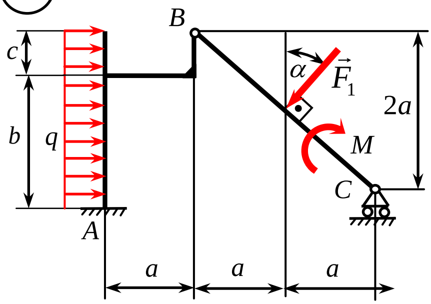
8


q
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_1$
d
c
α
B
M
α
C
A
a
b
b

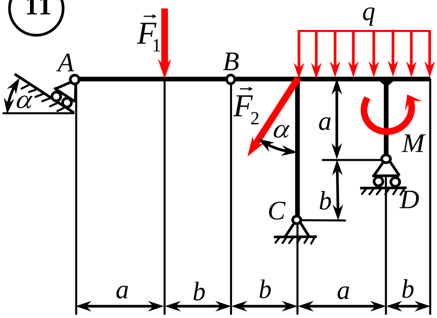
9


q
$\vec{F}_1$
B
α
M
M
c
A
C
a
a
b

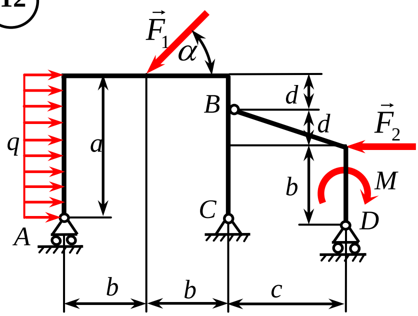
10


B
c
α
$\vec{F}_1$
$2a$
b
q
M
C
A
a
a
a

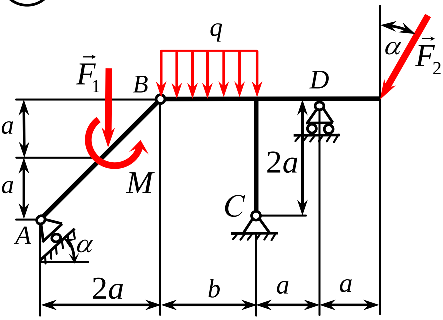
11


$\vec{F}_1$
q
A
B
α
$\vec{F}_2$
a
α
M
b
C
D
a
b
b
a
b

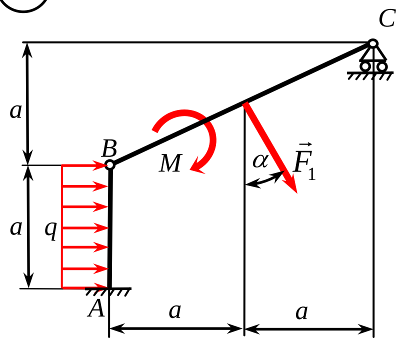
12


$\vec{F}_1$
α
d
B
d
$\vec{F}_2$
q
a
b
M
C
D
A
b
b
c

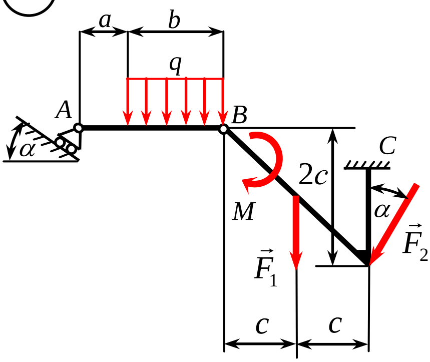
13



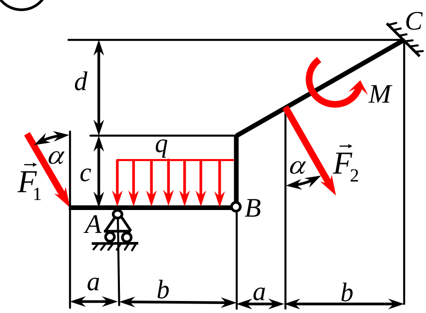
14



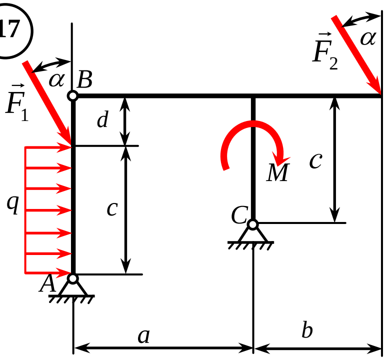
15



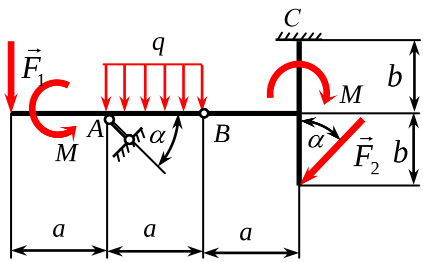
16



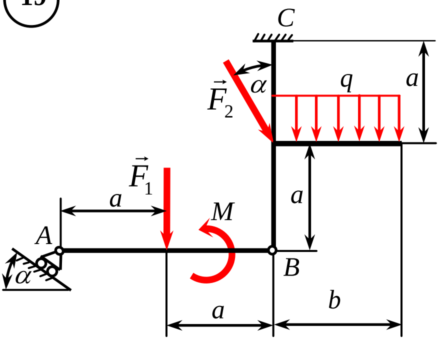
17



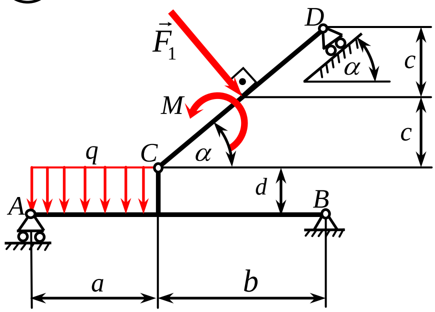
18



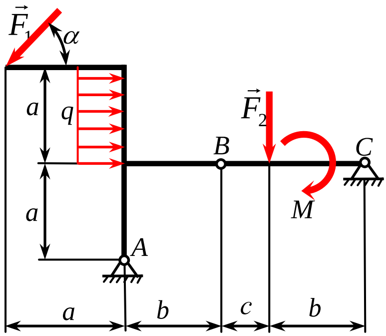
19



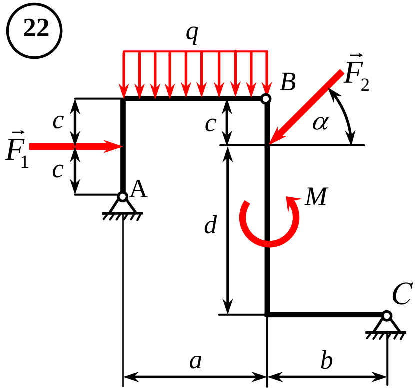
20



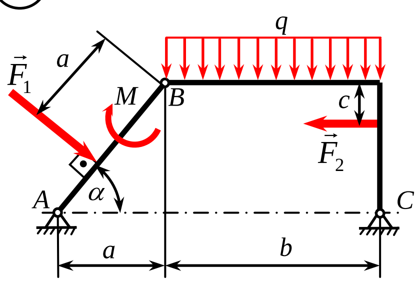
21



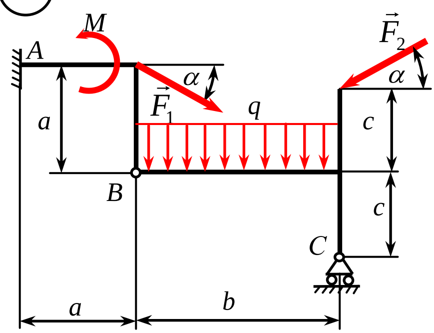
22



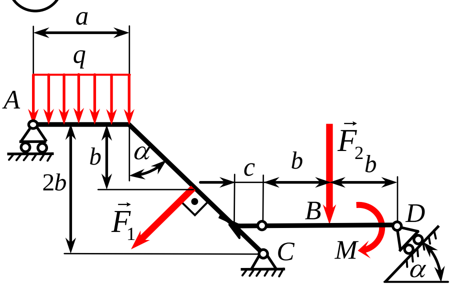
23



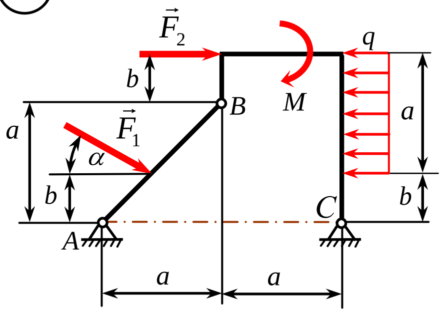
24



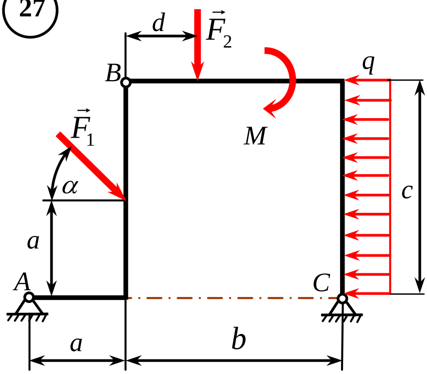
25



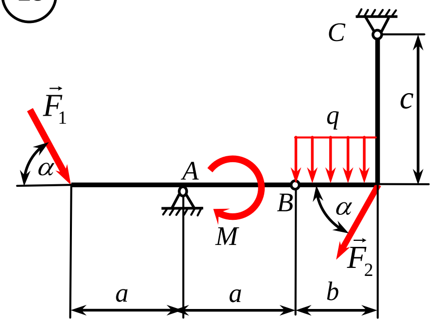
26



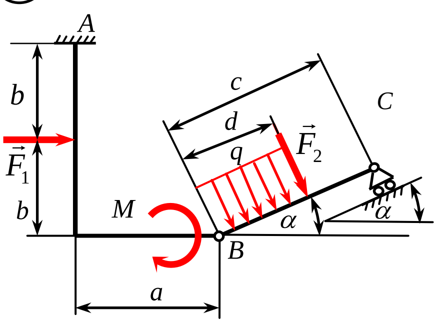
27



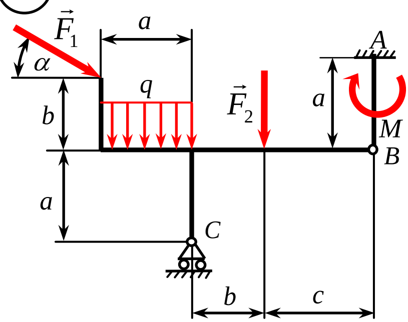
28



29



30



C2.4 Пример выполнения задания

C2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Дано:

$F_1 = 9кН,$

$F_2 = 8кН$

$M = 12кНм,$

$q = 1{,}2кН/м,$

$a = 4{,}0м,$

$b = 2{,}0м,$

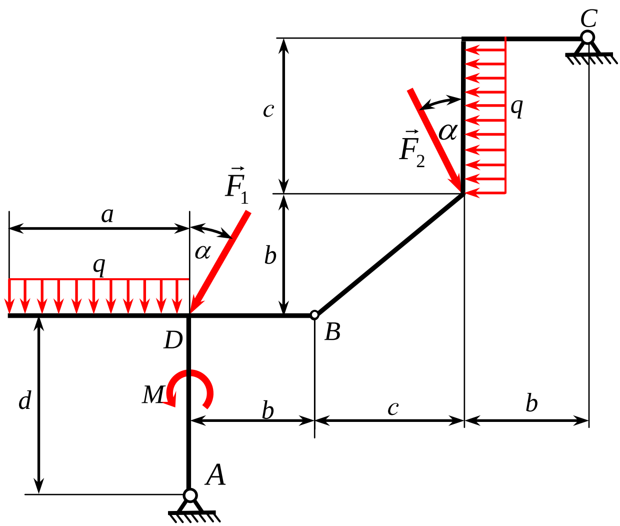
$c = 3{,}0м,$

$d = 4{,}5м,$

$\alpha = 30°.$

Опр.

$R_A, R_B, R_C.$



Решение:

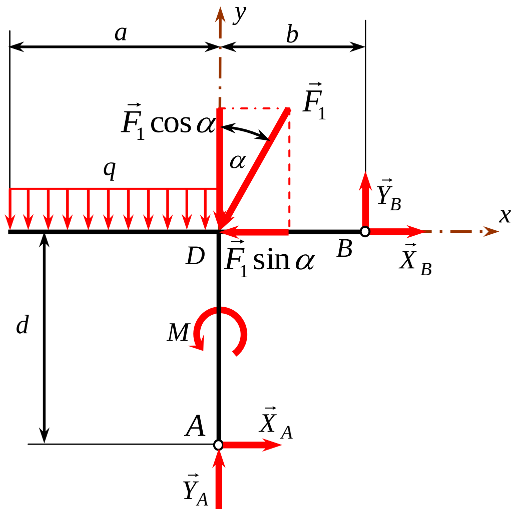
Выясним сначала, является ли данная задача статистически определимой. Число неизвестных силовых факторов равно 6: в каждом из трех шарниров: A, B и C имеются по 2 неизвестных величины – составляющие реакций шарниров. Для двух тел, составляющих конструкцию и находящихся под действием произвольной плоской системы сил, можно составить 6 независимых уравнений равновесия. Таким образом, задача статически определима.

Для определения реакций шарниров рассмотрим сначала равновесие левой части конструкции. На нее действует сосредоточенная сила $\vec{F}_1$, распределенная нагрузка интенсивности q, пара сил с моментом M, составляющие реакции опоры A $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющие реакции правой части конструкции $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$.

Эти силовые факторы образуют произвольную плоскую систему сил. Для такой системы сил, выбрав предварительно оси координат и центр и моментов, составим три уравнения равновесия.

Будем учитывать, что равнодействующая равномерно распределённой по длине a нагрузки интенсивности q равна по величине qa, а точка приложения равнодействующей находится в середине этого отрезка.

Для упрощения вычисления момента силы $\vec{F}_1$ разложим эту силу на горизонтальную ($\vec{F}_1 \sin\alpha$) и вертикальную ($\vec{F}_1 \cos\alpha$) составляющие.



$$\sum F_X = 0; \qquad X_A + X_B - F_1 \sin\alpha = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad Y_A + Y_B - F_1 \cos\alpha - qa = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum m_B\left(\vec{F}\right) = 0; \quad X_A d - Y_A b + F_1 \cos\alpha \cdot b + qa\left(b + \frac{a}{2}\right) + M = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Уравнения **(1)**, **(2)** и **(3)** содержат 4 неизвестных величины, что не позволяет сразу их найти.

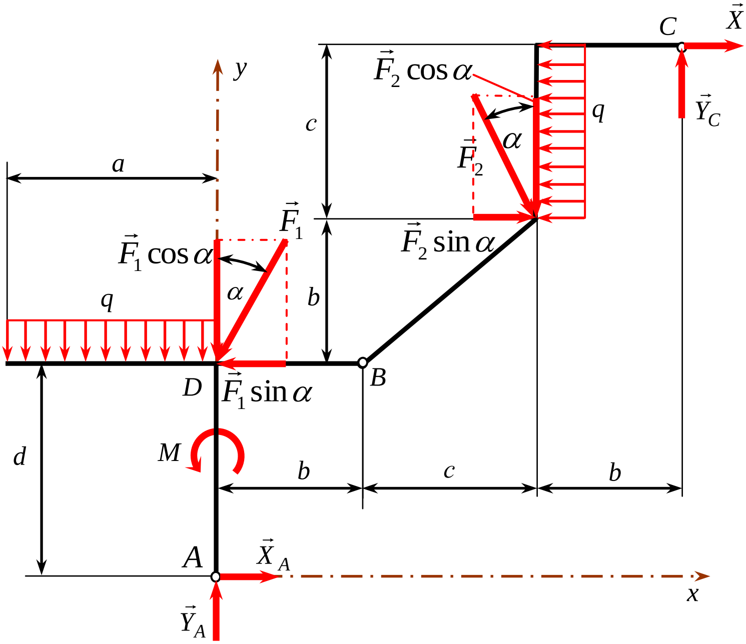
Рассмотрим теперь равновесие всей конструкции.

На конструкцию действуют сосредоточенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, распределенная нагрузка интенсивности q (на двух участках), пара сил с моментом M , составляющие реакции опоры A $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющие реакции опоры C $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$.

Эти силы образуют произвольную плоскую систему сил. Для такой системы сил, выбрав предварительно оси координат, центр моментов, составим три уравнения равновесия.

Будем учитывать, что равнодействующие равномерно распределенных по длинам a и c нагрузок интенсивности q равны по величине qa и qc

соответственно, а точки приложения равнодействующих находятся в серединах этих отрезков.



Для упрощения вычисления момента силы $\vec{F}_2$ разложим эту силу на горизонтальную ($\vec{F}_2\sin\alpha$) и вертикальную ($\vec{F}_2\cos\alpha$) составляющие.

$$\sum F_X = 0; \qquad X_A + X_C - F_1\sin\alpha + F_2\sin\alpha - qc = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad Y_A + Y_C - F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha - qa = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

$$\sum m_C\left(\vec{F}\right) = 0; \; X_A(d+b+c) - Y_A(2b+c) + M - qc\frac{c}{2} +$$

$$+ qa\left(2b + c + \frac{a}{2}\right) + F_1\cos\alpha\cdot(2b+c) - \qquad \textbf{(6)}$$

$$- F_1\sin\alpha\cdot(b+c) + F_2\cos\alpha\cdot b + F_2\sin\alpha\cdot c = 0.$$

Решив систему уравнений **(1) - (6)**, ответим на вопросы задачи.

Воспользовавшись тем, что уравнения **(3)** и **(6)** содержат 2 неизвестных величины X_A и Y_A, решим эту систему уравнений.

Из уравнения **(3)** получим выражение для X_A:

$$X_A = Y_A \frac{b}{d} - \frac{F_1 b\cos\alpha + qa\left(b + \frac{a}{2}\right) + M}{d}. \qquad \textbf{(7)}$$

Подставим это выражение в уравнение **(6).**

$$Y_A \frac{b}{d}(d+b+c) - \frac{F_1 b\cos\alpha + qa\left(b + \frac{a}{2}\right) + M}{d}(d+b+c) -$$

$$-Y_A(2b+c) + M + q\left(2ab + ac + \frac{a^2 - c^2}{2}\right) +$$

$$+F_1\left[(2b+c)\cos\alpha - (b+c)\sin\alpha\right] + F_2(b\cos\alpha + c\sin\alpha) = 0.$$

Из последнего уравнения можно найти Y_A.

$$Y_A = F_1\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{1 - \frac{b}{d}}\right) + \frac{F_2(b\cos\alpha + c\sin\alpha) - M\frac{b+c}{d}}{(b+c)\left(1 - \frac{b}{d}\right)} +$$

$$+\frac{q\left[a(2b+c) + \frac{a^2 - c^2}{2} - a\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{b+c}{d}\right)\right]}{(b+c)\left(1 - \frac{b}{d}\right)}. \qquad \textbf{(8)}$$

$$Y_A = 9 \cdot \cos 30^\circ - \frac{\sin 30^\circ}{1 - \frac{2}{4,5}} + \frac{8(2\cos 30^\circ + 3\sin 30^\circ) - 12 \cdot \frac{2+3}{4,5}}{(2+3)\left(1 - \frac{2}{4,5}\right)} +$$

$$+\frac{1,2\left[4(2\cdot 2 + 3) + \frac{4^2 - 3^2}{2} - 4\left(2 + \frac{4}{2}\right)\left(1 + \frac{2+3}{4,5}\right)\right]}{(2+3)\left(1 - \frac{2}{4,5}\right)} = 3,22\kappa H.$$

Тогда по формуле **(7)**

$$X_A = 3{,}22 \cdot \frac{2}{4{,}5} - \frac{9 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ + 1{,}2 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) + 12}{4{,}5} = -8{,}97\text{кН}.$$

Из уравнения **(1)** найдём X_B.

$$X_B = -X_A + F_1 \sin\alpha. \qquad \textbf{(9)}$$

$$X_B = 8{,}97 + 9 \cdot \sin 30^\circ = 13{,}47\text{кН}.$$

Из уравнения **(2)** найдём Y_B.

$$Y_B = -Y_A + F_1 \cos\alpha + qa. \qquad \textbf{(10)}$$

$$Y_B = -3{,}22 + 9 \cdot \cos 30^\circ + 1{,}2 \cdot 4 = 9{,}37\text{кН}.$$

Из уравнения **(4)** найдём X_C.

$$X_C = -X_A + F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\alpha + qc =$$
$$= 8{,}97 + 9 \cdot \sin 30^\circ - 8 \cdot \sin 30^\circ + 1{,}2 \cdot 3 = 13{,}07\text{кН}.$$

Из уравнения **(5)** найдём Y_C.

$$Y_C = -Y_A + F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha + qa =$$
$$= -3{,}22 + 9 \cdot \cos 30^\circ + 8 \cdot \cos 30^\circ + 1{,}2 \cdot 4 = 16{,}30\text{кН}.$$

Для проверки составим ещё одно уравнение равновесия всей конструкции:

$$\sum m_D\left(\vec{F}\right) = X_A \cdot d + q \cdot \frac{a^2}{2} + M - F_2 \cdot \cos\alpha \cdot (b + c) - F_2 \cdot \sin\alpha \cdot b +$$
$$+ Y_C \cdot (2b + c) - X_C \cdot (b + c) + q \cdot c \cdot (b + \frac{c}{2}) = -8{,}97 \cdot 4{,}5 + 1{,}2 \cdot \frac{4^2}{2} +$$
$$+ 12 - 8 \cdot \cos 30^\circ \cdot (2 + 3) - 8 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 + 16{,}30 \cdot (2 \cdot 2 + 3) -$$
$$- 13{,}07 \cdot (2 + 3) + 1{,}2 \cdot 3 \cdot (2 + \frac{3}{2}) = 148{,}30 - 148{,}36 = -0{,}06 \approx 0.$$

Относительная погрешность составляет:

$\delta = \frac{0{,}06}{148{,}3} \cdot 100\% = 0{,}04\%$, что вполне допустимо в технических расчетах.

Результаты решения сведем в таблицу.

Ответ:

Реакция	X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
Вел-на в $кН$	-8,97	3,22	13,47	9,37	13,07	16,30

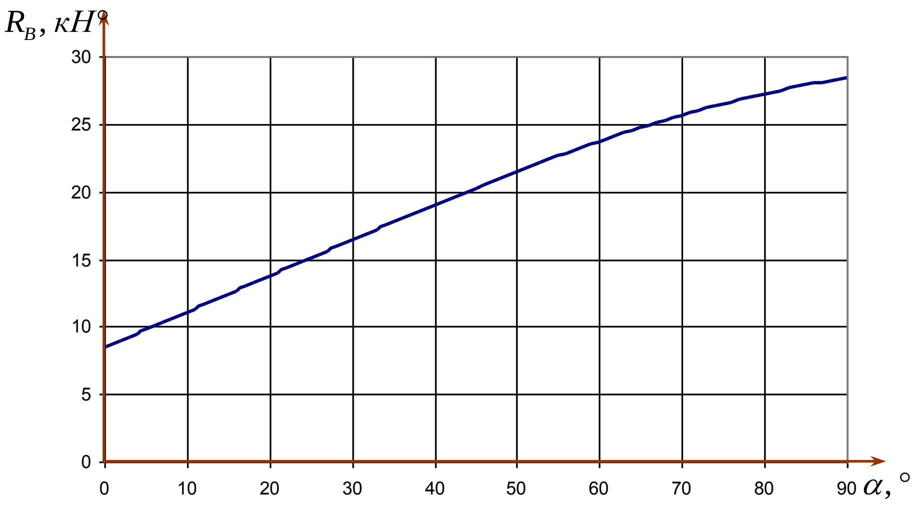
Дополнительное исследование

В качестве дополнительного исследования найдем зависимость давления в промежуточном шарнире от величины угла α : $R_B = R_B(\alpha)$. Для этого воспользуемся тем очевидным фактом, что формулы **(7) - (10)** справедливы для любых значений угла α .

Применяя для табуляции функций $Y_A(\alpha)$ **(8)**, $X_A(\alpha)$ **(7)**, $X_B(\alpha)$ **(9)** и $Y_B(\alpha)$ **(10)** программу **Microsoft Excel**, получим соответствующие функций, заданные в виде таблиц, для $0 \le \alpha \le 90°$.

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}\ . \tag{11}$$

Протабулировав аналогичным образом выражение **(11)**, используя **мастер диаграмм**, строим график функции $R_B(\alpha)$.



