МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Российский химико-технологический университет
имени Д.И.Менделеева

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

В.И.Кощенко, Ю.Г.Резвов

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

примеры решения задач

Утверждено редакционным советом института в качестве учебного пособия

Новомосковск 1998

УДК 530

В.И.Кощенко, Ю.Г.Резвов. Колебания и волны. Примеры решения задач: учебное пособие / РХТУ имени Д.И.Менделеева Новомосковский институт, Новомосковск, 1998, 28 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой кафедры физики НИ РХТУ и предназначено для самостоятельной работы студентов всех специальностей.

Рецензент: доцент, канд.физ.-мат.наук
Подольский В.А. (НИ РХТУ)

1. Гармонические колебания

1.1. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия; $\omega_0^2 = k/m$, ω_0 - циклическая частота колебаний, k - коэффициент квазиупругой силы, m - масса точки.

1.2. Кинематическое уравнение гармонических колебаний

$$X = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha)$$

где t - время; X_m и α - амплитуда и начальная фаза колебаний; $(\omega_0 t + \alpha)$ - фаза колебаний в момент времени t.

1.3. Проекция скорости материальной точки на ось X

$$v = \frac{dX}{dt} = \frac{d[X_m \cos(\omega_0 t + \alpha)]}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) =$$

$$= -v_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где $v_m = X_m \omega_0$ - амплитуда скорости (ее максимальное значение).

1.4. Проекция ускорения материальной точки на ось X

$$a = \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d[-v_m \sin(\omega_0 t + \alpha)]}{dt} = -v_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) =$$

$$= -a_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $a_m = v_m \omega_0 = X_m \omega_0^2$ - амплитуда ускорения.

1.5. Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 \text{ или } \omega_0 = 2\pi / T_0,$$

где ν_0 и T_0 - частота и период колебаний.

1.6. Период колебаний пружинного маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

где m - масса тела, k - жесткость пружины. Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука.

1.7. Период колебаний математического маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} ,$$

где ℓ- длина маятника; g - ускорение свободного падения.

1.8. Период колебаний физического маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgb}} ,$$

где J - момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний; “b” - расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

1.9. Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$E = \frac{m x_m^2 \omega_0^2}{2} = \frac{k x_m^2}{2} .$$

1.10. Амплитуда X_m результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний одинакового направления и одинаковой частоты, определяется по формуле

$$X_m^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) ,$$

где X_{m1}, X_{m2} - амплитуды составляющих колебаний; α_1 и α_2 - их начальные фазы.

1.11. Начальная фаза α результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, может быть найдена по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{X_{m1}\sin\alpha_1 + X_{m2}\sin\alpha_2}{X_{m1}\cos\alpha_1 + X_{m2}\cos\alpha_2} ,$$

где X_{m1} и X_{m2} - амплитуды складываемых колебаний; α_1 и α_2 - начальные фазы складываемых колебаний.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1

Материальная точка массой $m = 5{,}0$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}50$ Гц. Амплитуда колебаний $X_m = 3{,}0$ см. Определить:

1. Скорость v точки в момент времени, когда смещение $X = 1{,}5$ см;
2. Максимальную силу F_m, действующую на точку;
3. Полную энергию E колеблющейся точки.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$m = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг
$\nu = 0{,}50$ Гц
$X_m = 3{,}0$ см $= 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ м
$X = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

1. v - ?
2. F_m - ?
3. E - ?

1. Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$X = X_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1.1)$$

где X_m, ω_0 и α - соответственно амплитуда, циклическая частота и начальная фаза колебаний.

$$\omega_0 = 2\pi\nu \qquad (1.2)$$

Скорость точки найдем, взяв первую производную по времени от смещения X:

$$v = dX/dt = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad (1.3)$$

Равенства (1.1) и (1.3) с учетом формулы (1.2) примут вид:

$$X = X_m \cos(2\pi\nu\, t + \alpha)$$

$$v = -2\pi\nu X_m \sin(2\pi\nu\, t + \alpha)$$

Из двух последних равенств получаем

$$\cos(2\pi\nu\, t + \alpha) = \frac{X}{X_m}; \ \sin(2\pi\nu\, t + \alpha) = \frac{-v}{2\pi\nu X_m}$$

Возводим эти равенства в квадрат

$$\cos^2(2\pi\nu\, t + \alpha) = \frac{X^2}{X_m^2}; \ \sin^2(2\pi\nu\, t + \alpha) = \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 X_m^2}$$

Сложим последние равенства

$$\cos^2(2\pi\nu\, t + \alpha) + \sin^2(2\pi\nu\, t + \alpha) = \frac{X^2}{X_m^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 X_m^2};$$

$$1 = \frac{X^2}{X_m^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2X_m^2};\ 4\pi^2\nu^2X_m^2 = 4\pi^2\nu^2X^2 + v^2;$$

$$v = \pm\sqrt{4\pi^2\nu^2X_m^2 - 4\pi^2\nu^2X^2};\ v = \pm 2\pi\nu\sqrt{X_m^2 - X^2};$$

$$v = \pm 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}50\sqrt{(3{,}0\cdot 10^{-2})^2 - (1{,}5\cdot 10^{-2})^2} = \pm 8{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}$$

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси X, знак минус - когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси X.

2. Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \qquad (1.4)$$

где F - проекция силы на ось X, a - проекция ускорения точки на ту же ось, равная первой производной по времени от скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} = -X_m\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Последняя формула с учетом равенства (1.2) примет вид

$$a = -4\pi^2\nu^2X_m\cos(2\pi\nu\, t + \alpha).$$

Подставив выражение для ускорения в формулу (1.4), получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mX_m\cos(2\pi\nu\, t + \alpha).$$

Видно, что амплитуда силы (ее максимальное значение) равна:

$$F_m = 4\pi^2\nu^2 mX_m,$$

$$F_m = 4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}50^2\cdot 5{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}0\cdot 10^{-2} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

3. При гармонических незатухающих колебаниях выполняется закон сохранения механической энергии. Поэтому полная энергия колеблющейся точки, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, вычисленная для любого момента времени будет одинаковая. В тот момент времени, когда кинетическая энергия достигает максимального значения, потенциальная энергия равна нулю и наоборот. Поэтому полную энергию E можно найти как максимальную кинетическую энергию E_{km} (или как максимальную потенциальную энергию):

$$E = E_{km} = \frac{mv_m^2}{2}, \qquad (1.5)$$

где v_m - максимальная скорость точки.

Из формулы (1.3) следует, что максимальное значение скорости (ее амплитуда) равно

$$v_m = X_m \omega_0 = X_m 2\pi\nu$$

Подставив выражения для v_m в формулу (1.5), получим:

$$E = \frac{mX_m 4\pi^2\nu^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2 X_m^2,$$

$$E = 2\cdot(3{,}14)^2\cdot 5{,}0\cdot 10^{-3}\cdot(0{,}50)^2\cdot(3{,}0\cdot 10^{-2})^2 = 2{,}2\cdot 10^{-5}\text{ Дж.}$$

Задача 1.2

Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями

$$X_1 = X_{m1}\cos\omega(t+\tau_1),$$
$$X_2 = X_{m2}\cos\omega(t+\tau_2),$$

где $X_{m1} = 1{,}0$ см, $X_{m2} = 2{,}0$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi$ с$^{-1}$.

1. Найти амплитуду X_m и начальную фазу α результирующего колебания;
2. Написать уравнение результирующего колебания.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$X_1 = X_{m1}\cos\omega(t+\tau_1)$
$X_2 = X_{m2}\cos\omega(t+\tau_2)$
$X_{m1} = 1{,}0$ см
$X_{m2} = 2{,}0$ см
$\tau_1 = 1/6$ с
$\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi$ с$^{-1}$

1. X_m - ?
2. $X(t)$ - ?

1. Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи:

$$X_1 = X_{m1}\cos(\omega t + \omega\tau_1) \qquad (1.6)$$
$$X_2 = X_{m2}\cos(\omega t + \omega\tau_2) \qquad (1.7)$$

Запишем уравнения складываемых колебаний в общем виде:

$$X_1 = X_{m1}\cos(\omega t + \alpha_1) \qquad (1.8)$$
$$X_2 = X_{m2}\cos(\omega t + \alpha_2) \qquad (1.9)$$

Из сравнения равенств (1.6), (1.8) и (1.7), (1.9) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\alpha_1 = \omega\tau_1 = \pi/6\text{ рад}$$
$$\alpha_2 = \omega\tau_2 = \pi/2\text{ рад}$$

Для определения амплитуды X_m результирующего колебания воспользуемся векторной диаграммой, изображенной на рисунке.

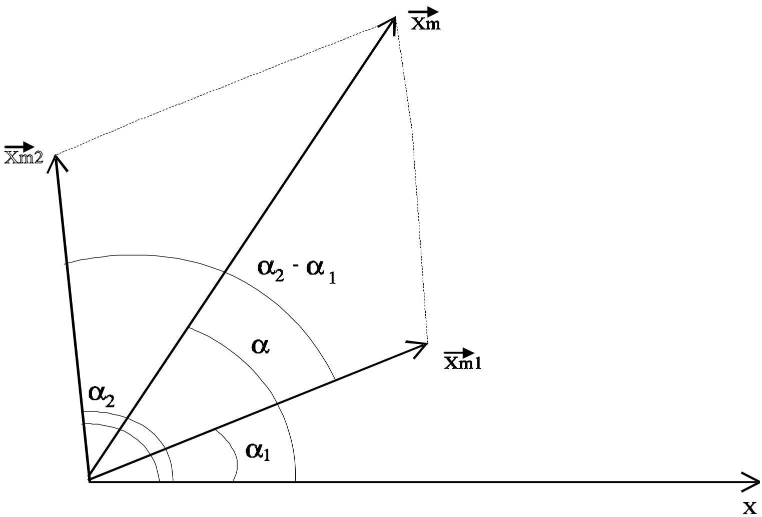
Согласно теореме косинусов получаем

$$X_m = \sqrt{X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Подставим значения X_{m1}, X_{m2}, α_1, α_2 в последнюю формулу и произведем вычисления:

$$X_m = \sqrt{(1{,}0)^2 + (2{,}0)^2 + 2\cdot 1{,}0\cdot 2{,}0\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2{,}6 \text{ см}$$

Тангенс начальной фазы α результирующего колебания определяем, опять используя векторную диаграмму, изображенную на рисунке.



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{X_{m1}\sin\alpha_1 + X_{m2}\sin\alpha_2}{X_{m1}\cos\alpha_1 + X_{m2}\cos\alpha_2}.$$

Подставим значения X_{m1}, X_{m2}, α_1, α_2 в последнюю формулу и произведем вычисления:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1{,}0\sin\frac{\pi}{6} + 2{,}0\sin\frac{\pi}{2}}{1{,}0\cos\frac{\pi}{6} + 2{,}0\cos\frac{\pi}{2}} = 2{,}9$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\ 2{,}9 = 71° = 0{,}39 \text{ рад}$$

2. Так как частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Запишем уравнение результирующего колебания в общем виде:

$$X = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Подставим в последнее равенство значения X_m, ω и α:

$$X = 2{,}6 \cos(\pi t + 0{,}39) \text{ см.}$$

2. Затухающие колебания

2.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0,$$

где β - коэффициент затухания, $\beta = r/2m$; r - коэффициент сопротивления, ω_o - циклическая частота собственных незатухающих колебаний.

2.2. Кинематическое уравнение затухающих колебаний

$$X = X_m(t) \cos(\omega t + \alpha),$$

где $X_m(t)$ - амплитуда затухающих колебаний в момент времени t;
ω - их циклическая частота.

