

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙ-
СКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
Издательский центр

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И
ТЕРМОДИНАМИКА**
примеры решения задач

Новомосковск 2000

Составители: А.Л. Дюков, В.П. Коняхин.

Молекулярная физика и термодинамика. Примеры решения задач: методические указания / РХТУ им. Д.И. Менделеева Новомосковский институт, сост.: А.Л. Дюков, В.П. Коняхин. Новомосковск 2000, 67 с.

Методические указания составлены в соответствии с расчетным заданием по молекулярной физике и термодинамике и предназначены для самостоятельной работы студентов всех специальностей.

Ил. 15. Библиогр. 3 назв.

© Новомосковский институт Российского
химико-технологического университета
им. Д.И. Менделеева 2000

ВВЕДЕНИЕ

Потребность настоящих указаний обусловлена изданием расчетного задания по соответствующей тематике, в котором многие задачи являются нестандартными, оригинальными, а некоторые из них повышенной трудности.

Методические указания по своей структуре, тематике и подбору примеров строго соответствуют расчетному заданию. В них приведены подробные решения задач на законы идеального газа.

распределение молекул в поле силы тяжести, распределение молекул по скоростям, энергию молекул и теплоёмкость идеального газа, термодинамику и круговые процессы, а также явления переноса.

Издание примеров решения задач необходимо для оказания помощи в самостоятельной работе студентов всех специальностей с расчетным заданием по молекулярной физике и термодинамике.

1. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

1.1 Количество вещества (число молей вещества)

$$\nu = \frac{m}{\mu},$$

где m – масса вещества; μ – его молярная масса.

1.2 Число молекул вещества

$$N = \frac{m}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро, т.е. число молекул содержащихся в одном моле вещества. $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}$.

1.3 Число молей смеси газов

$$\nu = \sum_{i=1}^k \nu_i,$$

где ν_i – число молей i -го компонента смеси,

k – число компонентов смеси.

1.4 Молярная масса смеси газов

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{\sum \nu_i},$$

где m_i – масса i -го компонента смеси; ν_i – его молярная масса

1.5 Массовая доля i -го компонента смеси газов

$$C = \frac{m_i}{m}$$

где m_i – масса i -го компонента смеси газов

m – суммарная масса смеси газов.

1.6 Уравнение Клапейрона

$$\frac{PV}{T} = \text{const},$$

где P – давление газа, V – объём,

T – термодинамическая температура газа.

1.7 Уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{или} \quad Pv = \nu RT,$$

где m – масса газа; μ – его молярная масса,

ν – число молей газа.

R - молярная газовая постоянная ($R=8,31$ Дж/моль·К)

1.8 Закон Дальтона

$$P = \sum_{i=1}^k P_i ,$$

где P – давление смеси газов,

P_i – парциальное давление i-го газа смеси, т.е. давление этого газа, если бы он один занимал весь объём

1.9 Концентрация молекул вещества

$$n = \frac{N}{V} ,$$

где N – число всех молекул вещества; V – его объём

1.10 Плотность вещества

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ или } \rho = n \cdot m_0$$

где m – масса газа; V – его объём

m_0 – масса одной молекулы вещества,

n – концентрация молекул

1.11 Масса одной молекулы вещества

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A} ,$$

где μ – молярная масса вещества, N_A – число Авогадро

1.12 Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle$$

где p – давление газа, n – концентрация его молекул,

$\langle \epsilon_n \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа

1.13 Средняя кинетическая энергия:

теплового движения одной молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$$

поступательного движения одной молекулы

$$\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT$$

вращательного движения одной молекулы:

$$\langle \epsilon_{вр} \rangle = \frac{i-3}{2} kT$$

где i – число степеней свободы молекулы,

k – постоянная Больцмана,

T – термодинамическая температура.

1.14 Зависимость давления газа p от концентрации n его молекул и температуры T

$$p = nkT$$

1.15 Скорость молекул:

Средняя квадратичная

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \text{ или } v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}};$$

Средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{m_0}} \text{ или } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\mu}};$$

наиболее вероятная

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \text{ или } v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}};$$

где m_0 – масса одной молекулы газа

μ – его молярная масса.

Пример 1.1. Азот находится в открытом сосуде ёмкостью $V=10.0$ л под давлением $p=101$ кПа при температуре $T=208$ К. Найти:

1. Массу m азота в сосуде и его плотность ρ .
2. Концентрацию n молекул газа.
3. Число молекул ΔN , вышедших из сосуда при нагревании газа на $\Delta T=40.0$ К.
4. Среднюю квадратичную скорость $v_{\text{кв}}$ молекул газа до нагревания.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$V=10.0 \text{ л} = 10.0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p=101 \text{ кПа} = 101 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$T=208 \text{ К}$$

$$\Delta T=40.0 \text{ К.}$$

$$m=? \rho=? n=? \Delta N=? v_{\text{кв}}=?$$

1. Азот в сосуде считаем идеальным газом

Состояние идеального газа описывается уравнением Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

где $\mu=28,0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота $R=8,31$ Дж/(моль · К) – молярная газовая постоянная

7

$$(1) \Rightarrow m = \frac{PV \mu}{RT}$$

$$m = \frac{101 \cdot 10^3 \cdot 10.0 \cdot 10^{-3} \cdot 28.0 \cdot 10^{-3}}{8.31 \cdot 280} = 1.22 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

Плотность вещества

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PV \mu}{RT \cdot V} \Rightarrow \rho = \frac{P\mu}{RT}$$

$$\rho = \frac{101 \cdot 10^{-3} \cdot 28.0 \cdot 10^{-3}}{8.31 \cdot 280} = 1.22 \text{ кг / м}^3.$$

2. Концентрация молекул n вещества найдем из соотношения:

$$p = nkT \Rightarrow n = \frac{P}{kT},$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К постоянная Больцмана

$$n = \frac{101 \cdot 10^3}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 280} = 2.61 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

3. Число молекул ΔN , вышедших из сосуда

$$\Delta N = N - N_1$$

где $N = \nu N_A$ - число молекул азота в сосуде до нагревания,

$N_1 = \nu_1 N_A$ - число молекул азота в сосуде после нагревания.

$$\nu = \frac{m}{\mu} \text{ - число молей азота в сосуде до нагревания}$$

$$\nu_1 = \frac{m_1}{\mu} \text{ - число молей азота в сосуде после нагревания.}$$

Так как сосуд открытый, то процесс нагревания газа в сосуде происходит при постоянном давлении.

$$PV = \frac{m_1}{\mu} RT_1$$

где $T_1 = T + \Delta T$ – температура газа в сосуде после нагревания

m_1 – масса газа, оставшегося в сосуде.