С3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЁРДОГО ТЕЛА

С3.1. Краткие сведения из теории

Произвольной пространственной называют систему сил, линии действия которых как угодно расположены в пространстве, то есть не лежат в одной плоскости, не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке. Для тела, находящегося в равновесии под действием такой системы сил, можно составить шесть независимых уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_X = 0, \\ &\sum F_Y = 0, \\ &\sum F_Z = 0, \\ &\sum m_X\left(\vec{F}\right) = 0, \\ &\sum m_Y\left(\vec{F}\right) = 0, \\ &\sum m_Z\left(\vec{F}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(C3.1)}$$

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. Из этого следует, что момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях: если линия действия силы параллельна оси, либо пересекает эту ось (или сила и ось лежат в одной плоскости).

Вектор-моментом пары сил называют вектор, модуль которого равен моменту пары, перпендикулярный плоскости пары и направленный так, что если смотреть с конца его, вращение тела под действием пары сил кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Применительно к данному заданию ***теорема Вариньона*** может быть сформулирована следующим образом:

Момент равнодействующей сходящейся системы сил относительно некоторой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

С3.2. Указания по выполнению задания

В задании С3 рассматривается равновесие плиты, закрепленной в подпятнике, подшипнике и поддерживаемой невесомым недеформируемым стержнем, на которую действует произвольная пространственная система сил.

При выполнении задания дополнительно можно использовать следующие методические приёмы:

- при вычислении моментов сил относительно данной оси нужно сразу мысленно отбросить силы, параллельные данной оси или пересекающие её, поскольку они не дают момента относительно оси;

- в некоторых случаях при вычислении момента силы относительно оси бывает удобно применить теорему Вариньона: разложить силу на составляющие и подсчитать сумму моментов этих составляющих относительно оси;
- для вычисления суммы моментов сил пары относительно некоторой оси достаточно спроецировать вектор-момент пары на эту ось.

Последовательность выполнения задания.

21. Уяснить условие задания, выполнить рисунок.
22. Выбрать тело, равновесие которого будет рассматриваться.
23. Изобразить силы, действующие на выбранный узел: активные и реакции связей. Установить вид полученной системы сил.
24. Выбрать удобные оси координат.
25. Записать соответствующие полученной системе сил уравнения равновесия и решить их.
26. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

С3.3. Собственно задание

Для плиты, закрепленной в подпятнике и подшипнике, поддерживаемой невесомым недеформируемым стержнем, определить реакции этих связей. Плиту считать однородной пластиной весом P. Данные для расчета приведены в таблице **С3.1**, расчетные схемы – в таблице С**3.2**.

Выполнить проверку: составить уравнение суммы моментов относительно оси, проходящей через точку C' и параллельной одной из заданных координатных осей; и сравнить полученную сумму с нулём. Координатные оси, заданные в расчетных схемах – в таблице С**3.2**, изображены исключительно для наглядности аксонометрии конструкции; окончательный выбор осей для составления уравнений равновесия является прерогативой исследователя.

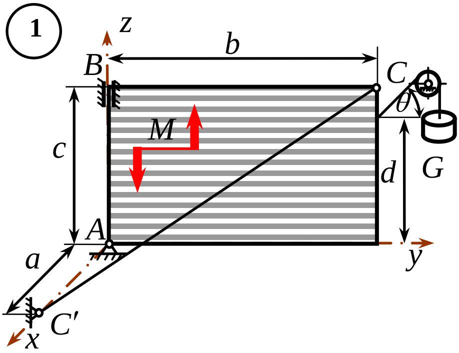
В качестве дополнительного исследования найти аналитическую зависимость реакции, указанной в таблице **С3.1**, от величины угла θ и построить соответствующий график.

Таблица С3.1. Исходные данные.

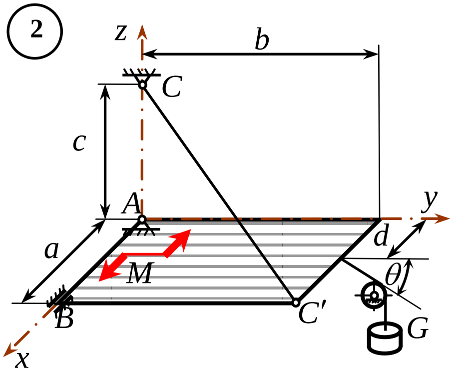
№	P $кН$	G $кН$	M $кН \cdot м$	a $м$	b $м$	c $м$	d $м$	θ $гр.$	Дополнительное исследование
1.	2,5	5,0	2,3	3,9	7,0	4,1	3,2	55	$R_A = f(\theta)$
2.	3,0	5,4	2,0	4,5	6,2	3,5	2,1	40	$R_B = f(\theta)$
3.	2,7	5,3	3,1	4,5	6,2	3,5	3,2	40	$R_B = f(\theta)$
4.	9,0	5,9	4,0	9,6	2,4	3,2	2,7	90	$R_A = f(\theta)$
5.	5,2	6,0	2,8	3,8	7,2	4,2	3,6	45	$R_B = f(\theta)$
6.	6,0	7,2	2,5	3,4	2,8	4,2	1,5	35	$R_A = f(\theta)$
7.	2,6	6,3	3,2	4,0	2,6	3,0	3,5	50	$R_B = f(\theta)$
8.	3,4	6,8	3,6	6,6	6,8	2,6	5,2	50	$R_B = f(\theta)$
9.	5,5	7,6	2,1	9,2	6,5	2,7	3,2	55	$R_A = f(\theta)$
10.	4,1	7,4	3,6	3,8	7,2	4,1	3,2	45	$R_B = f(\theta)$
11.	5,7	8,0	2,8	5,1	4,0	5,8	4,0	25	$R_B = f(\theta)$
12.	2,8	6,1	2,0	8,7	5,0	5,9	3,9	30	$R_A = f(\theta)$
13.	3,2	5,9	2,5	8,4	6,1	5,5	2,4	70	$R_B = f(\theta)$
14.	3,6	5,0	2,5	9,6	2,7	3,2	6,6	50	$R_B = f(\theta)$
15.	3,6	8,0	3,4	4,5	5,6	4,2	2,7	25	$R_A = f(\theta)$
16.	5,2	7,0	3,4	9,8	4,1	5,8	1,9	30	$R_B = f(\theta)$
17.	5,0	6,9	3,5	10,2	7,3	4,1	5,4	15	$R_B = f(\theta)$
18.	2,7	5,2	2,2	8,6	5,0	6,1	2,0	10	$R_A = f(\theta)$
19.	4,6	5,8	3,2	6,0	5,4	4,5	2,7	25	$R_B = f(\theta)$
20.	3,9	7,4	3,0	3,6	7,2	4,1	4,8	15	$R_B = f(\theta)$
21.	3,0	6,4	2,8	3,5	4,0	5,7	1,9	25	$R_A = f(\theta)$
22.	3,6	7,2	3,0	9,0	5,1	7,6	3,9	30	$R_B = f(\theta)$
23.	4,2	6,8	2,7	8,7	5,8	4,9	2,7	25	$R_B = f(\theta)$
24.	2,6	6,0	4,0	6,6	5,9	3,4	4,2	45	$R_A = f(\theta)$
25.	5,0	7,0	3,8	8,1	4,6	5,0	2,7	60	$R_B = f(\theta)$
26.	4,8	7,8	2,0	4,3	3,0	5,8	,3	40	$R_B = f(\theta)$
27.	3,2	5,8	2,6	4,5	4,7	4,6	3,5	30	$R_A = f(\theta)$
28.	3,0	6,1	3,0	4,6	6,2	3,5	3,3	50	$R_B = f(\theta)$
29.	4,0	6,5	3,6	6,6	6,1	3,3	5,7	30	$R_B = f(\theta)$
30.	4,6	6,8	3,8	2,4	5,4	4,7	2,7	25	$R_A = f(\theta)$

Таблица С3.2. Расчётные схемы.

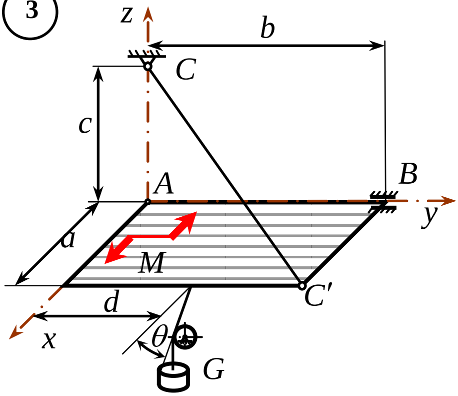
1


z
b
B
C
θ
M
c
d
G
A
a
y
C′
x

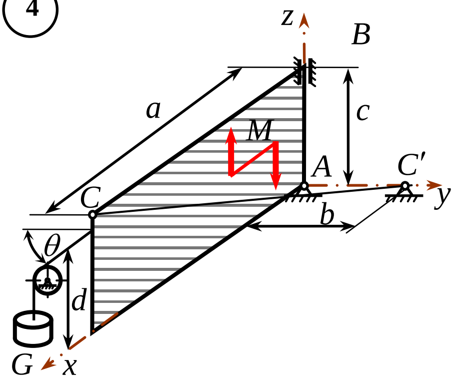
2


z
b
C
c
A
y
a
d
M
θ
B
C′
G
x

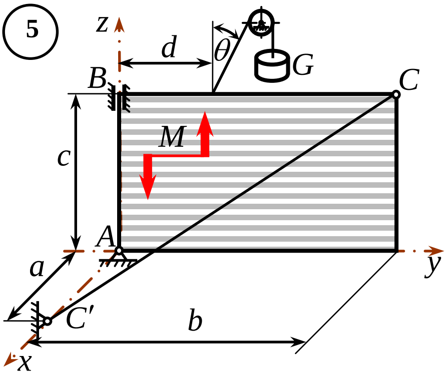
3


z
b
C
c
A
B
y
a
M
C′
d
x
θ
G

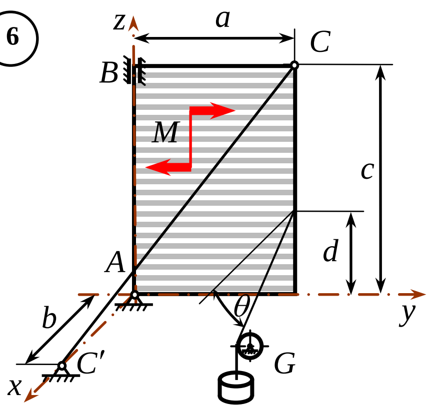
4


z
B
a
c
M
A
C′
C
y
b
θ
d
G
x

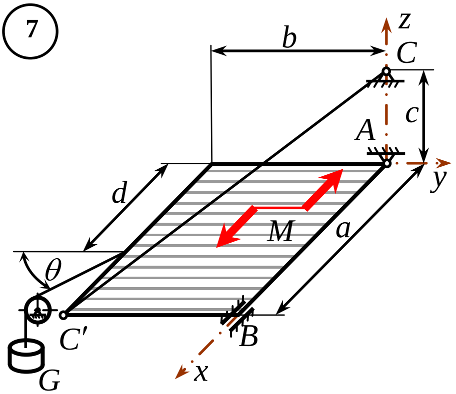
5


z
d
θ
G
B
C
c
M
A
y
a
C′
b
x

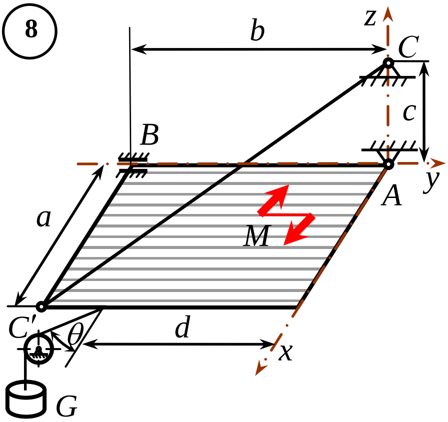
6


z
a
C
B
M
c
d
A
b
θ
y
C′
G
x

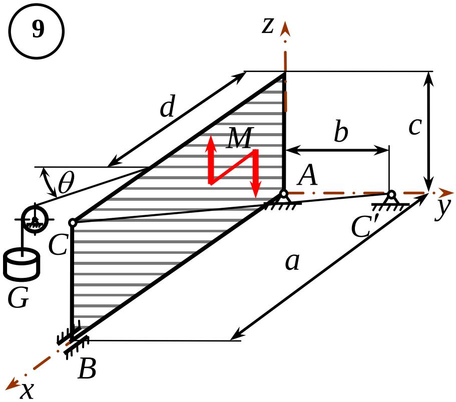
7


z
b
C
c
A
y
d
M
a
θ
C′
B
G
x

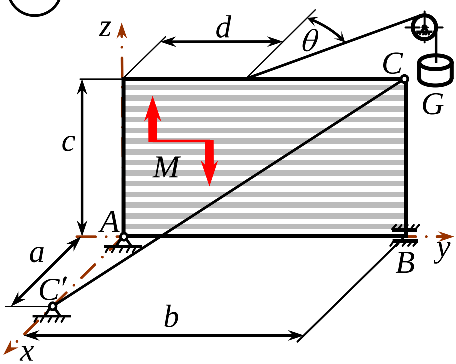
8


b
z
C
B
c
y
A
a
M
C′
θ
d
x
G

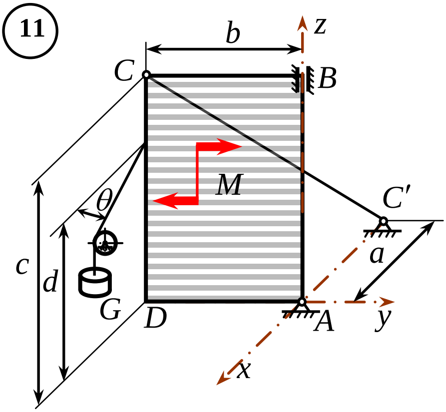
9


z
d
M
c
b
θ
A
C′
y
C
G
a
B
x

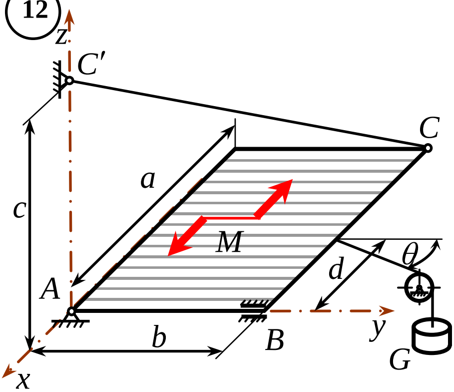
10

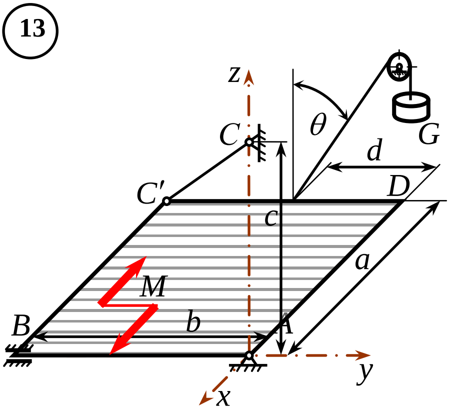

d
θ
z
C
G
c
M
A
a
B
y
C′
b
x

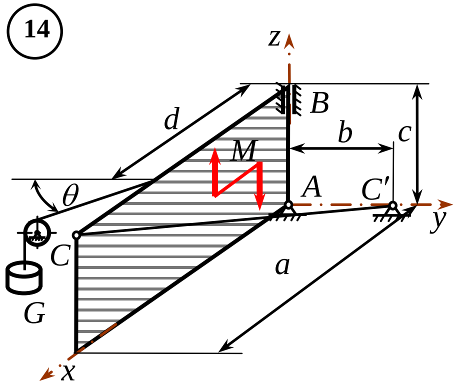
11

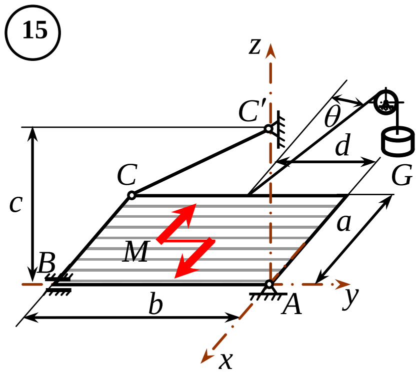

b
z
C
B
M
C′
θ
a
c
d
G
D
A
y
x

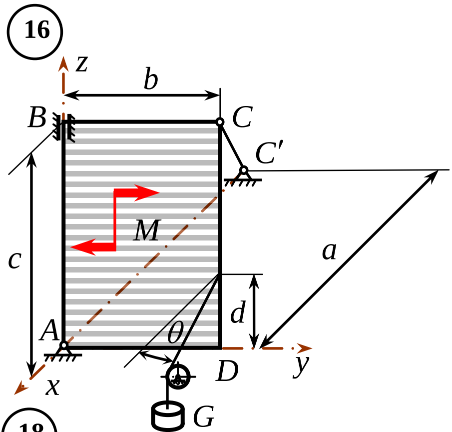
12

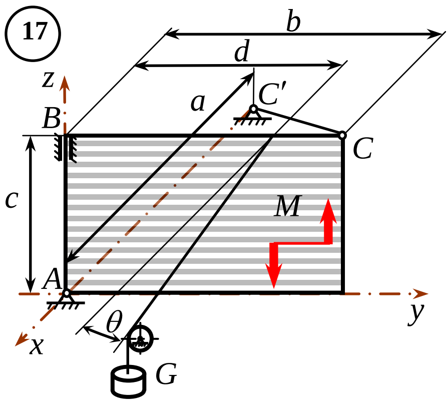

z
C′
C
a
c
M
θ
d
A
b
B
y
G
x

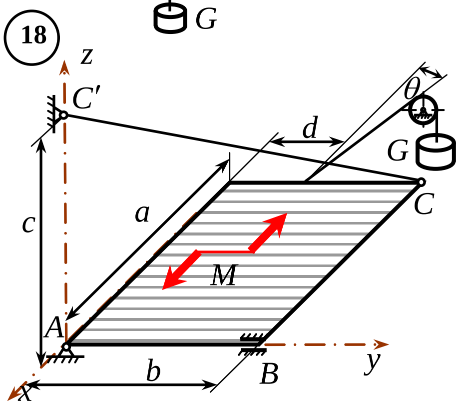

13
z
C
C′
θ
G
d
D
c
a
M
B
b
A
y
x


14
z
B
d
b
c
M
A
C′
θ
y
C
a
G
x

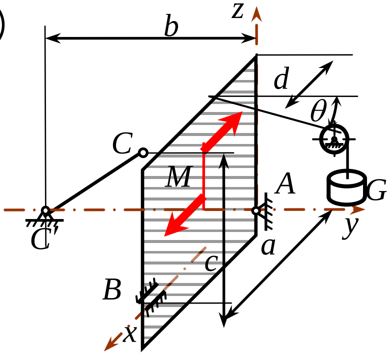

15
z
C′
θ
d
G
C
c
a
M
B
b
A
y
x


16
z
b
B
C
C′
M
c
a
d
A
θ
D
y
x
G

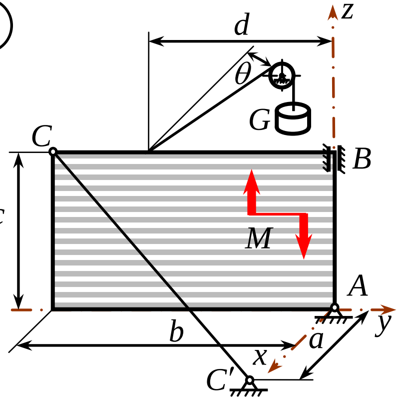

17
b
d
z
a
C′
B
C
c
M
A
y
θ
x
G


18
z
C′
θ
d
G
c
a
C
M
A
b
B
y
x

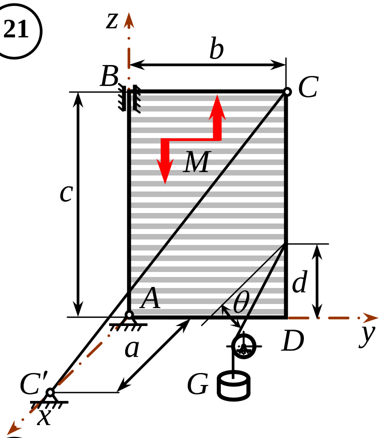
19



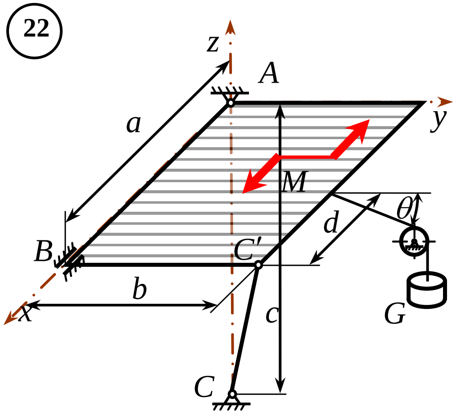
20



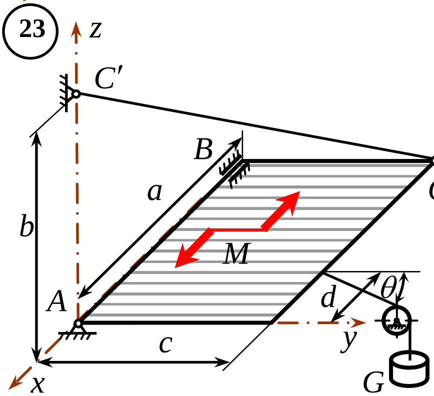
21



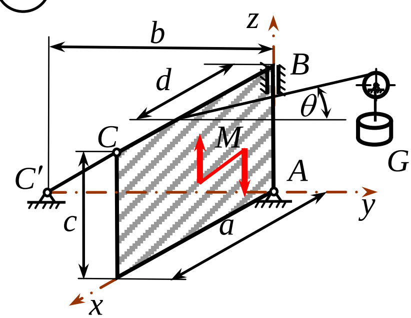
22



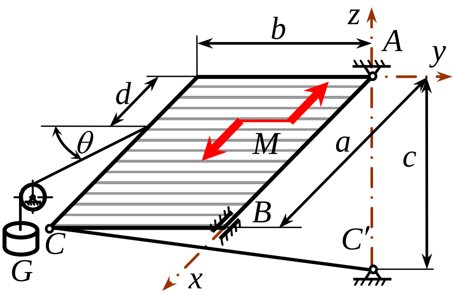
23



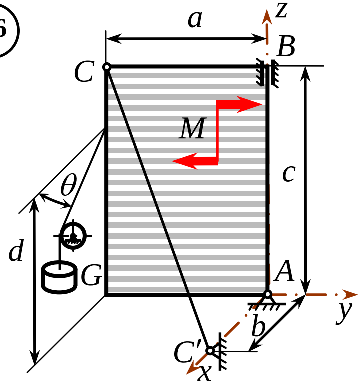
24



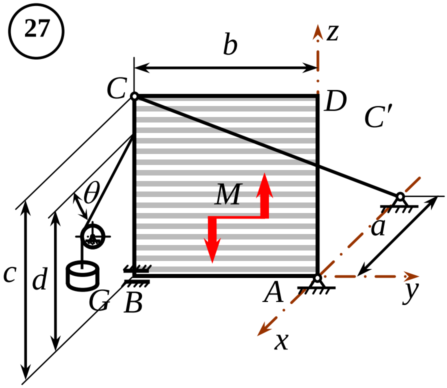
25



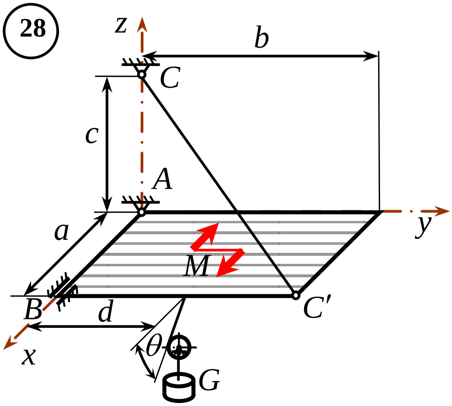
26



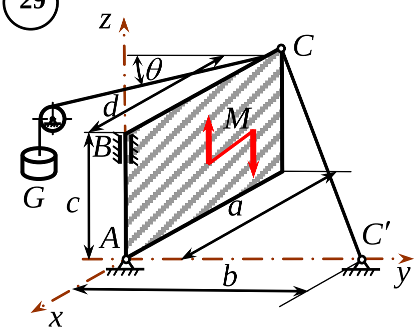
27



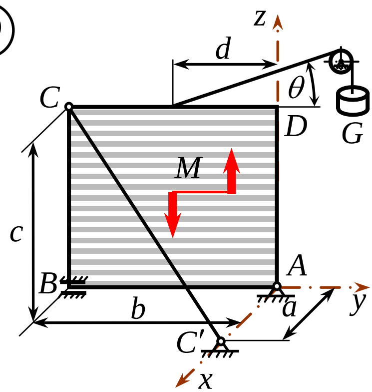
28



29



30



С3.4. Пример выполнения задания

С3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЁРДОГО ТЕЛА

Дано:

