Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет
имени Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ

Часть 1

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Новомосковск
2018

УДК 531+536
ББК 22.3
Л 125

Рецензент:
доктор технических наук, профессор Сафонов Б.П.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева)

Составители: Подольский В.А., Гукасов А.С., Логачева В.М., Резвов Ю.Г., Сивкова О.Д.
Л 125 **Лабораторный практикум по физике. Часть 1. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА** / ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Новомосковск, 2018.- 88с.

Лабораторный практикум написан в соответствии с лекционным курсом и тематикой лабораторных работ дисциплины «Физика» НИ РХТУ и содержит описание лабораторных работ, главным образом связанных с динамикой поступательного и вращательного движения, а также некоторых разделов сопутствующих данной тематике. Кроме того в практикуме приведено описание лабораторных работ по молекулярной физике идеального газа. Данное издание предназначено для самостоятельной подготовки студентов к выполнению лабораторного практикума по механике и молекулярной физике.

Ил 44. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531+536
ББК 22.3

Лабораторная работа 1-1
«Определение геометрических размеров тел посредством штангенциркуля и микрометра»

Цель работы: научиться пользоваться штангенциркулем и микрометром и обрабатывать результаты прямых и косвенных измерений.

Теоретическое введение

При выполнении лабораторных работ по физике измеряются различные физические величины (масса, время и т.п.), характеризующие изучаемое явление или свойство тела. **Измерением** называется операция, устанавливающая во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответствующей величины, принятой за единицу. Измерения бывают прямые и косвенные. При **прямых измерениях** численное значение физической величины определяется при помощи соответствующего прибора непосредственно (например, измерение времени - секундомером, массы тела на весах и т.п.). При **косвенных измерениях** измеряют не саму искомую величину, а другие величины, связанные с искомой определенной математической зависимостью, а затем искомую величину вычисляют по формуле (например, для определения плотности ρ тела можно измерить массу m тела на весах, его объем V с помощью мензурки, а плотность вычислить по формуле $\rho = m/V$).

Измерения не могут быть сделаны абсолютно точно. Всякое измерение дает лишь приближенный результат, содержащий некоторую погрешность. **Погрешностью** измерения называется разность между измеренным значением a и истинным значением x искомой величины:

$$\Delta a = a - x \tag{1}$$

Наиболее близким к истинному значению x искомой величины является ее среднее значение $a_{ср}$. Для его нахождения измерения величины a проводят несколько раз и вычисляют среднее значение $a_{ср.}$ Таким образом, задачей измерения является не только определение самой величины, но и оценка допущенной погрешности.

Различают три типа погрешностей: грубые погрешности или промахи, систематические и случайные. **Грубые погрешности** или **промахи** возникают при неправильном отсчете по прибору, неправильной записи отсчета (например, вместо «3» написано «8») и тому подобное. В большинстве случаев промахи хорошо заметны, т.к. соответствующие им отсчеты резко отличаются от других. При обнаружении грубой погрешности соответствующий результат измерения следует отбросить, а само измерение повторить. Для устранения промахов необходимо работать четко и внимательно, аккуратно записывая результаты измерений. **Систематические**

погрешности при многократных измерениях остаются постоянными по величине или меняются по определенному закону (например, взвешивание неверными гирями, измерение времени по спешащим и отстающим часам и т.п.). При обнаружении такой погрешности нужно ввести поправки в результаты измерений или повторить измерения точными приборами. К систематическим относят также **приборную погрешность**, вызванную ограниченными возможностями измерительного прибора. Во многих случаях приборная погрешность равна цене деления прибора (например, при измерении длины тела линейкой приборная погрешность Δa=1 мм). **Случайные погрешности** возникают из-за многих причин, которые нельзя учесть и устранить (несовершенство измеряемой детали, несовершенство органов чувств, непостоянство условий измерений и т.п.). В каждом измерении эти причины действуют по-разному, поэтому случайные погрешности при многократных измерениях одной и той же физической величины получаются различным как по величине, так и по знаку. Устранить случайные погрешности невозможно. Их можно лишь уменьшить, применяя более совершенную аппаратуру, более точные методы измерений и улучшая условия измерений. Для определения величины случайной погрешности измерения искомой величины проводят несколько раз, а затем обрабатывают результаты измерений с использованием теории погрешностей. При выполнении лабораторных работ по физике вы будете находить среднеарифметическую погрешность в следующем порядке.

Порядок обработки результатов измерений

1. Найти среднее значение измеряемой величины по формуле

$$a_{cp} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n};$$ где a – данная физическая величина (например, ускорение, масса, длина и др.), a_1, a_2, …, a_n - измеренные значения данной величины, $a_{ср}$ - среднее значение измеряемой величины, i – номер измерения, n - число измерений.

2. Вычислить абсолютные погрешности отдельных измерений по формуле $\Delta a_i = |a_i - a_{ср}|$:

$$\Delta a_1 = |a_1 - a_{ср}|,\ \Delta a_2 = |a_2 - a_{ср}|,\ \ldots,\ \Delta a_n = |a_n - a_{ср}|.$$

3. Рассчитать среднее значение абсолютной погрешности:

$$\Delta a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta a_i}{n},$$ где Δa_i - абсолютная погрешность i-ого измерения.

4. Определить относительную погрешность измерения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a_{ср}} \cdot 100\% \quad .$$

5. Записать окончательный результат, округленный по правилам приближенных вычислений, с указанием единиц измерения в виде:

$a = (a_{ср} \pm \Delta a)$ ед.изм.

Правила приближенных вычислений

Численные значения физических величин, полученных при измерении, являются приближенными. При математических операциях с приближенными числами следует знать следующие правила.

1. Значащими цифрами в числах являются все цифры от 1 до 9, а также и 0, если слева от него стоит хотя бы одна значащая цифра. Например, в числах 203,0; 0,00470; 0,90 содержится соответственно четыре, три и две значащие цифры.
2. При сложении и вычитании приближенных чисел результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных чисел. Например, при сложении и вычитании чисел $12,463 - 2,4234 + 1,2 \approx 11,2$ результат следует округлить до десятых долей.
3. При умножении и делении в результате оставляют такое количество значащих цифр, сколько их имеется в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Например,

$$\frac{49{,}27 \cdot 4{,}8}{0{,}731} \approx 3{,}2 \cdot 10^{2} \cdot$$

Следствие: при возведении в степень, при извлечении корня, при логарифмировании в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их было соответственно в основании степени, в подкоренном выражении, в логарифмируемом числе. Например,

$$29{,}4^{3} \approx 2{,}54 \cdot 10^{4}; \ \sqrt{12{,}4} \approx 3{,}52; \ \ell n1{,}12 \approx 0{,}113.$$

4. В промежуточном результате сохраняют на одну значащую цифру больше, чем требуют предыдущие правила. В окончательном результате эту значащую цифру отбрасывают.
5. При вычислении сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий. Например,

$$\frac{(17{,}0524 - 14{,}2) \cdot \sqrt{2{,}7}}{3{,}8 \cdot 4{,}281} \approx \frac{2{,}85 \cdot 1{,}64}{16{,}3} \approx 0{,}29.$$

Правила округления при записи окончательного результата

Окончательный результат измерений некоторой величины a представляется в виде:

$a = (a_{ср} \pm \Delta a)$ и относительной погрешности $\varepsilon = \frac{\Delta a}{a_{ср}} \cdot 100\%$.

Сначала округляют абсолютную погрешность Δa, в которой обычно оставляют только одну значащую цифру. Если же эта цифра представляет собой 1 или 2, то Δa округляется до двух значащих цифр. Затем среднее значение $a_{ср}$ искомой величины округляется до наименьшего разряда, содержащегося в округленном значении абсолютной погрешности Δа. Относительная погрешность ε обычно округляется до одной значащей цифры. Если же эта цифра представляет собой 1 или 2, то ε округляется до двух значащих цифр.

Пример 1. При обработке результатов измерений получено:

$$a_{ср} = 3784 \text{ мм}^3; \ \Delta a = 52 \text{ мм}^3;$$

$$\varepsilon = \frac{52}{3784} * 100\% = 1{,}4\%$$

В результате округления получаем: Δa=5·10 мм^3, $a_{ср}$=378·10 мм^3; ε = 1,4 %.
Окончательный результат измерений: а = (378 ± 5)·10 мм^3; ε = 1,4 %.

Пример 2. При обработке результатов измерений получено:

$$a_{ср} = 4{,}271 \text{ мм}; \ \Delta a = 0{,}162 \text{ мм};$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}162}{4{,}271} * 100\% = 3{,}79\%.$$

В результате округления получаем: Δa = 0,16 мм, $a_{ср}$ = 4,27 мм; ε = 4 %.
Окончательный результат измерений: a = (4,27 ± 0,16) мм; ε = 4%.

Методика выполнения работы

В лабораторной и производственной практике часто приходится производить определение линейных размеров тел. Для этой цели имеется большое число измерительных инструментов, обладающих высокой точностью: различные индикаторы, оптические длиномеры, микрометры с электрическим контактом и т. д. Однако, существующая практика часто довольствуется измерительным инструментом меньшей точности. Такими инструментами являются штангенциркуль и микрометр.

Штангенциркуль (рис. 1а) состоит из разделенного на целые миллиметры масштаба *M*, вдоль которого может перемещаться ножка *L*. Другая неподвижная ножка *K* инструмента, укрепленная в начале масштаба, также как и ножка *L* перпендикулярна к направлению масштаба *M* и служит упором для измеряемого тела. На обойме ножки *L* против деления масштаба сделан вырез, на скошенном краю которого нанесена шкала с делениями. Эта шкала, скрепленная с передвижной ножкой *L*, называется нониусом. Обычно число всех делений нониуса на единицу больше некоторого числа наименьших делений шкалы масштаба. Например, на рис. 1б показан нониус, десять делений которого соответствуют девяти делениям основной измерительной шкалы М инструмента. Когда ножки *L* и *K* плотно сомкнуты, нулевое деление шкалы *M* совпадает с нулевым делением нониуса. Точность нониуса, определяется следующим образом. Так как на некоторой

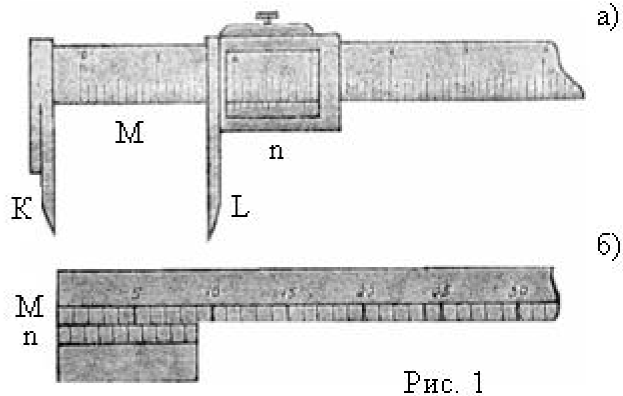

Рис. 1

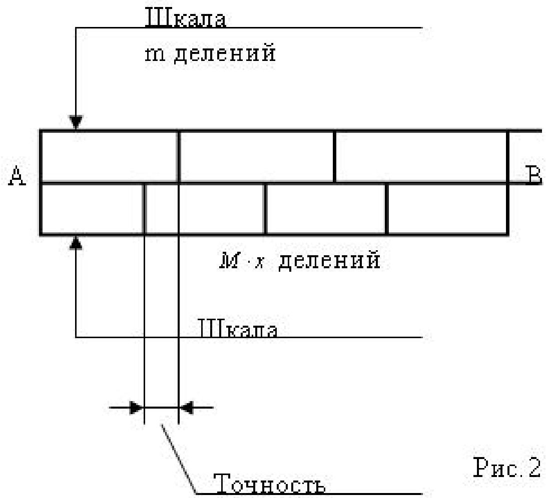

Рис.2

длине АВ (рис. 2) приходится m делений шкалы M и m + 1 делений шкалы n, то, очевидно, что АВ = m единиц масштаба и в то же время АВ = m+1 делений нониуса.

Тогда точность нониуса C это - единица масштаба минус единица нониуса:

$$C = \frac{AB}{m} - \frac{AB}{m+1} = \frac{AB + AB - AB}{m(m+1)} = \frac{1 ед.масшт.}{m+1}$$

Например (рис. 1б), на 9мм шкалы M приходится 10 делений шкалы n:

$$C = \frac{AB}{9} - \frac{AB}{10} = \frac{AB}{10 \times 9} = \frac{9мм}{10 \times 9} = \frac{1мм}{10} = 0{,}1мм.$$

Обычно точность нониуса уже проставлена на самом нониусе, а поэтому ее определять практически не приходится. Для измерения длины тела *PQ* (рис. 3) его зажимают между неподвижной и подвижной ножками штангенциркуля. Допустим, что нулевое деление нониуса остановилось между шестью и семью миллиметрами шкалы *M*. Это значит, что длина *PQ* равна 6мм плюс некоторая доля миллиметра. При этом замечаем, что одно из делений нониуса совпадает с каким-то делением шкалы *M* (на рис 3 – это седьмое деление нониуса). Так как десять делений нониуса на 1мм меньше 10 мм шкалы *M* то, следовательно, одно деление нониуса меньше одного деления шкалы на 0,1мм. Если седьмое деление нониуса совпадает с одним из делений шкалы *M*, то шестое деление нониуса находится на 0,1мм правее ближайшего слева деления шкалы *M*, пятое деление нониуса на 0,2мм, четвертое на 0,3мм и т. д. Наконец, нулевое деление нониуса, т. е. его левый край, находится на 0,7 мм правее соответствующего деления масштаба. Следовательно, длина тела *PQ* равна 6 мм + 0,7 мм = 6,7 мм.

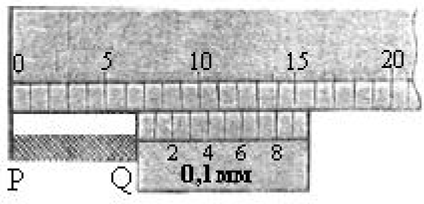

Рис. 3

Отсюда получаем следующую формулу для оценки длины измеряемого тела: $a = m + P \cdot C$, где m – число делений основной шкалы *M*, находящихся до нуля нониуса, *P* — номер деления нониуса, совпадающего с делением основной шкалы, *C* – точность нониуса.

Микрометр изображен на рис. 4. Измеряемый предмет зажимается между подвижным концом стержня *A* и упором *C*. Стержень *A* передвигается при помощи винта, скрытого внутри барабана *Д*. Наружным окончанием этого винта является головка *B*. Шаг винта равен 0,5 мм.