2.3. Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$X_m(t) = X_{m0} \cdot e^{-\beta t},$$

где X_{mo} - амплитуда колебаний в момент времени $t = 0$; $\beta = 1/\tau$,
τ - время релаксации, т.е. время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в **e** раз.

2.4. Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}.$$

2.5. Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}.$$

2.6. Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{X_m(t)}{X_m(t+T)} = \beta T,$$

где $X_m(t)$ и $X_m(t + T)$ - амплитуды двух колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период; λ - величина, обратная числу колебаний, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в **e** раз.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача 2.1

Тело совершает свободные затухающие колебания с периодом T = 0,492 с в среде с коэффициентом сопротивления r = 175 г/с. Начальная фаза колебаний α = 0,568 рад. Амплитуда колебаний за время t_1 = 2,36 с уменьшилась от начального значения X_{mo} = 68,4 мм до значения X_{m1} = 7,25 мм. Определить:

1. Коэффициент затухания β, время релаксации τ, логарифмический декремент затухания λ, массу m тела;
2. Период T_0 свободных незатухающих колебаний и коэффициент k квазиупругой силы.
3. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний через N = 7 колебаний;
4. Написать кинематическое уравнение затухающих колебаний.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
T = 0,492 с
r = 175 г/с
t_1 = 2,36 с
X_{mo} = 68,4 мм
X_{m1} = 7,25 мм
α = 0,568 рад
N = 7

1. β, τ, λ, m - ?;
2. T_0, k - ?;
3. X_{mo} / X_{m1} - ?;
4. $X(t)$ - ?

1. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по закону

$$X_m(t) = X_{m0} \cdot e^{-\beta\ t}, \qquad (2.1)$$

где X_{mo} - начальная амплитуда, β - коэффициент затухания. Тогда $X_{m1}=X_{mo}\, e^{-\beta \cdot t_1}$.

Отсюда выражаем коэффициент затухания:

$$\beta = \ln(X_{mo}/X_{m1})/t_1;$$

$$\beta = \ln(68{,}4/7{,}25)/2{,}36 = 0{,}951\ \text{с}^{-1}.$$

Время релаксации τ - время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, причем эта величина обратна коэффициенту затухания β:

$$\tau = 1/\beta = 1{,}05\ \text{с}.$$

По определению, коэффициент затухания β связан с коэффициентом сопротивления r и массой m тела формулой:

$$\beta = r/2m. \qquad (2.2)$$

Отсюда

$$m = r/2\beta = 0,175/(2\cdot 0,951) = 0,0920 \text{ кг} = 92,0 \text{ г}.$$

Логарифмический декремент затухания λ найдем по формуле

$\lambda = \beta T$, где T - период свободных затухающих колебаний.

$$\lambda = 0,951\cdot 0,492 = 0,469.$$

2. Циклическая частота ω затухающих колебаний выражается через циклическую частоту ω_o незатухающих колебаний и коэффициентом затухания β по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,. \qquad (2.3)$$

Отсюда $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ и $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$

Связь циклической частоты колебаний с периодом имеет вид

$\omega = 2\pi/T$, поэтому из (2.3) получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{(2\pi/T)^2 + \beta^2}\,;$$

$$\omega_0 = \sqrt{(6,28/0,492)^2 + 0,951^2} = 12,8 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда период собственных незатухающих колебаний

$$T_o = 2\pi/\omega_o = 0,491 \text{ с}.$$

Циклическая частота ω_o незатухающих колебаний определяется через коэффициент “k” квазиупругой силы и массу m тела по формуле

$$\omega_0^2 = k/m.$$

Тогда

$$k = \omega_0^2 m$$

$$k = (12,8)^2\cdot 0,0920 = 15,1 \text{ Н/м}.$$

3. Преобразуем зависимость $X_m(t) = X_{m0} \cdot e^{-\beta t}$. Так как из определения периода колебаний следует T = t/N, где N - число колебаний, совершенных за время t, то $\beta t = \beta TN = \lambda N$. Следовательно зависимость амплитуды X_m от числа N колебаний, совершенных телом, имеет вид

$$X_m = X_{mo}\, e^{-\lambda N}\,. \qquad (2.4)$$

По условию задачи искомой величиной является отношение начальной амплитуды X_{mo} к текущей X_m.

$$n = X_{mo}/\ X_m = X_{mo}/\ X_{mo}\,e^{-\lambda N} = e^{\lambda N},$$

$$n = e^{0,469\cdot 7} = 26,7 \text{ раз.}$$

4. Кинематическое уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$X_m(t) = X_{mo}\,e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha). \qquad (2.5)$$

Начальная амплитуда X_{mo} = 68,4 мм и начальная фаза α = 0,568 рад заданы; коэффициент затухания β = 0,951 c^{-1} вычислен в п.1; циклическую частоту ω затухающих колебаний вычислим по формуле $\omega = 2\pi/T = 12,8$ c^{-1}. Подставляем данные в уравнение (2.5):

$$X(t) = 68,4\,e^{-0,951t}\cos(12,8t + 0,568) \text{ мм.}$$

<u>Примечание:</u> поскольку все исходные данные заданы с точностью до трех значащих цифр (N = 7 - это точное число, поэтому имеет бесконечно много значащих цифр), то и расчет проводился до трех значащих цифр.