$$\Rightarrow m_1 = \frac{PV \mu}{R(T + \Delta T)}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Delta N &= N - N_1 = \nu N_A - \nu_1 N_A = (\nu - \nu_1) \cdot N_A = \left(\frac{m}{\mu} - \frac{m_1}{\mu} \right) \cdot N = \\
 &= \left(\frac{PV\mu}{RT\mu} - \frac{PV\mu}{R(T+\Delta T)\mu} \right) \cdot N = \frac{PV}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{(T+\Delta T)} \right) \cdot N = \\
 &= \frac{PV}{R} \left(\frac{T+\Delta T - T}{T(T+\Delta T)} \right) \cdot N \Rightarrow \Delta N = \frac{PV \cdot \Delta T}{RT(T+\Delta T)} \cdot N \\
 \Delta N &= \frac{101 \cdot 10^3 \cdot 10.0 \cdot 10^{-3} \cdot 40.4}{8.31 \cdot 280 \cdot (280 + 40.0)} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 3.27 \cdot 10^{22}
 \end{aligned}$$

4. Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \cdot 280}{28.0 \cdot 10^{-3}}} = 499 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Пример 1.2. Смесь гелия и водорода находится под давлением $p=250\text{кПа}$ в сосуде ёмкостью $V=12.0\text{ л}$. Масса смеси газов $m=2,50\text{ г}$. Массовая доля гелия в смеси $c=0,640$. Найти:

1. Число молей ν смеси.
2. Молярную массу μ смеси
3. Температуру T смеси,
4. Парциальное давление p_1 и p_2 компонентов смеси.
5. Концентрацию n_1 и n_2 молекул каждого газа

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$p=250\text{кПа} = 250 \cdot 10^3 \text{Па}$$

$$V=12.0\text{ л} = 12.0 \cdot 10^{-3} \text{м}^3$$

$$m=2,50\text{ г} = 2.50 \cdot 10^{-3} \text{кг}$$

$$c=0,640$$

1. Число молей смеси

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \quad (1)$$

где ν_1 и ν_2 - число молей гелия и водорода

соответственно

$$\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}; \nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2}$$

$\nu - ? \quad \mu - ? \quad T - ? \quad p_1 - ? \quad p_2 - ?$

$n_1 - ? \quad n_2 - ?$

где m_1 и m_2 – массы гелия и водорода соответственно
 μ_1 и μ_2 - их молярные массы.

Массовая доля гелия

$$c = \frac{m_1}{m} \Rightarrow m_1 = cm$$

Масса водорода в смеси

$$m_2 = m - m_1 = m - cm = (1 - c)m$$

Тогда из выражения (1) следует, что

$$v = v_1 + v_2 = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{cm}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = m \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \right)$$

$$v = 2.50 \cdot 10^{-3} \left(\frac{0.640}{4.00 \cdot 10^{-3}} + \frac{1-0.640}{2.00 \cdot 10^{-3}} \right)$$

2. Молярную массу найдём из формулы

$$v = \frac{m}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{m}{v} = \frac{m}{m \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \right)} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}}$$

$$\mu = \frac{1}{\frac{0.640}{4.00 \cdot 10^{-3}} + \frac{1-0.640}{2.00 \cdot 10^{-3}}} = 2.94 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

3. Из уравнения Менделеева - Клапейрона

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow T = \frac{PV\mu}{mR} =$$

$$= \frac{PV}{mR} \cdot \frac{1}{\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}} \Rightarrow T = \frac{PV}{mR \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \right)}$$

$$T = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 12.0 \cdot 10^3}{2.50 \cdot 10^{-3} \cdot 8.31 \left(\frac{0.640}{4.00 \cdot 10^{-3}} + \frac{1-0.640}{2.00 \cdot 10^{-3}} \right)} = 425\text{K}$$

4. Уравнение Менделеева – Клапейрона для состояния первого газа, если бы он один занимал весь объем, имеет вид:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT \Rightarrow P_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} = \frac{cmR}{\mu_1 V} \cdot \frac{PV}{mR \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \right)} =$$

$$= \frac{cP}{\mu_1 \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2} \right)} \Rightarrow P_1 = \frac{P}{1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2}}$$

$$P_1 = \frac{250 \cdot 10^3}{1 + \frac{(1-0.640) \cdot 4.00 \cdot 10^{-3}}{0.640 \cdot 2.00 \cdot 10^{-3}}} = 118 \text{ кПа}$$

Из закона Дальтона

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow P_2 = P - P_1 = P - \frac{P}{1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2}} =$$

$$= P \left(\frac{1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2} - 1}{1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2}} \right) = P \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2 \left(1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2} \right)} =$$

$$= \frac{P(1-c)\mu_1}{c\mu_2 + (1-c)\mu_1} = \frac{P}{\frac{c\mu_2}{(1-c)\mu_1} + 1} \Rightarrow P_2 = \frac{P}{\frac{c\mu_2}{(1-c)\mu_1} + 1}$$

$$P_2 = \frac{250 \cdot 10^3}{1 + \frac{0.640 \cdot 2.00 \cdot 10^{-3}}{(1-0.640) \cdot 4.00 \cdot 10^{-3}}} = 132 \text{ кПа}$$

$$P_1 = n_1 kT \Rightarrow n_1 = \frac{P_1}{kT} = \frac{P}{k \cdot \left(1 + \frac{(1-c)\mu_1}{c\mu_2}\right) \cdot \frac{PV}{mR \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}\right)}} =$$

$$= \frac{mR \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}\right)}{kV \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}\right) \cdot \frac{\mu_1}{c}} \Rightarrow n_1 = \frac{cmR}{\mu_1 kV}$$

$$n_1 = \frac{0.640 \cdot 2.50 \cdot 10^{-3} \cdot 8.31}{4.00 \cdot 10^{-3} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 12.0 \cdot 10^{-3}} = 2.01 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$P_2 = n_2 kT \Rightarrow n_2 = \frac{P_2}{kT} =$$

$$\frac{PmR \left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}\right)}{k \left(\frac{c\mu_2}{(1-c)\mu_1} + 1\right) \cdot PV} = \frac{mR}{kV} \cdot \frac{\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}}{\left(\frac{c}{\mu_1} + \frac{(1-c)}{\mu_2}\right) \cdot \frac{\mu_2}{(1-c)}} \Rightarrow n_2 = \frac{(1-c)mR}{\mu_2 kV}$$

$$n_2 = \frac{(1-0.640) \cdot 2.50 \cdot 10^{-3} \cdot 8.31}{2.00 \cdot 10^{-3} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 12.0 \cdot 10^{-3}} = 2.26 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

2.1. Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v+dv$,

$$dN = Nf(v)dv$$

где N – общее число молекул,

dv – величина интервала скоростей,

$f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям которая показывает долю молекул скорости которых заключены в единичном интервале скоростей.