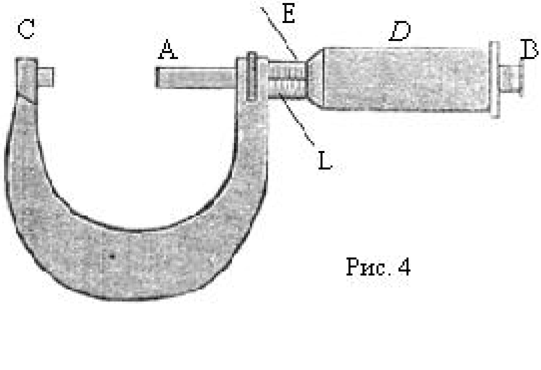

Рис. 4

В этом можно убедиться, повернув барабан на полный оборот. При этом барабан надвигается на скрепленный со скобой микрометра полый цилиндр *E*, на котором нанесена линейная шкала *L*. Эта шкала состоит из двух миллиметровых шкал, смещенных относительно друг друга на 0,5 мм: по нижней шкале отсчитываются целые миллиметры, а по верхней -- половины миллиметра. Для более точной оценки величины линейного размера измеряемого тела на микрометре имеется круговая шкала из пятидесяти делений, нанесенных па косом срезе торца барабана *D*. Так как при вращении барабана на один оборот конец стержня *A* смещается на одно полумиллиметровое деление линейной шкалы микрометра, то это означает, что точность одного деления шкалы нониуса составляет

$$C=\frac{0.5}{50}=0{,}01\text{мм}.$$

Поэтому при измерении размера тела к числу миллиметровых и полумиллиметровых делений линейной шкалы микрометра необходимо прибавлять, число сотых долей миллиметра, отсчитанных непосредственно по нониусу (барабану) относительно основной шкалы *L* микрометра. Главным источником ошибок при измерении микрометром является неравномерное нажатие винта на предмет. Для устранения этого недостатка микрометры снабжены специальным приспособлением. Действие этого приспособления основано на трении, возникающем между стержнем *A* и головкой *B*. Признаком достижения нужного контакта между измеряемым телом и стержнем *A* служит характерный звук трещотки. После этого вращение головки *B* прекращают.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение объема прямоугольного параллелепипеда (рис. 5) с помощью штангенциркуля и микрометра.

1) Измерьте длину ***a*** и ширину ***b*** параллелепипеда штангенциркулем, толщину ***c*** – микрометром. Результаты измерений запишите в таблицу.

2) Рассчитайте объем параллелепипеда для каждого измерения по формуле $V = abc$ и запишите эти результаты в таблицу, округлив по правилам приближенных вычислений.

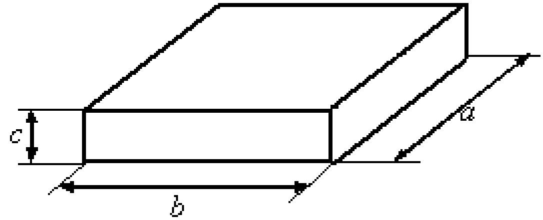

Рис. 5

3) Вычислите погрешности измерений по формуле $\Delta V_i = |V_i - V\text{ср}|$.

4) Рассчитайте среднюю абсолютную погрешность $\Delta V = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i}{n}$, .где n – число измерений.

5) Найти и округлить относительную погрешность $\varepsilon = \dfrac{\Delta V}{V_{ср}} \cdot 100\,\%$.

6) Запишите окончательный результат $V = (V_{ср} \pm \Delta V)$, округлив по правилам приближенных вычислений и указав единицы измерения.

№ п/п	*a*, мм	*b*, мм	*c*, мм	V, $мм^3$	$V_{ср}$, $мм^3$	ΔV_i, $мм^3$
1						
2						
3						
4						
5						

Окончательный результат: V**= (** $\pm$ **)** **,** ε **=** **%.**

Контрольные вопросы

1) Что такое физическое измерение? Расскажите о прямых и косвенных измерениях. 2) Чему равны абсолютная и относительная погрешности? 3) Расскажите о грубых, систематических и случайных погрешностях. 4) Каков порядок обработки результатов измерений? 5) Как записывается окончательный результат? 6) Расскажите о правилах приближенных вычислений? 7) Как округляют окончательный результат и относительную погрешность?

Лабораторная работа 1-2
«Изучение законов сохранения импульса и механической энергии при упругом соударении тел»

Цель работы: изучить и научиться применять на практике законы сохранения импульса, механической энергии при упругом соударении тел.

Теоретическое введение

Поле сил. Область пространства, в которой на находящиеся в ней тела действуют силы, называется силовым полем. В поле тяжести на тела действует сила тяжести, в электрическом поле – электрические силы.

Работа и мощность. При перемещении частицы в силовом поле, силы поля совершают работу. **Элементарная работа** *dA* силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{\ell}$ равна скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{\ell}$: $\boxed{dA = \vec{F}d\vec{\ell} = F \cdot \mathbf{d}\ell \cdot \cos\alpha = F_\ell\ \mathbf{d}\ell}$, где α – угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $d\vec{\ell}$, $F_\ell = F\cos\alpha$ - проекция силы $\vec{F}$ на направление перемещения $d\vec{\ell}$ (рис.1). Если угол α острый, то cosα>0 и работа *dA* положительная. Если угол α тупой, то cosα<0 и работа *dA*<0. **Работа** *A* силы $\vec{F}$ на конечном пути *l* от точки 1 до точки 2 представляет собой сумму элементарных работ, т.е.

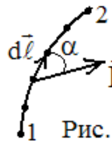

Рис.1

$$\boxed{A = \int_1^2 F \cdot d\ell \cdot \cos\alpha = \int_1^2 F_\ell \cdot d\ell}.$$

Если сила $\vec{F}$ и угол α на всем пути ℓ остается постоянной, то работа $\boxed{A = F \cdot \ell \cdot \cos\alpha}$. Единица измерения работы – джоуль: Дж=Н·м

Мощность *N* – это работа, совершаемая в единицу времени: $\boxed{N=dA/dt}$. Т.к. $dA = \vec{F}d\vec{\ell}$, а $d\vec{\ell}/dt = \vec{v}$, то $\boxed{N = \vec{F}\vec{v}}$ - это связь мощности и силы, где $\vec{v}$ - скорость частицы. Единица измерения мощности – ватт: Вт=Дж/с

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой двигалось тело, а зависит только от начального и конечного положения тела. Это означает, что работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю:

$$\boxed{\oint F_\ell d\ell = 0},$$

(кружок на знаке интеграла указывает на то что интегрирование проводится по замкнутому контуру). Поле консервативных сил называется потенциальным полем.

Работа упругой силы. При сжатии упругой пружины вдоль оси x (рис.2) в ней возникает упругая сила $F=-kx$, где k – жесткость пружины, x – сжатие (деформация) пружины (координата $x=0$ соответствует недеформированному состоянию пружины). Путь пружины от некоторой точки x_1 до точки x_2 разобьем на элементарные перемещения $d\vec{l}$. Элементарная работа dA упругой силы на перемещении $d\vec{\ell}$: $dA=F\cdot d\ell\cdot\cos\alpha$, где $\alpha=\vec{F}\,^\wedge d\vec{\ell}=0$, $\cos\alpha=1$.

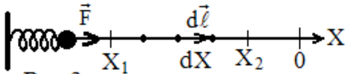

Рис.2

Т.к $d\ell\equiv dx$ (рис.2), то $dA=-kxdx$. Работу на пути от точки x_1 до точки x_2 найдем интегрированием. В результате получим:

$$\boxed{A=kx^2_1/2-kx^2_1/2}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что работа упругой силы не зависит от пути, а зависит от начального и конечного положения, т.е. упругие силы консервативные.

Работа силы тяжести. Путь тела при его движении в поле силы тяжести из положения 1 в положение 2 разобьем на элементарные участки $d\vec{\ell}$ (рис. 3). Элементарная работа dA силы тяжести на элементарном перемещении: $dA=mg\cdot d\ell\cdot\cos\alpha$, где $\alpha=m\vec{g}\,^\wedge d\vec{\ell}$. Т.к. $d\ell\cdot\cos\alpha=-dh$ (см. рис.3; ось h направлена вертикально вверх, поэтому перед dh знак «-»), то $dA=-mg\cdot dh$. Работа силы тяжести на пути от точки 1 до точки 2 найдем интегрированием. В результате получим

$$\boxed{A=mgh_1-mgh_2}. \qquad (2)$$

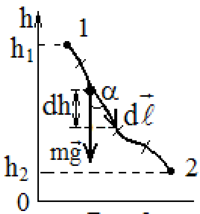

Рис.3.

Т.к. работа силы тяжести не зависит от пути, а зависит от начального и конечного положения тела, то сила тяжести является консервативной силой.

Работа силы трения. Сила трения $\vec{F}_{TP}$ на всех элементарных перемещениях $d\vec{\ell}$ (рис.4) направлена в сторону, противоположную скорости $\vec{v}$ тела. Следовательно, $\alpha=\vec{F}_{TP}\,^\wedge d\vec{\ell}=180^0$, а $\cos\alpha=-1$. Поэтому работа силы трения на любом участке пути отрицательна. Она будет отрицательной и на любой замкнутой траектории (рис 4), т.е. не равна нулю. Это означает, что силы трения неконсервативные. **Неконсервативными** называют силы, работа которых зависит от пути, по которому движется тело. Работа этих сил по замкнутой траектории отлична от нуля. Итак, в механике консервативными являются силы тяжести и упругие силы, а силы трения – неконсервативными.

Рис.4

Энергия. Работа и энергии. Работа силы при перемещении тела сопровождается изменением энергии тела. В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную.

Кинетическая энергия. Работа результирующей силы. Пусть частица под действием результирующей всех сил $\vec{F}$ перемещается из положения 1 в положения 2. (рис.1). Так как по второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, то элементарная работа $dA = \vec{F}d\vec{\ell} = m\vec{a}d\vec{\ell}$; где ускорение $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ => $dA = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{\ell} = m\frac{d\vec{\ell}}{dt}d\vec{v}$. Учитывая, что $d\vec{\ell}/dt = \vec{v}$, получим $dA = m\vec{v}d\vec{v}$. Т.к. дифференциал $d\vec{v}^2 = 2\vec{v}d\vec{v}$, а квадрат вектора скорости равен квадрату его модуля: $\vec{v}^2 = \vec{v}\vec{v}$ $=vv\cos 0=v^2$, то $\vec{v}d\vec{v} = d(v^2)/2$. Следовательно, $dA=md(v^2/2)$. Работа A_p результирующей силы $\vec{F}$ на всем пути найдем интегрированием этого выражения от точки 1 до точки 2:

$$A_p=mv^2_2/2 - mv^2_1/2. \qquad (3)$$

Из выражения (3) видно, что работа A_p равна разности значений некоторой функции скорости $\boxed{E_K=mv^2/2}$, называемой **кинетической энергией**. Таким образом, кинетическая энергия обусловлена движением и зависит от скорости. Выражение (3) представляет собой теорему о кинетической энергии: **работа результирующей силы равна приращению (изменению) кинетической энергии**: $\boxed{A_P = E_{K2} - E_{K1}}$. (4)

Кинетическая энергия $E_к$ системы частиц (в том числе, твердого тела) равна сумме кинетических энергий всех частиц, составляющих систему (тело): $E_к=\sum E_{кi}=\sum m_i v^2_i/2$. У твердого тела, движущегося поступательно, скорость v_i всех частиц одинакова и, следовательно, $E_к=\sum E_{кi}=(\sum m_i)v^2/2$=> $E_к=mv^2/2$, где $m=\Sigma m_i$ – масса тела. При вращательном движении тела скорость i-той частицы тела $v_i=r_i\omega$, где r_i – расстояние i-той частицы от оси вращения, ω – угловая скорость, одинаковая у всех частиц тела. Тогда **кинетическая энергия вращающегося твердого тела**:

$$E_к=\sum m_i v^2_i/2=(\sum m_i r^2_i)\omega^2/2 \Rightarrow E_к=(\sum I_i)\omega^2/2 \text{ или } \boxed{E_к = I\omega^2/2}, \qquad (5)$$

где $I_i=m_i r_i^2$ – момент инерции i-той частицы тела относительно оси вращения, а $I=\Sigma I_i$ – момент инерции тела относительно этой оси.

Потенциальная энергия. Работа консервативных сил. Из выражений (1) и (2) видно, что работа консервативных сил (упругих и тяжести) не зависит от формы траектории, а определяется начальным (1) и конечным (2) положением системы. Обобщая выражения (1) и (2), работу $A_к$ консервативных сил можно представить в виде разности значений некоторой функции $E_п$ положения системы, называемой потенциальной энергией:

$$A_К = E_{П1} - E_{П2} \tag{6}$$

Как видно из выражения (1) и (2), **потенциальная энергия в поле силы тяжести** $\boxed{E_п=mgh}$, а **при упругой деформации** $\boxed{E_п=kx^2/2}$. Потенциальная энергия обусловлена действием консервативных сил, зависит от взаимного расположения частиц системы и их положения во внешнем силовом поле. Выражение (6) означает, что **работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии.**

Механическая энергия. Работа неконсервативных сил. Работа $A_р$ результирующей всех сил, действующих на систему, равна сумме работ всех консервативных $A_К$ и всех неконсервативных сил $A_{НК}$: $A_р=A_К+A_{НК}$. Отсюда $A_{НК}=A_р-A_К$. Используя (3а) и (4), получаем:

$$A_{нк} = E_{К2} - E_{К1} - (E_{П1} - E_{П2}) = (E_{К2} + E_{П2}) - (E_{К1} + E_{П1}).$$

Сумма кинетической $E_к$ и потенциальной $E_п$ энергий называется **полной механической энергией** $\boxed{E = E_к + E_п}$. Тогда

$$\boxed{A_{нк} = E_2 - E_1}. \tag{7}$$

Т.е. **работа неконсервативных сил равна приращению механической энергии.** Формулы (4), (6) и (7) выражают связь между работой и энергией:

$$\boxed{A_р = E_{К2} - E_{К1}; \quad A_К = E_{П1} - E_{П2}; \quad A_{нк} = E_2 - E_1.}$$

Законы сохранения. Системой называется совокупноть одного или нескольких тел. Силы, с которыми действуют друг на друга тела, составляющие систему называются внутренними силами; силы, с которыми действуют на систему тела, не входящие в ее состав, называются внешними. Система, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой.

Закон сохранения импульса.