<u>Задача 2.2</u>

Тонкий однородный стержень длиной ℓ колеблется в вязкой среде относительно горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно к стержню через точку, расположенную на расстоянии $b = \ell/4$ от верхнего конца стержня. Зависимость угла отклонения стержня от времени имеет вид $\varphi = 32,5°\cdot e^{-0,420t}\cdot\cos 4,40t$. Определить:

1. Отношение времени релаксации τ к периоду T_o собственных незатухающих колебаний; логарифмический декремент затухания λ;
2. Длину ℓ стержня;
3. Во сколько раз уменьшится амплитуда φ_m затухающих колебаний после совершения N = 4 колебаний;
4. Угол отклонения φ_1 стержня через время t_1 = 3,71 с после начала колебаний.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

$b = \ell/4$

$\varphi = 32{,}5°\cdot e^{-0{,}420t}\cdot\cos 4{,}40t$

$N = 4$

$t_1 = 3{,}71$ с

1. τ / T_o - ?, λ - ?
2. ℓ - ?
3. φ_m/φ_{mo} - ?
4. φ_1 - ?

1. Поскольку кинематическое уравнение затухающих колебаний задано, то легко определяются начальная амплитуда φ_{mo} колебаний, коэффициент затухания β, циклическая частота ω затухающих колебаний и их начальная фаза α: $\varphi_{mo} = 32{,}5°$, $\beta = 0{,}420$ с$^{-1}$, $\omega = 4{,}40$ с$^{-1}$, $\alpha = 0$.

Время релаксации τ связано с коэффициентом затухания β соотношением:

$$\tau = 1/\beta, \tag{2.6}$$

$$\tau = 1/0{,}420 = 2{,}38 \text{ с.}$$

Циклические частоты ω_o и ω незатухающих и затухающих колебаний соответственно связаны уравнением

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}\,. \tag{2.7}$$

Отсюда $\omega_o = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$. Период колебаний выражаем через циклическую частоту:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}\,. \tag{2.8}$$

Отношение времени релаксации τ к периоду T_o собственных незатухающих колебаний с учетом (2.6) и (2.8):

$$\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{\beta}\Bigg/\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 + 1}\,,$$

$$\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\left(\frac{4{,}40}{0{,}420}\right)^2 + 1} = 1{,}67\,.$$

Логарифмический декремент затухания найдем по формуле $\lambda = \beta T$, где $T = 2\pi / \omega$ - период затухающих колебаний.

$$\lambda = 2\pi\beta/\omega,$$

$$\lambda = 6{,}28 \cdot 0{,}420 / 4{,}40 = 0{,}600.$$

2. Стержень, подвешенный как указано в условии задачи, является физическим маятником. Циклическая частота ω_o собственных незатухающих колебаний стержня физического маятника равна

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mga}{J}}\,, \tag{2.9}$$

где m - масса физического маятника, J - его момент инерции относительно оси подвеса, “a” - расстояние от оси подвеса до центра масс маятника.

У тонкого однородного стержня центр масс расположен в его геометрическом центре, поэтому

$$a = \ell/2 - b = \ell/2 - \ell/4 = \ell/4. \tag{2.10}$$

Момент инерции J относительно оси подвеса найдем по теореме Штейнера

$$J = J_o + ma^2\,,$$

где J_o - момент инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его центр масс. Известно, что $J_o = (1/12)\,m\ell^2$. Тогда

$$J = (1/12)\,m\ell^2 + m(\ell/4)^2 = (1/12 + 1/16)\,m\ell^2 = (7/48)\,m\ell^2. \tag{2.11}$$

Подставляем J и “a” в формулу для ω_o:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mga}{J}} = \sqrt{\frac{mg\frac{\ell}{4}}{\frac{7}{48}m\ell^2}} = \sqrt{\frac{12}{7}\cdot\frac{g}{\ell}}\,.$$

Отсюда длина стержня

$$\ell = \frac{12}{7}\cdot\frac{g}{\omega_o^2} = \frac{12}{7}\cdot\frac{g}{\omega^2 + \beta^2}\,,$$

$$\ell = \frac{12}{7}\cdot\frac{9{,}81}{(4{,}40)^2 + (0{,}420)^2} = 0{,}861 \text{ м}.$$

3. Амплитуда φ_m затухающих колебаний зависит от времени t по закону

$$\varphi_m(t) = \varphi_{mo}\,e^{-\beta\cdot t}\,. \tag{2.12}$$

Представим время в виде $t = NT$, где T - период, т.е. время совершения одного колебания, N - число колебаний за время t. Тогда

$$\beta t = \beta TN = \lambda N.$$

Теперь из (2.12) выразим искомое отношение:

$$\varphi_{mo} / \varphi_m = e^{\beta \cdot t} = e^{\lambda N},$$

$$\varphi_{mo} / \varphi_m = e^{0,600 \cdot 4} = 11,0 \text{ раз.}$$

4. Для нахождения угла φ_1 отклонения стержня подставим время t_1 в кинематическое уравнение

$$\varphi_1 = 32,5° \, e^{-0,420 t_1} \cos 4,40 t_1,$$

$$\varphi_1 = 32,5° e^{-0,420 \cdot 3,71} \cos 4,40 \cdot 3,71 = -5,58°.$$

Примечания. 1. Численные расчеты проведены с точностью до 3 значащих цифр в соответствии с правилами приближенных вычислений;
2. Фазу, т.е. аргумент косинуса, при перемножении циклической частоты ω и времени t_1, мы получим в радианах $\omega t_1 = 4,40 \cdot 3,71 = 16,3$ рад, что следует учесть при вычислении тригонометрических функций.

3. Вынужденные колебания

3.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=\frac{F_m}{m}\cos\Omega t\,,$$

где $F(t) = F_m\cos\Omega t$ - внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_m - ее амплитудное значение; m - масса колеблющейся точки.

3.2. Кинематическое уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$X = X_m\cos(\Omega t + \alpha),$$

где Ω - циклическая частота вынужденных колебаний, равная циклической частоте вынуждающей силы; X_m и α - амплитуда и начальная фаза установившихся вынужденных колебаний (сдвиг по фазе между вынужденным колебанием и вынуждающей силой).