2.2. Функция распределения молекул по скоростям (функция распределения Максвелла)

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2\pi kT}} \cdot v^2$$

где m_0 - масса одной молекулы, v - её скорость,

k - постоянная Больцмана

T - термодинамическая температура,

е основание натуральных логарифмов.

Пример 2.1. Криптон массой $m=200\text{г}$ находится в равновесном состоянии

1. Начертить (приблизительно) график функции распределения $f(v)$ молекул по скоростям
2. Указать (приблизительно) на графике (штриховкой) долю $\Delta N/N$ молекул, скорости которых отличаются от средней арифметической скорости не более, чем на $\eta=1,00\%$
3. Найти долю $\Delta N/N$ этих молекул, а также их число ΔN .

РЕШЕНИЕ

Дано:

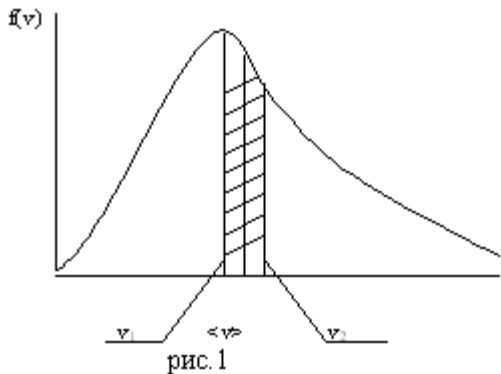
кул по

$m=200\text{г}=0,200\text{кг}$

$\eta=1,00\%=0,10$

$\mu=83,8 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$

1. График функции распределения $f(v)$ молекул по скоростям представлен на рис.1



$$\frac{\Delta N}{N} - ?$$

$$\Delta N - ?$$

Найдём границы интервала, внутри которого заключены скорости искомого числа молекул

$$\Delta N \quad v_1 = \langle v \rangle - \eta \langle v \rangle = (1 - \eta) \langle v \rangle$$

$$v_2 = \langle v \rangle + \eta \langle v \rangle = (1 + \eta) \langle v \rangle$$

На графике $f(v)$ для молекул $\Delta N/N$, скорости которых лежат

В интервале скоростей от $v_1=(1-\eta)\langle v \rangle$ до $v_2=(1+\eta)\langle v \rangle$, численно равна заштрихованной площади.

2. Число молекул, скорости которых заключены в пределах от v до $v+dv$,

$$dN=N \cdot f(v)dv$$

где N – число всех молекул,

$f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям .

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2$$

где m_0 – масса одной молекулы , k – постоянная Больцмана

T – абсолютная температура газа

Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_1 до v_2

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_{v_1}^{v_2} N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv = \\ &= 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv \end{aligned}$$

Доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_1 до v_2

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv$$

Так как интервал скоростей от v_1 до v_2 очень мал, то скорость молекул в этом интервале изменяется незначительно, поэтому её можно считать постоянной и равной средней арифметической скорости и поэтому можно вынести за знак интеграла, т.е.

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 \langle v \rangle^2 / 2kT} \cdot \langle v \rangle^2 \int_{v_1}^{v_2} dv$$

$$\int dv = v_2 - v_1 = (1+\eta)\langle v \rangle - (1-\eta)\langle v \rangle = (1+\eta - 1 + \eta)\langle v \rangle = 2\eta\langle v \rangle$$

$$\text{Тогда } \frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 \langle v \rangle^2 / 2kT} \cdot 2\eta\langle v \rangle^3$$

Учитывая, что средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 kT}{\pi m_0}},$$

$$\text{имем} : \frac{\Delta N}{N} = 4 \pi \left(\frac{m_0}{2 \pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0}{2 kT} \frac{8 kT}{\pi m_0}} \cdot 2 \eta \frac{8 kT}{\pi m_0}^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = \frac{64 \eta}{\pi^2} e^{-4/\pi}; \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{64 \cdot 0,0100}{(3,14)^2} e^{-\frac{4}{3,14}} = 1,82 \cdot 10^{-2}$$

число молекул газа

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A,$$

где m – масса газа; η – его молярная масса; N_A – число Авогадро.
Тогда

$$\Delta N = N \frac{64 \eta}{\pi^2} e^{-4/\pi} = \frac{64 \eta m N_A}{\mu \pi^2} e^{-4/\pi}$$

$$\Delta N = \frac{64 \cdot 0,0100 \cdot 0,200 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{83,8 \cdot 10^{-3} \cdot (3,14)^2} \cdot e^{-\frac{4}{3,14}} = 2,61 \cdot 10^{22}$$

Пример 2.2 Углекислый газ массой $m=22,0$ г находится в равновесном состоянии.

1. Начертить (приблизительно) график функции распределения $f(v)$ молекул газа по скоростям.
2. Указать (приблизительно) на графике (штриховкой) долю $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в интервале от $v_1=0$ до скорости v_2 составляющей $\eta=1,00\%$ от средней квадратичной скорости $v_{\text{кв}}$ молекул газа.
3. Найти долю $\Delta N/N$ этих молекул, а также их число ΔN .

РЕШЕНИЕ

Дано:
 $m=22,0 \text{ г} = 22,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$
 $f(v)$
 $\eta=1,00\%=0,0100$
 $\mu=44,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$v_1=0$
 $v_2=\eta v_{\text{кв}}$

$\Delta N/N$ -? ΔN -?

1. График функции распределения молекул по скоростям представлен на рис.2

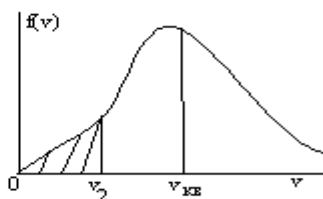


Рис.2.

2. На графике $f(v)$ доля $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от $v_1=0$ до $v_2=\eta v_{KB}$, численно равна заштрихованной площади.