Рассмотрим систему из N частиц. Второй закон Ньютона для системы частиц:

$$\boxed{\vec{F}_{внешн} = \frac{d\vec{P}}{dt}}, \tag{8}$$

где $\vec{F}_{внешн}$ - сумма внешних сил, действующих на систему, $\vec{P} = \Sigma\vec{p}_i$ - импульс системы. Для замкнутой системы $\Sigma\vec{F}_{внешi} = 0$, $d\vec{P}/dt = 0$. Откуда следует **закон сохранения импульса**:

$$\boxed{\vec{P} = \Sigma\vec{p}_i = const}, \tag{9}$$

т.е. **импульс замкнутой системы не изменяется**. Из закона сохранения импульса следует, что внутренние силы могут изменять импульс $\vec{p}_i$ частиц (тел), составляющих систему, но так, чтобы импульс $\vec{P} = \Sigma\vec{p}_i$ всей системы оставался неизменным.

Закон сохранения механической энергии. Согласно выражению (7), работа $A_{нк}$ неконсервативных сил равна приращению $\Delta E = E_2 - E_1$ механической энергии: $A_{нк} = \Delta E$. Если $A_{нк}$=0, то $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$. Следовательно, $E_2 = E_1$ или $\boxed{E=const}$. (10)

Это **закон сохранения механической энергии**: полная механическая энергия системы, на которую действуют только консервативные силы, остается постоянной. Данный закон является частным случаем общего закона сохранения и превращения энергии.

Соударение тел. Абсолютно упругим ударом называется соударение тел, при котором сохраняется механическая энергия системы (рис.5). При упругом соударении тела сначала упруго деформируются, и их кинетическая энергия превращается в энергию упругой деформации. Затем форма тел восстанавливается, и энергия упругой деформации превращается в кинетическую. Закон сохранения механической энергии для упругого удара двух тел требует, чтобы их суммарная кинетическая энергия до и после соударения была одинакова:

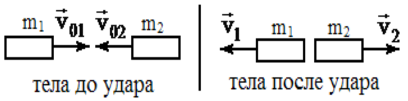

Рис.5

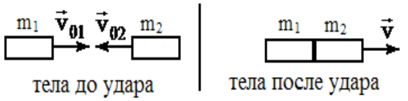

Рис.6

$$\boxed{m_1v^2_{01}/2+m_2v^2_{02}/2\ m_1v^2_1/2+m_2v^2_2/2} \quad (11)$$

где m_1 и m_2 - массы тел, v_{01} и v_{02} - скорости тел до соударения, v_1 и v_2 - скорости тел после удара. Систему из двух соударяющихся тел можно считать замкнутой. Поэтому выполняется закон сохранения импульса:

$$\boxed{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}. \quad (12)$$

Если массы тел и их скорости до удара известны, то, решая систему уравнений (11) и (12), можно определить скорости тел после удара.

При абсолютно неупругом ударе упругая деформация не возникает, механическая энергия не сохраняется и тела после соударения двигаются с одинаковой скоростью (рис. 6). Выполняется только закон сохранения импульса:

$$\boxed{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = (m_1 + m_2)\vec{v}}, \quad (13)$$

откуда можно найти скорость тел после удара:

$$\boxed{\vec{v} = (m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02})/(m_1 + m_2)}. \quad (14)$$

Методика выполнения работы

В лабораторной работе проверяются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии при упругом соударении двух тел. Установка (рис.7) состоит из рабочего поля 3 с нанесенной на него координатной сеткой, по которому перемещаются взаимодействующие тела 1 и 2. Начальную скорость телу 1 в направлении оси X сообщает ударный пружинный механизм 5. Перед выстрелом тело 1 фиксируется между направляющими 6. Винтом 4 регулируют сжатие пружины механизма и тем самым изменяют начальную скорость тела 1. Это тело двигается вдоль оси X и, достигнув положения 01, упруго соударяется с неподвижным телом 2. После соударения (рис.8) тело 1 движется под углом α к оси X, а второе тело начинает двигаться под углом β к оси X. Вследствие трения тела́ останавливаются, пройдя соответственно пути ℓ_1 и ℓ_2.

При упругом соударении выполняются закон сохранения механической энергии (11) $\boxed{m_1 v^2_{01}/2 = m_1 v^2_1/2 + m_2 v^2_2/2}$ (15) и закон сохранения импульса (12) $\boxed{m_1\vec{v}_{01} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}$ (16), где m_1 и m_2 - массы соответственно первого и второго тела, v_{01}- скорость первого тела в положении 01 непосредственно перед соударением, начальная скорость второго тела v_{02}=0, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - скорости тел непосредственно после соударения. Закон сохранения импульса (16) в проекции на оси координат принимает следующий вид:

проекция на ось X: $m_1 v_{01} = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta$, (17)

проекция на ось У: $0 = -m_1 v_1 \sin\alpha + m_2 v_2 \sin\beta$. (18)

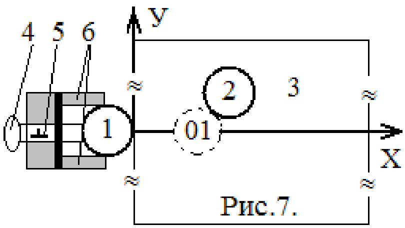

Рис.7.

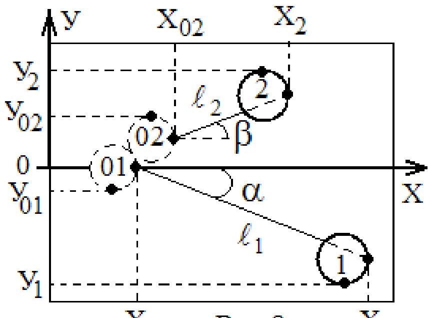

Рис.8

Скорость v_{01} тела 1 в положении 01 непосредственно перед соударением можно найти, определив путь $\ell_{01} = x - x_{01}$ (рис.9), который прошло бы тело 1 от положения 01 до остановки при его движении без соударения с телом 2. Работа силы трения $F_{тр}$ на пути ℓ_{01} р: $A_{тр} = F_{тр}\ell_{01}\cos 180 = -F_{тр}\ell_{01}$.

Сила трения $F_{тр} = \mu N$, где μ - коэффициент трения, $N = m_1 g$ - сила нормального давления. Следовательно, $F_{тр} = \mu m_1 g$ и $A_{тр} = -\mu m_1 g \ell_{01}$. Работа результирующей силы (4) $A_р = \Delta E_к$, где $A_р \equiv A_{тр}$, а $\Delta E_к = E_{к2} - E_{к01}$. Т.к. тело остановилось, то $E_{к2}=0 \Rightarrow A_р=-E_{к01}$, или $-\mu m_1 g \ell_{01} = - m_1 v^2_{01}/2$. Отсюда скорость первого тела непосредственно перед соударением: $v_{01} = \sqrt{2\mu g \ell_{01}}$. (19)

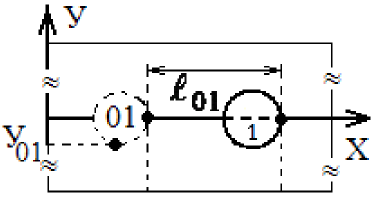

Рис.9 X_{01} X

Измерив расстояния ℓ_1 и ℓ_2 (рис.8), пройденные телами после соударения до их остановки, найдем скорости v_1 и v_2 тел непосредственно после соударения по формулам, аналогичным формуле (19): $v_1=\sqrt{2\mu g \ell_1}$ и $v_2=\sqrt{2\mu g \ell_2}$ (20)

Расстояния ℓ_{01}, ℓ_1, ℓ_2 определяют по изменению координат крайних точек тел (рис.8 и 9): $\ell_{01}=\Delta X_{01}=X-X_{01}$;

$$\ell_1=\sqrt{(\Delta X_1)^2+(\Delta У_1)^2}=\sqrt{(X_1-X_{01})^2+(У_1-У_{01})^2}$$

$$\ell_2=\sqrt{(\Delta X_2)^2+(\Delta У_2)^2}=\sqrt{(X_2-X_{02})^2+(У_2-У_{02})^2}\ .$$

Из рис. 8 видно, что $\sin\alpha=\Delta У_1/\ell_1$; $\cos\alpha=\Delta X_1/\ell_1$; $\sin\beta=\Delta У_2/\ell_2$; $\cos\beta=\Delta X_2/\ell_2$ (21). При подстановке выражений (19), (20) и (21) в уравнения (17) и (18) закон сохранения импульса в проекциях на оси координат принимает вид:

ось X: $$\boxed{m_1\sqrt{\ell_{01}}=(m_1\Delta X_1/\sqrt{\ell_1})+(m_2\Delta X_2/\sqrt{\ell_2}),} \qquad (22)$$

ось $У$: $$\boxed{0=(-m_1\Delta У_1/\sqrt{\ell_1})+(m_2\Delta У_2/\sqrt{\ell_2}).} \qquad (23)$$

При подстановке выражений (19) и (20) в уравнение (15) закон сохранения механической энергии приобретает вид:

$$\boxed{m_1\ell_{01} = m_1\ell_1 + m_2\ell_2}. \qquad (24)$$

Таким образом, проверка выполнения законов сохранения импульса и механической энергии при упругом соударении двух тел сводится к проверке равенств (22), (23) и (24).

Порядок выполнения работы

1) Получите у лаборанта два тела (шайбы) и запишите их массы m_1 и m_2 в таблицу 1. 2) Шайбу 1 установите в круг, соответствующий положению 01 первой шайбы перед ее соударением с шайбой 2 (рис.7,8,9). Запишите в

Таблица 1	
m_1= кг	m_2= кг
X_{01}= мм	X_{02}= мм
$У_{01}$= мм	$У_{02}$= мм

таб.1 начальные координаты X_{01} и $У_{01}$ крайних точек первой шайбы в этом положении. 3) Взведите пружинный механизм (рис.7), зафиксировав его в пазу, указанном лаборантом. Шайбу 1 вставьте в направляющие 6 до упора и произведите выстрел. 4) Занесите в таб.2 координату X крайней точки остановившейся первой шайбы (рис.9). 5) При тех же условиях повторите опыт (пп.3 и 4) 6 раз. Результаты измерений координаты X занесите в таб.2. 6) Шайбу 2 установите в круг, соответствующий начальному положению 02 этой шайбы перед ударом (рис.8). Запишите в таб.1 начальные координаты X_{02} и $У_{02}$ второй шайбы в этом положении. 7) Взведите пружинный механизм, зафиксировав его точно так же, как в пункте 3. Шайбу 1 вставьте в направляющие до упора и произведите выстрел. 8) Занесите в таб. 2 координаты X_1, $У_1$, X_2 и $У_2$ крайних точек остановившихся шайб (рис.8). При тех же условиях повторите опыт (пп.7 и 8) 6 раз, предварительно устанавливая вторую шайбу в положение 02. Результаты измерений занесите в таб.2

Таблица2

N	без удара	После соударения			
	x(мм)	x₁(мм)	y₁(мм)	x₂(мм)	y₂(мм)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
сред.	$\overline{x}$ =	$\overline{x}_1$ =	$\overline{y}_1$ =	$\overline{x}_2$ =	$\overline{y}_2$ =
Δx, Δy	$\Delta x_{01} = \overline{x} - x_{01}$ Δx_{01}=	$\Delta x_1 = \overline{x}_1 - x_{01}$ Δx_1=	$\Delta y_1 = \overline{y}_1 - y_{01}$ Δy_1=	$\Delta x_2 = \overline{x}_2 - x_{02}$ Δx_2=	$\Delta y_2 = \overline{y}_2 - y_{02}$ Δy_2=
путь	$\ell_{01} = \Delta X_{01}$=	$\ell_1 = \sqrt{(\Delta X_1)^2 + (\Delta Y_1)^2}$ $\sqrt{\qquad\qquad + \qquad}$ =		$\ell_2 = \sqrt{(\Delta X_2)^2 + (\Delta Y_2)^2}$ $\sqrt{\qquad\qquad + \qquad}$ =	

Обработка результатов измерений

1) Рассчитайте средние значения координат, $\overline{X}, \overline{X}_1, \overline{У}_1, \overline{X}_2, \overline{У}_2$; приращения координат ΔX_{01}, ΔX_1, $\Delta У_1$, ΔX_2, $\Delta У_2$ и пути ℓ_{01}, ℓ_1 и ℓ_2 шайб и запишите их в табл.2. 2) Рассчитайте по формулам (22) и (23) величины, пропорциональные проекциям импульсов тел на оси координат до и после соударения, и занесите результаты в таб.3. 3) По формуле (24) рассчитайте величины, пропорциональные кинетической энергии тел до и после соударения, и занесите результаты в таб.3. 4) Рассчитайте относительную погрешность ε проверки выполнения закона сохранения импульса. Погрешности соответственно для проекций импульса на ось X - ε_x и на ось У - ε_y равны:

$$\varepsilon_x = \left| \frac{(m_1 \Delta X_1 / \sqrt{\ell_1}) + (m_2 \Delta X_2 / \sqrt{\ell_2}) - m_1 \sqrt{\ell_{01}}}{m_1 \sqrt{\ell_{01}}} \cdot 100\% \right|,$$

$$\varepsilon_y = \left| \frac{(-m_1 \Delta У_1 / \sqrt{\ell_1}) + (m_2 \Delta У_2 / \sqrt{\ell_2})}{m_1 \Delta У_1 / \sqrt{\ell_1}} \cdot 100\% \right|$$

5) Найдите среднюю относительную погрешность проверки выполнения закона сохранения импульса: $\varepsilon_p = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$. 6) Рассчитайте относительную погрешность проверки выполнения закона сохранения механической энергии:

$$\varepsilon_E = [(m_1 \ell_1 + m_2 \ell - m_1 \ell_{01}) / m_1 \ell_{01}]\ 100\%.$$

Таблица 3

		До удара	После удара
Импульс, кг·мм$^{1/2}$	по оси *X*	$m_1\sqrt{\ell_{01}} =$ $=$ $\sqrt{} =$	$(m_1 \Delta X_1 / \sqrt{\ell_1}) + (m_2 \Delta X_2 / \sqrt{\ell_2}) =$ $\frac{}{\sqrt{}} + \frac{}{\sqrt{}} =$
	по оси *У*	0	$(-m_1 \Delta У_1 / \sqrt{\ell_1}) + (m_2 \Delta У_2 / \sqrt{\ell_2}) =$ $\frac{}{\sqrt{}} + \frac{}{\sqrt{}} =$
	Энергия кг·мм	$m_1 \ell_{01} =$	$m_1\ell_1 + m_2\ell_2 =$ $\quad$ + $\quad$ =

$\varepsilon_x =$ $\quad$, $\varepsilon_y =$ $\quad$, $\varepsilon_p = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2 =$ $\quad$; $\varepsilon_E =$

Контрольные вопросы

1) Что такое силовое поле? 2) Чему равны элементарная работа и работа на всем пути? 3) Что такое мощность? В каких единицах измеряются работа, энергия и мощность? 4) Какие силы называются консервативными, какое поле называется потенциальным? Приведите примеры консервативных сил в механике. 5) Чему равна потенциальная энергия в поле сил тяжести и при при упругой деформации? 6) Чему равна работа консервативной силы? 7) Как найти кинетическую энергию при поступательном и вращательном движении твердого тела.? 8) Чему равна работа результирующей силы? 9) Что такое механическая энергия? 10) Чему равна работа неконсервативных сил? 11) В чем состоят закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии? 12) Какое соударение тел называется абсолютно упругим, какие законы сохранения выполняются при этом соударении? 13) Какое соударение тел называется абсолютно неупругим, какие законы сохранения выполняются при таком соударении? 14) Запишите законы сохранения, которые выполняются при проведении данной лабораторной работы, в векторном виде и в проекциях на оси X и $У$. 15) Как в данной лабораторной работе находят скорости тел? 16) Поясните вывод уравнений, с помощью которых проверяются законы сохранения при упругом ударе двух тел в данной лабораторной работе.