3.3. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний

$$X_m=\frac{F_m}{m\sqrt{(\omega_o^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}\,.$$

3.4. Начальная фаза установившихся колебаний (сдвиг фазы между установившимися вынужденными колебаниями и периодической силой)

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2-\omega_o^2}\,.$$

3.5. Резонансная частота

$$\Omega_p=\sqrt{\omega_o^2-2\beta^2}\,.$$

3.6. Резонансная амплитуда

$$X_{mp}=\frac{F_m}{2\beta m\sqrt{\omega_o^2-\beta^2}}=\frac{F_m}{2\beta m\omega}\,,$$

где ω - циклическая частота затухающих колебаний

3.7. Сдвиг фазы при резонансе

$$\alpha_p=\operatorname{arctg}(-\,\Omega_p/\beta).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача 3.1

Колебательная система массой $m = 3{,}88$г совершает вынужденные колебания, кинематическое уравнение которых имеет вид

$$X(t) = 7{,}40\cos(66{,}4t - 1{,}47) \text{ мм.}$$

Резонансная циклическая частота Ω_p в $n = 5{,}90$ раз больше коэффициента затухания β. Определить:

1. Циклическую частоту ω_o собственных незатухающих колебаний, коэффициент затухания β и логарифмический декремент затухания λ;
2. Написать уравнение $F(t)$ вынуждающей силы;
3. Какую долю резонансной амплитуды составляет амплитуда вынужденных колебаний.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$m = 3{,}88 \cdot 10^{-3}$ кг
$n = 5{,}90$ раз
$\Omega_p = n\beta$
$X(t) = 7{,}40\cos(66{,}4t - 1{,}47)$ мм

1. ω_o - ?, β - ?, λ - ?
2. $F(t)$ - ?
3. X_m / X_{mp} - ?

1. Поскольку кинематическое уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$X(t) = X_m\cos(\Omega t + \alpha), \quad (3.1)$$

то сразу определяются следующие параметры: $X_m = 7{,}40$ мм - амплитуда вынужденных колебаний, $\Omega = 66{,}4$ с$^{-1}$ - циклическая частота вынужденных колебаний (это же есть циклическая частота вынуждающей силы), $\alpha = -1{,}47$ рад - сдвиг фазы вынужденных колебаний.

Сдвиг фазы определяется по формуле

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2},$$

где β - коэффициент затухания, ω_o - циклическая частота собственных незатухающих колебаний.

Циклическая резонансная частота равна $\Omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$. Значит

$$\Omega_p^2 = \omega_o^2 - 2\beta^2. \quad (3.2)$$

По условию $\Omega_p = n\beta$, поэтому формула (3.2) примет вид:

$$n^2 \beta^2 = \omega_o^2 - 2\beta^2.$$

Отсюда $\omega_o^2 = n^2 \beta^2 + 2\beta^2 = \beta^2(n^2 + 2)$. (3.3)

Подставим это выражение в формулу для сдвига фазы:

$$tg\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \beta^2\left(n^2 + 2\right)}.$$

Отсюда

$$tg\,\alpha\,(n^2 + 2)\,\beta^2 - \Omega^2 tg\,\alpha + 2\beta\Omega = 0.$$

Имеем квадратное уравнение

$$\beta^2 + 2\frac{\Omega}{\left(n^2 + 2\right)\cdot tg\alpha}\beta - \frac{\Omega^2}{n^2 + 2} = 0.$$

Подставляем численные данные:

$$\beta^2 - 2\cdot 0{,}182\beta - 120 = 0.$$

Его решение $\beta = 0{,}182 \pm \sqrt{0{,}182^2 + 120}$.

Так как коэффициент затухания должен быть положителен, то

$$\beta = 0{,}182 + \sqrt{0{,}182^2 + 120} = 11{,}1\ c^{-1}.$$

Тогда из (3.3)

$$\omega_o^2 = \beta\sqrt{n^2 + 2} = 67{,}3\ c^{-1};$$

$$\Omega_p = n\beta = 65{,}5\ c^{-1}.$$

Логарифмический декремент затухания λ найдем по формуле

$$\lambda = \beta T \qquad (3.4),$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период свободных затухающих колебаний, а ω - их циклическая частота. Подставим $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ в (3.4). Окончательно с учетом (3.2) получим :

$$\lambda = 2\pi\frac{\beta}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}} = 2\pi\frac{\beta}{\sqrt{\left(n^2 + 2\right)\beta^2 - \beta^2}} = 2\pi\frac{\beta}{\beta\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1{,}05.$$

2. Уравнение внешней вынуждающей силы имеет вид

$$F(t) = F_m\cos\Omega t. \qquad (3.5)$$

Циклическая частота известна. Для определения амплитуды F_m вынуждающей силы воспользуемся уравнением для амплитуды вынужденных колебаний

$$Xm = \frac{Fm\,/\,m}{\left[\left(\omega_o^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда $$Fm = m\sqrt{\left(\omega_o^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2},$$

$$F_m = 7{,}40\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}88\cdot 10^{-3}\sqrt{\left(67{,}3^2 - 66{,}4^2\right)^2 + 4\cdot 11{,}1^2\cdot 66{,}4^2} =$$

$$= 0{,}0425\ \text{Н} = 42{,}5\ \text{мН}.$$

Подставив численные данные в (3.5), получим:

$$F(t) = 42{,}5\cos 66{,}4t\ \text{мН}.$$

3. В случае резонанса выражение для амплитуды колебаний имеет вид:

$$X_{mp} = \frac{F_m}{2\beta m\omega}. \qquad (3.6)$$

Найдем отношение X_m/X_{mp}

$$\frac{Xm}{X_{mp}} = \frac{F_m}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \Bigg/ \frac{F_m}{2\beta m\omega} = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\frac{Xm}{X_{mp}} = \frac{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = 0{,}996.$$

Отношение близко к 1, поскольку частота вынуждающей силы $\Omega = 66{,}4\ \text{с}^{-1}$ близка к резонансной $\Omega_p = 65{,}5\ \text{с}^{-1}$.