4. Число молекул скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v+dv$,

$$dN = N \cdot f(v) dv$$

где N - число всех молекул,

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 - \text{функция распределения молекул по скоростям}$$

где m_0 - масса одной молекулы,

k - постоянная Больцмана

T - термодинамическая температура,

$$\text{Тогда} \quad dN = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv$$

Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_1 до v_2

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_{v_1}^{v_2} N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv = \\ &= 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv \end{aligned}$$

В заданном интервале скоростей от $v_1=0$ до $v_2=0,01v_{KB}$ скорости молекул очень малы, поэтому выражение

$$\frac{m_0 v^2}{2kT} \ll 1.$$

Из математики известно, что $e^{-X} \approx 1 - X$, так как $X \ll 1$.

$$\Delta N = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} v^2 dv \Rightarrow$$

Тогда

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^{\eta v_{KB}} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{\eta^3 v_{KB}^3}{3}$$

Учитывая что средняя квадратичная скорость

$$v_{KB} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

имеем:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \eta^3 \left(\frac{3kT}{m_0} \right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = \eta^3 \sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = (0,0100)^3 \sqrt{\frac{6}{3,14}} = 1,38 \cdot 10^{-6}$$

Число молекул, скорости которых заключены в заданном интервале скоростей,

$$\Delta N = N \eta^3 \sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

где N – число всех молекул газа

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A$$

где m – масса углекислого газа ; $\mu = 44,00 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – его молярная

масса

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} / \text{моль}$ число Авогадро

Тогда $\Delta N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A \cdot \eta^3 \sqrt{\frac{6}{\pi}}$

$$\Delta N = \frac{22,0 \cdot 10^{-3}}{44,0 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} (0,0100)^3 \sqrt{\frac{6}{3,14}} = 4,16 \cdot 10^{17}$$

Пример 2.3. Кислород и гелий находятся в равновесном состоянии при одинаковой температуре. Массы газов $m_1 = 16,0$ г, $m_2 = 4,00$ г. соответственно.

1. Начертить (приблизительно) графики функции распределения $f_1(v)$ и $f_2(v)$ молекул газов по скоростям.

2. Во сколько раз число молекул dN_1 кислорода, скорости которых заключены в интервале от v_{B1} до $v_{B1} + dv$, больше числа молекул dN_2 гелия, скорости которых заключены в интервале от v_{B2} до $v_{B2} + dv$, где v_{B1} и v_{B2} – наиболее вероятные скорости молекул кислорода и гелия соответственно? Величина интервала скоростей dv одинакова и очень мала.

3. Записать в виде интеграла выражение, определяющее число молекул число молекул ΔN_1 кислорода скорости, которых заключены в интервале от v_{B1} до v_{B2} . Указать (приблизительно) на графике (штриховкой) долю $\Delta N_1 / N_1$ этих молекул.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$m_1 = 16,0 \text{ г} = 16,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

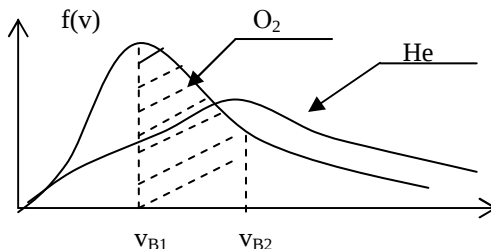
$$\mu_1 = 32,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$m_2 = 4,00 \text{ г} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$\mu_2 = 4,00 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{dN_1}{dN_2} - ?$$

1. Графики функции распределения $f_1(v)$ и $f_2(v)$ молекул газов по скоростям представлен на рис.3.



1. Число молекул, скорости которых заключены в интервале от v до $v+dv$

$$dN = N \cdot f(v) dv$$

где N - число всех молекул

$f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2$$

где m_0 - масса одной молекулы, T – термодинамическая.

Тогда

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2 dv \quad (1)$$

Число молекул кислорода, скорости которых заключены в интервале от v_{B1} до $v_{B1}+dv$

$$dN_1 = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v_{B1}^2 / 2kT} \cdot v_{B1}^2 dv$$

Учитывая, что наиболее вероятная скорость молекул газа

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

а число молекул газа

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A$$

имеем

$$dN_1 = 4\pi \frac{m}{\mu_1} \cdot N_A \left(\frac{m_{01}}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_{01}}{2\pi k} \frac{2\pi k}{m_{01}}} \cdot \frac{2kT}{m_0} dv$$

$$\Rightarrow dN_1 = \frac{4m_{01} N_A}{\mu_1 e} \left(\frac{m_{01}}{2\pi kT} \right)^{1/2} dv$$

масса одной молекулы: $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$

$$dN_1 = \frac{4m_1 N_A}{\mu_1 e} \sqrt{\frac{\mu_1}{2\pi kT N_A}} dv = \frac{4m_1 N_A dv}{e \sqrt{2\pi kT}}$$

тогда

Аналогично, число молекул гелия, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_{B2} до $v_{B2}+dv$

$$dN_2 = \frac{4m_2 N_A dv}{e \sqrt{2\pi \mu_2 RT}}$$

(Здесь учтено, что $kN_A=R$ – молярная постоянная)

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{4m_1 N_A dv \cdot e \sqrt{2\pi \mu_2 RT}}{e \sqrt{2\pi \mu_1 RT} \cdot 4m_2 N_A dv} \Rightarrow \frac{dN_1}{dN_2} = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{16,0 \cdot 10^{-3}}{4,00 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{4,00 \cdot 10^{-3}}{32,0 \cdot 10^{-3}}} = 1,41.$$

2. число молекул кислорода, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_{B1} до v_{B2} . найдём интегрированное выражение(1).

$$\Delta N_1 = 4\pi N_1 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_{B1}}^{v_{B2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2 dv =$$

$$= 4\pi \frac{m_1 N_A}{\mu_1} \left(\frac{\mu_1}{2\pi k N_A T} \right)^{3/2} \int_{v_{B1}}^{v_{B2}} e^{-\frac{\mu_1 v^2}{2k N_A T}} \cdot v^2 dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta N_1 = \frac{m_1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\mu_1}{\pi N_A}} \int_{v_{B1}}^{v_{B2}} e^{-\frac{\mu_1 v^2}{2RT}} \cdot v^2 dv$$

На графике $f(v)$ доля $\frac{\Delta N}{N}$ молекул кислорода, скорости которых заключены в интервале скоростей от v_{B1} до v_{B2} , численно равна заштрихованной площади.

Пример 2.4. Кислород находится в равновесном состоянии. Средняя квадратичная скорость v_{KB} молекул газа в этом состоянии равна 480 м/с.