Лабораторная работа 1-3
«Изучение закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека»

Цель работы: изучить закон динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека. Измерить динамическим методом момент инерции крестовины маятника.

Теоретическое введение

Механическое движение есть изменение положения тел или их частей в пространстве с течением времени. **Тело отсчета** – это тело, условно принимаемое за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел (во многих задачах телом отсчета является Земля). Тело отсчета и часы (для измерения времени) составляют **систему отсчета**. Для определения положения тела в пространстве с системой отсчета связывают систему координат, например декартову. Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называют **материальной точкой (МТ)** или **частицей**. **Абсолютно твердое тело (АТТ)** – тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Его можно рассматривать как состоящее из огромного числа МТ, взаимное расположение которых не меняется.

Кинематика изучает движение тел без рассмотрения причин, обуславливающих характер этого движения. Положение МТ в пространстве можно задать с помощью **радиус-вектора** $\vec{r}$**,** проведенного из начала координат в данную точку (рис.1). В трехмерной прямоугольной (декартовой) системе координат с осями X,Y,Z радиус-вектор можно выразить через координаты *x*, *y*, *z* материальной точки:

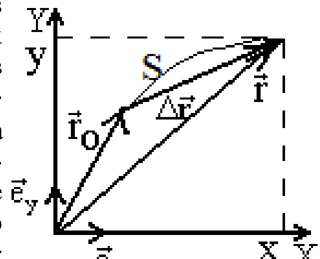

Рис.1

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z},$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты (единичные векторы осей). Для простоты будем рассматривать двумерное движение МТ в плоскости X,Y (рис.1). В этом случае начальное и конечное положения движущейся МТ задается радиус-векторами $\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y$ и $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории, называется **перемещением** ($\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$). Линия, по которой движется точка, называется **траектори-**

ей. Длина пути (путь) *S* – это расстояние, пройденное точкой вдоль траектории.

При **поступательном движении** АТТ все его точки описывают одинаковые траектории, за время *t* проходят одинаковые пути *S*, а любая прямая в теле остается параллельной самой себе. Чтобы описать поступательное движение АТТ, достаточно описать движение одной из его точек. При **вращательном движении** АТТ все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. При таком движении, радиусы, соединяющие точки тела с осью вращения, поворачиваются за время *t* на один и тот же угол *φ*. Любое сложное движение АТТ можно представить, как сумму поступательного и вращательного движений. В случае двумерного движения точки (в плоскости XY, рис.1), это движение описывается функциями *x=f(t)* и *y=f(t)* зависимости координат от времени. Эти зависимости называют ***уравнениями движения***. Так как радиус- вектор МТ связан с ее координатами, то уравнение движения принимает вид $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Мгновенная скорость точки (линейная скорость) равна производной от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени *t*:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

и характеризует быстроту изменения радиус-вектора. Вектор скорости направлен по касательной к траектории. **Проекции вектора скорости** на оси координат: $\boxed{v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt}}$. **Модуль скорости** $v = |\vec{v}|$ равен первой производной от пути *s* по времени *t*: $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$. Поэтому **уравнение пути** имеет вид $\boxed{s = \int v dt}$ в общем случае, при равномерном $(\vec{v} = const)$ движении *s=vt*, при прямолинейном равноускоренном $(\vec{a} = const)$ движении $s = v_0 t + at^2/2$, где v_0 - начальная скорость.

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости. **Ускорение** равно первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени: $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$.

Проекции ускорения $\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}}$.

Полное ускорение $\vec{a}$ можно разложить на две составляющие (рис.2):

нормальное ускорение $\boxed{a_n = \dfrac{v^2}{R}}$ и **тангенциальное** $\boxed{a_\tau = \dfrac{dv}{dt}}$, равное производной от модуля скорости. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и направлено к центру кривизны траектории, тангенциальное характеризует быстроту изменения модуля скорости и направлено по касательной к траектории. **Полное ускорение**: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. **Модуль полного ускорения**: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

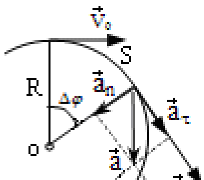

Рис. 2

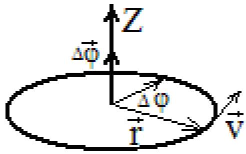

Рис.3

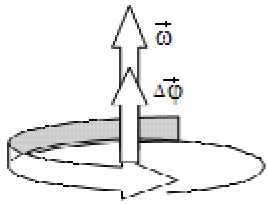

Рис.4

При **вращательном движении** (рис.3) положение точки определяется радиусом вектором $\vec{r}$, проведенным из центра окружности, и углом поворота $\Delta\varphi$ (измеряется в радианах [рад]). Вектор $\Delta\vec{\varphi}$ численно равный углу поворота и направленный вдоль оси вращения *Z*, называется **угловым перемещением**. Направление вектора $\Delta\vec{\varphi}$ находится по правилу *правого винта* (рис.4). **Период вращения** *T=t/N* - время одного оборота ([*T*]=с), где *N* – число оборотов за время *t*. **Частота вращения** ν *(ню)* – число оборотов за единицу времени: ν*=N/.t* Эта величина обратна периоду ν*=1/T*. Единица измерения частоты - герц (Гц), [ν]=1/с=1Гц. **Угловая скорость** $\vec{\omega}$ (омега) равна первой производной от угла φ поворота по времени: $\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}}$, характеризует быстроту изменения угла поворота и направлена по оси вращения (рис.4). При равномерном вращении ($\vec{\omega}$=const) $\omega=\Delta\varphi/\Delta t=2\pi/T=2\pi\nu$.

Уравнение движения $\varphi(t)$ при вращении имеет вид: $\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt$. При равномерном движении $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. **Угловое ускорение** $\vec{\varepsilon}$ **(эпсилон)** равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота $\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}}$. Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости. При равнопеременном вращении (ε=const*)* $\varepsilon=\Delta\omega/\Delta t$ угловая скорость меняется по закону: $\omega = \omega_0 + \varepsilon\Delta t$, где ω_0 – начальная угловая скорость при t=0 (ε>0 –движение ускоренное, ε<0 – замедленное). Угловое перемещение при равнопеременном вращении: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Найдем **связь линейных характеристик движения (*v, a, a_n , a_τ*) с угловыми (*φ, ω, ε*)**. Длина дуги окружности $S=\Delta\varphi R$ (рис.3).Взяв производную от этого выражения, получим: $dS/dt=(d\varphi/dt)R$. Так как $ds/dt=v$ и $d\varphi/dt=\omega$, то $\boxed{v=\omega R}$. Продифференцируем последнее выражение: $\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$. Так как $dv/dt=a_\tau$ и $d\omega/dt=\varepsilon$, то $\boxed{a_\tau=\varepsilon R}$. Подставив $v=\omega R$ в формулу a_n, получим $\boxed{a_n=\omega^2 R}$.

Динамика рассматривает движение тел как результат действия сил. Согласно **второму закону Ньютона** $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$, где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ есть сумма всех (равнодействующая) сил, действующих на тело. **Импульс тела** $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$. Т.к. $\vec{a} = d\vec{v} / dt$, то второй закон Ньютона можно записать в виде: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$.

Согласно 3-му закону Ньютона два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению: $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$ Отсюда следует: сумма таких сил равна нулю: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Пусть имеется система МТ (или тел). Все силы, действующие на МТ, можно разделить на **внутренние** (силы взаимодействия между МТ системы) и **внешние** (силы взаимодействия МТ системы с телами, не входящими в систему). **Импульсом системы** *МТ* называют величину $\vec{p}_C = \sum \vec{p}_i$ (импульс системы МТ равен сумме импульсов отдельных МТ). Для системы МТ второй закон Ньютона принимает вид $\sum \vec{F}_{i,внеш} + \sum \vec{F}_{i,внутр} = d\vec{p}_C / dt$. По 3-му закону Ньютона второе слагаемое равно нулю. Поэтому второй закон Ньютона для системы частиц или абсолютно твердого теля имеет вид:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{внеш} = d\vec{p}_C / dt}.$$

Динамика вращательного движения. Взаимодействие тел, следствием которого является их вращение, характеризуется моментом силы (вращающим моментом). Пусть к твердому телу в точке *А* приложена сила $\vec{F}$ (рис. 5а). **Момент силы** $\vec{M}$ **относительно точки О** равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$: $\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]}$, где радиус-вектор $\vec{r}$ проводят от точки *О* в точку приложения силы А. **Модуль момента силы** $M=rF\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Вектор момента силы

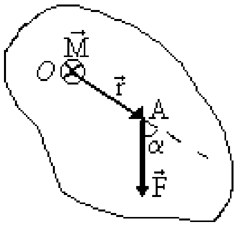

Рис. 5а

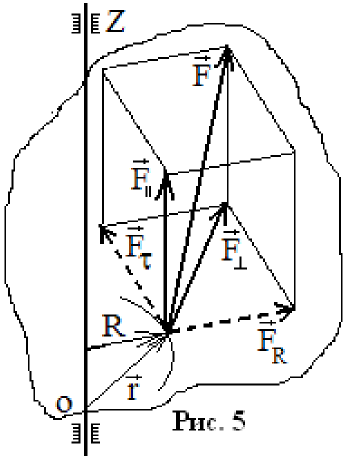

Рис. 5

$\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, в соответствии с правилом правого винта (буравчика): при кратчайшем повороте от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ направление поступательного движения буравчика совпадает с направлением вектора момента силы (на рис. 5а вектор $\vec{M}$ направлен «от нас», что обозначено как кружок с крестиком). **Момент силы M_Z относительно оси Z** равен проекции на эту ось момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки О, лежащей на оси.

На рис.5 представлено тело, закрепленное так, что оно может вращаться вокруг оси Z. К некоторой точке тела приложена сила $\vec{F}$. Точка приложения силы может вращаться вокруг оси Z вместе с телом, а радиус

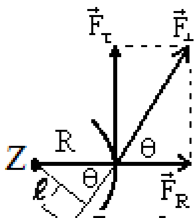

Рис.6

вращения точки R. Силу $\vec{F}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие: $F_{\|}$ (параллельную оси Z) и $F_{\perp}$ (лежащую в плоскости перпендикулярной оси Z). Составляющая $F_{\|}$ не может создать вращение тела вокруг оси Z. Вращение может вызвать лишь $F_{\perp}$. Эту силу в свою очередь разложим на две составляющие (рис. 5): тангенциальную F_{τ} (направленную по касательной к окружности) и радиальную F_R (направленную вдоль радиуса). Вращение вокруг оси Z может создавать только составляющая F_{τ}. Можно показать, что модуль **момент силы $\vec{F}$ относительно оси Z равен** $\boxed{M_Z=RF_{\tau}}$

Из рис.6 (здесь ось Z перпендикулярна плоскости рисунка) видно, что

$$\boxed{M_z= RF_{\tau}=\ell F_{\perp}},$$

где R - плечо силы F_{τ}, ℓ - плечо силы $F_{\perp}$ (плечо силы – это длина перпендикуляра, соединяющего ось вращения с линией действия силы).

Мерой инертности тела при вращательном движении является **момент инерции *I*,** зависящий от распределения массы тела относительно оси вращения. **Момент инерции материальной точки (частицы)**, расположенной на расстоянии r от оси вращения $\boxed{I=mr^2}$. Т.к. тело состоит из множества частиц, то момент инерции тела: $\boxed{I=\sum m_i r_i^2}$, где r_i- расстояние от i - той частицы тела до оси вращения, или $\boxed{I=\int r^2 dm}$. Т.е., момент инерции (МИ) всего тела относительно данной оси равен сумме МИ всех частиц тела относительно этой же оси. Т.о. МИ тела является **аддитивной** величиной, также как и масса тела $m=\sum m_i$.

Для каждого тела и оси вращения момент инерции надо рассчитывать отдельно. В частности **МИ кольца** радиуса R относительно оси проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости: $\boxed{I=mR^2}$ (эта же формула справедлива для полого цилиндра относительно его оси). **МИ диска** относительно его оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости: $\boxed{I=mR^2/2}$. Данная формула справедлива и для сплошного цилиндра относительно его оси. **МИ стержня**, относительно оси, перпендикулярной длине, и проходящей через его центр: $\boxed{I=m\ell^2/12}$.

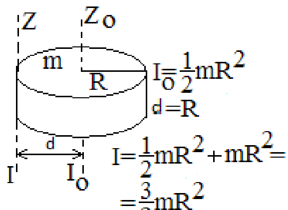

Рис.7

Пусть I_0 - МИ тела относительно оси Z_0, проходящей через центр масс тела, тогда МИ I относительно любой параллельной оси Z определяется **теоремой Штейнера**: $\boxed{I=I_0+md^2}$, где m - масса тела, d - расстояние между параллельными осями Z и Z_0 (пример на рис.7).

Аналогично моменту силы относительно точки определяется **момент импульса частицы относительно точки *O*** как векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$ частицы: $\boxed{\vec{L}=[\vec{r}\vec{p}]}$, где $\vec{r}$ проводится от точки O к частице. Можно показать, что **момент импульса твердого тела относительно оси Z**: $\boxed{L_z = I\omega}$, где I – момент инерции тела.