$P = 4{,}0\ кН,$

$G = 6{,}4\ кН,$

$M = 2{,}8 кНм,$

$a = 1{,}8\ м,$

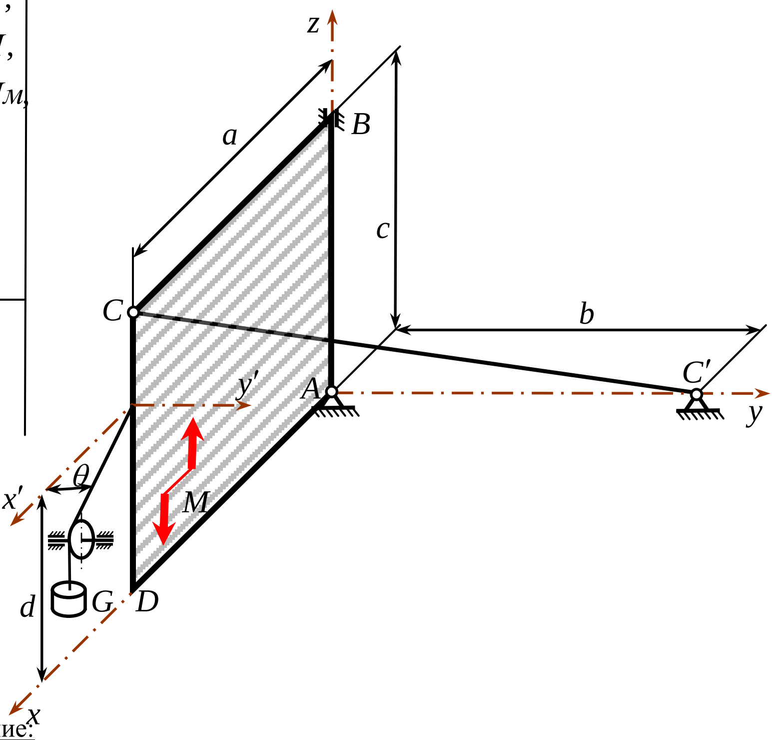
$b = 4{,}2\ м,$

$c = 2{,}6\ м,$

$d = 2{,}0\ м,$

$\theta = 30^\circ.$

Опр. $R_A, R_B, N,$



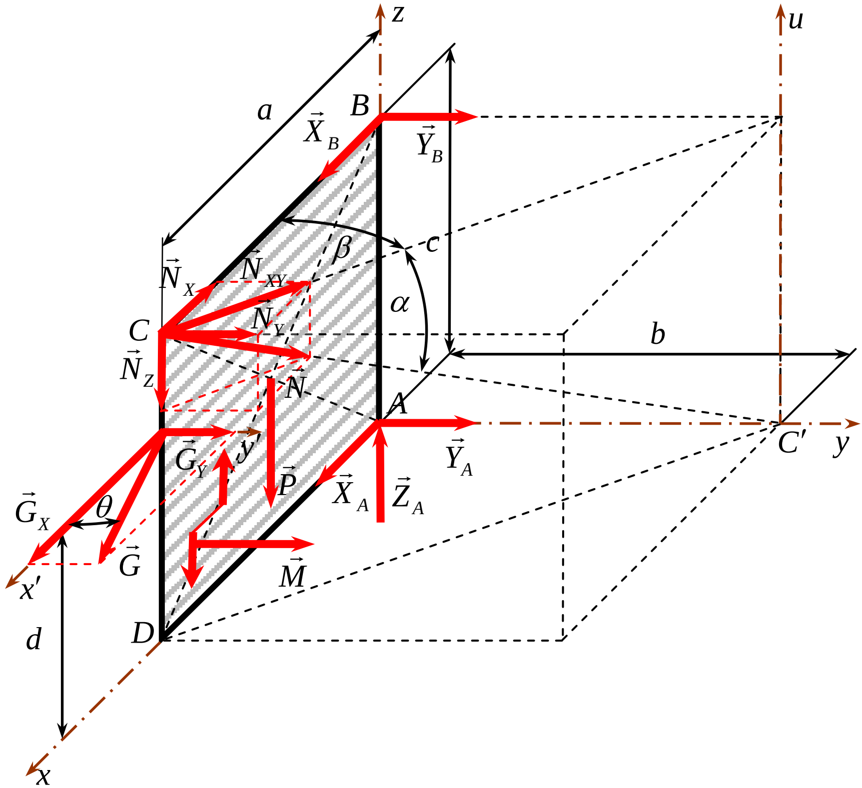
Решение:

Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют вес плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M, сила натяжения троса, равная по величине весу груза G и направленная по тросу, реакция стержня $\vec{N}$, составляющие реакции подпятника A $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, составляющие реакции подшипника B $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$.

Эти силы составляют произвольную пространственную систему сил. Для такой системы сил, выбрав предварительно оси координат, составим шесть уравнений равновесия.

Для упрощения вычисления моментов реакции стержня $\vec{N}$ относительно осей x и y, вводя в рассмотрение дополнительные углы α и β, разложим эту силу на составляющие по осям x, y и z. Величины составляющих равны:

$$N_X = N \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta,\ N_Y = N \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta,\ N_Z = N \cdot \sin\alpha\,.$$



Силу натяжения троса $\vec{G}$ также разложим на составляющие по осям x и y, причём

$$G_X = G \cdot \cos\theta = 6{,}4 \cdot \cos 30^\circ = 5{,}543\ кН\,,$$

$$G_Y = G \cdot \sin\theta = 6{,}4 \cdot \sin 30^\circ = 3{,}2\ кН\,.$$

Составим уравнения равновесия.

$$\sum F_X = 0; \qquad X_A + X_B - N_X + G_X = 0\,; \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad Y_A + Y_B + N_Y + G_Y = 0\,; \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum F_Z = 0; \qquad Z_A - N_Z - P = 0\,; \qquad \textbf{(3)}$$

$$\sum m_X(\vec{F}) = 0; \ -Y_B \cdot c - G_Y \cdot d - N_Y \cdot c = 0\,; \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum m_Y(\vec{F})=0;\quad X_B\cdot c+P\cdot\frac{a}{2}+M+G_X\cdot d=0\,; \tag{5}$$

$$\sum m_Z(\vec{F})=0;\quad N_Y\cdot a+G_Y\cdot a=0\,. \tag{6}$$

Значения тригонометрических функций углов α и β определим из рисунка.

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{1{,}8^2+4{,}2^2}}{\sqrt{1{,}8^2+4{,}2^2+2{,}6^2}}=0{,}869\,,$$

$$\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2{,}6}{\sqrt{1{,}8^2+4{,}2^2+2{,}6^2}}=0{,}495\,,$$

$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1{,}8}{\sqrt{1{,}8^2+4{,}2^2}}=0{,}394\,,$$

$$\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4{,}2}{\sqrt{1{,}8^2+4{,}2^2}}=0{,}919\,.$$

Решая систему уравнений **(1) - (6)**, найдём искомые величины реакций.

Из уравнения **(6)** найдём N.

$$N_Y=-G_Y\text{, или }N\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=-G_Y\Rightarrow$$

$$N=-\frac{G_Y}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}=-\frac{3{,}2}{0{,}869\cdot0{,}919}=-4{,}007\ кН\,.$$

Тогда

$$N_X=N\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=-4{,}007\cdot0{,}869\cdot0{,}394=-1{,}372кН\,,$$
$$N_Y=N\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=-4{,}007\cdot0{,}869\cdot0{,}919=-3{,}2кН\,,$$
$$N_Z=N\cdot\sin\alpha=-4{,}007\cdot0{,}495=-1{,}984\ кН\,.$$

Из уравнения **(5)** найдём X_B.

$$X_B=\frac{-P\cdot\frac{a}{2}-M-G_X\cdot d}{c}=\frac{-4\cdot\frac{1{,}8}{2}-2{,}8-5{,}543\cdot2}{2{,}6}=-6{,}725кН\,.$$

Из уравнения **(4)** следует:

$$Y_B=\frac{-G_Y\cdot d-N_Y\cdot c}{c}=\frac{-3{,}2\cdot2+3{,}2\cdot2{,}6}{2{,}6}=0{,}738кН\,.$$

Из уравнений **(3)**, **(2)**, и **(1)** следует:

$$Z_A = N_Z + P = -1{,}984 + 4 = 2{,}016\,\kappa H\,,$$

$$Y_A = -Y_B - N_Y - G_Y = -0{,}738 + 3{,}2 - 3{,}2 = -0{,}738\,\kappa H\,,$$

$$X_A = -X_B + N_X - G_X = 6{,}725 - 1{,}372 - 5{,}543 = -0{,}190\,\kappa H\,.$$

Для проверки составим уравнение моментов относительно оси u, параллельной оси z и проходящей через т. $C^{/}$.

$$\sum m_u(F) = X_A \cdot b + X_B \cdot b + G_X \cdot b + G_Y \cdot a = -0{,}190 \cdot 4{,}2 - 6{,}725 \cdot 4{,}2 +$$

$$+ 5{,}543 \cdot 4{,}2 + 3{,}2 \cdot 1{,}8 = 29{,}041 - 29{,}043 = -0{,}002 \approx 0.$$

Относительная погрешность составляет:

$\delta = \dfrac{|-0{,}002|}{29{,}041} \cdot 100\% = 0{,}007\%$, что вполне допустимо в технических расчетах.

Результаты решения сведем в таблицу.

Ответ:

Реакция	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Y_B	N
Вел-на в κH	-0,190	-0,738	2,016	-6,725	0,738	-4,007

Дополнительное исследование

В качестве дополнительного исследования найдём аналитическую зависимость величины реакции R_A от угла θ и построим соответствующий график. Для этого сначала из уравнений **(1)** - **(6)** найдём зависимости величин составляющих R_A от угла θ.

$$N = -\frac{G_Y}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = -\frac{G\sin\theta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}\,.$$

$$N_X = N \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = -G \cdot \frac{\sin\theta}{tg\beta} = -G\frac{a}{b}\sin\theta\,.$$

$$N_Y = N \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = -G\sin\theta\,.$$

$$N_Z = N \cdot \sin\alpha = -Gtg\alpha\frac{\sin\theta}{\sin\beta} = -G\frac{c}{b}\sin\theta\,.$$

$$X_B = \frac{-P \cdot \dfrac{a}{2} - M - G_X \cdot d}{c} = -\frac{P \cdot \dfrac{a}{2} + M + G\cos\theta \cdot d}{c}\,.$$

$$Y_B = \frac{-G_Y \cdot d - N_Y \cdot c}{c} = G \cdot \frac{-\sin\theta \cdot d + \sin\theta \cdot c}{c} = G\sin\theta \cdot \left(1 - \frac{d}{c}\right).$$

$$Z_A = N_Z + P = P - G\frac{c}{b}\sin\theta . \qquad \textbf{(7)}$$

$$Y_A = -Y_B - N_Y - G_Y = G\sin\vartheta \cdot \left(-1 + \frac{d}{c} + 1 - 1\right) =$$

$$= -G\sin\theta \cdot \left(1 - \frac{d}{c}\right). \qquad \textbf{(8)}$$

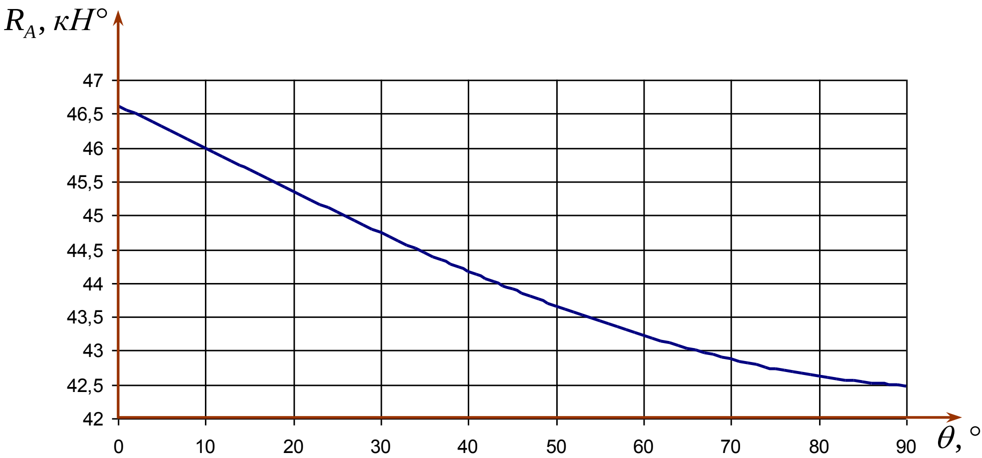
$$X_A = -X_B + N_X - G_X =$$

$$= \frac{P \cdot \frac{a}{2} + M}{c} + G\left[\left(\frac{d}{c} - 1\right)\cos\theta - \frac{a}{b}\sin\theta\right]. \qquad \textbf{(9)}$$

Применяя для табуляции функций **(7) - (9)** программу **Microsoft Excel**, получим соответствующие функции, заданные в виде таблиц, для $0 \le \theta \le 90°$.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}\,. \qquad \textbf{(10)}$$

Протабулировав теперь выражение **(10)**, используя **мастер диаграмм**, строим график функции $R_A(\theta)$.



Из графика видно, что при увеличении θ от 0 до $90°$ величина R_A монотонно убывает.

К1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧКИ

К1.1 Краткие сведения из теории

Под ***точкой*** в кинематике принимают тело, размерами которого можно пренебречь при решении данной задачи. Тело, совершающее поступательное движение, также можно рассматривать как точку, поскольку кинематические характеристики всех его точек одинаковы.

Основной задачей кинематики точки является ***определение*** ее ***кинематических характеристик*** – в первую очередь – **скорости и ускорения**. Эта задача выполняется тогда, когда движение точки задано (явно или неявно), то есть указан метод, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Существует три способа задания движения точки: ***векторный, координатный и естественный***. В первом случае движение точки задается зависимостью радиус-вектора движущейся точки, проведенного из неподвижного центра, от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \textbf{(К1.1)}$$

При ***координатном способе***, являющемся следствием векторного, движение точки задается уравнениями движения – зависимостями соответствующих координат от времени. Для декартовых координат уравнения движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(К1.2)}$$

Скорость и ускорение точки в этом случае определяются по проекциям векторов скорости и ускорения на оси координат. Эти проекции вычисляются дифференцированием по времени координат :

$$\left.\begin{aligned} V_X &= \frac{dx}{dt}, \\ V_Y &= \frac{dy}{dt}, \\ V_Z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(К1.3)} \qquad \left.\begin{aligned} a_X &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_X}{dt}, \\ a_Y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_Y}{dt}, \\ a_Z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_Z}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(К1.4)}$$

Тогда

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}\,, \qquad \textbf{(К1.5)} \qquad a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2}\,. \qquad \textbf{(К1.6)}$$

Направление векторов скорости и ускорения в любой момент времени могут быть определены направляющими косинусами углов, которые эти векторы составляют с координатными осями:

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) &= \frac{V_X}{V}, \\ \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) &= \frac{V_Y}{V}, \\ \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{k}\right) &= \frac{V_Z}{V}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(К1.7)} \qquad \left.\begin{aligned} \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) &= \frac{a_X}{a}, \\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) &= \frac{a_Y}{a}, \\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k}\right) &= \frac{a_Z}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(К1.8)}$$

При ***естественном способе*** задаются: траектория точки, начало и положительное направление отсчета дуговой координаты S, закон движения – зависимость дуговой координаты S от времени t:

$$S = S(t). \qquad \textbf{(К1.9)}$$

В этом случае величина скорости определяется как производная от дуговой координаты по времени:

$$V = \frac{dS}{dt}. \qquad \textbf{(К1.10)}$$

Ускорение точки имеет в естественных осях координат две составляющие – касательную (тангенциальную) и нормальную:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \Rightarrow a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \qquad \textbf{(К1.11)}$$

Касательное ускорение равно по величине производной от модуля скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_X a_X + V_Y a_Y + V_Z a_Z}{V}. \qquad \textbf{(К1.12)}$$

Вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ находится на касательной к траектории, вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ находится на главной нормали к траектории и направлен в сторону вогнутости траектории.

Нормальное ускорение равно по величине квадрату скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n}. \qquad \textbf{(К1.13)}$$

К1.2. Указания по выполнению задания

Последовательность выполнения задания.

1. **Уяснить условие задания.** В настоящем задании движение точки задается двумя уравнениями, следовательно траектория точки – плоская кривая.
2. **Найти уравнение траектории точки.** Для этого необходимо исключить время t из уравнений движения.
3. **Изобразить траекторию на рисунке.** Выяснить, вся ли эта кривая является траекторией точки, для чего нужно в уравнениях движения найти область определения функций $x(t)$ и $y(t)$ для $0 \le t \le \infty$.
4. **Определить положение точки в начальный и заданный момент времени.** Для этого в уравнение движения следует подставить значения $t = 0$ и $t = t_1$ и подсчитать соответствующие координаты.
5. **Найти проекции вектора скорости на оси координат.** Для этого по формуле **(К1.3)** сначала найти проекции вектора скорости как функции времени, а затем подсчитать их значения для заданного момента времени.
6. **По формуле (К1.5) найти величину вектора скорости.**
7. **Изобразить на рисунке вектор скорости $\vec{V}$ и его составляющие $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$ для заданного момента времени.** При этом удобно сначала построить векторы $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$ и $\vec{V}$ в выбранном масштабе, а затем, используя формулы **(К1.7)**, подсчитать значения направляющих косинусов углов, которые эти векторы составляют с координатными осями, а по ним – соответствующие углы. Отложив эти углы, необходимо убедиться, что результаты построения в том и другом способе совпадают.
8. **Аналогичным образом найти векторы $\vec{a}_X$, $\vec{a}_Y$ и $\vec{a}$.**
9. **По формуле (К1.12) подсчитать величину касательного ускорения точки a_τ и отложить вектор $\vec{a}_\tau$ на касательной к траектории с учётом знака.**
10. **По формуле (К1.11) подсчитать величину нормального ускорения точки a_n и отложить вектор $\vec{a}_n$ на главной нормали к траектории.**
11. **По формуле (К1.13) подсчитать радиус кривизны траектории для заданного момента времени.**
12. **Проанализировать полученный результат, сделать выводы.**

К1.3. Собственно задание

По заданным уравнениям движения точки необходимо:

1. Найти уравнение траектории и построить соответствующую кривую, указав при этом, вся ли кривая является траекторией точки. Построить траекторию точки.
2. Определить положение точки в начальный и в заданный моменты времени, изобразить на рисунке эти положения.
3. Найти величины векторов скорости и ускорения точки для заданного положения, изобразить эти векторы и их составляющие на рисунке.
4. Найти радиус кривизны траектории

Необходимые для расчета данные приведены в таблице К1.1.

Таблица К1.1. Исходные данные.

№	$x(t)$ *м*	$y(t)$ *м*	t_1 *с*
1.	$-2t^2+3$	$5t$	0,5
2.	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+2$	$5\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)-1$	1
3.	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+2$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)-1$	1
4.	$0{,}5\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-0{,}5$	$0{,}6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)+0{,}3$	2
5.	$2t$	$4\sin t$	$\frac{5}{4}\pi$
6.	$4t$	$-\frac{4}{t+1}$	1,5
7.	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+1$	4
8.	$5t$	$7t^2-3$	0,9
9.	$2\sin t$	$4\cos(2t)$	$\frac{\pi}{4}$
10.	$2\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)-0{,}5$	$4\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$	1

11.	$0{,}5\cos(\pi t)$	$0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	0,5
12.	$-2t$	$4t^2-4$	1,3
13.	$-2t-2$	$-\frac{2}{t+1}$	0,75
14.	$8\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)+2$	$-8\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-7$	2
15.	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)+1$	$3\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right)$	1
16.	$\frac{15}{8}t^3+\frac{5}{4}t-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}t^3+t-\frac{4}{5}$	0,75
17.	$3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2t$	3,5
18.	$\frac{3}{t+2}$	$3t+6$	0,75
19.	$7t^2$	$5t-1$	0,8
20.	$0{,}4-0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$0{,}8\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)+0{,}2$	1
21.	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$1-\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2
22.	$4t$	$4\cos(2t)$	$\frac{3\pi}{8}$
23.	$1+4\cos(t^2)$	$4\sin(t^2)-2$	$\sqrt{\frac{5\pi}{6}}$
24.	$2t^2-3$	$-\frac{1}{t^2+0{,}5}$	1
25.	t^2-2t+3	$2t^2-4t-1$	3
26.	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2

27.	$1{,}5\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)+1$	$1{,}5\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$	1,2
28.	$3\sin\left(\pi t^3\right)+1$	$3\cos\left(\pi t^3\right)+1$	0,9
29.	$-4t^4+1$	$-3t^2$	0,6
30.	$1-\sin t$	$\cos(2t)-1$	$\frac{\pi}{4}$

К1.4. Пример выполнения задания

К1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧКИ

Дано:

$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)-1 \ (м)$,

$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)+1 \ (м)$,

$t_1 = 1 \ (c)$

Опр. $y(x)$, $\vec{V}$, $\vec{a}$, ρ.

Решение:

Найдём уравнение траектории. Для этого исключим время t из уравнений движения. Воспользуемся известной тригонометрической формулой:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Выразим из первого уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)$, из второго - $\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)$, возведём в квадрат и сложим полученные выражения.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right),\\ \frac{y-1}{4} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right).\end{aligned}\right\} \quad + \left.\begin{aligned}\frac{(x+1)^2}{2^2} &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}t^3\right),\\ \frac{(y-1)^2}{4^2} &= \cos^2\left(\frac{\pi}{3}t^3\right).\end{aligned}\right\} \quad \frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{4^2}=1.$$

Таким образом, траекторией точки является эллипс с полуосями 2*м* и 4*м* и координатами центра $(-1;1)$.

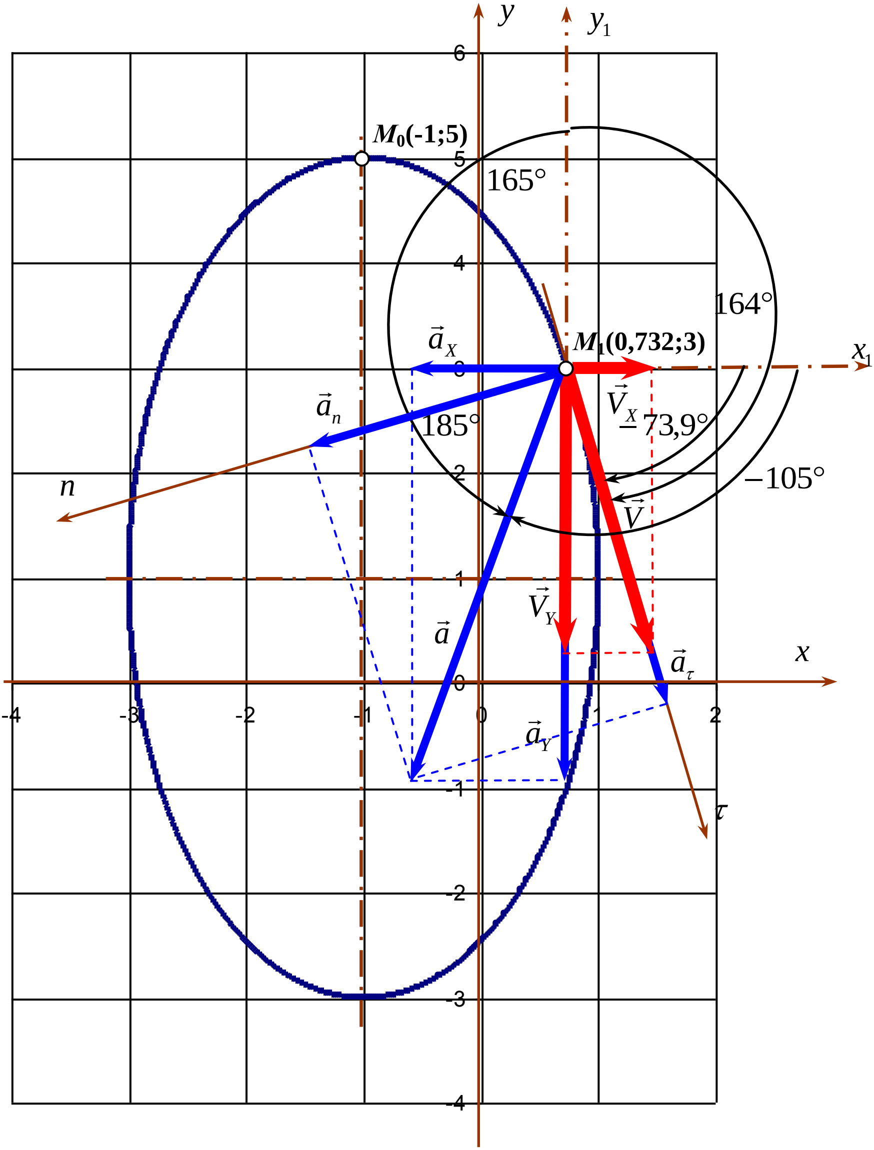
Изображаем траекторию.