1. Начертить (приблизительно) график функции распределения $f(v)$ молекул газа по скоростям.
2. Указать (приблизительно) на графике (штриховкой) долю $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости v_B до средней квадратичной скорости v_{KB} . Записать в виде интеграла выражение определяющие число ΔN этих молекул
3. Найти скорости молекул v_1 и v_2 которым соответствуют одинаковые значения распределения Максвелла, если известно что $v_2 = n \cdot v_1$ где $n = 2,00$.
4. Показать (приблизительно) на графике значения всех указанных выше скоростей

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$v_{KB} = 480 \text{ м/с.}$$

кул

$$\mu_1 = 32,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

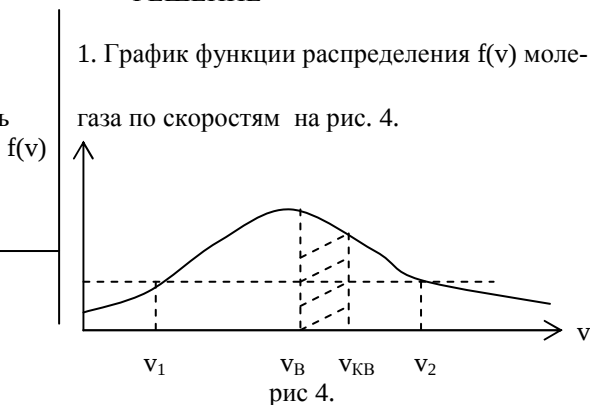
$$v_2 = n \cdot v_1$$

$$n = 2,00.$$

$$f_1(v) = f_2(v)$$

$$f_1(v) = f_2(v)$$

$$v_1 - ? \quad v_2 - ?$$



2. На графике $f(v)$ доля молекул $\Delta N/N$, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости v_B до средней квадратичной скорости v_{KB} , численно равна заштрихованной площади. Число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v+dv$

$$dN = N \cdot f(v) dv,$$

где N - число молекул газа

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2$$

– функция распределения молекул по скоростям, где m_0 - масса одной молекулы, T – его абсолютная температура

Квадратичная скорость молекул газа

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \Rightarrow T = \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{3k}$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } f(v) &= 4\pi \left(\frac{m_0 \cdot 3k}{2\pi k \cdot m_0 v_{\text{кв}}^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v_{\text{кв}}^2 \cdot 3k}{2k m_0 v_{\text{кв}}^2}} \cdot v^2 = \\ &= 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2\pi v_{\text{кв}}^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{3v_{\text{кв}}^2}{2v_{\text{кв}}^2}} \cdot v^2 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } dN = N \cdot f(v) dv = \frac{3N}{v_{\text{кв}}^2} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot e^{-\frac{3v_{\text{кв}}^2}{2v_{\text{кв}}^2}} \cdot v_{\text{кв}}^2 dv$$

Число молекул, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости v_b до средней квадратичной скорости $v_{\text{кв}}$,

$$\Delta N = \frac{3N}{v_{\text{кв}}^2} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \int_{v_b}^{v_{\text{кв}}} e^{-\frac{3v^2}{2v_{\text{кв}}^2}} \cdot v_{\text{кв}}^2 dv$$

3. По условию задачи значения скорости v_1 и v_2 соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла, т.е

$$f_1(v) = f_2(v)$$

$$4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v_1^2 / 2kT} \cdot v_1^2 = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v_2^2 / 2kT} \cdot v_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 e^{-m_0 v_1^2 / 2kT} = v_2^2 e^{-m_0 v_2^2 / 2kT} \Rightarrow$$

.

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{e^{-m_0 v_2^2 / 2kT}}{e^{-m_0 v_1^2 / 2kT}} = e^{m_0 v_2^2 / 2kT - m_0 v_1^2 / 2kT} = e^{\frac{m_0 (v_2^2 - v_1^2)}{2kT}}$$

логарифмируем, учитывая, что $v_2 = nv_1$

$$\ln \left(\frac{nv_1}{v_1} \right)^2 = \frac{m_0 v_0^2 (n^2 - 1)}{2kT} \Rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{2kT \cdot \ln n^2}{m_0 (n^2 - 1)} = \frac{4kT \cdot \ln n}{m_0 (n^2 - 1)}$$

учитывая, что $T = \frac{m_0 v_{\kappa\theta}^2}{3k}$ имеем

$$v_1 = \sqrt{\frac{4km_0 v_{\kappa\theta}^2 \ln n}{m_0 (n^2 - 1) 3k}} \Rightarrow v_1 = 2v_{\kappa\theta} \sqrt{\frac{\ln n}{3((2.00)^2 - 1)}}$$

$$v_1 = 2 \cdot 480 \sqrt{\frac{\ln n}{3((2.00)^2 - 1)}} = 266 \text{ м/с}$$

$$v_2 = nv_1 = 2nv_{\kappa\theta} \sqrt{\frac{\ln n}{3((n)^2 - 1)}}$$

$$v_2 = 2 \cdot 2.00 \cdot 480 \sqrt{\frac{\ln n}{3((2.00)^2 - 1)}} = 533$$

Пример 2.5. Газ находится в равновесном состоянии.

1. Начертить (приблизительно) графики функции распределения $f_1(v)$ и $f_2(v)$ молекул газа по скоростям при температуре $T_1=300 \text{ К}$ и $T_2=600 \text{ К}$

2. Указать (приблизительно) на первом графике (штриховкой) долю $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости v_v до средней квадратичной скорости $v_{\kappa\theta}$. Записать в виде интеграла выражение определяющие число ΔN этих молекул

3. Найти молярную массу μ газа, если скорости молекул $v=760$ м/с соответствуют равные значения функции распределения Максвелла $f_1(v)$ и $f_2(v)$ при заданных температурах T_1 и T_2 . Какой это газ?
4. Указать на графике $f(v)$ упомянутые выше значения скоростей.

РЕШЕНИЕ

Дано:

 $T_1=300$ К

кул

 $T_2=600$ К T_2 $v=760$ м/с $f_1(v)=f_2(v)$

1. Графики функции распределения $f_1(v)$ и $f_2(v)$ молекул газов по скоростям при заданных температурах T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$) представлен на рис 5

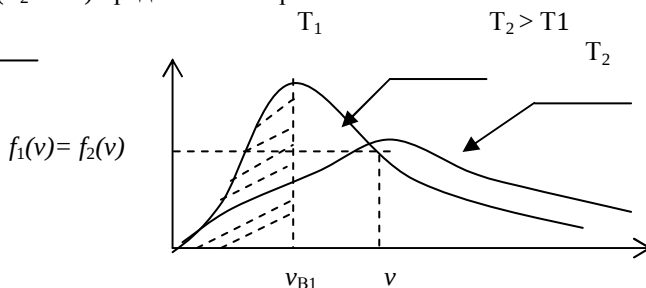
 μ - ?

Рис.5.

2. На графике $f_1(v)$ доля $\Delta N_1/N_1$ молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной скорости v_{B1} при температуре T_1 , численно равна заштрихованной площади.