Согласно **закону динамики вращательного движения**:

$$\boxed{M_Z = I\varepsilon} \text{ или } \boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}},$$

где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ - угловое ускорение, с которым тело вращается относительно оси Z под действием **результирующего** момента всех сил $\vec{M}_Z = \sum \vec{M}_{Z,i}$; I – момент инерции тела относительно оси Z. Аналогично тому, как во 2-ом законе Ньютона ($\vec{F} = m\ \vec{a}$) масса m является мерой инертных свойств тела при поступательном движении, так при вращательном движении МИ есть мера инертных свойств тела относительно данной оси.

Методика выполнения работы

Основной частью установки является маятника Обербека - крестообразный маятник, который может вращаться с малым трением вокруг оси O (см. рис.8). По стержням крестовины могут перемещаться подвижные цилиндры 3 массой m_0. На стержнях сделаны пазы (рис.8а), в которых с помощью крепежного винта закрепляются цилиндры m_0. Пазы для крепления цилиндров расположены на расстоянии 2см. друг от друга. На одной оси с крестовиной насажены шкивы 1 и 2 разного радиуса r. К концу нити, намотанной на один из шкивов и перекинутой через невесомый блок 4, прикрепляется груз 5 массой m, приводящий маятник во вращательное движение. Время прохождения грузом расстояния h измеряют секундомером. Маятник в исходном положении удерживается электромагнитом, при нажатии клавиши "Пуск" секундомера электромагнит отключается, груз начинает ускоренно опускаться (крестовина ускоренно вращаться) и одновременно включается секундомер. Счёт времени заканчивается при достижении грузом нижнего положения. Расстояние h отмечается по линейке, на которой указывается расстояние груза в начальном положении от основания установки. Приняв, что нить невесома, нерастяжима, считаем движение крестовины и грузов равноускоренным. Пройденный путь $h=at^2/2$, где а – ускорение груза, t – время движения. Отсюда: $a = 2h/t^2$. Тогда для углового ускорения крестовины ε имеем:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}, \qquad (1)$$

где r- радиус шкива. На подвешенный груз m действует сила натяжения нити T и сила тяжести mg. Согласно 2-му закона Ньютона: $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma \Rightarrow T = m(g - a) \cong mg$, т.к. обычно $a << g$. Таким образом, измерив для груза массой m время t прохождения им расстояния h, можно рассчитать угловое ускорение ε маятника и определить момент силы, действующий на маятник:

$$M = Tr = mg. \qquad (2)$$

При вращении маятника на него действует также тормозящий момент сил трения $M_{тр}$, и поэтому закон динамики принимает вид $I\varepsilon = M - M_{тр} \Rightarrow$

$$M = M_{тр} + I\varepsilon..$$

Это уравнение позволяет найти момент инерции крестовины I динамическим методом, измерив величины ε и M. Для более точного определения величины I в опыте получают зависимость $M = f(\varepsilon)$, линейный характер которой (при $M_{тр}$= const, рис. 9) позволяет рассчитать среднее значение I

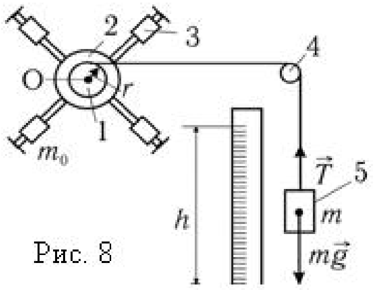

Рис. 8

Рис. 8 а

по угловому коэффициенту опытной прямой (рис.9): из $M = M_{тр} + I\varepsilon$ => $\boxed{I=\Delta M/\Delta\varepsilon.}$

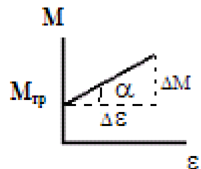

Рис.9

Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение закона вращения маятника

1) Установите центры подвижных цилиндров m_o на одинаковом расстоянии l от оси вращения (рис,8а); учтите, что минимальное расстояние цилиндров до оси вращения 12,5см, расстояние между крепежными пазами 2см. Определите радиус шкива r (на установке два шкива - выберите один из них по указанию преподавателя или лаборанта). Определите массу трех грузов m_1, m_2, и m_3, которые будут использованы в работе. Величины r, l, m запишите в таблицу 2. 2) Прикрепите к нити один из грузов m_1. Вращая маятник, намотайте нить на шкив в один слой и включите электромагнит красной кнопкой, расположенной в верхней части установки. Запишите расстояние h, проходимое грузом при падении. Убедитесь, что нить и груз во время движения не задевают неподвижные части установки или другие предметы. Устраните качание груза и нажмите кнопку «*Пуск*» секундомера. Запишите
в таблицу 2 время движения груза m_1, повторив опыт четыре раза. 3) Аналогичные измерения проведите с грузами $m_1 + m_2$ и $m_1 + m_2 + m_3$, записывая результаты в таблицу 2.

Задание 2. Измерение момента инерции крестовины маятника динамическим методом

1) Закрепите подвижные цилиндры на минимальном и одинаковом расстоянии ℓ от оси вращения (закрепите их в пазы ближайшие к оси вращения, при этом ℓ=12,5см). Прикрепите к нити один из грузов массой m (по указанию преподавателя или лаборанта). Выберите для эксперимента один шкив, определите его радиус r и запишите в таблицу 3 значения m, r ,h и ℓ .
2) Вращая маятник, намотайте нить на шкив в один слой и измерьте время движения t (см. п. 2 задания 1). 3) Проведите ещё 6 опытов с тем же грузом

m, увеличивая всякий раз на 2см расстояние цилиндров ℓ от оси вращения (смещая их на следующий крепежный паз; рис.8а). Результаты измерений ℓ и t вносите в таблицу 3.

Радиусы шкивов	Таблица 1
r_1=0,010 м	r_2=0,0175 м

Таблица 2

l= м; m_1= кг; m_2= кг, m_3= кг; h = м

r, м	№	m_1 = кг		№	m_1+m_2= кг		№	$m_1+m_2+m_3$= кг	
		t_1, с	$M=m_1gr$=		t_2, с	$M=(m_1+m_2)gr$=		t_3, с	$M=(m_1+m_2+m_3)gr$ =
	1			1			1		
	2			2			2		
	3		$\varepsilon_{cp}=2h/r^2$	3		$\varepsilon_{cp}=2h/rt^2$	3		$\varepsilon_{cp}=2h/rt^2_{cp}$
	4		ε_{cp}=	4		ε_{cp} =	4		ε_{cp} =
	t_{cp}=			t_{cp}=			t_{cp}=		

Таблица 3

h = м; m = кг ; r = м ; $M = mgr$=					
№	ℓ, см	t	$\varepsilon = 2h/rt^2$	ℓ^2, 10^{-2}м^2	$I = M/\varepsilon$,10^{-2} кг·м^2
1	12,5				
2	14,5				
3	16,5				
4	18,5				
5	20,5				
6	22,5				

Обработка результатов измерений

Задание 1. 1) Вычислите значения ε и M в каждом опыте по формулам (1) и (2). 2). Изобразите графически связь между моментом силы М угловым ускорением ε, нанеся точки на график. 3) По графику определите среднее значение момента инерции маятника $I = \Delta M/\Delta\varepsilon$ (аналогично рисунку 9). 4) По графику определите момент сил трения ($M=M_{TP}$ при ε=0, рис.9). Внимание: если график проходит через начало координат можно принять M_{TP}=0.

Задание 2. 1) Вычислите для каждого опыта величины ℓ^2 и момент инерции маятника по формуле: $I=M/\varepsilon$. 2) Постройте график зависимости момента инерции маятника I от ℓ^2. Сделайте вывод о характере полученной зависимости $I = f(\ell^2)$ с учётом того, что момент инерции маятника, у которого цилиндры приняты за материальные точки, $I = I_{кр} + 4m_o\ell^2$ (график на рис 10). 6. Определите с помощью графика момент инерции крестовины $I_{кр}$: при $\ell = 0$ $I = I_{кр}$ (аналогично рис.10).

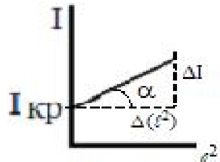

Рис.10

Контрольные вопросы

1) Дайте определения следующих величин: радиус-вектор, перемещение, траектория, путь, скорость, ускорение, нормальное и тангенциальное ускорения, как они направлены? 2) Какое движение твердого тела называется вращательным? 3) Дайте определения угловой скорости и углового ускорения. 4) Как связаны линейные и угловые характеристики движения? 5) Чему равен момент силы относительно точки и оси? 6) Чему равен момент импульса частицы и тела? 7). Что такое момент инерции? Как он вычисляется для материальной точки и тела? В чем состоит теорема Штейнера? 8) В чем состоит основной закон динамики вращательного движения. 9) По каким формулам рассчитывается угловое ускорение и момент силы в задании 1? 10) Какой вид имеет график зависимости $M = f(\varepsilon)$ в задании 1, как по этому графику определяются момент инерции маятника и момент силы трения? 11) Какой вид имеет график зависимости $I = f(\ell^2)$ в задании 2, как по этому графику определяют момент инерции крестовин.

Лабораторная работа 1-4
«Определение момента инерции. Проверка основного закона динамики вращательного движения»

Цель работы: изучить вращательное движение твердого тела, определить момент инерции твердого тела, проверить основной закон динамики вращательного движения.

Теоретическое введение

Изучите разделы **кинематика и динамика** по теоретическому введению к лабораторной работе 1-3.

Работа и энергия при вращательном движении. Элементарная работа внешней силы при вращении твердого тела относительно оси *Z:*

$$\boxed{dA = M_Z d\varphi},$$

где M_Z - момент силы относительно оси *Z*, $d\varphi$ - бесконечно малый угол поворота. При повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ под действием момента силы M_Z **работа внешней силы**

$$\boxed{A = \int M_z d\varphi}.$$

Если момент силы не зависит от угла поворота, то $A = M_Z \Delta\varphi$.

Кинетическая энергия частицы при поступательном движении $T = mv^2/2$ (*v* - скорость частицы). Заменив линейную скорость $v = \omega r$, получим **кинетическую энергию вращательного движения**:

$$\boxed{T = I\omega^2/2},$$

где $I = mr^2$ - момент инерции частицы относительно оси Z, r – радиус вращения, ω – угловая скорость. Такой же формулой будет определяться кинетическая энергия вращающегося тела, тогда I - момент инерции тела

По теореме о кинетической энергии **работа равнодействующей всех сил**, приложенных к телу, равна изменению кинетической энергии тела: $\boxed{A = \Delta T = T_2 - T_1}$.

При **плоском движении** все точки тела движутся в параллельных плоскостях (например, диск катится по прямой), а кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного движения центра масс тела и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}},$$

где *v* – скорость центра масс тела, *I* – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Потенциальная энергия U тела, центр масс которого находится на высоте h от некоторого нулевого уровня

$$\boxed{U=mgh},$$

где g=9,8м/с^2 – ускорение свободного падения.

Сумма кинетической T и потенциальной U энергий называется **механической энергией:** $\boxed{E=T+U}$.

Работа силы трения равна изменению механической энергии тела:

$$A_{тр}=\Delta E.$$

.

Методика выполнения работы

Установка изображена на рис.1. Диск 1 с дополнительными грузами m$_0$, шкивом 2 радиуса r могут вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси. На шкив наматывается нить, к которой привязан груз массой m, под действием которого диск вращается.

В начальном состоянии груз удерживается в верхнем положении – точка «А» на высоте h_o. Он обладает потенциальной энергией $U_o = mgh_o$. Если груз отпустить, то эта потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения груза $T_п = \dfrac{mv^2}{2}$, кинетическую энергию вращательного движения диска $T_{вр} = \dfrac{I\omega^2}{2}$, а также расходуется на работу против сил трения $A_o = M_{тр}\cdot\varphi_o$. При перемещении груза из точки«А» в точку «В» закон сохранения энергии имеет вид:

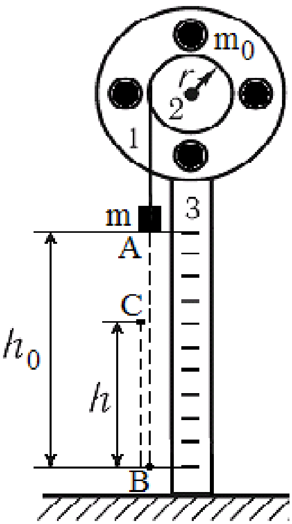

Рис. 1

$$mgh_o = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + M_{тр}\cdot\varphi_o, \qquad (1)$$

где v и ω - скорость груза и угловая скорость вращения диска в нижней точке «В», I - момент инерции диска относительно оси вращения, $M_{тр}$ - момент сил трения, φ_o - угол поворота диска за время движения груза от верхнего положения (А) до нижнего (В).

Груз движется равноускорено без начальной скорости ($v_o = 0$), следовательно $h_o = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2h_o}{t^2}$, где a - ускорение груза, t - время его движения от верхнего положения «А» до нижнего «В»; $v = at = 2h_0 / t^2 \cdot t \Rightarrow v = 2h_0 / t$. Линейная скорость точек поверхности шкива равна скорости груза, поэтому угловая скорость диска $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2h_o}{rt}$. Путь, пройденный любой точкой поверхности шкива, $S_o = \varphi_o r$ и равен пути h_o, который прошел груз, т.е. $h_o = \varphi_o r \Rightarrow \varphi_o = h_o/r \Rightarrow A_0 = M_{тр} h_0 / r$.