Задача 3.2

Тело совершает вынужденные колебания под действием силы $F(t) = F_m\cos\Omega t$, причем циклическая частота Ω вынуждающей силы может меняться, а амплитуда $F_m = 6{,}13$ Н постоянна. На частотах $\Omega_1 = 48{,}9\ \text{с}^{-1}$ и $\Omega_2 = 85{,}6\ \text{с}^{-1}$ сдвиг фаз между смещением и силой составил $\alpha_1 = -1{,}39$ рад и $\alpha_2 = -2{,}91$ рад соответственно. Коэффициент сопротивления среды $r = 760$ г/с. Определить:

1. Коэффициент затухания β, циклическую частоту ω_0 собственных незатухающих колебаний и массу m тела;
2. Кинематические уравнения вынужденных колебаний на обеих частотах;
3. Резонансную амплитуду X_{mp} и резонансную циклическую частоту Ω_p.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$F(t)=F_m \cos \omega t$
$F_m = 6{,}13$ Н
$\Omega_1 = 48{,}9$ с$^{-1}$
$\Omega_2 = 85{,}6$ с$^{-1}$
$\alpha_1 = -1{,}39$ рад
$\alpha_2 = -2{,}91$ рад
$r = 760$ г/с

1. β - ?, ω_0 - ?, m - ?;
2. $x_1(t)$, $x_2(t)$ -?
3. X_{mp} - ?, Ω_p - ?.

Воспользуемся формулой для определения сдвига фазы вынужденных колебаний:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_o^2},$$

где β - коэффициент затухания,

ω_o - циклическая частота собственных незатухающих колебаний, Ω - циклическая частота вынужденных колебаний (совпадает с циклической частотой вынуждающей силы).

Написав формулу для обеих частот, имеем систему:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\alpha_1 = \dfrac{2\beta\Omega_1}{\Omega_1^2 - \omega_o^2} & (3.7) \\ \mathrm{tg}\alpha_2 = \dfrac{2\beta\Omega_2}{\Omega_2^2 - \omega_o^2} & (3.8) \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\cdot\frac{\omega_o^2 - \Omega_2^2}{\omega_o^2 - \Omega_1^2} \Rightarrow \left(\omega_o^2 - \Omega_1^2\right)\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\left(\omega_o^2 - \Omega_2^2\right) \Rightarrow$$

$$\omega_o^2\left[\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right] = \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2}\Omega_1^2 - \Omega_1\Omega_2 \Rightarrow$$

$$\omega_o^2 = \Omega_1^2\frac{\Omega_1\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_2\mathrm{tg}\alpha_2}{\Omega_1\mathrm{tg}\alpha_2}\cdot\frac{\Omega_2\mathrm{tg}\alpha_2}{\Omega_2\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_1\mathrm{tg}\alpha_2} \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 = \Omega_1\Omega_2\frac{\Omega_1\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_2\mathrm{tg}\alpha_2}{\Omega_2\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_1\mathrm{tg}\alpha_2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\Omega_1\Omega_2\frac{\Omega_1\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_2\mathrm{tg}\alpha_2}{\Omega_2\mathrm{tg}\alpha_1 - \Omega_1\mathrm{tg}\alpha_2}}.$$

Подставив численные данные, получим

$$\omega_0 = 50{,}1 c^{-1}$$

Зная ω_0, найдем β (например, из первого уравнения системы (3.7)):

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega_1^2 - \omega_o^2}{\Omega_1}\,tg\alpha_1 = \frac{tg\alpha_1}{2}\left(\Omega_1 - \frac{\omega_o^2}{\Omega_1}\right).$$

Расчет дает: $\beta = 6{,}65\ c^{-1}$.

Поскольку коэффициент затухания β связан с коэффициентом сопротивления r формулой $\beta = \dfrac{r}{2m}$, то $m = \dfrac{r}{2\beta}$.

Подставив численные данные, получим:

$$m = 0{,}0571 \text{ кг} = 57{,}1 \text{ г}.$$

2. Кинематическое уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$X(t) = X_m\cos(\omega t + \alpha), \qquad (3.9)$$

где X_m - амплитуда вынужденных колебаний. Поскольку циклические частоты ω_1 и ω_2, а также сдвиги фаз α_1 и α_2 известны, то следует определить только амплитуды X_{m1} и X_{m2} на каждой из указанных частот.

Воспользуемся формулой

$$X_m = \frac{F_m/m}{\left[(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right]^{1/2}}, \qquad (3.10)$$

где F_m - амплитуда вынуждающей силы.

Произведенный по формуле (3.10) расчет дает значения

$$X_{m1} = 0{,}162 \text{ м} = 162 \text{ мм},$$

$$X_{m2} = 0{,}0216 \text{ м} = 21{,}6 \text{ мм}.$$

Подставляя данные в (3.9), имеем

$$X_1(t) = 162\cos(48{,}9t - 1{,}39) \text{ мм},$$

$$X_2(t) = 21{,}6\cos(85{,}7t - 2{,}91) \text{ мм}.$$

3. Резонансную циклическую частоту можно определить по формуле

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}.$$

Произведя вычисления, получим: $\Omega_p = 49{,}2\ c^{-1}$

Резонансную амплитуду X_{mp} можно получить следующим образом. Если подставить выражение

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

в формулу для X_m, то получим удобное выражение для резонансной амплитуды:

$$X_{mp} = \frac{F_m/m}{2\beta\omega} = \frac{F_m}{r\omega}, \qquad (3.11)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} = \sqrt{\Omega_p^2 + \beta^2}$ - циклическая частота свободных затухающих колебаний. Расчет по формуле (3.11) дает

$$X_{mp} = 0{,}163 \text{ м} = 163 \text{ мм}.$$

Примечание. Все численные расчеты проведены с необходимой точностью, то есть до 3 значащих цифр.