Число молекул скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v+dv$

$$dN = N \cdot f(v)dv,$$

где N - число всех молекул $f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / 2kT} \cdot v^2$$

где m_0 - масса одной молекулы, $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$

где μ - молярная масса вещества, N_A – число Авогадро

Тогда $f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi k T N_A} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2 k N_A T} \cdot v^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi TR} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2 RT} \cdot v^2$$

Здесь учтено, что $kN_A = R$ – молярная газовая постоянная.

Тогда $dN = N f(v) dv = 4\pi N \left(\frac{\mu}{2\pi TR} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2 RT} \cdot v^2 dv$

Число молекул, скорости которых при температуре T_1 меньше наиболее вероятной скорости v_{B1} ,

$$\Delta N_1 = 4\pi N \left(\frac{\mu}{2\pi TR} \right)^{3/2} \int_0^{v_{B1}} e^{-\mu v^2 / 2 RT} \cdot v^2 dv$$

3, По условию задачи скорости v соответствуют равные значения функции распределения молекул по скоростям при температурах T_1 и T_2 т.е.

$$f_1(v) = f_2(v)$$

Из выражения (1) следует, что

$$f_1(v) = f_2(v)$$

$$4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi R T_1} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2 R T_1} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi R T_2} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2 / 2 R T_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1^{3/2}} e^{-\mu v^2 / 2 R T_1} = \frac{1}{T_2^{3/2}} e^{-\mu v^2 / 2 R T_2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} = \frac{e^{-\mu v^2 / 2 R T_2}}{e^{-\mu v^2 / 2 R T_1}} = e^{-\frac{\mu v^2}{2R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} = e^{\mu v^2 (T_2 - T_1) / 2 R T_1 T_2}$$

логарифмируем

$$\frac{3}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu v^2 (T_2 - T_1)}{2 R T_1 T_2} \Rightarrow \mu = \frac{3 R R T_1 T_2 \ln \frac{T_2}{T_1}}{v^2 (T_2 - T_1)}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3 \cdot 8.31 \cdot 300 \cdot 600 \ln \frac{600}{300}}{(600 - 300) \cdot (760)^2} = 18.0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

это водяной пар H_2O , молярная масса которого $\mu = 18.0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

3.1. Распределение частиц (молекул газа) в потенциале поле

$$n = n_0 e^{\frac{-U}{kT}},$$

где n – концентрация молекул газа, потенциальная энергия которых равна U .

n_0 – концентрация молекул в тех точках поля, в которых их потенциальная энергия U принимается равной нулю, т.е. $U=0$.

3.2. Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{\frac{-m_0 g h}{kT}} \quad \text{или} \quad p = p_0 e^{\frac{-\mu g h}{RT}}$$

где p – давление газа на любой высоте h от нулевого уровня,

p_0 – давление газа на высоте $h=0$

m_0 – масса одной молекулы газа,

μ – его молярная масса.

Пример 3. 1. Углекислый газ находится в бесконечно высоком цилиндре в поле тяжести Земли, которое можно считать однородным полем. На некоторой высоте h потенциальная энергия U одной молекулы газа составляет $\eta=50,0\%$ средней кинетической энергии ее поступательного движения. Концентрация молекул у дна сосуда $n_0=2,80 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Температура газа постоянна и равна $T=290 \text{ К}$. Ускорение силы тяжести $g=9,80 \text{ м/с}^2$. Площадь основания цилиндра $S=1,00 \text{ м}^2$

1. Начертить (приблизительно) график $n(h)$ распределения молекул газа по высоте.
2. Найти плотность газа на высоте h .
3. Определить число N молекул газа в сосуде. Показать на графике (штриховкой) число этих молекул.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$M=44,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
 потенциальном поле
 $\eta=50,0\%=0,500$

$U=\eta \langle E \rangle$

$n_0=2,80 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$
 альная энергия

1. Распределение молекул в однородном по-

имеет вид

$$n = n_0 e^{\frac{-U}{kT}}, \quad (1)$$

где n – концентрация молекул газа, потенци-

$$T=290 \text{ К.}$$

$$g=9,80 \text{ м/с}^2$$

$$S=1,00 \text{ м}^2$$

ная энергия которых равна U .
 n_0 – концентрация молекул в тех точках поля, в которых их потенциальная энергия U принимается равной нулю, т.е. $U=0$.
 Потенциальная энергия молекулы в поле тя- жести Земли:

ρ -?

$$U = m_0 g h$$

N -?

Где m_0 – масса одной молекулы газа
 h – высота относительно нулевого уровня.

Тогда из выражения (1) следует, что

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$$

Отсюда видно, что концентрация молекул газа n зависит от высоты h по экспоненциальному закону

График $n(h)$ распределения молекул газа по высоте в поле си- лы тяжести Земли представлен на рис. 6.

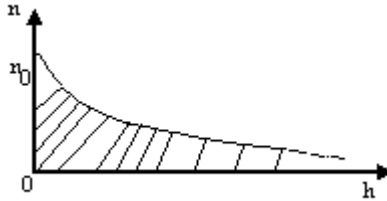


рис.6.

2. Плотность вещества

$$\rho = m_0 n$$

n – концентрация молекул газа т.е. число молекул, содержащихся в единице объёма,

$$m_0 = \frac{M}{N_A} \text{ - масса одной молекулы вещества.}$$

Тогда

$$\rho = \frac{Mn}{N_A} \quad (3)$$

Потенциальная энергия одной молекулы углекислого газа по условию задачи

$$U = \eta \langle E \rangle$$

Где $\langle E \rangle = \frac{3}{2} \eta kT$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа, т.е.

$$U = \frac{3}{2} \eta kT$$

Тогда из выражения (1) следует, что

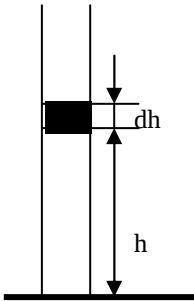
$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} = n_0 e^{-\frac{3\eta kT}{2kT}} \Rightarrow n = n_0 e^{-\frac{3\eta}{2}}$$

Из выражения (3) следует, что

$$\rho = \frac{M}{N_A} n_0 e^{-\frac{3\eta}{2}}$$

$$\rho = \frac{44 \cdot 10^{-3} \cdot 2.80 \cdot 10^{23}}{6.02 \cdot 10^{23}} \cdot e^{-\frac{3 \cdot 0.500}{2}} = 9.67 \cdot 10^{-3} \text{ кг / м}^3$$

3.