Найдем теперь момент сил трения $M_{тр}$. Когда груз достигает нижнего положения, диск не останавливается, а продолжает вращаться по инерции. При этом нить будет наматываться на шкив, поднимая груз на высоту h в конечное положение – точка «С». В этом положении потенциальная энергия груза $U = mgh$ меньше его начальной потенциальной энергии $U_o = mgh_o$ на величину работы против сил трения, совершенной при переходе груза из начального положения «А» в конечное положение «С», т.е. $A = mgh_o - mgh = M_{тр} \cdot \varphi$, где φ - угол поворота диска при переходе груза из положения «А» в положение «С». Угол $\varphi = S/r = (h_0+h)/r$, где $S = h_o + h$ - путь, который проходит любая точка поверхности шкива за время движения груза из начального положения «А» в конечное «С». Тогда $A = M_{тр} \cdot (h_0+h)/r$ и

$$M_{\text{тр}} = \frac{mgh_o - mgh}{\varphi} = \frac{mg(h_o - h)r}{h_o + h}.$$

Подставляя значения скорости груза v, угловой скорости вращения диска ω и момента сил трения $M_{тр}$ в выражение (1), можно получить, что момент инерции диска относительно оси вращения

$$I = mr^2\left[\frac{hgt^2}{h_o(h_o + h)} - 1\right]. \qquad (2)$$

В установке данной лабораторной работы (рис. 8) можно изменять момент инерции ее вращающейся части, прикрепляя к диску один или несколько дополнительных цилиндров. Если к диску на расстоянии ℓ от его центра прикрепить дополнительный цилиндр массы m_o, то момент инерции дополнительного цилиндра относительно оси вращения можно рассчитать по теореме Штейнера: $I_p = I_o + m_o\ell^2$, где $I_0 = m_0R^2/2$ - момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси, R – радиус цилиндра. Поэтому $I_p = m_0R^2/2 + m_o\ell^2$ или $I_p = m_o(R^2/2 + \ell^2)$. (3)

Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение момента инерции диска

1) Снимите дополнительные грузы с диска. 2) Запишите значение массы груза m в таблицу 1. 3) Включите клавишу «Сеть» на задней панели «Секундомера» (клавиша начинает светиться). 4) Запишите, против какого деления линейки 3 находится нижняя грань груза в положении «В». 5) Под-

нимите груз вращением диска до верхнего положения «А» так, чтобы нижняя грань груза находилась против нулевого деления линейки, зафиксируйте фиксируйте груз в этом положении, нажав красную кнопку включения электромагнита, расположенную в верхней части установки. 6) Включите секундомер, нажав кнопку «Пуск» (в этот момент груз начинает движение). 7) В момент прохождения грузом нижнего положения секундомер отключается, фиксируя время t движения груза от верхнего до нижнего положения. Продолжая дальше наблюдение за движением груза, заметьте высоту h (зафиксированную измерителем перемещения), на которую поднимется груз, двигаясь по инерции. Показания секундомера (t) и измерителя перемещения (h) запишите в табл. 1. 8) Повторите измерения еще четыре раза.

Таблица 1.

№ п/п	t, с	h, м	I	ΔI	Постоянные величины
1					
2					$r = d/2 = 0{,}0125$ м
3					$m =$
4					$h_o =$
5					
Среднее значение					
$I = (\langle I\rangle \pm \langle \Delta I\rangle) =$			$\varepsilon = \langle \Delta I\rangle / \langle I\rangle 100\% =$		

Задание 2. Проверка теоремы Штейнера

Таблица 2

№ п/п	*t, с*	*h, м*	$I_{общ}$	*Постоянные величины*
1				$m =$
2				$h_o =$
3				$\langle I\rangle =$
4				$r = 1{,}25\cdot10^{-2}$ м;
5				$k = 2$
Среднее значение				$m_o =$
$I_Э =$		$I_P =$	$\varepsilon = \lvert I_P - I_Э\rvert / I_P =$	$\ell =$ $R = 2{,}1\cdot10^{-2}$ м;

1) Запишите в таблицу 2 значение массы m_o дополнительных грузов (цилиндров), высоту h_o от верхнего положения груза до нижнего, а также среднее значение момента инерции <I> (из табл.1). Радиусы дополнительных грузов R, их число k и радиус шкива r указаны в таблице 2. 2) Закрепите на диске дополнительные цилиндры на одинаковом расстоянии от оси

вращения. 3) Измерьте расстояние ℓ от оси вращения до оси цилиндра или рассчитайте его по формуле: $\ell = \ell_o + n{\cdot}\Delta\ell$, где ℓ_o = 2,5 см, n = 1,2,3,4,5,6 - номер отверстия на диске, считая от оси вращения, $\Delta\ell$ = 1 см - расстояние между центрами соседних отверстий. 4) Повторите измерения, проведенные в пунктах 5-9 задания 1, занося результаты измерений в таблицу 2.

Обработка результатов измерений

Задание 1. 1) Для каждого опыта рассчитайте момент инерции диска I по формуле (2). 2) Найдите среднее значение $\langle I\rangle$ момента инерции, абсолютные погрешности $\Delta I=|\langle I\rangle - I|$ каждого измерения, среднюю абсолютную погрешность $\langle\Delta I\rangle$ и относительную погрешность $\varepsilon=\langle\Delta I\rangle/\langle I\rangle 100$ %. Запишите конечный результат в виде:

$$I = (\langle I\rangle \pm \langle\Delta I\rangle)\ кг{\cdot}м^2; \quad \varepsilon=\langle\Delta I\rangle/\langle I\rangle 100\% = \dots \%.$$

Задание 2. 1) По формуле (2) рассчитайте момент инерции $I_{общ}$ диска с дополнительными цилиндрами и найдите его среднее значение $\langle I_{общ}\rangle$. 2) Вычислите экспериментальное значение момента инерции $I_Э$ одного дополнительного цилиндра относительно оси вращения. Для этого учтем, что по принципу аддитивности момент инерции диска с закрепленными на нем цилиндрами $\langle I_{общ}\rangle=\langle I\rangle + kI_Э$, где $I_Э$ - момент инерции одного дополнительного цилиндра относительно оси вращения, k - число этих цилиндров, $\langle I\rangle$ - момент инерции диска без дополнительных цилиндров (найден в задании 1). Из последней формулы находим, что $I_Э=(\langle I_{общ}\rangle - \langle I\rangle)/k$. 3) Рассчитайте по формуле (3) момент инерции I_p одного дополнительного цилиндра относительно оси вращения. 4) Сравните между собой экспериментально полученное значение момента инерции $I_Э$ относительно оси вращения и его рассчитанное значения I_p относительно той же оси, найдя их относительное расхождение $\varepsilon = \{|I_P - I_Э|/I_P\}{\cdot}100$ % и сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1) Дайте определения следующих величин: радиус-вектор, перемещение, траектория, путь, скорость, ускорение, нормальное и тангенциальное ускорения, как они направлены? 2) Какое движение твердого тела называется вращательным? 3) Дайте определения угловой скорости и углового ускорения. 4) Как связаны линейные и угловые характеристики движения? 5) Чему равен момент силы относительно точки и оси? 6) Чему равен момент импульса частицы и тела? 7). Что такое момент инерции? Как он вычисляется для материальной точки и тела? Чему равен момент инерции цилиндра? В чем состоит теорема Штейнера? 8) В чем состоит основной закон динамики вращательного движения? 9) Объясните как изменяется механическая энергия системы диск-груз при выполнении данной лабораторной работы? Получите расчетную формулу для момента инерции диска.

Лабораторная работа 1-5
«Определение момента инерции тела, скатывающегося с наклонной плоскости»

Цель работы: определить момент инерции тела, скатывающегося с наклонной плоскости.

Теоретическое введение

Изучите разделы **кинематика и динамика** по теоретическому введению к лабораторной работе 1-3.

Работа и энергия. Если под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело испытывает перемещение $\vec{S}$, то при этом совершается **работа** $\boxed{A = \vec{F}\vec{S} = FS\cos\alpha}$ (α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$). Сила называется **консервативной**, если ее работа зависит только от начального и конечного положения тела. Работа такой силы не зависит от формы траектории и по замкнутой траектории равна нулю. **Энергия** – величина, характеризующая возможность совершения работы. Тело обладает потенциальной энергией, если на него действует консервативная сила. Консервативными силами в механики являются сила тяжести и силу упругости. В поле консервативной силы тяжести ($F=mg$), тело обладает **потенциальной энергией**

$$\boxed{U=mgh},$$

где m- масса тела, g - ускорение свободного падения, h - высота цента тяжести тела над горизонтальной поверхностью, принятой за нулевой уровень. **Кинетической энергией** T обладают движущиеся тела:

$$\boxed{T=mv^2/2}\ .$$

Закон сохранения механической энергии: если на тела системы действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы $E=U+T$ сохраняется:

$$\boxed{E=U+T=const}.$$

Силы, не являющиеся консервативными, называются **диссипативными** (в частности к ним относится сила трения). Если на тела системы действуют и диссипативные силы, то выполняется **закон сохранения и превращения энергии:** энергия не исчезает и не возникает из ничего, а лишь, переходит из одного вида в другой (например: механическая во внутреннюю).

Работа при вращательном движении постоянного момента силы (M_Z=const) определяется выражением: $\boxed{A= M_Z\Delta\varphi}$,

где $\Delta\varphi$ -угол поворота тела.

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси:

$$\boxed{T=I\omega^2/2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость.

При **плоском движении** все точки тела движутся в параллельных плоскостях (например, диск катится по прямой), а кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного движения центра масс тела и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}},$$

где v – скорость центра масс тела, I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Методика выполнения работы

В работе используются тела (рис.1), осью которых является цилиндрический стержень радиусом r. Одно из тел (рис.2) помещают на параллельные направляющие 2, образующие с горизонтом углы α_1 и α_2. Если тело отпустить (из фиксированного положения), то оно, скатываясь, достигнет нижней точки и, двигаясь далее по инерции, поднимется вверх по направляющим. Плоское движение тела можно представить: либо как со-

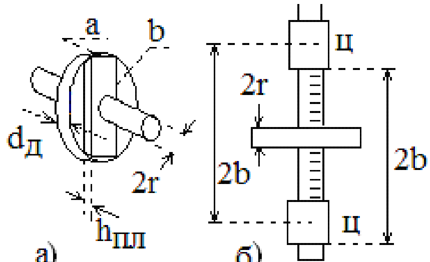

Рис. 1

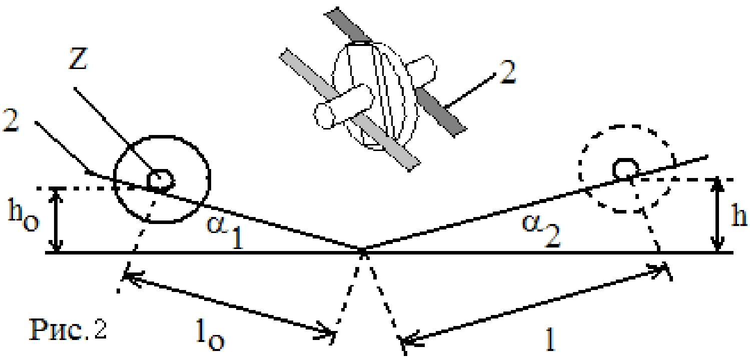

Рис. 2

вокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс; либо, как только вращательное движение вокруг мгновенной оси вращения (МОВ), положение которой непрерывно изменяется. В нашем случае эта МОВ (ось Z) проходит через точки касания направляющих со скатывающимся стержнем. При скатывании тело, опускаясь с высоты $h_0=\ell_0 sin\alpha_1\approx \ell_0\alpha_1$ (при α<<1 $\sin\alpha\approx\alpha$, где угол α выражается в радианах), проходит путь ℓ_0, а поднимаясь по инерции на высоту $h\approx\ell\alpha_2$, проходит путь ℓ. В нижней точке скорость поступательного движения центра масс $v=at$, $\ell_0=at^2/2$ => $v=2\ell_0/t$, а угловая скорость тела

$$\omega=v/r=2\ell_0/(rt), \tag{1}$$

где t- время скатывания. На скатывающееся тело действует момент силы сопротивления $M_{сп}$. Его работа на пути ℓ_0 равна $A= M_{сп}.\varphi_0$, где $\varphi_0= \ell_0/r$ - центральный угол φ поворота радиуса точки, движущейся по окружности, измеряемый в радианах, равен длине дуги S, которую пройдет точка при повороте, деленной на радиус R окружности $\varphi= S/R$. На рис.9 длина дуги равна пути ℓ_0., который прошел стержень радиуса r. Закон сохранения энергии на пути ℓ_0 имеет вид:

$$mgh_0=I\omega^2/2+ M_{сп}.\varphi_0, \tag{2}$$

где I – момент инерции (МИ) скатывающегося тела относительно МОВ, m- масса тела, включая массу стержня. Убыль потенциальной энергии тела при его скатывании с высоты h_0 и вкатывании на высоту h равна работе момента сил сопротивления $M_{сп}$ на пути $(\ell_0+\ell)$: $mgh_0-mgh = M_{сп}(\ell_0+\ell)/r$. Отсюда:

$$M_{сп}=mg(h_0-h)r/(\ell_0+\ell). \tag{3}$$

Подставляя (1) и (3) в (2) и учитывая, что $h_0/\ell_0=\alpha_1$ и $h/\ell=\alpha_2$, получаем формулу для определения МИ тела относительно МОВ динамическим способом:

$$I=\frac{mg\ell^2(\alpha_1+\alpha_2)t^2}{2\ell_0(\ell_0+\ell)}. \tag{4}$$

МИ I_0 тела относительно оси, проходящей через центр масс, можно найти из теоремы Штейнера: $I= I_0 +ma^2$. Откуда $I_0=I-ma^2=I-mr^2$. (5)
В данном опыте расстояние от оси вращения до центра масс $a=r$.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Аналитический расчет момента инерции (МИ) тела.

Тело (рис.1а) представляет собой диск ($m_Д$), скрепленный с прямоугольной пластиной ($m_{ПЛ}$, стороны $а$ и $в$) и общей цилиндрической осью (m_0). В таблицу 1 занести указанные на установке значения: диаметра $\boldsymbol{d}$ и толщины $\boldsymbol{d}_Д$ диска; размеры сторон $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пластины и ее толщину $\boldsymbol{h}_{ПЛ}$, общую длину $\boldsymbol{\ell}$ наружной части оси и ее диаметр $\boldsymbol{d}_О$. По формуле $m=\rho gV$ (где

ρ= 7,8.10^{3}кг/м^3 - плотность стали, V - объем соответствующего элемента) рассчитать массы **$m_Д$, $m_{ПЛ}$, $m_{оси}$** отдельных частей скатывающегося тела. Все расчеты сделать на отдельном листе, а их результаты внести в таблицы 1 и 2. Найти в теоретической части протокола формулы для расчета МИ отдельных частей тела и занести их в таблицу 2. Произвести вычисления (на том же листе) $I_Д$, $I_{ПЛ}$, $I_{оси}$. Согласно свойству аддитивности МИ всего тела ***I= $I_Д$+$I_{ПЛ}$+$I_{оси}$***. Вычислить ***I*** и записать его величину под таблицей 2.