Выясним, весь ли эллипс является траекторией точки.

Так при $0 \le t \le \infty$, $-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right) \le 1$ и $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right) \le 1$,

то $-3 \le x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)-1 \le 1$, $-3 \le y = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)+1 \le 5.$

Таким образом, весь эллипс является траекторией точки.



Найдём положение точки для начального и заданного моментов времени.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0^3\right)-1=-1м \\ y_0 &= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0^3\right)+1=5м \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)-1=0{,}732м \\ y_1 &= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)+1=3м \end{aligned}\right\}.$$

Найдём скорость точки.

$$\left.\begin{aligned} V_X &= \frac{dx}{dt}=2\pi t^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right), \\ V_Y &= \frac{dy}{dt}=-4\pi t^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right). \end{aligned}\right\}\ V=\sqrt{V_X^2+V_Y^2}\ .$$

При $t_1=1\ c$

$$\left.\begin{aligned} V_X &= 2\pi\cdot 1^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}1^3\right)=3{,}14м/с, \\ V_Y &= -4\pi\cdot 1^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}1^3\right)=-10{,}9м/с. \end{aligned}\right\}$$

$$V=2\pi\cdot 1^2\sqrt{1+3\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)}=11{,}3м/с\ .$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) &= \frac{V_X}{V}=\frac{3{,}14}{11{,}3}=0{,}276; \\ \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) &= \frac{V_Y}{V}=\frac{-10{,}9}{11{,}3}=-0{,}965. \end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} \left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) &= -73{,}9°; \\ \left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) &= -164°. \end{aligned}\right\}$$

Найдём ускорение точки.

$$\left.\begin{aligned} a_X &= \frac{dV_X}{dt}=2\pi\left[2t\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)-\pi t^4\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)\right], \\ a_Y &= \frac{dV_Y}{dt}=-4\pi\left[2t\sin\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)+\pi t^4\cos\left(\frac{\pi}{3}t^3\right)\right]. \end{aligned}\right\}\ a=\sqrt{a_X^2+a_Y^2}\ .$$

При $t_1=1$ с

$$\left.\begin{aligned} a_X &= 2\pi\left[2\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)-\pi\cdot 1^4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)\right]=-10{,}8\,м/с^2,\\ a_Y &= -4\pi\left[2\cdot 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)+\pi\cdot 1^4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1^3\right)\right].=-41{,}5\,м/с^2.\end{aligned}\right\}$$

$$a=\sqrt{(-10{,}8)^2+(-41{,}5)^2}=42{,}9\,м/с^2.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)&=\frac{a_X}{a}=-\frac{10{,}8}{42{,}9}=-0{,}252;\\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)&=\frac{a_Y}{a}=-\frac{41{,}5}{42{,}9}=-0{,}967.\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)&=-105^\circ;\\ \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)&=165^\circ.\end{aligned}\right\}$$

Найдём касательное ускорение точки.

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{V_X a_X+V_Y a_Y}{V}=$$

$$=\frac{3{,}14\cdot(-10{,}8)+(-10{,}9)\cdot(-41{,}5)}{11{,}3}=37{,}0\,м/с^2$$

Найдём нормальное ускорение точки.

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{42{,}9^2-37{,}0^2}=21{,}7\,м/с^2.$$

Изображаем все векторы на рисунке.
Найдём радиус кривизны траектории.

$$\rho=\frac{V^2}{a_n}=\frac{11{,}3^2}{21{,}7}=5{,}89\,м.$$

Результаты вычисления сведем в таблицу.

Ответ:

V_X	V_Y	V	a_X	a_Y	a	a_τ	a_n	ρ
$м/с$	$м/с$	$м/с$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м$
3,14	–10,9	11,3	–10,8	–41,5	42,9	37,0	21,7	5,89

К2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

К2.1 Краткие сведения из теории

Любое не поступательное и не вращательное движение твёрдого тела называется сложным. По своей сути такое движение является составным: оно может быть представлено как сумма некоторого количества простейших движений (поступательных и вращательных), иначе говоря, может быть **составлено** из простейших движений.

В настоящем задании рассматривается случай, когда число простых движений, составляющих сложное, равно двум. Кроме того, в пределах настоящего задания тело, совершающее сложное движение, можно считать точкой.

Для исследования сложного движения, состоящего из двух простейших, необходимо выбрать две системы отсчёта: подвижную и неподвижную.

При выборе неподвижных осей координат их необходимо связать с неподвижным в условиях данной задачи телом.

Подвижные оси нужно выбирать так, чтобы движение тела по отношению к подвижным осям было простым, и чтобы движение подвижных осей по отношению к неподвижным было простым. Иначе говоря, оси нужно выбирать так, чтобы сложное движение раскладывалось на простые.

Движение тела по отношению к подвижным осям называется относительным (индексация: ***r*** от латинского ***relativus*** – относительный).

Движение подвижных осей по отношению к неподвижным называется переносным (индексация: ***e*** от французского ***entrainer*** – увлекать).

Движение тела по отношению к неподвижным осям называется абсолютным.

Абсолютная скорость точки $\vec{V}$, то есть скорость точки по отношению к неподвижным осям координат, определяется с помощью теоремы сложения скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r . \qquad \textbf{(К2.1)}$$

Здесь $\vec{V_e}$ - переносная скорость – скорость, которую имела бы точка, если бы она неизменным образом была связана с подвижными осями;

$\vec{V}_r$ - относительная скорость – скорость точки по отношению к подвижным осям координат, которые в этом случае рассматриваются как неподвижные.

Абсолютное ускорение точки $\vec{a}$, то есть ускорение ее по отношению к неподвижным осям координат, определяется теоремой сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K . \qquad \textbf{(К2.2)}$$

Здесь $\vec{a}_e$ - переносное ускорение – ускорение, которое имела бы точка, если бы она неизменным образом была связана с подвижными осями;

$\vec{a}_r$ - относительное ускорение – ускорение точки по отношению к подвижным осям координат;

$\vec{a}_K$ - ускорение Кориолиса (поворотное ускорение).

$$\vec{a}_K = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right), \qquad \textbf{(К2.3)}$$

где, в свою очередь, $\vec{\omega}_e$ - вектор угловой скорости тела в переносном движении.

Векторное равенство **(К2.3)** полностью определяет ускорение Кориолиса: как по величине, так и по направлению.

Величина ускорения Кориолиса:

$$a_K = \left|\vec{a}_K\right| = 2\left|\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right| = 2\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right).$$

Для определения направления вектора $\vec{a}_K$ необходимо вектор $\vec{\omega}_e$ перенести в движущуюся точку и провести плоскость через векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$. Вектор $\vec{a}_K$ перпендикулярен этой плоскости и направлен так, что если смотреть с конца его, вращение вектора $\vec{\omega}_e$ до совмещения с вектором $\vec{V}_r$ кратчайшим образом кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Иногда для определения направления вектора ускорения Кориолиса используют следствие вышеприведённого правила - правило Н.Е. Жуковского: ***для определения направления вектора*** $\vec{a}_K$ ***необходимо вектор*** $\vec{V}_r$ ***спроецировать на плоскость, перпендикулярную вектору*** $\vec{\omega}_e$***, и повернуть на*** 90° ***в направлении переносного вращения. Полученное направление и будет направлением вектора*** $\vec{a}_K$***.***

2.2 Указания по выполнению задания

Для того, чтобы успешно решить задачу по кинематике сложного движения, необходимо провести анализ движения: установить, какое движения ***в условиях конкретной задачи*** является относительным, какое – переносным, какое – абсолютным. Для проведения такого анализа, как это следует из определения относительного, переносного и абсолютного движений, следует грамотно выбрать неподвижные и подвижные оси координат; без проведения такого анализа дальнейшее решение смысла не имеет.

Последовательность выполнения задания.

27. **Уяснить условие задания.**
28. **Изобразить расчётную схему (рисунок).** Если в задаче есть неподвижная ось вращения, перпендикулярная плоскости чертежа, то при выполнении расчётной схемы можно ограничиться одной фронтальной проекцией (видом спереди). В противном случае необходимо изобразить, по крайней мере, два проекции (два вида), например, фронтальной и вертикальной (вид спереди и вид сверху). К аксонометрии прибегать не рекомендуется.
29. **Найти положение точки в заданный момент времени и изобразить его на рисунке.** Для этого нужно в выражение закона движения точки по телу $S(t)$ подставить заданный момент времени и отложить полученное расстояние BM .
30. **Выбрать неподвижные оси (ось) координат.** Для этого необходимо связать эти оси (ось) с неподвижным в условиях данной задачи телом.
31. **Выбрать подвижные оси (ось) координат.** Эти оси (эту ось) следует выбирать так, чтобы движение тела (точки) по отношению к этим осям было простым (поступательным или вращательным), и чтобы движение подвижных осей по отношению к неподвижным осям было простым. Необходимо также указать, с каким физическим телом связываются подвижные оси.
32. **Установить какое движение в условиях данной задачи является относительным.** Если относительное движение совершает тело, необходимо указать вид этого движения (поступательное или вращательное). При этом в случае поступательного движения необходимо указать форму траектории, в случае вращательного движения – ось вращения. Если относительное движение совершает точка, необходимо указать форму траектории.
33. **Установить, какое движение в условиях данной задачи является переносным.** При этом необходимо указать тело, связанное с подвижными осями и совершающее, следовательно, переносное движение.
34. **Ответить на вопросы задачи.** При этом отвечая на вопрос, связанный с определением скоростей, необходимо воспользоваться теоремой сложения скоростей. Для ответа на вопрос, связанный с определением ускорений, необходимо воспользоваться теоремой сложения ускорений. Соответствующие векторы необходимо изобразить на рисунке.
35. **Проанализировать полученный результат, сделать выводы.**

К2.3. Собственно задание

По телу A, вращающемуся вокруг неподвижной оси, проходящей через точку (точки) O, в соответствии с законом $\varphi = \varphi(t)$, движется точка M по закону $S = BM = S(t)$.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M для момента времени t_1.

Необходимые для расчета данные приведены в таблице К**2.1**, расчетные схемы – в таблице К**2.2**.

Таблица К2.1. Исходные данные.

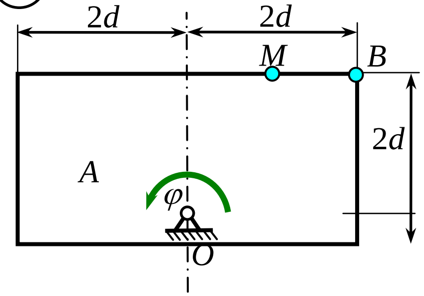
№.	$\varphi = \varphi(t)$ *рад*	$S = BM = S(t)$ *м*	t_1 *с*	R *м*	d *м*	α *гр.*
1.	$6t^3 - 12t^2$	$0{,}08t(t-1) + 0{,}4$	1	-	0,10	-
2.	$2t^3 - t^2$	$0{,}2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$\frac{2}{3}$	-	0,25	-
3.	$5t - 4t^2$	$\frac{15}{800}\pi t^3$	2	0,30	0,30	-
4.	$0{,}6t^2$	$0{,}2\sin(\pi t)$	$\frac{5}{3}$	0,20	-	-
5.	$4t + 1{,}6t^2$	$0{,}1 + 0{,}01\sin(2\pi t)$	$\frac{1}{8}$	-	0,20	-
6.	$1{,}2t - t^2$	$0{,}2\pi\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$\frac{4}{3}$	0,20	0,20	-
7.	$6t^2 - 3t^3$	$0{,}3\pi t(1 - 2t)$	1	0,60	0,50	-
8.	$0{,}5t + 1{,}5t^2$	$1{,}5\pi t^2$	$\frac{1}{6}$	0,25	-	-
9.	$6t^3 - 12t^2$	$0{,}08(t^2 - t) + 0{,}04$	1	-	0,10	-
10.	$0{,}6t^2$	$0{,}2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	-	-	60

11.	$t-0{,}5t^2$	$0{,}2\sin(\pi t)$	$\frac{1}{3}$	-	0,20	-
12.	$4t^2-3t$	$0{,}4\pi t^2$	$\frac{1}{2}$	0,40	-	-
13.	$2(t^2-t)$	$0{,}2\pi t(4t^2-2)$	1	0,40	-	-
14.	$0{,}2t^3+t$	$0{,}02t(t+1)$	2	-	0,60	45
15.	$2t-4t^2$	$0{,}25\pi t(1+t)$	$\frac{1}{2}$	0,25	-	-
16.	$2t-t^2$	$0{,}01t(3t+4)$	2	-	0,20	-
17.	$t+3t^2$	$0{,}01t(6+t^2)$	2	0,40	-	30
18.	$0{,}5t^2$	$0{,}2\cos(2\pi t)$	$\frac{3}{8}$	-	0,40	60
19.	$0{,}6t^2$	$0{,}2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	1	-	-	60
20.	$3t-0{,}5t^3$	$0{,}1\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	0,20	-	-
21.	$0{,}4t^2+t$	$0{,}2\sin(\pi t)$	$\frac{5}{3}$	0,20	-	-
22.	$2t+0{,}5t^2$	$0{,}06t^3$	2	-	0,30	-
23.	$10t^2-5t^3$	$0{,}8t^2(2-t)+0{,}4$	1	-	0,10	60
24.	t^3-5t	$0{,}06t(1+0.5t)$	2	-	-	30
25.	$8t-2t^2$	$0{,}03+0{,}14\sin(\pi t)$	$\frac{2}{3}$	-	-	30
26.	$8t-t^2$	$0{,}1t+0{,}01t^3$	2	-	-	60
27.	$10t-t^2$	$0{,}3\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	3	0,60	0,60	-
28.	$4t-0{,}2t^2$	$0{,}1\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$\frac{2}{3}$	0,30	-	-
29.	$2t^2$	$0{,}08\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\frac{3}{2}$	-	-	45

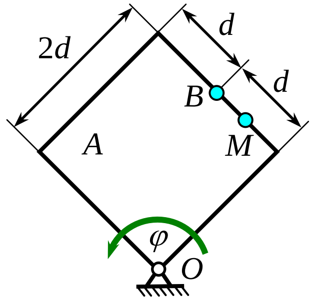
30.	$2t^3-5t$	$0{,}025t^2$	2	-	-	45

Таблица К2.2. Расчётные схемы.

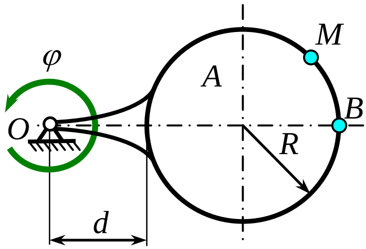
1



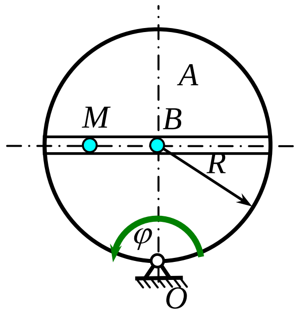
2



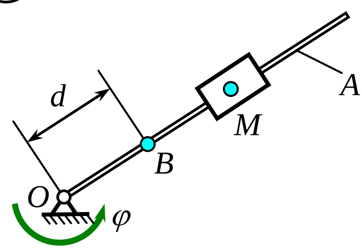
3



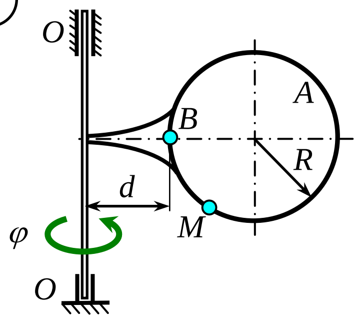
4



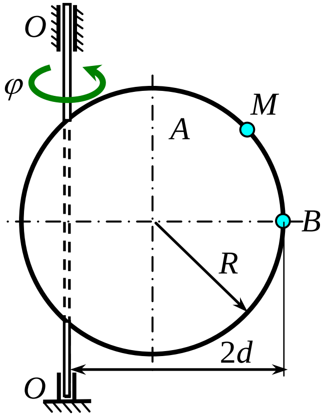
5



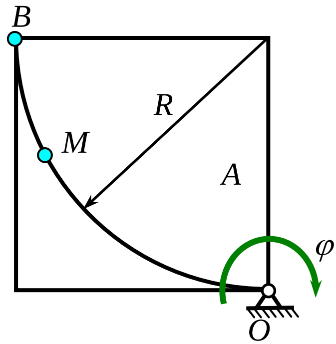
6



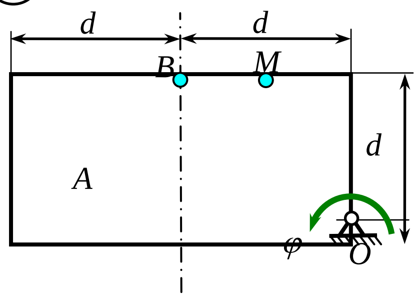
7



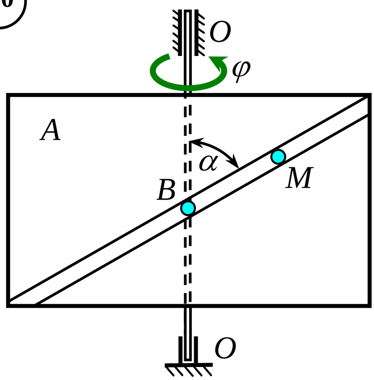
8



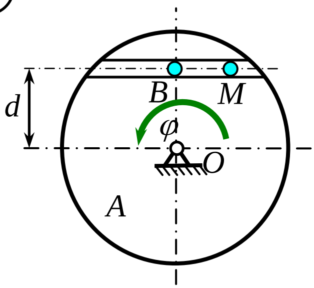
9



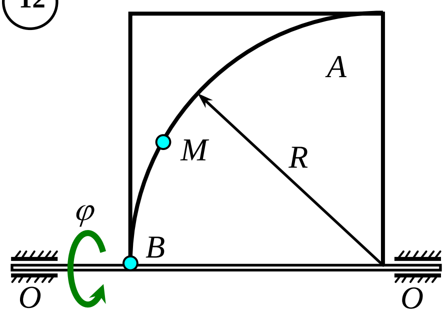
10



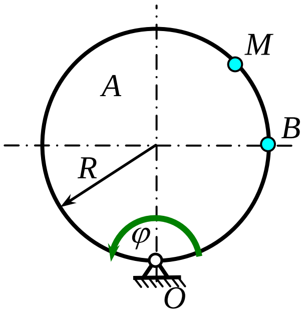
11



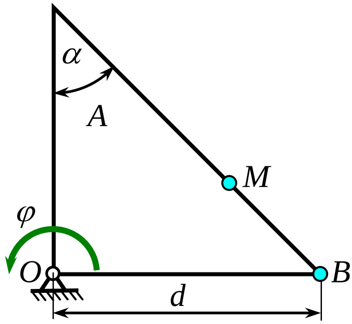
12



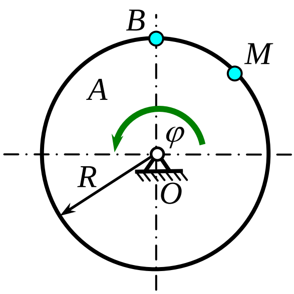
13



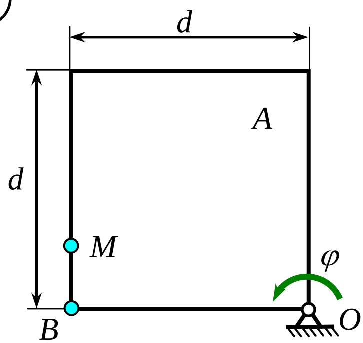
14



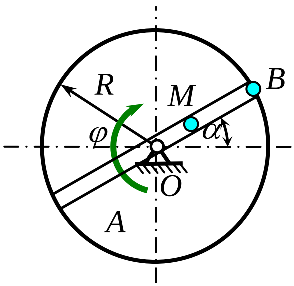
15



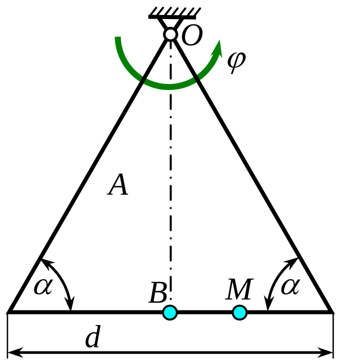
16



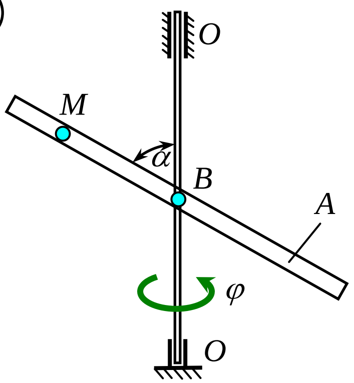
17



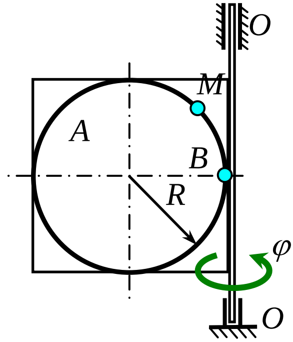
18



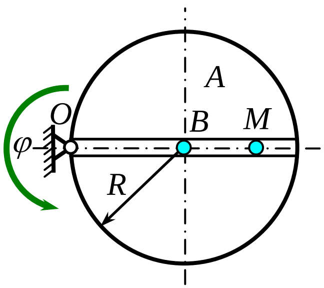
19



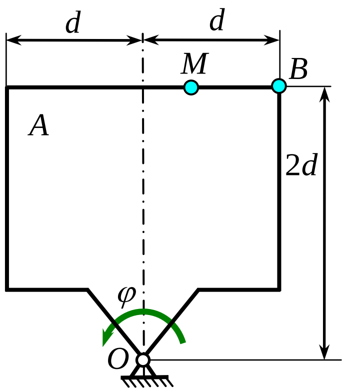
20



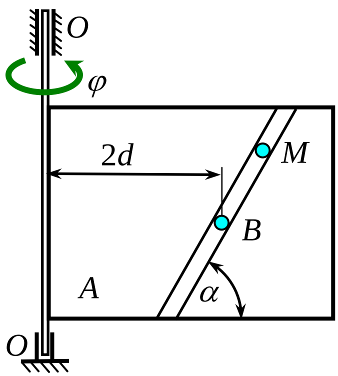
21



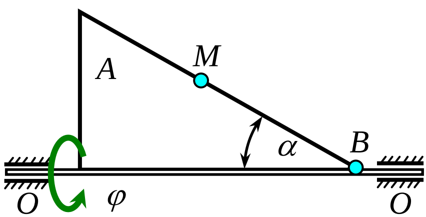
22



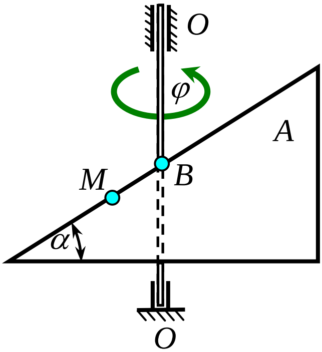
23



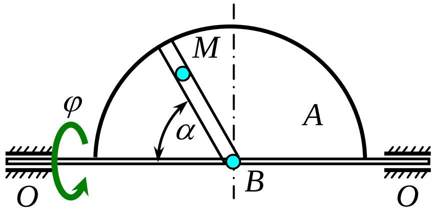
24



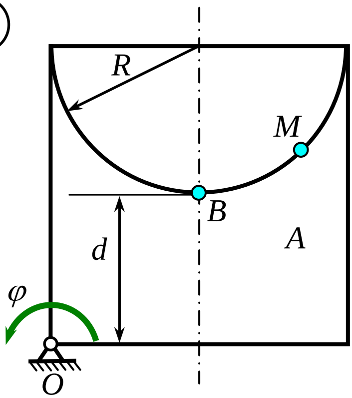
25



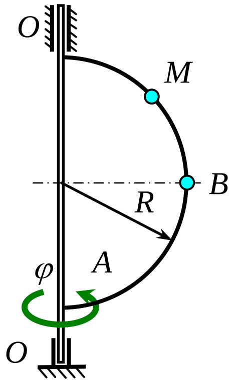
26



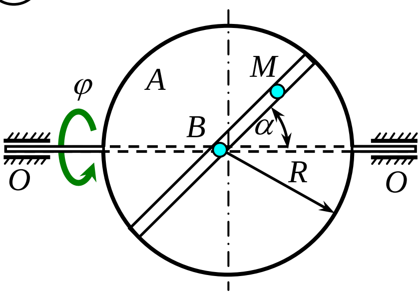
27



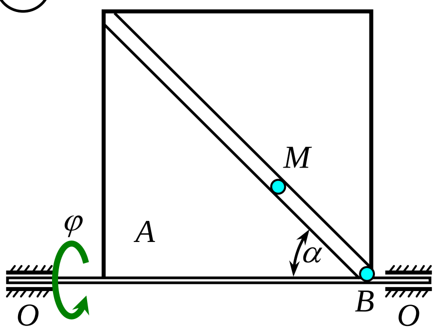
28



29



30



К2.4 Пример выполнения задания

С2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Дано:

$\varphi = t(3-t)$, *рад*,

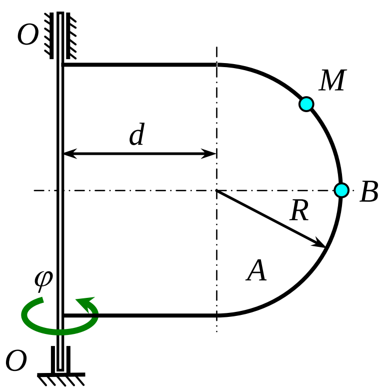
$S = BM = \dfrac{\pi R}{3}\left(2t^2 - 1\right)$, *м*,

$R = 0{,}3$ *м*,

$d = 0{,}4$ *м*,

$t_1 = 1$ *с*.