Выделим в цилиндре на высоте h малый объем $dV = S \cdot dh$ (см. рис.7.)
где S – площадь поперечного сечения цилиндра ,
 dh – высота выделенной его части
Этот элемент объем содержит число молекул

$$dN = n dV = n S \cdot dh ,$$

где n – концентрация молекул газа на высоте h

Рис.7.

Учитывая выражение (2), имеем

$$dN = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \cdot S dh = n_0 S e^{-\frac{Mgh}{N_A kT}} \cdot dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dN = n_0 S e^{-\frac{Mgh}{RT}} \cdot dh$$

Здесь учтено, что $k \cdot N_A = R$ - молярная газовая постоянная.

Интегрируем .

$$dN = n_0 S \int_0^{\infty} e^{-\frac{Mgh}{RT}} \cdot dh$$

Обозначим $\frac{Mgh}{RT} = x \Rightarrow h = \frac{RTx}{Mg}$

Тогда

$$h = \frac{RT}{Mg} dx \Rightarrow$$

$$N = n_0 S \int_0^{\infty} e^{-\frac{RT}{Mg} x} \cdot dx = \frac{n_0 SRT}{Mg} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot dx = -\frac{n_0 SRT}{Mg} e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{n_0 SRT}{Mg} (0 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{n_0 SRT}{Mg}$$

$$N = \frac{2,80 \cdot 10^{23} \cdot 1,00 \cdot 8,31 \cdot 290}{440 \cdot 10^3 \cdot 9,8} = 1,56 \cdot 10^{27}$$

На графике $n(h)$ число всех молекул численно, равна заштрихованной площади, если площадь поперечного сечения цилиндра $S = 1,00 \text{ м}^3$

Пример 3.2. Кислород газ находится в бесконечно высоком цилиндре в поле тяжести Земли, при постоянной температуре $T_1 = 280 \text{ К}$. Ускорение силы тяжести не зависит от высоты цилиндра и равно $9,81 \text{ м/с}^2$. При нагревании газа до температуры $T_2 = 560 \text{ К}$ концентрация его молекул у дна сосуда уменьшилась в $\eta = 2,00$ раза

1. Начертить (приблизительно) графики $n_1(h)$ и $n_2(h)$ распределения молекул газа по высоте при температурах в T_1 и T_2 .
2. На какой высоте h концентрация молекул газа не изменилась?
3. Во сколько раз N_1/N_2 уменьшилась число молекул, находящихся ниже этой высоты? Показать (приблизительно) на графике (штриховкой) это число молекул N_2 пре температуре T_2 , если площадь поперечного сечения сосуда $S = 1,00 \text{ м}^2$

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$T_1 = 280 \text{ К}$$

$$g = 9,80$$

$$T_2 = 560 \text{ К}$$

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \eta = 2,00$$

$h - ?$

$$\frac{N_1}{N_2} - ?$$

1. Распределение молекул в однородном потенциальном поле имеет вид

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

где n – концентрация молекул газа, потенциальная энергия которых равна U , n_0 – концентрация молекул в тех точках поля в которых их потенциальная энергия U принимается равной нулю, т.е. $U = 0$

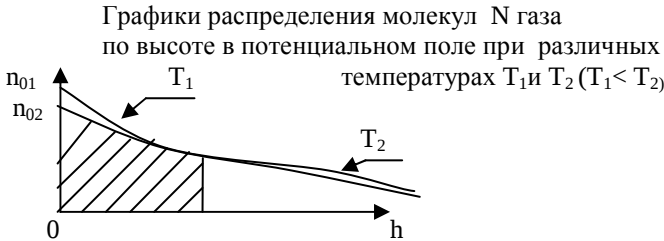
Потенциальная энергия молекулы в поле тяжести Земли

$$U = m_0 g h$$

где m_0 – масса одной молекулы газа, h – высота относительно нулевого уровня. Тогда из выражения (1) следует, что

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$$

Отсюда видно, что концентрация молекул газа n зависит от высоты h по экспоненциальному закону



2. Из выражения (2) следует, что

$$n_1 = n_{01} e^{-\frac{m_0 gh}{kT_1}}$$

$$n_2 = n_{02} e^{-\frac{m_0 gh}{kT_2}}$$

По условию задачи на некоторой высоте h

$$n_1 = n_2$$

Тогда

$$n_{01} e^{-\frac{m_0 gh}{kT_1}} = n_{02} e^{-\frac{m_0 gh}{kT_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{e^{-\frac{m_0 gh}{kT_1}}}{e^{-\frac{m_0 gh}{kT_2}}} = e^{-\frac{m_0 gh}{kT_1} + \frac{m_0 gh}{kT_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \eta = e^{\frac{m_0 gh}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)} = e^{\frac{m_0 gh (T_2 - T_1)}{kT_1 T_2}}$$

Логарифмируем

$$\ln \eta = \frac{m_0 gh (T_2 - T_1)}{kT_1 T_2} \Rightarrow h = \frac{kT_1 T_2 \ln \eta}{m_0 g (T_2 - T_1)}$$

масса одной молекулы газа $m_0 = \frac{M}{N_A}$

где M – молярная масса вещества, N_A – число Авогадро

$$\text{тогда } h = \frac{kT_1 T_2 \ln \eta}{Mg(T_2 - T_1)} \cdot N_A \Rightarrow h = \frac{RT_1 T_2 \ln \eta}{Mg(T_2 - T_1)}$$

(здесь учтено, что $k \cdot N_A = R$ – молярная газовая постоянная)

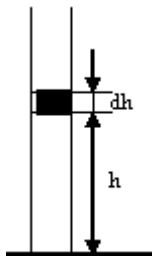


Рис.9

$$h = \frac{8,31 \cdot 280 \cdot 560 \cdot \ln 2}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot (560 - 280)}$$

3. Выделим в цилиндре на высоте h малый объем $dV = S \cdot dh$ (см. рис.9.)