4. Волны в упругой среде

4.1. Уравнение плоской волны

$$S(x,t) = S_m\cos(\omega(t - x/c) + \alpha)$$

или

$$S(x,t) = S_m\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

где $S(x,t)$ - смещение точек среды с координатой x в момент времени t;
S_m - амплитуда колебаний частиц среды; ω - циклическая частота;
c - скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость),
$c = \omega/k$; k - волновое число, $k = 2\pi/\lambda$; λ - длина волны; α - начальная фаза.

4.2. Длина волны λ связана с периодом T колебаний и частотой ν соотношениями

$$\lambda = cT \quad \text{и} \quad \lambda = c/\nu.$$

4.3. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx, определяется по формуле

$$\Delta\varphi = 2\pi\cdot\Delta x/\lambda.$$

4.4. Скорость точек среды с координатой x в момент времени t

$$V(x,t) = dS(x,t)/dt = - V_m\sin(\omega t - kx + \alpha),$$

где $V_m = \omega S_m$ - максимальная скорость движения частиц среды.

4.5. Ускорение точек среды с координатой x в момент времени t

$$a(x,t) = dV(x,t)/dt = d^2S(x,t)/dt^2 = - a_m\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

где $a_m = \omega V_m = \omega^2 S_m$ - максимальное ускорение частиц среды.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1

Плоская волна с частотой колебаний $\nu = 2{,}5$ Гц распространяется в упругой среде. Длина волны $\lambda = 4{,}0$ м. Максимальная скорость V_m колебаний частицы среды равна $1{,}5\pi$ м/с. Начальная фаза колебаний источника $\alpha = \pi/6$ радиан.

1. Написать уравнений колебаний $S(0,t)$ источника;
2. Написать уравнение волны;
3. Определить отношение длины волны λ к амплитуде S_m колебаний точек среды; скорости **c** распространения волны к максимальной

скорости V_m колебаний точек среды; отношение периода колебаний T ко времени t_1, за которое колебания достигнут точки среды, отстоящей от источника на расстоянии $x = 5{,}0$ м;

4. Написать уравнение для смещения $S(x,\tau)$ точек среды, в момент времени $\tau = 3{,}2$ с после начала колебаний;
5. Написать уравнение колебаний $S(\ell,t)$ точки среды, удаленной от источника на расстояние $\ell = 2\lambda$. Затуханием колебаний пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\nu = 2{,}5$ Гц
$\lambda = 4{,}0$ м
$V_m = 1{,}5\pi$ м/с
$\alpha = \pi/6$
$X = 5{,}0$ м
$\ell = 2\lambda$
$\tau = 3{,}2$ с

---

1. $S(0,t)$ - ?
2. $S(x,t)$ - ?
3. λ / S_m - ?, c/V_m - ?, T/τ - ?
4. $S(x,\tau)$ - ?
5. $S(\ell,\tau)$ - ?

1.Запишем уравнение колебаний $S(0,t)$ источника в общем виде (положив $x = 0$ в уравнении волны):

$$S(0,t) = S_m\cos(\omega t + \alpha), \qquad (4.1)$$

где S_m - амплитуда колебаний;
ω - циклическая частота колебаний;
α - начальная фаза колебаний.

Найдем скорость колебаний частиц среды, взяв первую производную по времени от смещения $S(x,t)$:

$$V = dS(x,t)/dt =$$

$$= -S_m\omega\sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Скорость V принимает максимальное значение, если

$$\sin(\omega t - kx + \alpha) = -1, \text{ тогда}$$

$$V_m = S_m\omega,$$

$$S_m = V_m/\omega, \qquad (4.2)$$

$$\omega = 2\pi\nu,$$

где ν - частота колебаний.

$$\omega = 2\pi\cdot 2{,}5 \;=\; 5{,}0\pi\ \text{с}^{-1}$$

Найдем амплитуду S_m колебаний, подставив в равенство (4.2) численные значения V_m и ω:

$$S_m = (1{,}5\pi)/(5{,}0\pi) = 0{,}30 \text{ м};$$

Значения S_m, ω, и α подставим в уравнение (4.1) и получим уравнение колебаний источника:

$$S(0,t) = 0,30\cos(5,0\pi t + \pi/6) \text{ м.}$$

2. Запишем уравнение плоской волны в общем виде:

$$S(x,t) = S_m\cos(\omega t - kx + \alpha), \qquad (4.3)$$

где k - волновое число.

$$k = 2\pi/\lambda, \quad k = 2\pi/4,0 = 0,50\pi \text{ м}^{-1}.$$

Подставив численные значения S_m, ω, k, и α в уравнение (4.3), получим уравнение $S(x,t)$ плоской волны:

$$S(x,t) = 0,30\cos(5,0\pi t - 0,50\pi x + \pi/6) \text{ м.} \qquad (4.4)$$

3. Найдем отношение λ/S_m:

$$\lambda/S_m = 4,0/0,30 = 13,$$

Так как скорость распространения волны $c = \lambda\nu$, то отношение

$$c/V_m = \lambda\nu/ V_m,$$

$$c/V_m = (4,0\cdot 2,5)/(1,5\cdot 3,14) = 2,1.$$

Определим время t_1, за которое колебания достигнут точки среды, отстоящей от источника на расстоянии X = 10 м: $t_1 = X/c = X/\lambda\nu$. Найдем отношение T/t_1:

$$T/t_1 = T\lambda\nu/X = \lambda/X, \text{ так как } T\nu = 1.$$

$$T/t_1 = 4,0/5,0 = 0,80.$$

4. Перепишем уравнение $S(X,t)$ плоской волны (4.4):

$$S(x, t) = 0,30\cos(5,0\pi t - 0,50\pi x + \pi/6) \text{ м.}$$

Вместо t в это уравнение подставим τ = 3,2 с и получим уравнение для смещения $S(x,\tau)$ точек среды в момент времени τ.