Опр. V, a.



Решение:

Проанализировав условие задачи, устанавливаем, что точка участвует в двух движениях: она вращается вместе с телом A и движется, кроме того, по этому телу. Так как ось вращения находится в плоскости чертежа, дополнительно к фронтальной проекции (виду спереди) изображаем вид вверху.

Найдем положение точки в момент времени t_1, определяя его величиной центрального угла α:

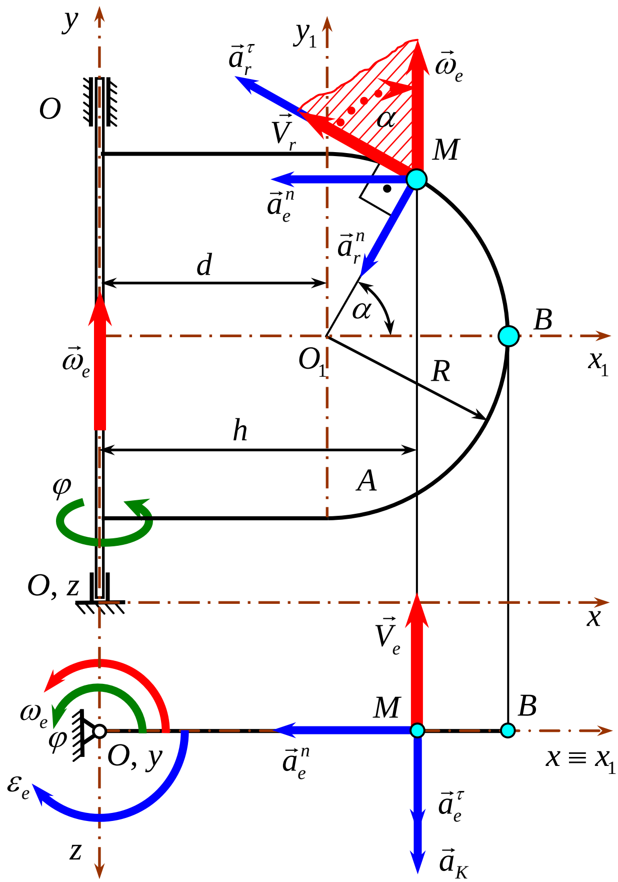
$$\alpha = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{3}\left(2t^2 - 1\right).$$

При $t = t_1 = 1c$ $\alpha = \dfrac{\pi}{3}\left(2 \cdot 1^2 - 1\right) = \dfrac{\pi}{3} \sim 60°$.

Изображаем точку в заданном положении.

Проведём анализ движения. Для этого выберем оси координат. Неподвижные оси x, y, z свяжем с подпятником и подшипником, где y - ось вращения тела A. Подвижные оси x_1, y_1 свяжем с телом A.

Тогда в соответствии с определениями относительного и переносного движений получаем: **<u>относительное движение – криволинейное движение точки *M* по дуге окружности радиуса *R*, переносное движение – вращение тела *A* вокруг оси *y*</u>.**



Для определения абсолютной скорости точки М воспользуемся теоремой сложения скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r \,. \qquad \textbf{(1)}$$

Так как переносное движение - вращательное, то

$$V_e = \omega_e h \,,$$

где ω_e - величина угловой скорости в переносном вращательном движении, h - расстояние точки M от оси вращения y.

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 3 - 2t \,, \; h = d + R\cos\alpha \,.$$

При $t = t_1 = 1c$

$$\omega_e = 3 - 2 \cdot 1 = 1 рад/с, \ h = 0{,}4 + 0{,}3\cos 60° = 0{,}55 м.$$

В заданный момент времени знаки величин ω_e и φ совпадают, значит вращение тела A происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси y. Вектор $\vec{\omega}_e$ лежит на оси вращения и направлен в данный момент времени вверх.

Величина переносной скорости

$$V_e = \omega_e h = 1 \cdot 0{,}55 = 0{,}55 м/с.$$

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости, проходящей через точку M и ось вращения y; направление его соответствует направлению угловой скорости ω_e.

Найдём относительную скорость точки.

$$V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi R}{3}\left(2t^2 - 1\right)\right] = \frac{4}{3}\pi R t.$$

При $t = t_1 = 1 с$

$$V_r = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}3 \cdot 1 = 1{,}26 м/с.$$

Траекторией точки M в относительном движении является окружность. Вектор $\vec{V}_r$ находится на касательной к этой окружности, то есть перпендикулярен радиусу O_1M. Так как в данный момент времени знаки S и V_r совпадают, то вектор $\vec{V}_r$ направлен в сторону, соответствующую увеличению S.

Изобразив векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ на рисунке, найдем величину абсолютной скорости точки M.

Так как $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$, то

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{0{,}55^2 + 1{,}26^2} = 1{,}37 м/с.$$

Для определения абсолютного ускорения точки M воспользуемся теоремой сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K. \qquad \textbf{(2)}$$

Так как в данной задаче переносное движение – вращательное, а траектория точки в относительном движения – кривая (окружность), то равенство **(2)** можно переписать в развёрнутом виде:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_K . \qquad \textbf{(3)}$$

Найдём векторы, входящие в правую часть равенства **(3)**.

Величина нормальной составляющей переносного ускорения

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 1^2 \cdot 0{,}55 = 0{,}55 м/с^2 .$$

Вектор $\vec{a}_e^n$ направлен к оси переносного вращения y.

Величина касательной составляющей ускорения в переносном вращательном движении

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h,$$

где ε_e - угловое ускорение в этом движении.

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d}{dt}(3 - 2t) = -2 рад/с^2 .$$

В заданный момент времени знаки ω_e и ε_e различны, значит, различны и направления переносных угловой скорости и углового ускорения. Изобразив на рисунке действительное направление углового ускорения, считаем $\varepsilon_e = 2 рад/с^2$.

Тогда

$$a_e^\tau = 2 \cdot 0{,}55 = 1{,}1 м/с^2 .$$

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен плоскости, проходящей через точку M и ось вращения y; направление его соответствует направлению углового ускорения ε_e.

Величина нормального ускорения точки в относительном движении

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{1{,}26^2}{0{,}3} = 5{,}26 м/с^2 .$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен к центру кривизны траектории точки в относительном движении – к центру O_1 окружности радиуса R.

Величина касательной составляющей ускорения в относительном движении

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R t\right) = \frac{4}{3}\pi R = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}3 = 1{,}26 м/с^2 .$$

Вектор $\vec{a}_r^\tau$ находится на той же касательной к траектории точки в относительном движении, что и вектор относительной скорости $\vec{V}_r$. Так как в данный момент времени знаки a_r^τ и V_r совпадают, то совпадают направления векторов $\vec{a}_r^\tau$ и $\vec{V}_r$.

Для определения величины и направления вектора ускорения Кориолиса воспользуемся формулой **(К2.3)**:

$$\vec{a}_K = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right).$$

Для определения направления вектора $\vec{a}_K$ переносим $\vec{\omega}_e$ в точку M и проводим плоскость через векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$; эта плоскость совпадает с плоскостью $x_1 y_1$. Вектор $\vec{a}_K$ перпендикулярен этой плоскости и направлен в сторону возрастания z: если смотреть с конца вектора $\vec{a}_K$, вращение вектора $\vec{\omega}_e$ до совмещения с вектором $\vec{V}_r$ кратчайшим образом кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Величина ускорения Кориолиса

$$a_K = 2\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1{,}26 \cdot \sin 60^\circ = 2{,}18 м/с^2.$$

Изобразив на рисунке найденные составляющие вектора абсолютного ускорения точки, найдем величину этого ускорения. Спроецировав векторное равенство **(3)** на оси x, y, z, найдём проекции вектора абсолютного ускорения на эти оси:

$$a_x = -a_e^n - a_r^n \cos\alpha - a_r^\tau \sin\alpha =$$

$$= -0{,}55 - 5{,}26 \cdot \cos 60^\circ - 1{,}26 \cdot \sin 60^\circ = -4{,}27 м/с^2,$$

$$a_y = -a_r^n \sin\alpha + a_r^\tau \cos\alpha = -5{,}26 \cdot \sin 60^\circ + 1{,}26 \cdot \cos 60^\circ = -3{,}93 м/с^2,$$

$$a_z = a_e^\tau + a_k = 1{,}1 + 2{,}18 = 3{,}28 м/с^2.$$

Величина абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-4{,}27)^2 + (-3{,}93)^2 + 3{,}28^2} = 6{,}67 м/с^2.$$

Результаты решения сведем в таблицу.

<u>Ответ:</u>

V_e	V_r	V	a_e^n	a_e^τ	a_r^n	a_r^τ	a_K	a
$м/с$	$м/с$	$м/с$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$	$м/с^2$
0,55	1,26	1,37	0,55	1,1	5,26	1,26	2,18	6,67

Д1 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Д1.1. Краткие сведения из теории

Основным методом решения задач динамики материальной точки является использование дифференциальных уравнений движения материальной точки. В проекциях на декартовы оси координат эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum F_Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum F_Z. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(Д1.1)}$$

Здесь m - масса материальной точки, x, y, z - её координаты, $\sum F_X$, $\sum F_Y$, $\sum F_Z$ - суммы проекций сил, действующих на материальную точку, на оси координат.

С помощью уравнений **(Д1.1)** может быть, в частности, решена вторая (основная) задача динамики: по известным силам, действующим на материальную точку, требуется определить, как эта точка движется.

Решение второй задачи динамики осуществляется интегрированием дифференциальных уравнений движения.

Для интегрирования дифференциальных уравнений движения могут быть использованы любые известные из курса математики методы.

В частности, для понижения порядка (второго) дифференциальных уравнений используют замену переменных с последующим разделением переменных и интегрированием в квадратурах (если это возможно). Две наиболее распространённые замены переменных часто называют ***первой и второй подстановками***.

<u>Первая подстановка:</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_X}{dt}. \qquad \textbf{(Д1.2)}$$

<u>Вторая подстановка:</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_X\,\frac{dV_X}{dx}. \qquad \textbf{(Д1.3)}$$

Как известно, при интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка возникает две группы постоянных интегрирования. Их определяют из некоторых дополнительных условий.

С этой точки зрения соответствующие задачи подразделяют на задачи Коши (задачи с начальными условиями) и краевые задачи (задачи с граничными условиями).

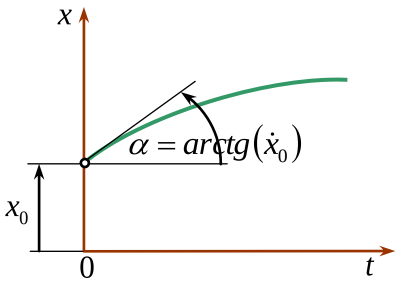
Применительно к дифференциальным уравнениям движения (дифференциальным уравнениям второго порядка) эти две задачи могут быть сформулированы так:

Задача Коши

Задаются **начальные условия (НУ)** - значения координат и их первых производных (проекций вектора скорости на оси координат) в начале интервала времени:

При $t = t_0$, $x = x_0$, $V_X = V_{X0} = \dot{x}_0$.

Обычно принимают $t_0 = 0$.

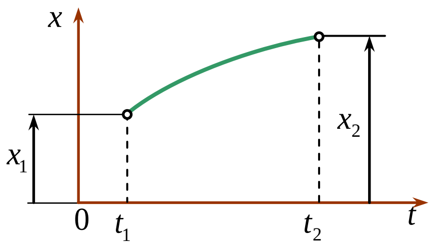


Краевая задача

Задаются **граничные (краевые) условия (ГУ)** - значения координат или их первых производных (проекций вектора скорости на оси координат) в начале и конце интервала времени:

При $t = t_1$, $x = x_1$; при $t = t_2$, $x = x_2$.

Возможны и другие варианты для границ интервала: [x_1 и $\dot{x}_2$], [$\dot{x}_1$ и x_2].



В динамике чаще используются **начальные условия (НУ)**.

При интегрировании дифференциальных уравнений движение наряду с неопределёнными могут использоваться и определённые интегралы. В последнем случае могут быть два варианта.

Если в задаче требуется определить численные значения координат, скоростей и других кинематических характеристик, используют определённые интегралы с конечными пределами интегрирования.

Если же в задаче требуется определить соответствующие функции, в качестве нижних пределов интегрирования берут начальные значения функций (взятые из НУ), в качестве верхних – текущие (переменные) значения этих функций.

Д1.2. Указания по выполнению задания

В настоящем задании решается вторая задача динамики точки. Для решения этой задачи можно рекомендовать следующую последовательность.

Последовательность выполнения задания.

1. Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему. Определить тип решаемой задачи.
2. Выбрать тело, движение которого будет рассматриваться. Выяснить, может ли это тело считаться материальной точкой.
3. Изобразить выбранное тело (материальную точку) в промежуточном (текущем) положении.
4. Изобразить силы, действующие на выбранное тело: активные и реакции связей.
5. Выбрать удобные оси координат. При решении второй задачи динамики записать начальные условия.
6. Записать соответствующие выбранным осям координат дифференциальные уравнения и решить их.
7. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

Д1.3. Собственно задание

Материальное тело M массой m движется из точки A по участку AB длиной l по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ секунд. Начальная скоростью тела равна V_A, коэффициент трения скольжения тела по плоскости - f. На этом участке кроме сил тяжести и трения на тело может действовать постоянная движущая сила P (схема **3**, варианты **11-15**). В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и, совершив свободное движение в течение T секунд, попадает в точку C, находящуюся ниже точки B на h метров и отстоящую от неё по горизонтали на расстоянии d. В схемах **1-2** (варианты **1-10**) точка C находится на наклонной плоскости, составляющей угол β с горизонтом.

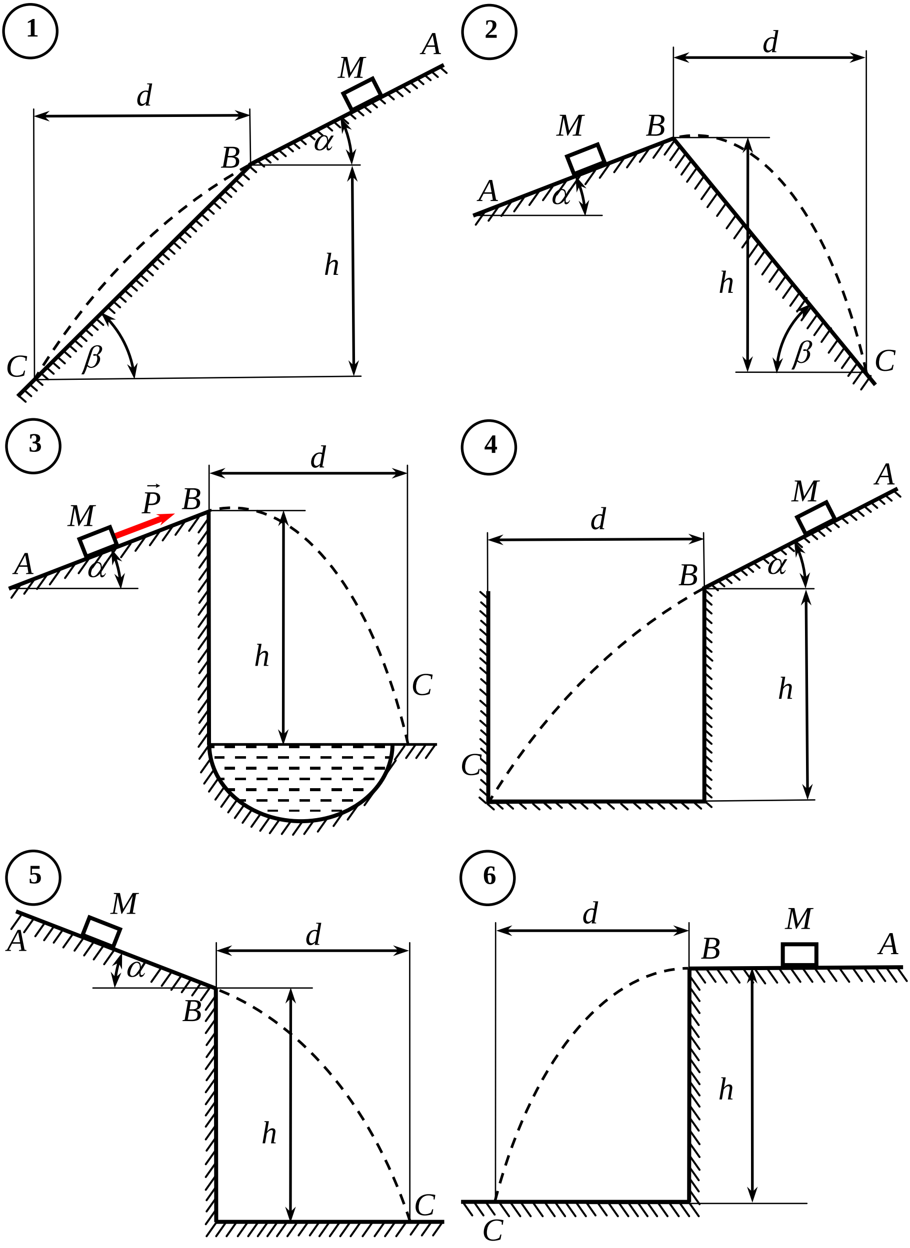
Исходные данные приведены в таблице **Д1.1**, расчетные схемы – в таблице **Д1.2**.

Исследовать движение тела M, определив величины, указанные в столбце «Найти» таблицы **Д1.2**. Для величин, указанных в этом столбце, приняты обозначения: V_C - скорость тела на участке BC, $y(x)$- уравнение траектории тела на этом участке.

Таблица Д1.1. Исходные данные.

№	Схема	V_A	V_B	α	l	τ	f	β	h	d	P	m	Найти
		м/с	*м/с*	*гр.*	*м*	*с*	-	*гр.*	*м*	*м*	*Н*	*кг*	
1.		0	-	30	10	-	0,2	60	-	-	-	-	τ , h
2.		2	-	15	-	5,2	0,2	45	-	-	-	-	l , d
3.	**1**	2,5	-	30	8	-	0,15	-	-	10	-	-	V_B , T
4.		0	-	-	9,81	2	-0	60	-	-	-	-	α , T
5.		0	-	30	9,81	3	-	45	-	-	-	-	f , V_C
6.		20	-	20	-	0,2	0,1	30	40	-	-	-	l , V_C
7.		16	-	15	5	-	0,1	45	-	-	-	-	V_B , T
8.	**2**	-	10	20	-	0,3	0,15	60	-	-	-	-	V_B , d
9.		15	-	15	-	0,3	0,1	50	40	-	-	-	V_B , V_C
10.		12	11	15	-	-	0,15	60	-	50	-	-	l , $y(x)$
11.		0	4,5	30	40	-	0	-	-	3	$\neq 0$	-	τ , h
12.		-	4,5	30	40	-	0	-	1,5	-	3	-	V_A , d
13.	**3**	0	-	30	40	20	0	-	1,5		2	400	P , T
14.		0	-	30	40	20	0	-	-	5	3	400	V_B , V_C
15.		0	8	20	50	-	0	-	2	-	2	-	m , T
16.		0	-	30	3	-	0,2	-	5	-	-	-	τ , T
17.		-	$2V_A$	40	6	0,9	-	-	-	3	-	-	f , h
18.	**4**	0	-	30	2	-	0,1	-	-	3	-	-	τ , h
19.		-	3	15	3	1,5	$\neq 0$	-	-	2	-	-	V_A , h
20.		0,6	-	45	-	0,8	0,3	-	-	2	-	-	l , V_C
21.		1	-	30	-	1,5	0,1	-	10	-	-	-	V_B , d
22.		0	-	45	10	2	-	-	-	-	-	-	f , $y(x)$
23.	**5**	0,3	-	60	-	1,4	0,1	-	20	-	-	-	l , T
24.		0	-	30	10	-	0,2	-	12	-	-	-	τ , d
25.		0	-	35	6	-	0,15	-	4,5	-	-	-	τ , V_C
26.		7	-	-	8	-	0,2	-	20	-	-	-	d , V_C
27.		4	-	-	-	2	0,1	-	-	2	-	-	l , h
28.	**6**	-	3	-	3	-	0,3	-	5	-	-	-	V_A , T
29.		3	1	-	2,5	-	$\neq 0$	-	20	-	-	-	f , d
30.		-	-	-	4	-	0,25	-	5	3	-	-	V_A , τ

Таблица Д1.2. Расчётные схемы.



Д1.4. Пример выполнения задания

Д1 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Дано:

$V_A = V_0 = 0$,

$\alpha = 25°$,

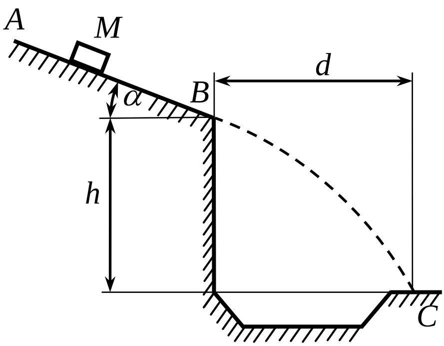
$\tau = 2c$,

$f = 0{,}15$,

$h = 5м.$

Опр.

$l,\ d,\ V_C.$

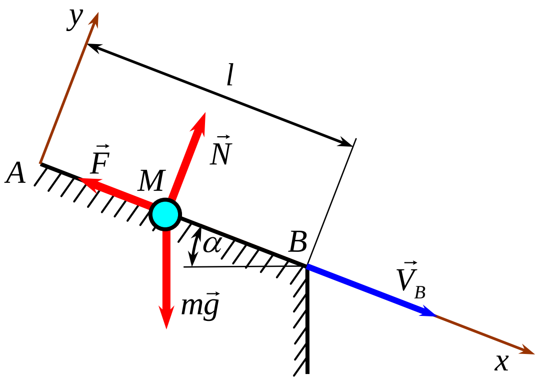


Решение:

Так как в задаче требуется найти кинематические характеристики, данная задача является второй задачей динамики материальной точки.

Рассмотрим движение тела M. Так как это тело совершает поступательное движение, его можно считать материальной точкой независимо от размеров.

Рассмотрим сначала движение тела M на участке AB. Изобразим тело в промежуточном положении в виде материальной точки. На неё действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция плоскости $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}$.



Выбираем координатные оси. Совместив начало координат с начальным положением тела A, направляем ось x вдоль наклонной плоскости, ось y - перпендикулярно к ней.

Начальные условия для участка AB запишутся тогда в виде:

$$\text{при } t=0 \quad x=0,\ V=V_A=0. \qquad \textbf{(1)}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_x, \text{ или}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\sin\alpha-F. \qquad \textbf{(2)}$$

Величина силы трения

$$F = fN.$$

Для определения нормальной реакции плоскости N запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось y:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum F_y, \text{ или}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=N-mg\cos\alpha .$$

Так как $y=const$, то $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$, тогда $0=N-mg\cos\alpha$, откуда $F = fmg\cos\alpha$.