где S – площадь поперечного сечения цилиндра, dh – высота выделенной его части. Этот элемент объема содержит число молекул

$$dN = n dV = n S \cdot dh,$$

где n – концентрация молекул газа на высоте h . Из выраже-

ния (2), имеем $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{k T}} = n_0 e^{-\frac{M g h}{R T}}$ Тогда при температуре T_1

$$dN_1 = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{k T_1}} \cdot S dh \quad \text{Интегрируем:}$$

$$\begin{aligned} dN_1 &= n_{01} S \int_0^h e^{-\frac{M g h}{R T_1}} \cdot dh = n_{01} S \int_0^h e^{-\frac{M g h}{R T_1}} \cdot \left(-\frac{M g h}{R T_1} \right) \left(-\frac{R T_1}{M g} \right) = \\ &= \frac{n_{01} S R T_1}{M g} e^{-\frac{M g h}{R T_1}} \Big|_0^h \Rightarrow N_1 = \frac{n_{01} S R T_1}{M g} \left(1 - e^{-\frac{M g h}{R T_1}} \right) \end{aligned}$$

Аналогично

$$N_2 = \frac{n_{02} S R T_2}{M g} \left(1 - e^{-\frac{M g h}{R T_2}} \right)$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_{01} S R T_1 \cdot M g}{M g \cdot n_{02} S R T_2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{M g h}{R T_1}}}{1 - e^{-\frac{M g h}{R T_2}}}$$

$$\text{Учтём, что} \quad h = \frac{R T_1 T_2 \ln \eta}{M g (T_2 - T_1)}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_{01}}{n_{02}} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{M g R T_1 T_2 \ln \eta}{R T_1 \cdot M g (T_2 - T_1)}}}{1 - e^{-\frac{M g R T_1 T_2 \ln \eta}{R T_2 \cdot M g (T_2 - T_1)}}} = \eta \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_2 \ln \eta}{(T_2 - T_1)}}}{1 - e^{-\frac{T_1 \ln \eta}{(T_2 - T_1)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \eta \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{1 - \eta^{\frac{T_2}{(T_2 - T_1)}}}{1 - \eta^{\frac{T_1}{(T_2 - T_1)}}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = 2,00 \cdot \frac{280}{560} \cdot \frac{1 - 2,00^{\frac{560 - 280}{560}}}{1 - 2,00^{\frac{280}{560 - 280}}} = 1,50$$

Число молекул N_2 находящихся ниже высоты h при температуре T_2 численно равно заштрихованной площади, если площадь поперечного сечения цилиндра $S=1,00 \text{ м}^2$

Пример 3.3. Смесь азота и гелия находится в бесконечно высоком цилиндре в поле тяжести Земли, которое можно считать однородным. Ускорение силы тяжести $g=9,81 \text{ м/с}^2$. Концентрация молекул этих газов у дна сосуда $n_{01}=4,80 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ и $n_{02}=1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ соответственно. На высоте $h = 6,40 \text{ км}$ потенциальная энергия U_1 одной молекулы азота составляет $\eta=75,0\%$ средней кинетической энергии $\langle E_1 \rangle$ ее теплового движения. Температура газа постоянна по всей высоте цилиндра.

1. Начертить (приблизительно) графики $n_1(h)$ и $n_2(h)$ распределения молекул азота и гелия по высоте
2. Найти концентрацию молекул n_1 и n_2 этих газов на данной высоте.
3. Определить число молекул N_1 азота, потенциальная энергия которой больше U_1 . Показать (приблизительно) на графике $n_1(h)$ (штриховкой) число этих молекул. Площадь поперечного сечения цилиндра $S=1,00 \text{ м}^2$

РЕШЕНИЕ

Дано:

$$\mu_1=28,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг /моль}$$

$$\mu_2=1,02 \cdot 10^{-3} \text{ кг /моль}$$

$$g=9,81 \text{ м/с}^2$$

$$n_{01}=4,80 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$h = 6,40 \text{ км} = 6,40 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$h=0$$

$$\eta=75,0\%=0,750$$

$$U=\eta \langle E \rangle$$

$$n_1 - ? \quad n_2 - ?$$

$$N_1 - ?$$

1. Распределение молекул в однородном потенциальном поле имеет вид

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}, (1)$$

где $U = m_0 gh$ Потенциальная энергия моле -

кулы, на высоте h $n_{02}=1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. n – концен-
трация молекул газа на этой высоте

n_0 – концентрация молекул на высоте

Масса одной молекулы

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}$$

где μ – молярная масса вещества, N_A –
число Авогадро

$$\text{Тогда } U = \frac{\mu}{N_A} gh$$

$$\text{Из выражения (1) следует, что } n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{N_A kT}} \Rightarrow n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

Из этого выражения видно, что концентрация молекул газа n в поле тяжести Земли зависит от высоты h по экспоненциальному закону (рис.10.).

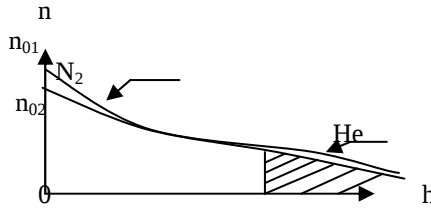


Рис.10. Графики $n_1(h)$ и $n_2(h)$ распределения молекул азота и гелия по высоте в поле тяжести Земли .

2. По условию задачи потенциальная энергия одной молекулы азота

$$U = \eta \langle E \rangle$$

Где $\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$ - средняя кинетическая энергия теплового движения

Одной молекулы газа, i – число степеней свободы молекулы ($i=5$, так как молекула азота состоит из двух атомов).

Тогда

$$U_1 = \eta \cdot \frac{i}{2} kT \quad (3)$$

Следовательно, выражение (1) для молекулы азота имеет вид :

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{01} e^{-\frac{U}{kT}} = n_{01} e^{-\frac{\eta i kT}{2 kT}} = n_{01} e^{-\frac{\eta i}{2}} \\ n_1 &= 4,80 \cdot 10^{25} e^{-0,750 \cdot 5/2} = 7,36 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3} \end{aligned}$$

Для молекул гелия выражение (2) имеет вид : $n_2 = n_{02} e^{-\frac{\mu_2 gh}{RT}}$

Из выражения(3) потенциальная энергия одной молекулы азота

$$U_1 = m_{01} gh = \frac{\mu_1}{N_A} \cdot gh = \eta \langle E_1 \rangle = \eta \cdot \frac{i}{2} kT \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_1 gh}{N_A} = \eta \frac{i}{2} kT \Rightarrow T = \frac{2\mu_1 gh}{ikN_A} = \frac{2\mu_1 gh}{iR}$$

Тогда

$$\begin{aligned} n_2 &= n_{02} e^{-\frac{\mu_2 gh}{RT}} = n_{02} e^{-\mu_2 gh \cdot \eta i R / 2\mu_1 gh \cdot R} \Rightarrow n_2 = n_{02} e^{-\mu_2 \eta i / 2\mu_1} \\ n_2 &= 1,02 \cdot 10^{25} e^{-4,00 \cdot 10^{-3} \cdot 0,750 \cdot 5 / 2 \cdot 28,0 \cdot 10^{-3}} = 9,18 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3} \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ

№	РАЗДЕЛ	стр
	Введение	3
1	ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ	4
2	РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА	11
3	РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	24