Таблица 1

Диск		Пластина	Ось
d= мм		a= мм	ℓ= мм
$d_Д$= мм		b= мм	$d_О$= мм
$m_Д$= кг		h= мм	$m_{оси}$= кг
		$m_{ПЛ}$= кг	

Таблица 2

№	Элемент тела	Масса m, кг	Момент инерции I кг.м^2	
			формула	значение
1	Диск		$I_Д$	
2	Пластина		$I_{ПЛ}$	
3	Ось		$I_{оси}$	

Таблица 3

№	t, с	ℓ, м	α_1+α_1=
1			=0,25рад
2			
3			m=1,03кг
4			
5			r =0,0045мм
ср			ℓ_0=0,375м

I= $I_Д$+$I_{ПЛ}$+$I_{оси}$=
+ + + =

Таблица 4

№	b, см	t, с	$b^2\cdot10^{-2}$ м^2	$I\cdot10^{-5}$ кгм^2	α_1+α_1= =0,25рад
1					
2					m=1,03кг
3					r =0,0045мм
4					ℓ_0=0,375м
5					ℓ= м
ср					

Задание 2. Определение МИ тела динамическим методом.
1) Проверьте правильность положения установки. При выкатывании тело не должно смещаться к одной из направляющих. 2) Нажатием красной кнопки на самой установке зафиксируйте магнитом положение тела на расстоянии ℓ_0 (константа прибора) от нижней точки. 3) Нажатием кнопки *«Пуск»* электромагнит отключается и тело скатывается. Когда тело достигает нижней точки, секундомер отключается. Показания секундомера занести в таблицу 3. 4) Наблюдая далее движение тела по инерции, отметить расстояние ℓ, на которое оно поднимется, и занести в таблицу 3. Повторите измерения еще четыре раза.

Задание 3. Изучение зависимости МИ от распределения массы относительно оси вращения

В этом задании используется тело в виде крестовины, по которой могут перемещаться цилиндры (на рис.1б обозначены Ц). В нижнем положении тела, оно будет в безразличном равновесии, если цилиндры располагаются симметрично. Расстояние **2*b*** между центрами цилиндров равно расстоянию между торцами, которые можно измерить (рис.1б). 1) Значения параметров установки указаны в таблице 4. 2) Установите подвижные цилиндры на равном расстоянии b = 7 см от оси вращения, занесите это значение в таблицу 4. 3) Нажатием кнопки *«Сброс»* секундомера зафиксируйте электромагнитом тело на расстоянии ℓ_0 от нижней точки. 4) Кнопкой *«Пуск»* включается секундомер и освобождается крестовина. В нижнем ее положении секундомер останавливается. Занесите показание t секундомера в таблицу 4. 5) Зафиксируйте расстояние ℓ на которое крестовина поднимется и занесите в таблицу 4 (оно практически не меняется). 6) Повторите опыт еще 4 раза, уменьшая b на 1 см.

Обработка результатов измерений

Задание 2. 1) Найдите среднее значение $\langle t\rangle$ и $\langle \ell \rangle$. По формуле (4) рассчитайте (на отдельном листе) МИ I тела относительно МОВ, а затем по (5) МИ I_0 тела относительно оси, проходящей через центр масс, и запишите рядом с таблицей 3. 2) Оцените различие между МИ I в первом задании и I_0 во втором по формуле: $\varepsilon =[(I_0-I)/I]100\%$

Задание 3. 1) Рассчитайте (на отдельном листе) b^2 и МИ I по формуле (4) для каждого опыта и занесите в таблицу 4. 2) Постройте график зависимости $I=f(b^2)$. По графику определите $I_{кр}$ (крестовины) при b^2=0. График зависимости $I=f(b^2)$ имеет вид прямой (рис.3).

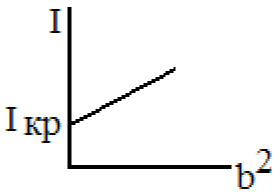

Рис. 3

Контрольные вопросы

1) Дайте определения следующих величин: радиус-вектор, перемещение, траектория, путь, скорость, ускорение, нормальное и тангенциальное ускорения, как они направлены? 2) Какое движение твердого тела называется вращательным? 3) Дайте определения угловой скорости и углового ускорения. 4) Как связаны линейные и угловые характеристики движения? 5) Чему равен момент силы относительно точки и оси? 6) Чему равен момент импульса частицы и тела? 7). Что такое момент инерции? Как он вычисляется для материальной точки и тела? Чему равен момент инерции кольца, диска, стержня, прямоугольной пластины? В чем состоит теорема Штейнера? 8) В чем состоит основной закон динамики вращательного движения? 9).Что означает аддитивность физической величины? Приведите примеры. 10) Как находят работу при вращательном движении? 11) Чему равна потенциальная энергия в поле силы тяжести и при упругой деформации? 12) Какими выражениями определяется кинетическая энергия при поступательном, вращательном и плоском движении? 13) В чем состоит закон сохранения механической энергии, закон сохранения и превращения энергии? 14) Как записывается закон сохранения энергии в данной лабораторной работе? Выведите расчетные формулы для момента инерции. 15) Какой вид имеет график зависимости $I=f(b^2)$ в задании 3? Как по нему определить момент инерции крестовины?

Лабораторная работа 1-6
«Проверка закона сохранения момента импульса»

Цель работы: проверить законы сохранения момента импульса и энергии при неупругом взаимодействии маятников, оценить погрешность измерений.

Теоретическое введение

Динамика вращательного движения. Момент силы (вращающий момент) характеризует способность силы вращать тело относительно точки или оси. **Момент силы** $\vec{M}$ **относительно точки** (точка О) равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$: $\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]}$ (см. рис.5а на стр. 25). **Модуль момента силы** относительно точки $\boxed{M = rF\sin\alpha}$, где α – угол между радиус-вектором и силой. Будем рассматривать вращение тела относительно неподвижной оси Z. В этом случае воздействие силы на тело определяется проекцией M_z момента силы на ось Z, которая называется **моментом силы относительно оси** $\boxed{M_Z = F_\perp \ell}$,

где $F_\perp$ – составляющая силы, лежащая в плоскости перпендикулярной оси вращения, ℓ **- плечо силы** – длина перпендикуляра, опущенного от оси вращения до линии, вдоль которой действует $F_\perp$ (см. рис.5 и рис.6 на стр.25). Аналогично моменту силы определяется **момент импульса частицы** относительно точки и оси:

$$\boxed{\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right]}, \boxed{L_z = pl = mvl}.$$

Здесь $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс частицы, v – скорость, ℓ -плечо импульса. Момент импульса и момент силы связаны **уравнением моментов:**

$$\boxed{dL_Z/dt = M_Z}.$$

Это соотношение также называют **основным законом динамики вращательного движения**. Оно означает, что скорость изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна моменту силы, действующей на тело, относительно этой оси.

Уравнение моментов для системы тел, вращающихся относительно неподвижной оси, имеет вид: $\sum M_{i,Z} = d(\sum L_{i,Z})/dt$, где $\sum M_{i,Z}$ – суммарный момент внешних сил относительно оси вращения, $\sum L_{i,Z}$ – суммарный момент импульсов тел относительно оси вращения. Если

$$\boxed{\sum M_{i,Z} = 0} \text{ то, } \boxed{\sum L_{i,Z} = \text{const}},$$

т.е. выполняется **закон сохранения момента импульса:** если сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю, то момент импульса системы остается постоянным.

При вращении инерционные свойства тела определяет момент инерции ***I*****. Момент инерции материальной точки (частицы) относительно некоторой оси** $\boxed{I = mr^2}$,

где m – масса частицы, r – кратчайшее расстояние от частицы до оси. Момент инерции тела равен сумме моментов инерции частиц, составляющих тело: $I = \sum I_i = \sum m_i r_i^2$ или $I = \int R^2 dm$. Тогда **момент импульса тела** относительно оси можно записать в виде

$$\boxed{L_Z = I\omega},$$

где $\omega = d\varphi / dt$ – угловая скорость (производная угла поворота по времени). Тогда уравнение моментов преобразуется в другую форму записи **основного закона динамики вращательного движения**:

$$\boxed{M_Z = I\varepsilon},$$

где $\varepsilon = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2$ – угловое ускорение тела.

Для каждого тела и оси вращения момент инерции тела надо рассчитывать отдельно. Зная момент инерции тела I_0 относительно оси, проходящей через центр масс, можно найти момент инерции тела I относительно любой параллельной оси Z, используя **теорему Штейнера:** $\boxed{I = I_0 + md^2}$, где m – масса тела, d – расстояние между осями.

Работа и энергия. Элементарная **работа внешней силы при вращении** твердого тела относительно оси $\boxed{dA = M_Z d\varphi}$, где $d\varphi$ – угол поворота. Если момент силы не зависит от угла поворота, то при конечном повороте на угол $\Delta\varphi$ **работа при вращательном движении** $\boxed{A = M_Z \Delta\varphi}$.

Кинетическая энергия тела при **поступательном** движении $\boxed{E_k = mv^2/2}$.

Кинетическая энергия тела при **вращательном** движении: $\boxed{E_k = I\omega^2 / 2}$.

Потенциальная энергия в поле сил тяжести $\boxed{E_n = mgh}$, где h – расстояние от нулевого уровня до центра тяжести тела.

Работа неконсервативных сил (это силы, работа которых зависит от формы траектории тела, в частности сила трения) равна изменению механической энергии: $A_{нек} = \Delta E$, где $E = E_k + E_n$ – механическая энергия. Если на систему действуют только консервативные силы, то $A_{нек} = 0$, $\Delta E = 0$ => $\boxed{E = const}$. Т. о., выполняется **закон сохранения механической энергии**: если на систему (и внутри нее) действуют только консервативные силы, то механическая энергия системы остается постоянной. Закон сохранения механической энергии - частный случай общего закона сохранения энергии:

энергия не возникает и не исчезает, а переходит из одного вида в другой.

Колебания - процессы, отличающиеся определенной степенью повторяемости во времени (качание маятника, колебания струны, изменение тока в колебательном контуре и т.п.). **Свободными или собственными колебаниями** называют колебания, которые происходят в системе, представленной самой себе, после того как ее вывели из положения равновесия. Вблизи положения устойчивого равновесия на тело действует **квазиупругая сила** $F_x = -kx$, где x – смещение от положения равновесия, k– коэффициент пропорциональности. (***Более подробно о колебаниях см. работу 1-7***)
Кинематическое уравнение гармонических колебаний:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}.$$

Здесь x – смещение от положения равновесия, A – амплитуда – максимальное смещение от положения равновесия, ω_0 – циклическая частота колебаний, $\omega_0 t+\alpha$ – фаза колебаний, α – начальная фаза. Таким образом, **гармоническими** называются колебания, происходящие по закону косинуса (или синуса). **Период** T колебаний – время одного полного колебания: $\boxed{T=t/N}$, где N – число колебаний за время t. **Частота** ν – число колебаний в единицу времени: $\boxed{\nu=N/t}$. Частота и период связаны соотношением $\boxed{\nu=1/T}$. **Циклическая частота** ω_0 равна $\boxed{\omega_0=2\pi\nu=2\pi/T}$. Т.к. гармонические колебания совершаются под действием квазиупругой силы, которая является консервативной, то при таких колебаниях выполняется закон сохранения механической энергии.

Физический маятник - это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной неподвижной оси O, не проходящей через центр тяжести С (рис.1). В положении равновесия линия OC, соединяющая ось вращения и центр тяжести, расположена вертикально. При колебаниях эта линия будет отклоняться от положения равновесия на некоторый угол φ.

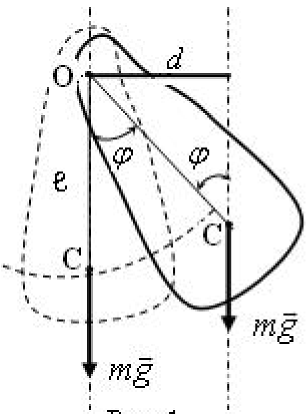

Рис.1

Ккинематическое уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha)},$$

(φ_m- амплитуда колебаний). Т. о., физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом T равными:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_z}}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mg\ell}}}.$$

(Подробный вывод для физического маятника приведен в работе 1-7)

Твердое тело можно представить как совокупность большого числа частиц. **Центр масс** тела есть точка пространства, положение которой определяет радиус-вектор

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-ой частицы тела, $\sum m_i$ - сумма масс всех частиц, т.е. масса всего тела.

Методика выполнения лабораторной работы

Оборудование: специальная установка, электронный секундомер, электронный измеритель угла, линейка.

Описание установки. Установка состоит из двух физических маятников (1) (масса m_1) и (2) (масса m_2), которые независимо могут колебаться вокруг общей оси О (рис. 2). Маятники снабжены магнитами М, с помощью которых они стягиваются и могут вращаться вокруг оси О, как единое целое. Для изменения момента инерции к маятнику 1 может быть прикреплен добавочный груз Г (масса $m_Г$). На каждом маятнике красной меткой указано положение центра масс (ц.м.), расстояния до которых от оси вращения равны соответственно, l_1 и l_2. Очевидно, центр масс маятника с добавочным грузом находится от оси вращения на расстоянии

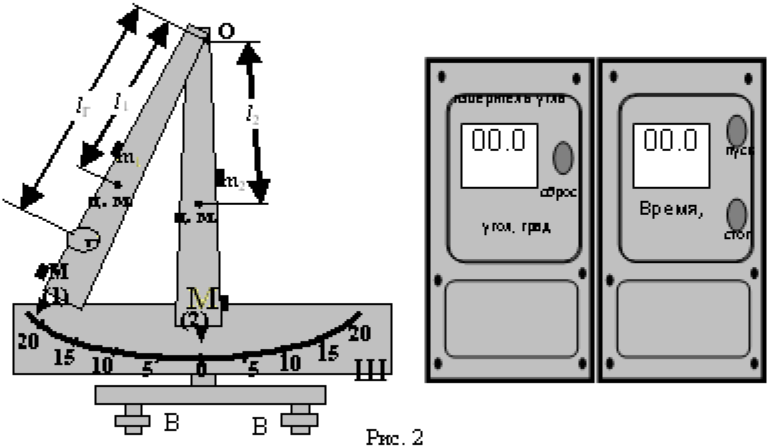

Рис. 2

$l_{1Г} = \dfrac{m_1 l_1 + m_Г l_Г}{m_1 + m_Г}$, где $l_Г$ – расстояние центра груза от оси вращения. Центр масс двух маятников с добавочным грузом находится от оси вращения на расстоянии $l_{12Г} = \dfrac{m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_Г l_Г}{m_1 + m_2 + m_Г}$. Угол отклонения маятника от положения равновесия определяется по шкале Ш. В положении равновесия маятники располагаются так, чтобы их визиры находились против нулевой отметки шкалы Ш. Это достигается с помощью винтов В в основании установки.

Если отклонить один из маятников, и закрепить в отклоненном положении, а второй отклонить и отпустить, то он будет совершать колебательное движение около положения равновесия. Если же один из маятников отклонить из положения равновесия на угол α (второй при этом оставить в положении равновесия) и отпустить, то после столкновения маятников они начнут двигаться как одно целое и отклонятся от положения равновесия на угол β.