Подставляя значение силы трения в выражение **(2)**, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\sin\alpha- fmg\cos\alpha, \text{ или}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g(\sin\alpha- f\cos\alpha). \qquad \textbf{(3)}$$

Для определения скорости тела M в точке B применим к уравнению **(3)** первую подстановку и используем определённый интеграл.

$$\frac{dV}{dt}=g(\sin\alpha- f\cos\alpha).$$

Разделим переменные и проинтегрируем.

$$dV=g(\sin\alpha- f\cos\alpha)\,dt.$$

$$\int_0^{V_B} dV=g(\sin\alpha- f\cos\alpha)\int_0^{\tau} dt.$$

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau. \qquad \textbf{(4)}$$

$$V_B = 9{,}81\cdot(\sin 25° - 0{,}15\cdot\cos 25°)\cdot 2 = 5{,}62\,м/с.$$

Для определения длины участка l применим к уравнению **(3)** вторую подстановку и используем определённый интеграл.

$$V\frac{dV}{dx} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Разделим переменные и проинтегрируем.

$$VdV = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,dx.$$

$$\int_0^{V_B} VdV = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int_0^l dx.$$

$$\frac{V_B^2}{2} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,l.$$

$$l = \frac{V_B^2}{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

С учётом формулы **(4)** получим:

$$l = \frac{g^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2\,\tau^2}{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau^2}{2} =$$

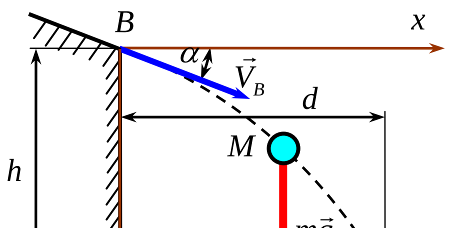
$$= \frac{9{,}81\cdot(\sin 25° - 0{,}15\cdot\cos 25°)\cdot 2^2}{2} = 5{,}62\,м.$$

Рассмотрим теперь движение точки на участке BC. Изобразим точку в промежуточном положении и силу, на неё действующую - силу тяжести $m\vec{g}$.

Выбираем оси координат. Совместив начало координат с начальным положением точки B, ось x направляем по горизонтали вправо, ось y -по вертикали вниз.

Начальные условия для участка BC запишутся тогда в виде:

$$\text{при } t = 0 \quad \left.\begin{matrix} x = 0, \\ y = 0, \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} V_X = V_B\cos\alpha, \\ V_Y = V_B\sin\alpha. \end{matrix}\right\}. \qquad \textbf{(5)}$$



Запишем дифференциальные уравнения движения точки в проекции на оси x и y:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_X, \\ m\frac{d^2V_Y}{dt^2} &= \sum F_Y, \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ m\frac{d^2V_Y}{dt^2} &= mg. \end{aligned}\right\}$$

Сокращая на m, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2V_Y}{dt^2} &= g. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

Проинтегрируем уравнения **(6)**. Применяя первую подстановку, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_X}{dt} &= 0, \\ \frac{dV_Y}{dt} &= g. \end{aligned}\right\}$$

Разделим переменные и проинтегрируем, используя неопределённый интеграл.

$$\left.\begin{aligned} dV_X &= 0, \\ dV_Y &= g\ dt. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\int dV_X &= 0,\\ \int dV_Y &= g\int dt.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}V_X &= C_1,\\ V_Y &= gt + C_2.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7)}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдём из начальных условий. Для этого перепишем равенства **(7)** с учётом начальных условий **(5)**:

$$\left.\begin{aligned}V_B\cos\alpha &= C_1,\\ V_B\sin\alpha &= g\cdot 0 + C_2,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}C_1 &= V_B\cos\alpha,\\ C_2 &= V_B\sin\alpha.\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}V_X &= V_B\cos\alpha,\\ V_Y &= V_B\sin\alpha + gt.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(8)}$$

Так как $\left.\begin{aligned}V_X &= \frac{dx}{dt},\\ V_Y &= \frac{dy}{dt},\end{aligned}\right\}$ то $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V_B\cos\alpha,\\ \frac{dy}{dt} &= V_B\sin\alpha + gt.\end{aligned}\right\}$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\left.\begin{aligned}dx &= V_B\cos\alpha\; dt,\\ dy &= V_B\sin\alpha\; dt + g\; tdt.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\int dx &= V_B\cos\alpha\int dt,\\ \int dy &= V_B\sin\alpha\int dt + g\int tdt.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x &= V_B\cos\alpha\cdot t + C_3,\\ y &= V_B\sin\alpha\cdot t + g\frac{t^2}{2} + C_4.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(9)}$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 найдём из начальных условий. Для этого перепишем равенства **(9)** с учётом начальных условий **(5)**:

$$\left.\begin{aligned} x &= V_B \cos\alpha \cdot 0 + C_3, \\ y &= V_B \sin\alpha \cdot 0 + g \cdot \frac{0^2}{2} + C_4. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_3 &= 0, \\ C_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= V_B \cos\alpha \cdot t, \\ y &= V_B \sin\alpha \cdot t + g\frac{t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(10)}$$

В момент падения (в точке C)

$$t = T, \;\; x = d, \;\; y = h. \qquad \textbf{(11)}$$

Записав уравнения движения **(10)** с учётом условий **(11)**, получим систему двух алгебраических уравнений, из которых найдём время T и расстояние d:

$$\left.\begin{aligned} d &= V_B \cos\alpha \cdot T, \\ h &= V_B \sin\alpha \cdot T + g\frac{T^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12)}$$

Решив второе из уравнений системы **(12)**, найдём время T.

$$\frac{g}{2}T^2 + V_B \sin\alpha \cdot T - h = 0.$$

$$T_{1,2} = \frac{-V_B \sin\alpha \pm \sqrt{(V_B \sin\alpha)^2 + 4\frac{g}{2}h}}{2\frac{g}{2}} =$$

$$= \frac{-V_B \sin\alpha \pm \sqrt{(V_B \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}.$$

Отрицательное значение T не имеет в данной задаче физического смысла, тогда

$$T = \frac{-V_B \sin\alpha + \sqrt{(V_B \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} =$$

$$= \frac{-5{,}62 \cdot \sin 25° + \sqrt{(5{,}62 \cdot \sin 25°)^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 5}}{9{,}81} = 0{,}796 c.$$

Решив первое из уравнений системы **(12)**, найдём расстояние d.

$$d = V_B \cos\alpha \cdot T = 5{,}62 \cdot \cos 25° \cdot 0{,}796 = 4{,}05 м.$$

Для определения скорости V_C подставим в равенства **(8)** $t = T$ и найдём проекции вектора скорости $\vec{V}_C$ на оси x и y:

$$\left.\begin{aligned} V_{CX} &= V_B \cos\alpha = 5{,}62 \cdot \cos 25° = 5{,}09 м/с, \\ V_{CY} &= V_B \sin\alpha + gT = 5{,}62 \cdot \sin 25° + 9{,}81 \cdot 0{,}796 = 10{,}18 м/с. \end{aligned}\right\}$$

Тогда $V_C = \sqrt{V_{CX}^2 + V_{CY}^2} = \sqrt{5{,}09^2 + 10{,}18^2} = 11{,}38 м/с.$

Ответ:

l	d	V_C
м	*м*	*м/с*
5,62	4,05	11,38

Д2 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д2.1. Краткие сведения из теории

Механической системой называют мысленно выделенную исследователем совокупность материальных точек (тел), взаимодействующих между собой.

Кинетической энергией механической системы называют сумму кинетических энергий точек (тел), входящих в состав системы, то есть

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k \,, \qquad \textbf{(Д2.1)}$$

где n - число точек (тел), входящих в состав системы.

Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение, определяется так же, как и для материальной точки:

$$T = \frac{\mathrm{M}V^2}{2} \,, \qquad \textbf{(Д2.2)}$$

где M - масса тела, V - его скорость.

Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение,

$$T = \frac{J_Z \omega^2}{2} \,, \qquad \textbf{(Д2.3)}$$

где J_Z - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела, совершающего сложное движение, складывается из кинетической энергии тела в поступательном движении со скоростью центра масс тела и кинетической энергии тела во вращении его вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс:

$$T = \frac{\mathrm{M}V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} \,. \qquad \textbf{(Д2.4)}$$

Здесь V_C - скорость центра масс тела, M - масса тела, ω - угловая скорость вращения тела вокруг мгновенной центральной оси, J_C - момент инерции тела, относительно этой оси.

Работой силы на некотором перемещении называют меру действия силы, равную определенному интегралу, взятому по перемещению, от элементарной работы силы, которая, в свою очередь, равна произведению модуля силы на элементарное перемещение и на косинус угла между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы:

$$A_F = \int_S dA_F = \int_S F\cos\left(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{V}\right) dS, \qquad \textbf{(Д2.5)}$$

Формула (Д2.5), является универсальной, однако, при определении работ в конкретных случаях чаще бывает удобно пользоваться частными формулами, вытекающими из (Д2.5).

Так, работа силы тяжести твердого тела вычисляется аналогичным образом:

$$A_P = \mathrm{M}g\left(z_{Co} - z_C\right), \qquad \textbf{(Д2.6)}$$

где M - масса тела, $z_{Co} - z_C$ - разность высот начального и конечного положений центра тяжести C тела.

Элементарная работа пары сил (момента) равна произведению момента M на элементарный угол $d\varphi$ поворота тела под действием этого момента:

$$dA_M = M\,d\varphi, \qquad \textbf{(Д2.7)}$$

Работа силы трения скольжения может быть вычислена по формуле

$$A_{F_{ТР.}} = -f\,N\,S, \qquad \textbf{(Д2.8)}$$

где f - коэффициент трения скольжения, N - величина нормальной реакции (или силы нормального давления), S - перемещение точки приложения силы.

Работа силы упругости упругой связи

$$A_{F_У} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda^2\right), \qquad \textbf{(Д2.9)}$$

где c - жесткость (коэффициент упругости) упругой связи, λ_0 $и$ λ - соответственно начальная и конечная деформация упругой связи.

Теорема об изменении кинетической энергии системы может быть записана в виде:

$$T - T_0 = \sum A_F^e + \sum A_F^i. \qquad \textbf{(Д2.10)}$$

Здесь T и T_0 - кинетическая энергия системы в конечном и начальном ее положениях, $\sum A_F^e$ и $\sum A_F^i$ - сумма работ внешних и внутренних сил системы. Для абсолютно твердого тела и для механической системы, состоящей из таких тел, соединённых недеформируемыми связями (неизменяемой системы), суммы работ внутренних сил равны нулю. Вообще говоря, $\sum A_F^i = 0$ для механических систем с внутренними идеальными связями.

Д2.2. Указания по выполнению задания

1. Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2. Выбрать механическую систему. движение которой будет рассматриваться.
3. Изобразить внешние силы, действующие на выбранную механическую систему, а также реакции внутренних неидеальных связей.
4. Записать уравнение теоремы об изменении кинетической энергии.
5. .Подсчитать кинетическую энергию системы в конечном и начальном её положениях.
6. Подсчитать работы сил, указанных в п.3, на соответствующих перемещениях точек их приложения.
7. Подставить найденные значения энергий и работ в уравнение теоремы и решить его.
8. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

Д2.3. Собственно задание

Механическая система состоит из груза 1 массой m_1, движущегося по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, подвижного блока или катка 2 массой m_2, ступенчатого блока 3 массой m_3, неподвижного блока 4 массой m_4, соединенных нерастяжимыми невесомыми нитями. В вариантах 3, 4 11, 12, 13, 18, 22, 27 каток 2 движется по плоскости, составляющей угол β с горизонтом. Участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из указанных тел прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F = F(s)$, где s - перемещение точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент сопротивления M.

Определить значение величины, указанной в столбце «Найти» таблицы **Д2.2** в момент времени, когда перемещение груза 1 равно s_1.

Подвижный блок 2 считать однородным сплошным цилиндром, радиус инерции ступенчатого шкива равен i_3, радиусы большей и меньшей его ступеней соответственно равны R_3 и r_3, масса неподвижного блока 4 распределена по его ободу.

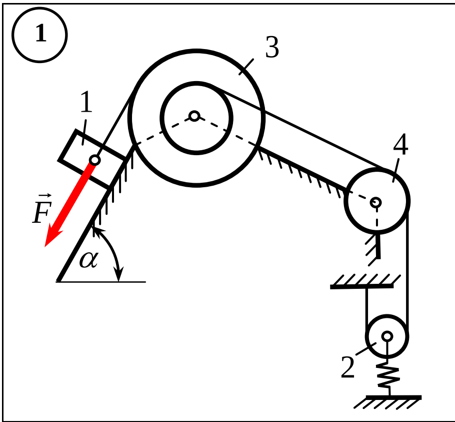
Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f = 0{,}1$.

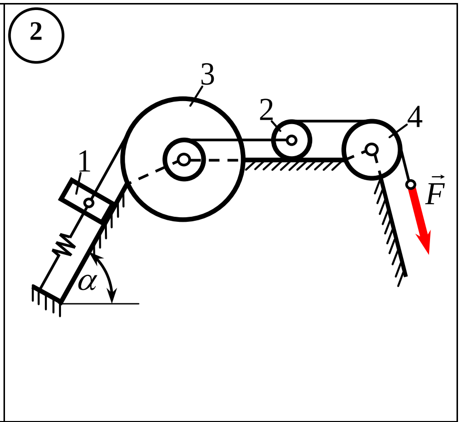
Исходные данные в приведены таблице **Д2.1**, расчетные схемы – в таблице **Д2.2**.

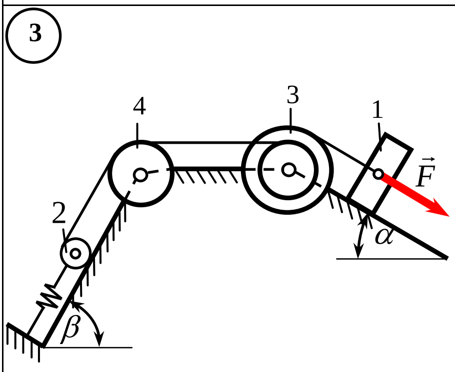
Таблица Д2.1. Исходные данные.

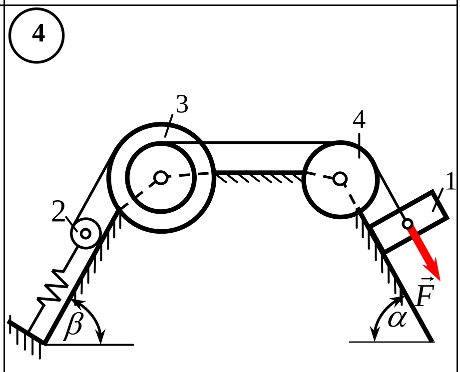
№	m_1	m_2	m_3	m_4	c	M	α	β	s_1	i_3	R_3	r_3	$F(s)$	Найти
	кг	*кг*	*кг*	*кг*	*Н/м*	*Нм*	*гр.*	*гр.*	*м*	*м*	*м*	*м*	*Н*	
1.	4	2	4	1	180	1,2	60	-	0,28	0,18	0,24	0,12	$80(3+2s)$	V_1
2.	2	1	3	2	120	0,6	60	-	0,26	0,20	0,26	0,14	$80(1+2s)$	V_1
3.	4	2	6	3	200	1,2	30	60	0,24	0,16	0,20	0,12	$20(8+3s)$	ω_3
4.	2	2	4	1	180	1,2	60	60	0,22	0,14	0,18	0,10	$80(3+4s)$	V_{C2}
5.	1	2	3	2	120	0,3	30	-	0,20	0,15	0,18	0,12	$80(1+4s)$	ω_3
6.	2	1	6	3	320	1,5	45	-	0,21	0,18	0,24	0,12	$50(1+4s)$	V_{C2}
7.	6	2	2	1	240	0,3	45	-	0,23	0,20	0,26	0,14	$40(3+8s)$	V_1
8.	4	2	4	2	120	0,8	30	-	0,25	0,16	0,20	0,12	$40(3+2s)$	V_{C2}
9.	1	2	4	3	100	0,9	60	-	0,27	0,14	0,18	0,10	$40(3+2s)$	V_1
10.	4	2	4	1	180	1,2	30	-	0,29	0,15	0,18	0,12	$80(3+4s)$	V_{C2}
11.	2	1	3	2	100	0,9	60	-	0,28	0,18	0,24	0,12	$30(4+3s)$	ω_3
12.	3	2	4	3	200	1,2	30	60	0,26	0,20	0,26	0,14	$20(8+3s)$	V_{C2}
13.	1	1	2	1	180	1,2	-	60	0,24	0,16	0,20	0,12	$80(3+4s)$	V_1
14.	1	2	4	2	400	1,8	45	-	0,22	0,14	0,18	0,10	$80(4+s)$	V_{C2}
15.	2	1	6	3	240	0,3	45	-	0,20	0,15	0,18	0,12	$40(3+8s)$	V_{C2}
16.	8	6	1	1	90	0,3	60	-	0,21	0,18	0,24	0,12	$80(1+4s)$	V_1
17.	2	4	4	2	100	0,6	60	-	0,23	0,20	0,26	0,14	$40(3+2s)$	ω_3
18.	3	2	2	3	120	0,3	60	45	0,25	0,16	0,20	0,12	$80(1+4s)$	V_{C2}
19.	8	2	3	1	100	1,2	45	-	0,27	0,14	0,18	0,10	$20(8+3s)$	V_1
20.	2	4	2	2	120	0,3	60	-	0,29	0,15	0,18	0,12	$50(5+2s)$	V_1
21.	4	2	2	3	240	1,2	30	-	0,28	0,18	0,24	0,12	$80(1+4s)$	ω_3
22.	1	2	4	1	180	0,9	60	60	0,26	0,20	0,26	0,14	$20(8+3s)$	V_{C2}
23.	1	2	2	2	120	0,6	60	-	0,24	0,16	0,20	0,12	$20(6+5s)$	V_{C2}
24.	4	2	2	3	100	1,2	45	-	0,22	0,14	0,18	0,10	$40(3+2s)$	ω_3
25.	1	1	2	1	180	0,8	45	-	0,20	0,15	0,18	0,12	$80(1+4s)$	V_{C2}
26.	2	4	1	2	240	1,2	45	-	0,21	0,18	0,24	0,12	$80(3+4s)$	V_{C2}
27.	3	1	4	3	180	0,6	45	45	0,23	0,20	0,26	0,14	$80(4+s)$	ω_3
28.	2	2	4	1	240	1,6	45	-	0,25	0,16	0,20	0,12	$50(5+2s)$	V_1
29.	4	2	2	2	120	0,9	30	-	0,27	0,16	0,18	0,14	$20(8+3s)$	V_1
30.	1	1	2	3	160	0,3	-	60	0,29	0,15	0,18	0,12	$60(4+s)$	V_{C2}

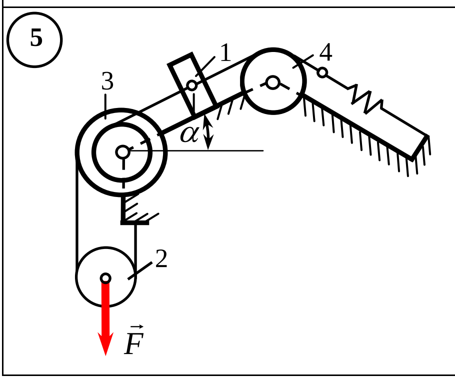
Таблица Д2.2. Расчётные схемы.