$$S(x, \tau) = 0,30\cos(5,0\pi\cdot 3,2 - 0,50\pi x + \pi/6) \text{ м,}$$

$$S(x, \tau) = 0,30\cos(16,2\pi - 0,50\pi x) \text{ м.}$$

Т.к. функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ имеют период $\pm 2\pi m$ (m - целое число), то последнее уравнение можно переписать в виде

$$S(x, \tau) = 0,30\cos(0,20\pi - 0,50\pi x) \text{ м.}$$

5. Для того, чтобы получить уравнение колебаний $S(\ell,t)$ точки, удаленной от источника на расстояние $\ell = 2\lambda$, в уравнение плоской волны (4.4) вместо x подставим значение $\ell = 2\lambda = 2\cdot 4,0 = 8$ м

$$S(\ell, t) = 0,30\cos(5,0\pi t - 0,50\pi\cdot 8 + \pi/6) \text{ м,}$$

$$S(\ell, t) = 0,30\cos(5,0\pi t - 3,8\pi) \text{ м.}$$

$$S(\ell, t) = 0{,}30\cos(5{,}0\pi t - 3{,}8\pi) = 0{,}30\cos(5{,}0\pi t + 0{,}2\pi) \text{ м.}$$

В последнем равенстве также учтена периодичность тригонометрических функций.

Примечание. Численные расчеты проведены с точностью до двух значащих цифр, соответствующей точности исходных данных.

Задача 4.2

Плоская звуковая волна, скорость распространения которой c = 634 м/с, возбуждается источником, колеблющимся с периодом T = 8,17 мс и амплитудой S_m = 0,940 мм. Начальная фаза колебаний источника $\alpha = \pi/4$. Определить:

1. Циклическую частоту ω колебаний частиц среды, длину волны λ, волновое число k и отношение максимальной скорости V_m колебаний частиц среды к скорости c распространения волны;
2. Написать уравнение колебаний $S(0,t)$ источника, уравнение волны $S(x,t)$ и уравнение для смещения $S(x,\tau)$ частиц среды в момент времени $\tau = 3T/8$;
3. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух частиц среды, координаты которых x_1 = 3,70 м и x_2 = 7,15 м.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
c = 634 м/с
T = 8,17 мс
S_m= 0,940 мм
$\alpha = \pi/4$
$\tau = 3T/8$
x_1 = 3,70 м
x_2 = 7,15 м

1. ω - ?, λ - ?, k - ?, V_m/c - ?
2. $S(o,t)$ - ?, $S(x,t)$ - ?, $S(x,\tau)$
3. $\Delta\varphi$ - ?

1. Период колебаний частиц среды совпадает с периодом T колебаний источника, поэтому искомую циклическую частоту найдем по формуле $\omega = 2\pi/T$.

$$\omega = 6{,}283/8{,}17\cdot10^{-3} = 769 \text{ с}^{-1}.$$

Длина волны λ равна

$\lambda = cT$, $\lambda = 634\cdot8{,}17\cdot10^{-3} = 5{,}18$ м.

Волновое число k связано с длиной волны формулой $k = 2\pi/\lambda$.

$$k = 6{,}283/5{,}18 = 1{,}21 \text{ м}^{-1}.$$

Максимальная скорость V_m колебаний частиц среды связана с амплитудой колебаний S_m соотношением $V_m = \omega S_m$. Так как амплитуда колебаний частиц равна амплитуде колебаний источника, то

$$V_m/c = \omega S_m/c. \qquad (4.5)$$

$$V_m/c = 769 \cdot 0{,}000940/634 = 1{,}14 \cdot 10^{-3}.$$

2. Уравнение волны $S(x,t)$ описывает распространение колебаний в среде и имеет вид

$$S(x,t) = S_m \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (4.6)$$

Так как для для источника $x = 0$, то уравнение колебаний источника

$$S(0,t) = S_m \cos(\omega t + \alpha), \qquad (4.7)$$

где α - начальная фаза колебаний источника (совпадает с начальной фазой в уравнении волны).

Уравнение для смещения $S(x,\tau)$ частиц среды в момент времени τ представляет собой мгновенное распределение смещений в пространстве в этот момент времени. Подставим $t = \tau$ в уравнение (4.6):

$$S(x,\tau) = S_m \cos(\omega\tau - kx + \alpha). \qquad (4.8)$$

После подстановки данных уравнения (4.6) и (4.7) примут вид

$$S(x,t) = 0{,}940\cos(769t - 1{,}21x + \pi/4) \text{ мм},$$

$$S(0,t) = 0{,}940\cos(769t + \pi/4) \text{ мм}.$$

Вычисляя произведение $\omega\tau$ для уравнения (4.8), получим

$$\omega\tau = \omega \cdot 3T/8 = 3\omega T/8 = 3 \cdot 2\pi/8 = 3\pi/4.$$

Тогда фаза, то есть аргумент косинуса

$$\varphi = \omega\tau - kx + \alpha = 3\pi/4 - kx + \pi/4 = \pi - kx.$$

$$S(x,\tau) = 0{,}940\cos(\pi - 1{,}21x) \text{ мм}.$$

Это выражение можно упростить, используя свойства тригонометрических функций:

$$S(x,\tau) = -\,0{,}940\cos 1{,}21x \text{ (мм)}.$$

3. Разность фаз колебаний двух частиц среды равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\omega t - kx_1 + \alpha) - (\omega t - kx_2 + \alpha) = k(x_2 - x_1),$$

$$\Delta\varphi = 1{,}21(7{,}15 - 3{,}70) = 4{,}17 \text{ рад}.$$

Примечание. Численный расчет произведен с точностью до трех значащих цифр в соответствии с правилами приближенных вычислений.

СОДЕРЖАНИЕ