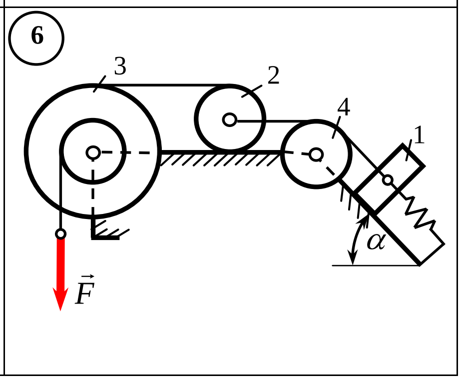

1
3
1
4
$\vec{F}$
α
2

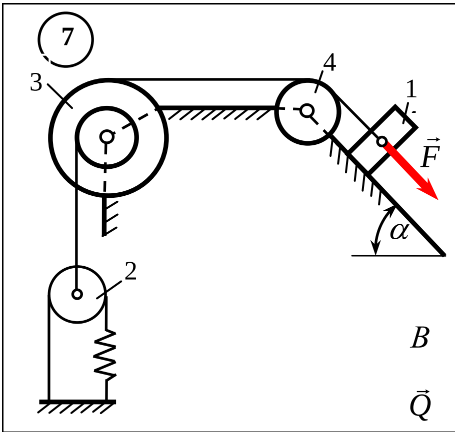

2
3
2
4
1
$\vec{F}$
α

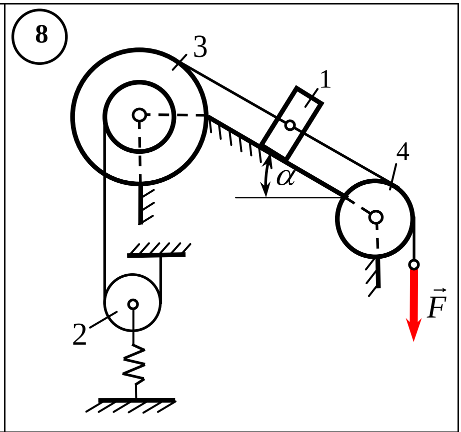

3
4
3
1
$\vec{F}$
2
α
β

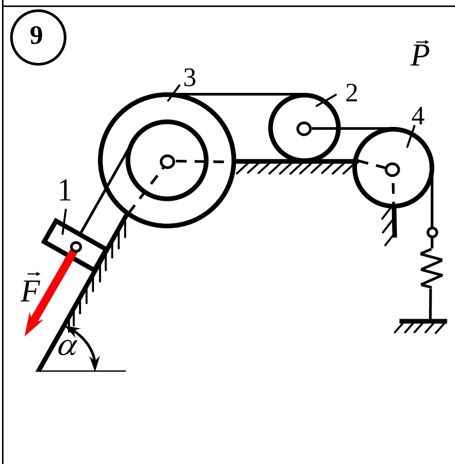

4
3
4
1
2
$\vec{F}$
β
α

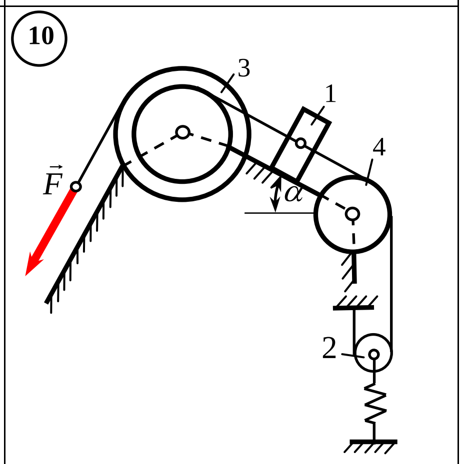

5
1
4
3
α
2
$\vec{F}$

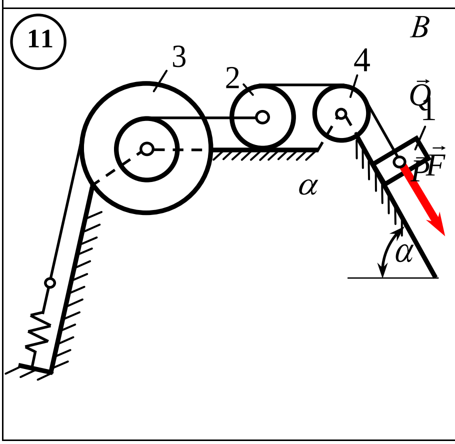

6
3
2
4
1
α
$\vec{F}$

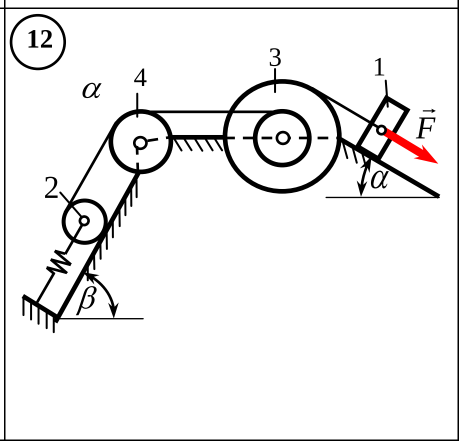

7
3
4
1
F
α
2
B
Q


8
3
1
4
α
F
2


9
P
3
2
4
1
F
α

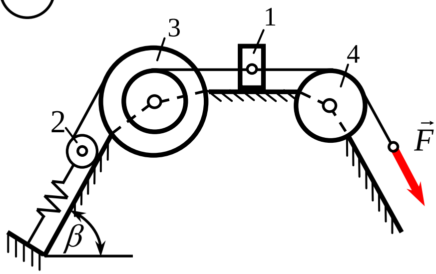

10
3
1
4
F
α
2


11
B
3
2
4
Q
1
P
F
α
α

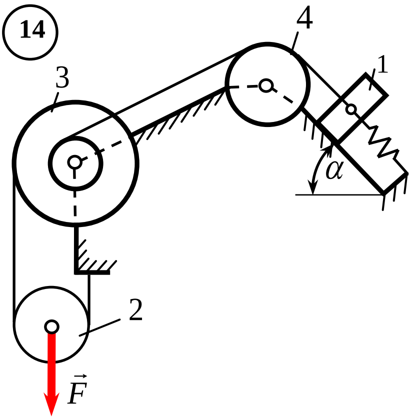

12
α
4
3
1
F
2
α
β

E

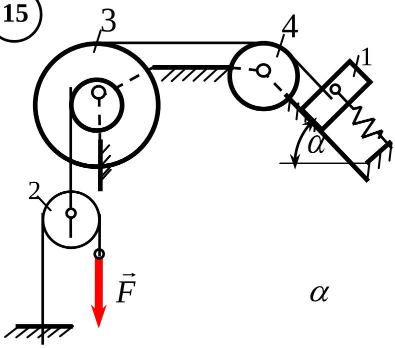
13



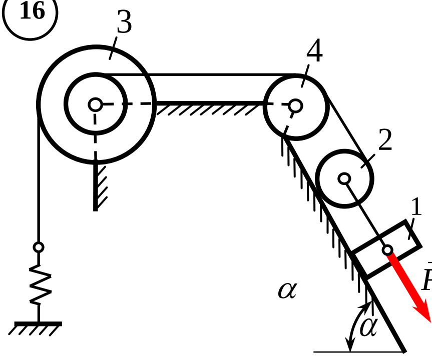
14



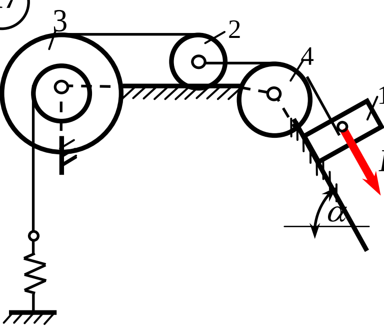
15



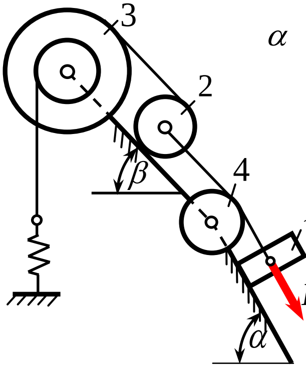
16



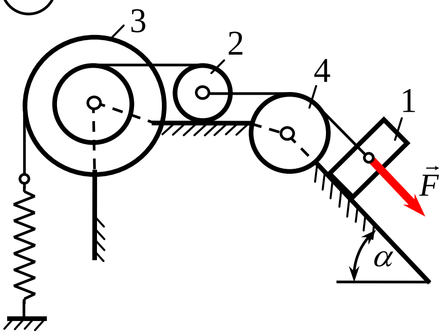
17



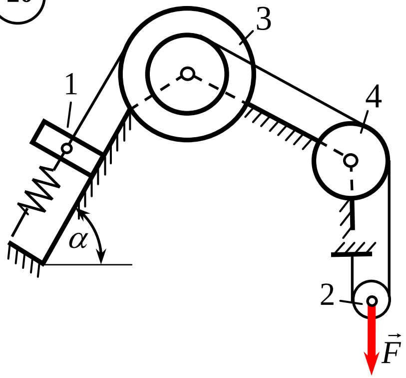
18



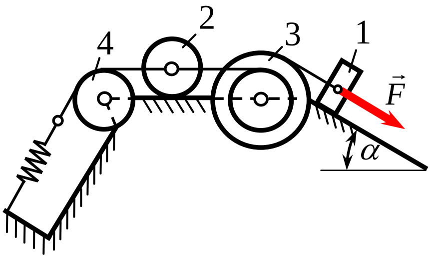
19



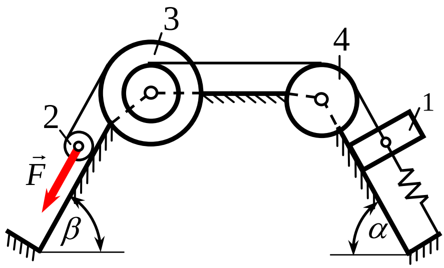
20



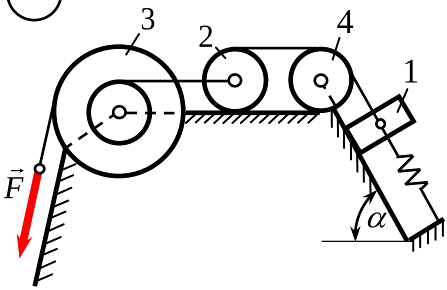
21



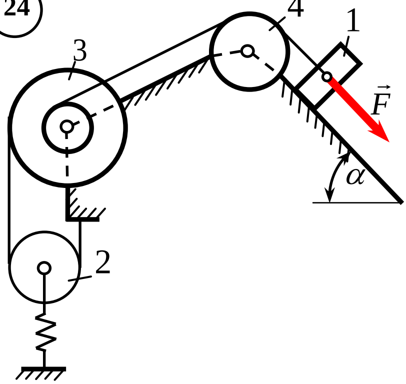
22



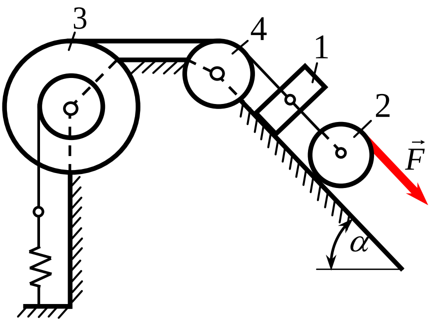
23



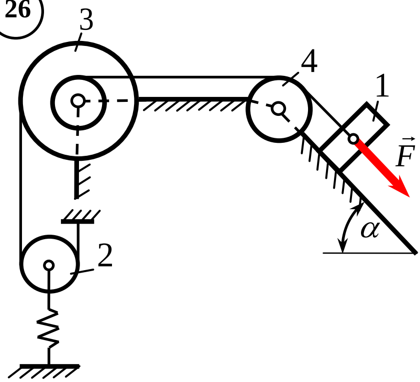
24



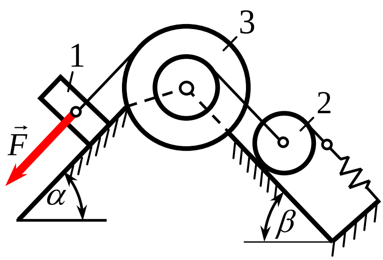
25



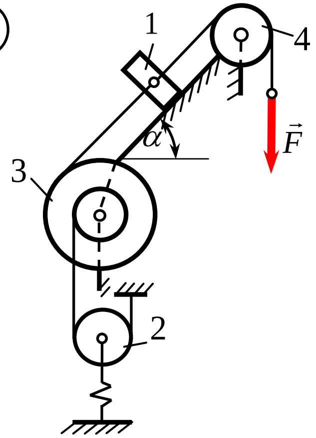
26



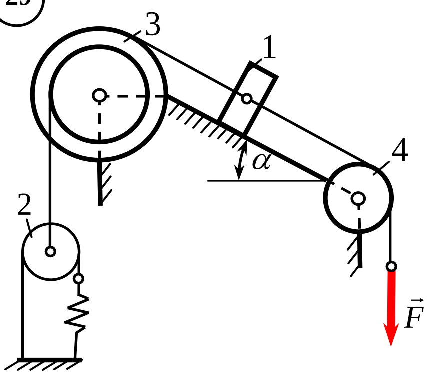
27



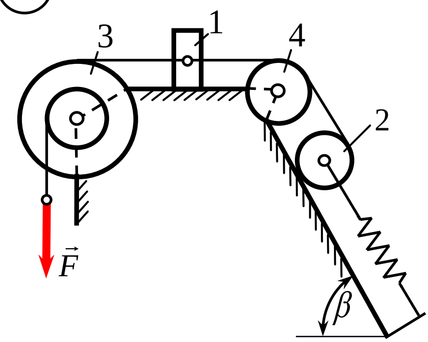
28



29



30



Д2.4. Пример выполнения задания

Д2 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дано:

$\alpha = 30°$,

$m_1 = 2кг$,

$m_2 = 16кг$,

$m_3 = 6кг$,

$m_4 = 4кг$,

$c = 120Н/м$,

$F = 2(5+4s)Н$,

$M = 0{,}9Нм$,

$\lambda_0 = 0$,

$f = 0{,}1$,

$R_3 = 0{,}3м$,

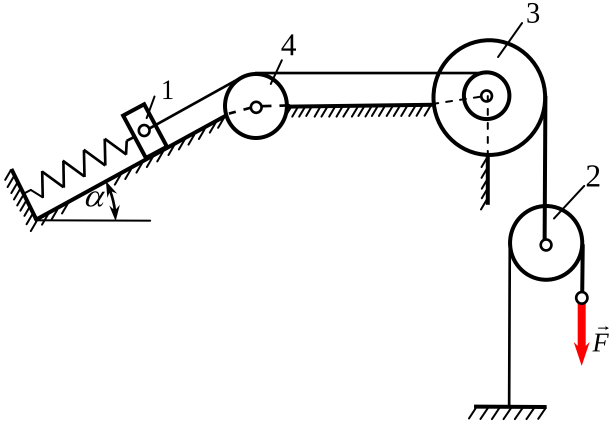
$r_3 = 0{,}1м$,

$i_3 = 0{,}2м$,

$T_0 = 0$,

$s_1 = 0{,}2м$.

Опр. ω_3.



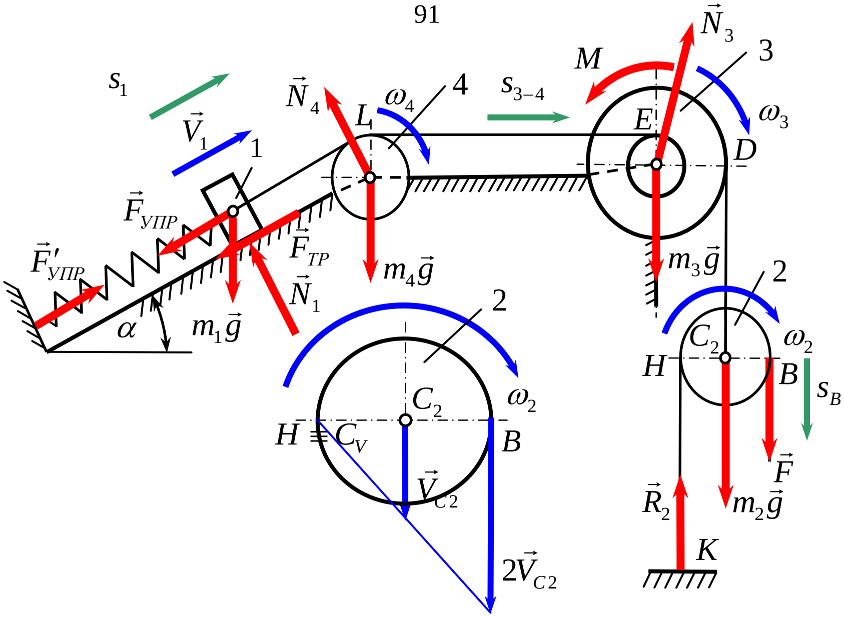
Решение:

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из груза 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3, неподвижного 4, нитей и пружины.

Так как в состав системы входит пружина – неидеальная (изменяемая) внутренняя связь, выбранная система является изменяемой. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\vec{F}$, силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, момент сопротивления M, реакции $\vec{N}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{F}'_{УПР}$ и силу трения $\vec{F}_{ТР}$.

Сила трения $\vec{F}_{ТР}$ груза 1 о плоскость направлена в сторону, противоположную скорости груза $\vec{V}_1$, момент сопротивления M направлен в сторону, противоположную угловой скорости ω_3 шкива 3.

Из внутренних сил изображаем реакции неидеальной внутренней связи – силу упругости пружины $\vec{F}_{УПР}$.



Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_F^e + \sum A_F^i . \qquad \textbf{(1)}$$

Так как в начальный момент времени система находилась состоянии покоя, то

$$T_0 = 0 . \qquad \textbf{(2)}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий материальных тел, входящих в состав системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 , \qquad \textbf{(3)}$$

Груз 1 совершает поступательное движение.

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} .$$

Неподвижный блок 4 вращается вокруг неподвижной оси.

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 .$$

Так как масса блока распределена по его ободу, то момент инерции его относительно оси вращения $J_4 = m_4 r_4^2$ и

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \omega_4^2$$

Ступенчатый шкив 3 также совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \, \omega_3^2$$

Момент инерции шкива относительно оси вращения

$$J_3 = m_3 \, i_3^2$$

Тогда

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \, i_3^2 \, \omega_3^2 .$$

Подвижный блок 2 совершает сложное (в данном случае - плоскопараллельное) движение

$$T_2 = \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} .$$

Момент инерции блока относительно центральной оси

$$J_2 = \frac{m_2 \, r_2^2}{2} .$$

Тогда

$$T_2 = \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{m_2 \, r_2^2 \, \omega_2^2}{4} .$$

Подставляя значения T_1, T_2, T_3, T_4 в выражение **(3)** найдем:

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{m_2 \, r_2^2 \, \omega_2^2}{4} + \frac{m_3 \, i_3^2 \, \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 \, r_4^2 \, \omega_4^2}{2} \qquad \mathbf{(4)}$$

Выразим величины скоростей, входящие в формулу **(4)**, через искомую угловую скорость ω_3,

$$V_E = \omega_3 \cdot r_3 .$$

Так как участки нити, параллельные соответствующим плоскостям, совершают поступательное движение, то $V_E = V_L = V_1$, то есть $V_1 = \omega_3 \cdot r_3$.

$$\omega_4 = \frac{V_L}{r_4} = \omega_3 \frac{r_3}{r_4} ,$$

Так как участок нити KH неподвижен, то точка H - мгновенный центр скоростей подвижного блока 2, тогда

$$\omega_2 = \frac{V_{C2}}{r_2}, \; V_{C2} = V_D = \omega_3 R_3, \; \omega_2 = \omega_3 \frac{R_3}{r_2}, \; V_B = 2V_{C2} = 2R_3\omega_3 .$$

Подставив найденные значения в формулу **(4)**, определим кинетическую энергию системы в конечном положении.

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega_2^2}{4} + \frac{m_3 i_3^2 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2 \omega_4^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{3m_2 V_{C2}^2}{4} + \frac{m_3 i_3^2 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2 \omega_4^2}{2} =$$

$$.= \frac{m_1 r_3^2}{2}\omega_3^2 + \frac{3m_2 R_3^2}{4}\omega_3^2 + \frac{m_3 i_3^2}{2}\omega_3^2 + \frac{m_4 r_3^2}{2}\omega_3^2$$

$$T = \frac{2\left(m_1 r_3^2 + m_3 i_3^2 + m_3 r_3^2\right) + 3m_2 R_3^2}{4}\omega_3^2 . \qquad \textbf{(5)}$$

Подсчитаем сумму работ внешних сил системы для момента времени, когда груз 1 переместится на величину s_1. При этом будем учитывать, что соотношения между перемещениями точек приложения сил такие же, как соотношения между соответствующими скоростями.

Работа сил $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, $\vec{R}_2$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{F}'_{УПР}$ равна нулю, так как точки приложения этих сил не перемещаются. Работа силы $\vec{N}_1$ также равна 0, так как в любой момент времени $\vec{N}_1 \perp \vec{V}_1$.

Тогда

$$\sum A_F^e = A_F + A_{m_1 g} + A_{m_2 g} + A_M + A_{F_{TP}} \; . \qquad \textbf{(6)}$$

$$A_F = \int\limits_{S_B} F\,ds = \int\limits_0^{s_B} 2(5+4s)ds = 2(5+2s_B)s_B = 2(5+4s_{C2})\cdot 2s_{C2} =$$

$$= 2\left(5 + \frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{2R_3}{r_3}s_1 = 4\left(5 + \frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{R_3}{r_3}s_1 .$$

$$A_{m_1 g} = -m_1 g s_1 \sin\alpha .$$

$$A_{m_2 g} = m_2 g \cdot s_{C2} = m_2 g \frac{R_3}{r_3} s_1 \; .$$

$$A_M = -\int\limits_0^{\varphi_3} M d\varphi_3 = -M\int\limits_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = -M\varphi_3 = -\frac{M}{r_3}s_1 .$$

$$A_{F_{TP}} = -f\,N_1\,s_1 = -f\,m_1 g\cos\alpha\;s_1.$$

Подставляя найденные значения работ в формулу **(6)**, получим

$$\sum A_F^e = 4\left(4+\frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{R_3}{r_3}s_1 - m_1\,g\,s_1\sin\alpha + m_2\,g\,\frac{R_3}{r_3}s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 -$$

$$- f\,m_1 g\cos\alpha\;s_1.$$

$$\sum A_F^e = \left\{g\left[4\left(5+\frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{R_3}{r_3} + m_2\frac{R_3}{r_3} - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] - \frac{M}{r_3}\right\}s_1. \quad \textbf{(7)}$$

Найдем работу внутренних сил.

$$\sum A_F^i = A_{F_{УПР}} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda^2\right),$$

Так как $\lambda_0 = 0,\quad \lambda = s_1$, то

$$\sum A_F^i = -\frac{c}{2}s_1^2, \qquad \textbf{(8)}$$

Подставляя выражения **(2)**, **(5)**, **(7)**, **(8)** в выражение теоремы **(1)**, получим

$$\frac{2\left(m_1 r_3^2 + m_3 i_3^2 + m_4 r_3^2\right) + 3m_2 R_3^2}{4}\omega_3^2 =$$

$$= \left\{g\left[4\left(5+\frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{R_3}{r_3} + m_2\frac{R_3}{r_3} - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] - \frac{M}{r_3}\right\}s_1.$$

Тогда

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{g\left[4\left(5+\frac{4R_3}{r_3}s_1\right)\frac{R_3}{r_3} + m_2\frac{R_3}{r_3} - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] - \frac{M}{r_3} - \frac{cs_1}{2}}{2\left(m_1 r_3^2 + m_3 i_3^2 + m_4 r_3^2\right) + 3m_2 R_3^2}s_1}\,.$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{9{,}81\cdot\left[4\cdot\left(5+\frac{4\cdot 0{,}3}{0{,}1}\cdot 0{,}2\right)\cdot\frac{0{,}3}{0{,}1} + 16\cdot\frac{0{,}3}{0{,}1} - 2\cdot(\sin 30^\circ + 0{,}1\cdot\cos 30^\circ)\right] - \frac{0{,}9}{0{,}1} - \frac{120\cdot 0{,}2}{2}}{2\left(2\cdot 0{,}1^2 + 6\cdot 0{,}1^2 + 4\cdot 0{,}1^2\right) + 3\cdot 16\cdot 0{,}3^2}\cdot 0{,}2} =$$

$$= 24{,}97\,рад/с\,.$$

Ответ:

$$\omega_3 = 24{,}97\,рад/с\,.$$

ДЗ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КИНЕТОСТАТИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д3.1. Краткие сведения из теории

Для решения задач динамики наряду с ***общими уравнениями динамики*** используют ***общие принципы механики***. Одним из них является ***принцип Даламбера***, служащий основанием для ***кинетостатики*** – основы технических применений динамики несвободных систем.

Современная трактовка принципа Даламбера включает в себя понятие ***сил инерции***: при движении механической системы в любой момент времени активные силы, действующие на систему, и реакции ее связей уравновешиваются силами инерции.

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{N}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k = 0 . \qquad \textbf{(1)}$$

Силой инерции материальной точки называют силу, равную по величине произведению массы этой точки на ее ускорение и направленную в сторону, противоположную вектору ускорения.

Силы инерции механической системы могут быть приведены к главному вектору и главному моменту.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} \Rightarrow \Phi = ma . \qquad \textbf{(2)}$$

Метод кинетостатики состоит в том, что уравнениям движения (динамики) механической системы можно придать вид уравнений равновесия (статики), если ***к активным силам и реакциям связей добавить силы инерции***. Полученные таким образом уравнения ***называют уравнениями кинетостатики***.

Формат (вид и количество) уравнений кинетостатики полностью определяется видом системы сил (активных, реактивных и сил инерции), действующих на точки механической системы. Так, в частности, для произвольной плоской системы сил уравнения кинетостатики имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_X = 0,\\ &\sum F_Y = 0,\\ &\sum m_o\left(\vec{F}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5)}$$

Для плоской системы параллельных сил уравнения кинетостатики можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_Y = 0,\\ &\sum m_O\left(\vec{F}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} &\sum m_A\left(\vec{F}\right) = 0,\\ &\sum m_B\left(\vec{F}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

При составлении уравнений кинетостатики следует учитывать, что для поступательно движущегося тела сила инерции определяется так же, как для материальной точки:

$$\vec{\Phi} = -\mathrm{M}\vec{a} \Rightarrow \Phi = \mathrm{M}a\,. \qquad \textbf{(7)}$$

Для вращающегося твёрдого тела действие сил инерции сводится моменту сил инерции:

$$\vec{M}_Z^{\Phi} = -J_Z\vec{\varepsilon} \Rightarrow M_Z^{\Phi} = J_Z\varepsilon\,, \qquad \textbf{(8)}$$

где J_Z - момент инерции тела относительно оси вращения, ε - величина углового ускорения тела.

Д3.2. Указания по выполнению задания

Особенность настоящего задания состоит в том, что прежде чем определять искомые реакции, необходимо найти момент сил инерции ступенчатого шкива; для определения значения углового ускорения, входящего в величину этого момента можно также использовать метод кинетостатики.

Последовательность выполнения задания

1. Уяснить условие задания.
2. Выбрать мехническую систему, движение которой будет рассматриваться.
3. Изобразить активные силы, действующие на точки выбранной системы и реакции внешних связей.
4. Изобразить силы инерции механической системы. Для момента сил инерции ступенчатого шкива предварительно найти угловое ускорение.
5. Выбрать удобные оси координат и центр моментов.
6. Записать соответствующие уравнения кинетостатики и решить их.
7. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

Д3.3. Собственно задание

Ступенчатый шкив A массой, M закрепленный шарнирно на двухопорной или на консольной балке, может вращаться почти без трения вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа, под действием грузов 1 и 2. Грузы 1 и 2 массой m_1 и m_2 связаны со ступенчатым шкивом A посредством нерастяжимых тросов, намотанных на соответствующие ступени шкива. Больший радиус шкива равен R, меньший - r, радиус инерции его - i.

Определить реакции внешних связей механической системы, пренебрегая массами балок и стержней. Выполнить проверку, составив ещё одно уравнение суммы моментов относительно произвольной точки, и сравнить полученную сумму с нулём. Определить также силу натяжения троса, несущего груз 1.

В качестве дополнительного исследования найти динамические составляющие указанных реакций.

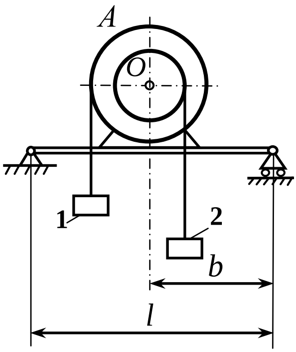
Исходные данные приведены в таблице **Д3.1**, расчетные схемы – в таблице **Д3.2**.

Таблица Д3.1. Исходные данные.

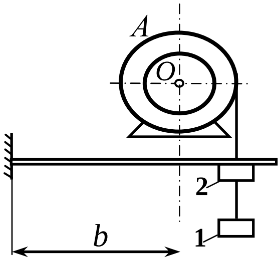
№	M	m_1	m_2	R	r	i	l	b
	кг	*кг*	*кг*	*м*	*м*	*м*	*м*	*м*
1.	70	12	8	0,25	0,15	0,2	5,2	2,3
2.	75	16	10	0,35	-		-	2,7
3.	80	25	10	0,45	0,15	0,4	-	3,2
4.	85	10	8	0,35	-	0,3	5,4	2,6
5.	90	8	4	0,35	0,15	0,2	-	2,9
6.	95	6	4	0,35	0,16	0,3	5,4	2,4
7.	100	12	8	0,45	0,35	0,4	4,8	2,1
8.	105	10	32	0,35	0,25	0,3	-	3,1
9.	110	10	14	0,25	-	0,2	-	3,4
10.	115	10	6	0,35	0,25	0,3	4,8	2,1
11.	120	8	6	0,45	-	0,4	-	3,3
12.	125	6	4	0,35	0,25	0,3	5,2	2,6
13.	130	12	10	-	0,15	0,2	5,8	2,5
14.	135	16	14	0,35	0,25	0,3	-	3,1
15.	140	14	12	0,55	-	0,4	-	2,9
16.	135	20	6	0,35	0,25	0,3	5,8	2,7
17.	130	8	6	-	0,15	0,2	-	2,9
18.	125	18	4	-	0,19	0,3	5,6	2,6
19.	120	12	8	-	0,35	0,4	5,8	2,7
20.	115	18	12	0,35	0,25	0,3	-	2,7
21.	110	32	10	0,25	0,15	0,2	-	3,2
22.	25	18	2	0,35	-	0,3	5,4	2,5
23.	100	16	14	-	0,32	0,4	-	2,5
24.	95	10	16	0,35	0,21	0,3	5,0	2,2
25.	12	8	6	0,25	0,15	0,2	6,2	3,3
26.	12	12	7	0,35	-	0,3	-	2,7
27.	20	10	8	-	0,35	0,4	-	3,4
28.	10	12	6	-	0,25	0,3	4,8	2,3
29.	8	8	14	-	0,15	0,2	-	2,9
30.	13	6	10	0,35	-	0,3	4,6	2,1

Таблица Д3.2. Расчётные схемы.

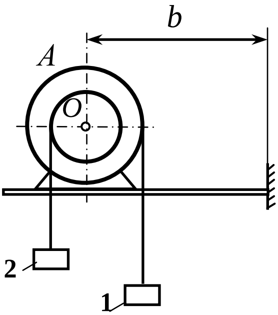
1



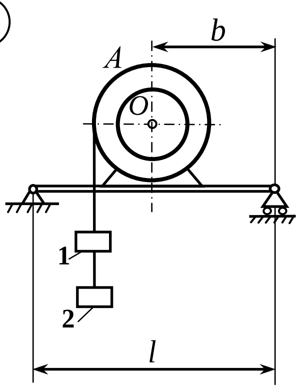
2



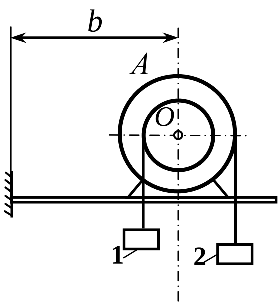
3



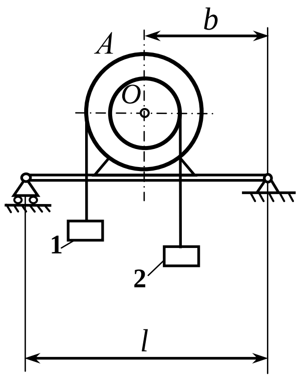
4



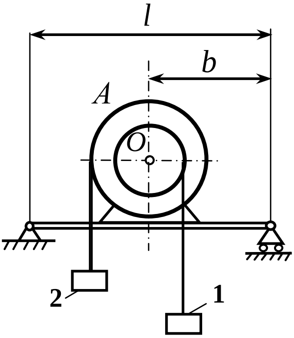
5



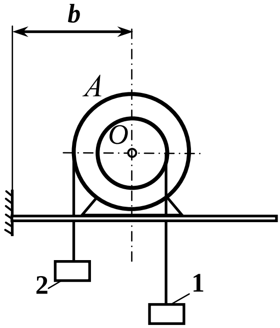
6



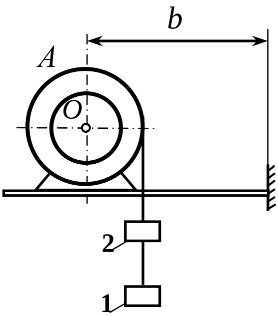
7



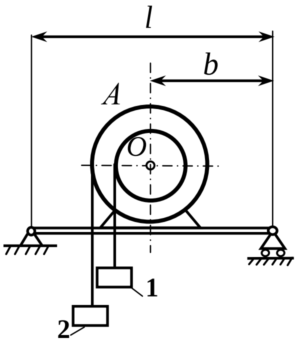
8



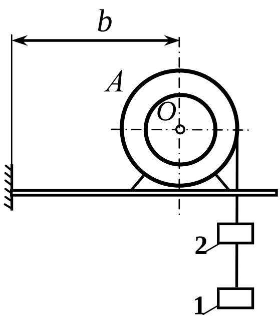
9



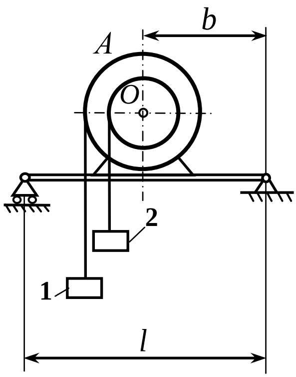
10



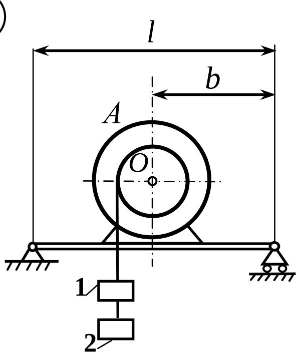
11



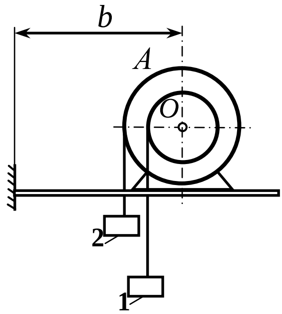
12



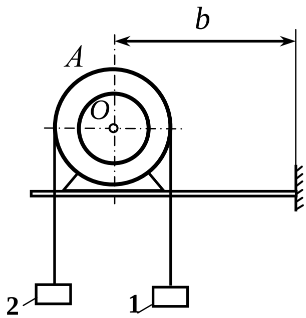
13



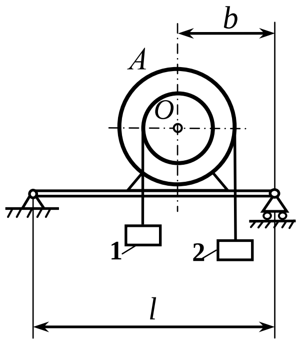
14



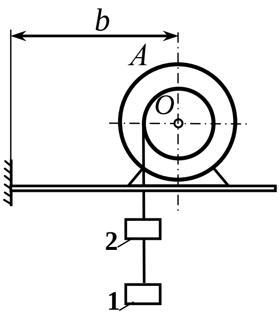
15



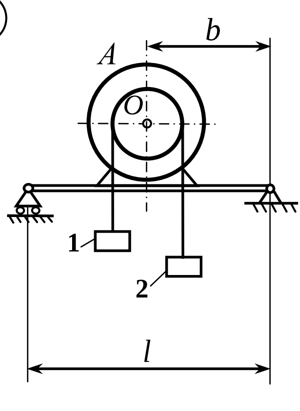
16



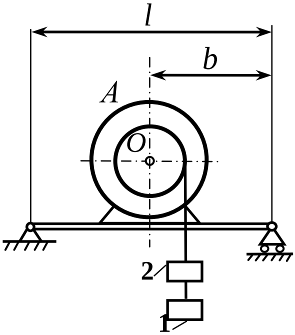
17



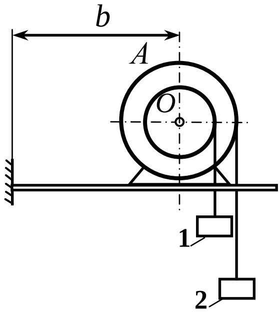
18



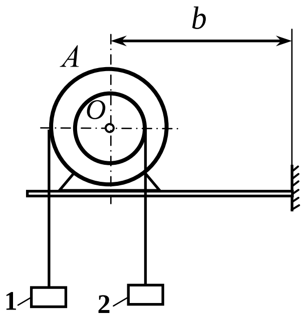
19



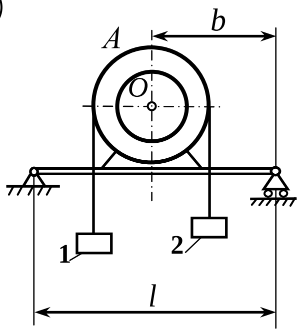
20



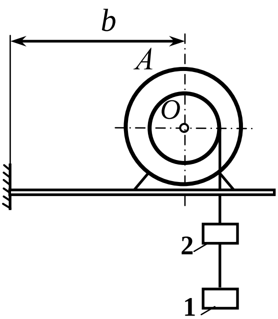
21



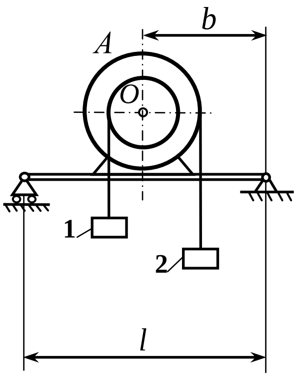
22



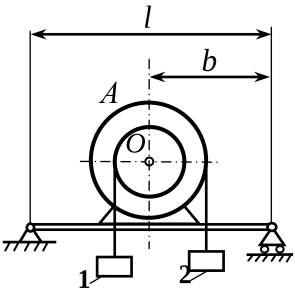
23



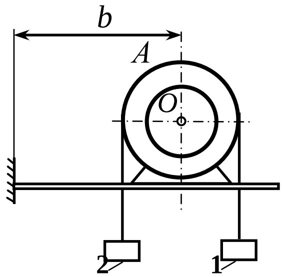
24



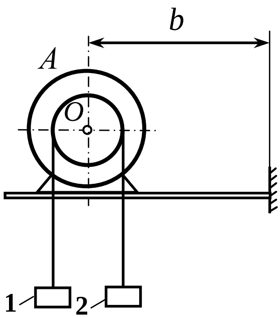
25



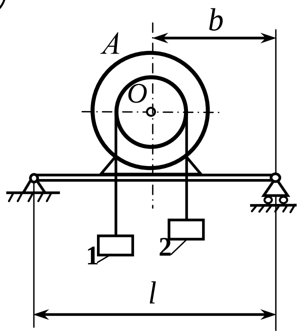
26



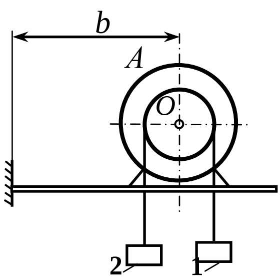
27



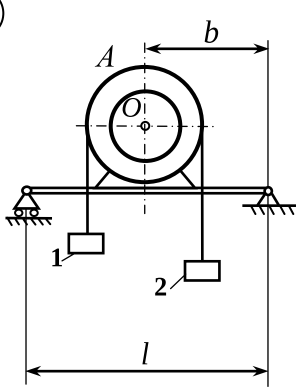
28



29



30



Д3.4. Пример выполнения задания

Д3 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КИНЕТОСТАТИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дано:

$\mathrm{M} = 120\,кг,$

$m_1 = 50\,кг,$

$m_2 = 8\,кг,$

$R = 0{,}35\,м,$

$r = 0{,}15\,м,$

$i = 0{,}2\,м,$

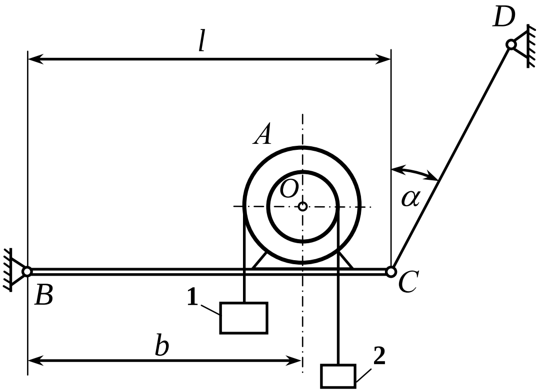
$l = 4\,м,$

$b = 3\,м,$

$\alpha = 30°.$

Опр.

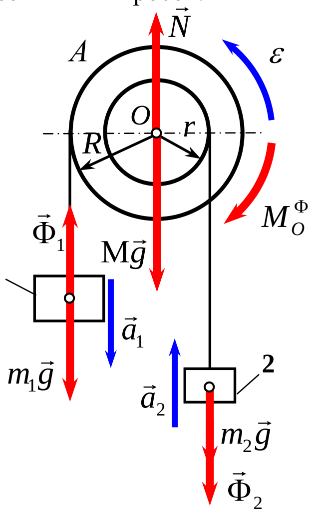
$\vec{R}_B, \vec{S}, \vec{T}_1.$



Решение:

Для определения углового ускорения шкива ε рассмотрим сначала движение системы, состоящей из шкива A, грузов 1 и 2 и тросов.

На эту систему действуют активные силы – силы тяжести $\mathrm{M}\vec{g}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и реакция шарнира $\vec{N}$. Добавим к этим сила силы инерции. Грузы 1 и 2 совершают поступательное движение, их силы инерции определяются так же, как для материальной точки: по величине $\Phi_1 = m_1 a_1$, $\Phi_2 = m_2 a_2$. Векторы $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ направлены в стороны, противоположные векторам ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Для того, чтобы выяснить направления этих векторов, вычислим сумму моментов активных сил относительно оси O.



$$\sum m_O\left(\vec{F}\right) = m_1 gR - m_2 gr = g\left(m_1 R - m_2 r\right) =$$

$$= 9{,}81 \cdot \left(50 \cdot 0{,}35 - 8 \cdot 0{,}15\right) = 16{,}3 Нм > 0.$$

Следовательно, шкив вращается против хода часовой стрелки, груз 1 опускается, а груз 2 поднимается.

Ступенчатый шкив A совершает вращательное движение, действие сил инерции сводится к моменту сил инерции $M_O^{\Phi} = J_O \varepsilon$, где $J_O = \mathrm{M} i^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения, ε - величина углового ускорения шкива. Направление момента M_O^{Φ} противоположно направлению ε.

Изображаем на рисунке силы инерции.

Выразим величины ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ через величину углового ускорения ε: $a_1 = \varepsilon R$, $a_2 = \varepsilon r$. Тогда

$$\Phi_1 = m_1 R \varepsilon,\ \Phi_2 = m_2 r \varepsilon,\ M_O^{\Phi} = \mathrm{M} i^2 \varepsilon.$$

Для определения углового ускорения ε составим уравнение кинетостатики в форме моментов:

$$\sum m_O\left(\vec{F}\right) = 0,\ m_1 g R - m_2 g r - \Phi_1 R - \Phi_2 r - M_O^{\Phi} = 0.$$

Подставив в последнее выражение значения сил инерции, найдём ε.

$$m_1 g R - m_2 g r - m_1 R^2 \varepsilon - m_2 r^2 \varepsilon - \mathrm{M} i^2 \varepsilon = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon = g \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + \mathrm{M} i^2} =$$

$$= 9{,}81 \cdot \frac{50 \cdot 0{,}35 - 8 \cdot 0{,}15}{50 \cdot 0{,}35^2 + 8 \cdot 0{,}15^2 + 120 \cdot 0{,}2^2} = 14{,}40\, рад/с^2.$$

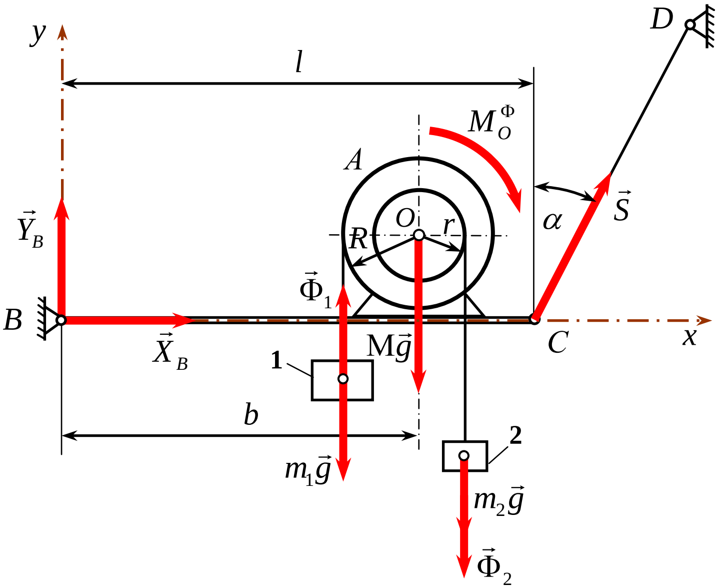
$$\Phi_1 = 50 \cdot 0{,}35 \cdot 14{,}4 = 252 H,$$

$$\Phi_2 = 8 \cdot 0{,}15 \cdot 14{,}4 = 17{,}28 H,$$

$$M_O^{\Phi} = 120 \cdot 0{,}2^2 \cdot 14{,}4 = 69{,}12 Нм.$$

Для определения искомых реакций рассмотри теперь движение механической системы, состоящей из балки BC, ступенчатого шкива A, грузов 1,2 и тросов. Применим метод кинетостатики.

Изобразим действующие на систему силы. Активными силами являются силы тяжести $\mathrm{M}\vec{g}$, $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$. Внешними связями для выбранной системы являются неподвижный шарнир B и невесомый стержень CD. Изображаем их реакции: составляющие $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ реакции шарнира B усилие в стержне $\vec{S}$. Добавим к этим силам силы инерции $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ и момент сил инерции M_O^Φ. Все эти силы образуют произвольную плоскую систему сил. Для такой системы сил, выбрав оси координат x и y, а также центр моментов B, запишем три уравнения кинетостатики.



$$\sum F_X = 0; \qquad X_B + S\sin\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\sum F_Y = 0; \qquad Y_B + S\cos\alpha - \mathrm{M}g - m_1 g - m_2 g + \Phi_1 - \Phi_2 = 0. \tag{2}$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = 0; \quad S\cos\alpha \cdot l - \mathrm{M}g\cdot b - m_1 g\cdot(b-R) - m_2 g\cdot(b+r) -$$
$$- M_O^\Phi + \Phi_1\cdot(b-R) - \Phi_2\cdot(b+r) = 0. \tag{3}$$

Из уравнения **(3)** найдём S.

$$S = \frac{\mathrm{M}gb + M_O^\Phi + (m_1 g - \Phi_1)(b-R) + (m_2 g + \Phi_2)(b+r)}{l\cos\alpha}. \tag{4}$$

$$S = \frac{120\cdot 9{,}81\cdot 3 + 69{,}12 + (50\cdot 9{,}81 - 252)(3-0{,}35) + (8\cdot 9{,}81 + 17{,}28)(3+0{,}15)}{4\cdot\cos 30^\circ} = 1309{,}0H.$$

Из уравнения **(1)** найдём X_B.

$$X_B = -S\sin\alpha = -1309{,}0\cdot\sin 30^\circ = -654{,}5H \tag{5}$$

Из уравнения **(2)** найдём Y_B.

$$Y_B = -S\cos\alpha + g(\mathrm{M} + m_1 + m_2) - \Phi_1 + \Phi_2. \tag{6}$$

$$Y_B = -1309 \cdot \cos 30° + 9{,}81 \cdot (120 + 50 + 8) - 252 + 17{,}28 = 377{,}8H .$$

Для проверки полученного результата составим ещё одно уравнение моментов.

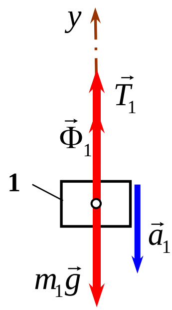
$$\sum m_C(\vec{F}) = -Y_B \cdot l + Mg \cdot (l-b) + m_1 g \cdot (l-b+R) + m_2 g \cdot (l-b-r) -$$
$$- M_O^{\Phi} - \Phi_1 \cdot (l-b+R) + \Phi_2 \cdot (l-b-r) = -377{,}8 \cdot 4 + 120 \cdot 9{,}81 \times$$
$$\times (4-3) + 50 \cdot 9{,}81 \cdot (4-3+0{,}35) + 8 \cdot 9{,}81 \cdot (4-3-0{,}15) -$$
$$-69{,}12 - 252 \cdot (4-3+0{,}35) + 17{,}28 \cdot (4-3-0{,}15) =$$
$$= 1920{,}77 - 1920{,}52 = 0{,}25 \approx 0 .$$

Относительная погрешность составляет:

$\delta = \dfrac{0{,}25}{1920{,}52} \cdot 100\% = 0{,}013\%$, что вполне допустимо в технических расчетах.

Для определения силы натяжения троса, несущего груз 1, рассмотрим движение этого груза.

На груз действуют силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, натяжение троса $\vec{T}_1$ и сила инерции $\vec{\Phi}_1$. Запишем уравнение кинетостатики и решим его.



$$\sum F_Y = 0; \ -m_1 g + T_1 + \Phi_1 = 0 \Rightarrow$$
$$T_1 = m_1 g - \Phi_1 . \qquad \textbf{(7)}$$
$$T_1 = 50 \cdot 9{,}81 - 252 = 238{,}5H .$$

Результаты решения сведем в таблицу.

<u>Ответ:</u>

Реакция	X_B	Y_B	S	T_1
Величина в $кН$	-654,5	377,8	1309,0	238,5

<u>Дополнительное исследование</u>

В качестве дополнительного исследования найдем динамические составляющие найденных реакций.

Найденные полные реакции связей складываются из статических составляющих, возникающих под действием активных сил, и динамических составляющих, возникающих из-за того, что некоторые тела, входящие в состав механической системы, движутся с ускорениями. Таким образом, динамические составляющие реакций возникают под действием сил инерции.

Для того, чтобы найти величины динамических составляющих реакций, достаточно положить в уравнениях кинетостатики **(1)** - **(3)** активные силы – в данном случае, силы тяжести $\mathrm{M}g$, $m_1 g$ и $m_2 g$ равными нулю. Тогда из формул **(4)** - **(7)** найдём:

$$S^{дин} = \frac{M_O^{\Phi} - \Phi_1 (b - R) + \Phi_2 (b + r)}{l \cos\alpha} =$$

$$= \frac{69{,}12 - 252 \cdot (3 - 0{,}35) + 17{,}28 \cdot (3 + 0{,}15)}{4 \cdot \cos 30^\circ} = -157{,}1H ;$$

$$X_B^{дин} = -S^{дин} \cdot \sin\alpha = 157{,}1 \cdot \sin 30^\circ = 78{,}6H ;$$

$$Y_B^{дин} = -S^{дин} \cos\alpha - \Phi_1 + \Phi_2 = 157{,}1 \cdot \cos 30^\circ - 252 + 17{,}28 = -98{,}7H ;$$

$$T_1 = -\Phi_1 = -252H .$$

Анализируя полученный результат, можно сделать вывод: наличие сил инерции существенно влияет на величины реакций внешних и внутренних связей механической системы.

Библиографический список

Основной

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики, «Высшая школа», Москва, 2005,- 416 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Санкт-Петербург, «Лань», 2006,- 448 с.
3. Яблонский А.А., В.М.Никифорова Курс теоретической механики. Учебное пособие для вузов: 13-е изд., исправленное Москва: Интеграл-Пресс,2006.-603с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для студентов втузов/[А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского.- 11-е издание, стереотипное - Москва: Интеграл- Пресс,2004.-382 с.
5. В.Д. Бертяев. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. Учебное пособие. Санкт-Петербург, «БХВ-Петербург», 2005,- 752 с.

Дополнительный

1. Бельтюков В.П. и др. под редакцией Сигаева Н.П. Теоретическая механика. Методические указания по выполнению курсовых работ. Часть 1. Статика. Новомосковск, 1983,- 70 с.
2. Гаркуша А.С. и др. под редакцией Сигаева Н.П. Теоретическая механика. Методические указания по выполнению курсовых работ. Часть 2. Кинематика. Новомосковск, 1984,- 42 с.
3. Бельтюков В.П. и др. под редакцией Сигаева Н.П. Теоретическая механика. Методические указания по выполнению курсовых работ. Часть 3. Динамика. Новомосковск, 1985,- 146 с.
4. Н.П. Сигаев. Решение второй динамики с помощью ЭВМ. Методические указания по выполнению курсовой работы по теоретической механике. Новомосковск, 1990,- 33 с.

Оглавление

Предисловие………………………………………………………...………….. 3

С1 Определение усилий в стержнях пространственной конструкции.... 4

С2 Определение реакций опор составной конструкции…………….. 17

С3 Определение реакций опор твёрдого тела…………………………… 32

К1 Определение кинематических характеристик точки………………… 45

К2 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки……………………………………………………………………….. 54

Д1 Исследование движения материальной точки………………………. 69

Д2 Применение теоремы об изменении кинетической энергии для исследования движения механической системы…………………….. 81

Д3 Применение метода кинетостатики для исследования движения механической системы…………………………………………….. 95

Библиографический список……………………………………...…………… 108

Для заметок

<u>Для заметок</u>

Учебное издание

Сигаев Николай Петрович
Бегова Анастасия Владимировна
Зимин Анатолий Игоревич
Суменков Александр Леонидович

Сборник расчётных заданий по теоретической механике

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Туманова Е.М.
Подписано в печать . Формат $60\times84^{1/16}$.
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 4,1.
Тираж 75 зкэ. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9.
Адрес института: 301650, Новомосковск, Тульской обл., Дружбы, 8.