Описание метода измерений. Два физических маятника, имеющие общую горизонтальную ось вращения образуют замкнутую систему в момент прохождения ими положения равновесия (в этом положении моменты сил тяжести равны нулю, а других моментов относительно оси вращения просто нет). Следовательно, при прохождении положения равновесия для этой системы выполняется закон сохранения момента импульса: $I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = I_1\vec{\omega}_1' + I_2\vec{\omega}_2'$, где I_1 и I_2 – моменты инерции маятников относительно оси вращения; $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ – их угловые скорости в положении равновесия до их соударения; $\vec{\omega}_1'$ и $\vec{\omega}_2'$ – их угловые скорости после взаимодействия. До взаимодействия второй маятник покоится ($\vec{\omega}_2$=0), а после взаимодействия оба маятника движутся как единое целое и поэтому закон сохранения момента импульса принимает вид: $I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega$ **(1)**. Моменты инерции маятников можно найти, зная их периоды колебаний по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$ **(2)**, где l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника. Таким образом, момент инерции маятника 1 с грузом $I_{1Г} = \dfrac{(m_1 + m_Г)gl_{1Г}T_{1Г}^{\,2}}{4\pi^2}$, где $l_{1Г}$ – расстояние от оси до центра масс маятника 1 с грузом. Момент инерции системы из двух маятников с грузом

$I_{12\Gamma}=\dfrac{(m_1+m_2+m_\Gamma)gl_{12\Gamma}T_{12\Gamma}^2}{4\pi^2}$, где $l_{12\Gamma}$ – расстояние от оси до центра масс системы из двух маятников с грузом. $T_{1\Gamma}$ и $T_{12\Gamma}$ – периоды колебания маятника 1 с грузом и системы из двух маятников с грузом. При отклонении маятника от положения равновесия на угол α центр масс его поднимется на высоту $h=l\left(1-cos\,\alpha\right)$. Так как до взаимодействия и после взаимодействия на маятник действует только консервативная сила тяжести, а момент силы сопротивления достаточно мал, из закона сохранения механической энергии $mgh=\dfrac{I\omega^2}{2}$ можно найти угловую скорость маятника в момент прохождения положения равновесия:

$\omega=\sqrt{\dfrac{2mg\,l(1-cos\,\alpha)}{I}}$ **(3),** где $\dfrac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия колеблющегося маятника при прохождении положения равновесия, mgh – потенциальная энергия маятника, отклоненного на угол α (при этом его центр масс поднят на высоту *h*). В наших опытах первоначально маятник 1 с грузом отклоняется от положения равновесия на угол α и, следовательно, его угловая скорость при прохождении положения равновесия (т.е. перед взаимодействием (столкновением) с маятником 2)) согласно (3) равна:

$$\omega_{1\Gamma}=\sqrt{\frac{2(m_1+m_\Gamma)gl_{1\Gamma}(1-cos\,\alpha)}{I_{1\Gamma}}} \qquad (4)$$

После столкновения система из двух маятников отклоняется на угол β, и следовательно, их начальная угловая скорость в положении равновесия:

$$\omega_{12\Gamma}=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2+m_\Gamma)gl_{12\Gamma}(1-cos\,\beta)}{I_{12\Gamma}}} \qquad (5)$$

Порядок выполнения работы

Задание. Определение момента импульса и кинетической энергии маятников.

С помощью винтов В (рис.2) установите маятники в свободном положении на нулевую отметку шкалы. 2) В табл. 1 указаны расстояния l_1, l_2 и l_Γ и значения m_1, m_2 и m_Γ. 3) Рассчитайте расстояние от оси вращения до центра масс маятников $l_{1\Gamma}$, $l_{12\Gamma}$, и занесите в таблицу 2. 4.) На измерителе времени (рис.2) нажмите кнопку «Стоп». Отведите в сторону маятник 1. Освободите маятник, одновременно нажав кнопку «Пуск» измерителя времени.

Таблица 1

ℓ_1,*м*	ℓ_2,*м*	$\ell_Г$,*м*	m_1,*кг*	m_2,*кг*	$m_Г$,*кг*
0,27	0,27	0,47	1,187	1,215	0,428

Таблица 2

$\ell_{1Г}$, *м*	$\ell_{12Г}$, *м*

$$l_{1Г} = \frac{m_1 l_1 + m_Г l_Г}{m_1 + m_Г},$$

$$l_{12Г} = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_Г l_Г}{m_1 + m_2 + m_Г}.$$

Таблица.3

N=10	$t_{1Г}=$ с	$T_{1Г}=$ с
	$t_{12Г}=$ с	$T_{12Г}=$,с

Отсчитайте 10 колебаний и нажмите на измерителе времени кнопку «Стоп». Определите по измерителю времени время $t_{1Г}$ десяти малых колебаний маятника 1 с грузом. Аналогично определите время 10 колебаний системы из двух маятников с грузом $t_{12Г}$. Полученные значения занесите в табл.3. Рассчитайте периоды колебаний маятников по формуле $T=t/N$ и запишите их значения в таблицу 3. 5) Рассчитайте моменты инерции маятников $I_{1Г}$, $I_{12Г}$.и полученные значения занесите в таблицу 4.

$$I_{1Г} = \frac{(m_1 + m_Г) g l_{1Г} T_{1Г}^{\,2}}{4\pi^2},$$

Таблица 4

$I_{1Г}$,*кг*м*^{2}	$I_{12Г}$, *кг*м*^{2}

$$I_{12Г} = \frac{(m_1 + m_2 + m_Г) g l_{12Г} T_{12Г}^2}{4\pi^2}.$$

6) Отклоните маятник 1 с грузом на угол α (по указанию преподавателя) и запишите его значение в табл. 5. Маятник 2 при этом находится в положении равновесия. Нажмите на измерителе угла (рис.2.) кнопку «Сброс» - измеритель будет показывать 0. Отпустите маятник 1 и определите угол β, на который отклонится система из двух маятников с грузом после взаимодействия – угол отклонения после взаимодействия будет показан на измерителе угла. Опыт повторите 5 раз и данные запишите в таб. 5, рассчитайте среднее значение угла β. 7) По формулам (4) и (5) рассчитайте угловые скорости маятников до взаимодействия и после взаимодействия, и запишите в таблицу 6. 8) Рассчитайте моменты импульсов маятников до и после взаимодействия и запишите их значения в таб.7. 9) Оцените точность, с которой выполняется в данной работе закон сохранения момента импульса:

Таблица 5

α	№	β с грузом
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	среднее	

$$\gamma = \frac{I_{1\Gamma}\omega_{1\Gamma} - I_{12\Gamma}\omega_{12\Gamma}}{I_{1\Gamma}\omega_{1\Gamma}} * 100\%$$

10) Рассчитайте энергию маятников до и после взаимодействия. Рассчитайте коэффициент восстановления для первого и второго случая и результаты занесите в табл.8. Коэффициент восстановления механической энергии К – отношение кинетических энергий системы тел: после удара $E_{кон}$ к энергии до удара $E_{нач}$: $K = E_{кон} / E_{нач.}$ 11) Сделайте выводы.

Таблица 6

$\omega_{1Г}$, c^{-1}	$\omega_{12Г}$, c^{-1}

Таблица7

$I_{1Г}\omega_{1Г}$, кг*м^2/с	$I_{12}\omega_{12}$, кг*м^2/с

Таблица 8

Кинетическая энергия до взаимодействия $E_{нач}$	$\frac{I_{1Г}\omega_{1Г}^2}{2}$, Дж	Кинетическая энергия После взаимодействия $E_{кон}$	$\frac{I_{12Г}\omega_{12Г}^2}{2}$, Дж
Коэффициент восстановления $K = E_{кон} / E_{нач}$			

Контрольные вопросы.

1) Чему равен момент импульса частицы и твердого тела? Как направлен вектор момента импульса? 2) Как определяется момент инерции частицы и тела? Сформулируйте теорему Штейнера. 3) Запишите уравнение моментов и основной закон динамики вращательного движения, поясните буквенные выражения. 4) Чему равна кинетическая энергия вращающегося тела? 5) Как определяется работа при вращательном движении? 6) Что такое физический маятник, чему равен период его колебаний? 7) Что такое центр масс? Как рассчитывают расстояние до центра масс системы из двух маятников? 8) Запишите закон сохранения момента импульса системы из двух маятников. 9) От чего зависит угловая скорость маятника перед взаимодействием? Как находится угловая скорость маятника 1 до взаимодействия с маятником 2 в нижней точке? Какие величины измеряют для этого? 10) Как находится угловая скорость системы маятников после столкновения в нижней точке? Какие величины измеряют для этого? 11) Как в лабораторной работе рассчитываются моменты инерции маятников, какие величины измеряют для этого? 12) Чему равна кинетическая энергия маятника: перед взаимодействием? после взаимодействия?

Лабораторная работа 1-7
«Определение положения центра тяжести физического маятника и ускорение свободного падения методом обращения. Изучение затухающих колебаний»

Цель работы: экспериментальное нахождение ускорения свободного падения методом обращения, определение положения центра тяжести физического маятника, определения коэффициента затухания.

Теоретическое введение

Колебаниями называются процессы, отличающиеся определенной степенью повторяемости (например: качание маятника, колебания струны, изменение тока в колебательном контуре и т.п.). **Свободными или собственными колебаниями** называют такие колебания, которые происходят в системе, представленной самой себе, после того как ее вывели из положения равновесия. При вынужденных колебаниях на систему действует внешняя периодически меняющаяся сила.

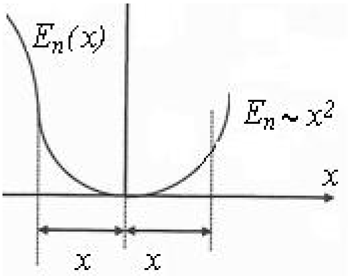

Рис. 1

Вблизи положения равновесия, т.е. минимума потенциальной энергии, движение частицы имеет колебательный характер. Выберем нулевой уровень отсчета E_n и начало координат так, что бы минимум $E_п = 0$ соответствовал точке $x = 0$ (рис.1). Вблизи минимума, т.е. при достаточно малых x, любая функция $f(x)$ имеет вид параболы. Следовательно, для достаточно малых x $E_n(x)$~x^2 Такое движение называют малыми колебаниями. Обозначим коэффициент пропорциональности k/2, где “ k ” некоторая постоянная. Тогда $E_n(x) = \dfrac{kx^2}{2}$. Из уравнения связи консервативной силы и потенциальной энергии получим: $F_x = -\dfrac{\partial E_n}{\partial x} = -kx$. Следовательно, вблизи минимума потенциальной энергии на частицу действует такая же сила, как сила упругости. Ее называют **квазиупругой силой**. Запишем второй закон Ньютона: $\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x = ma_x$.

Т.к. ускорение $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ то второй закон Ньютона запишется:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \;;\quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \;;\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Величина $\frac{k}{m} > 0$;обозначим ее $\boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}$. После этой подстановки получим **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}.$$

Решением такого дифференциального уравнения являются функции вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \;;\; x = A\sin(\omega_0 t + \alpha').$$

Гармоническими называются колебания, происходящие по закону косинуса (или синуса). Поскольку $\cos\varphi = \sin(\varphi - \pi/2)$ то от первого уравнения всегда можно перейти ко второму и наоборот. В дальнейшем, для определенности, будем использовать первое из уравнений. Т.о. **кинематическим уравнением гармонических колебаний (или свободных незатухающих)** имеет вид:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}$$

Здесь x – смещение от положения равновесия, A – амплитуда – максимальное смещение от положения равновесия, ω_0 – циклическая частота колебаний, $\omega_0 t+\alpha$ – фаза колебаний, α – начальная фаза. **Период** T колебаний – время одного полного колебания: $\boxed{T=t/N}$, где N – число колебаний за время t. **Частота** ν – число колебаний в единицу времени: $\boxed{\nu=N/t}$. Частота и период связаны соотношением $\boxed{\nu=1/T}$. **Циклическая частота**

$$\boxed{\omega_0=2\pi\nu=2\pi/T}.$$

Проекция V_x скорости колеблющейся частицы:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V_x = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega_0 t + \alpha)\right] \Rightarrow V_x = -A\omega\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Обозначим $\boxed{V_m = A\omega_0}$. Тогда: $\boxed{V_x = -V_m \sin(\omega_0 t + \alpha)}$,

где V_m амплитуда скорости. Видно, что скорость, так же как и x, меняется по гармоническому закону.

Незатухающие собственные гармонические колебания возникают при действии квазиупругой силы, т.е. силы пропорциональной смещению. Так же как и сила упругости - это консервативная сила. Поэтому выполняется закон сохранения механической энергии. Кинетическая и потенциальная энергия частицы при гармонических колебаниях: $E_к = mV^2/2 \;;\; E_п = kx^2/2$. Подставим в первое из этих выражений

$\boxed{V_x = -V_m \sin(\omega_0 t + \alpha)}$, во второе - $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}$ (для краткости обозначим φ=$\omega_0 t + \alpha$). $E_k = \dfrac{mV_m^2 \sin^2 \varphi}{2}$; $E_n = \dfrac{kA^2 \cos^2 \varphi}{2}$. Подставим $V_m = A\omega_0$ и найдем полную механическую энергию как сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + E_n \Rightarrow E = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{kA^2 \cos^2 \varphi}{2}.$$

В первом слагаемом заменим $m\omega_0^2 = k$ Тогда $E = \dfrac{kA^2}{2}(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$.

Выражение в круглых скобках равно единице. Следовательно $\boxed{E = \dfrac{kA^2}{2}}$ - **полная механическая энергия** при гармонических колебаниях равна максимальной потенциальной энергии, но учитывая, что $kA^2 = mV_m{}^2$ получим, что **полная энергия** равна и максимальной кинетической энергии тела:

$$\boxed{E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mV_m^2}{2}}$$

Пружинный маятник - это твердое тело, соединенное с пружиной и совершающее колебания в результате действия силы упругости. Очевидно, что действие силы упругости аналогично действию квазиупругой силы. Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом Т:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Дифференциальное и кинематическое уравнения колебаний пружинного маятника соответственно имеют вид:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \text{ и } \boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}.$$

Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести (рис.2). Ось вращения маятника на рис.4 проходит через точку О и перпендикулярна плоскости рисунка. В положении равновесия линия, соединяющая ось вращения и центр тяжести (ОС), расположена вертикально. При колебаниях эта линия будет отклоняться от положения равновесия на некоторый угол φ. При этом возникает момент силы тяжести, который стремиться вернуть маятник в положение равновесия:

$M_z = Fd \Rightarrow F = mg\ ;\ d = \ell \cdot sin\varphi$, где m – масса маятника, d – плечо

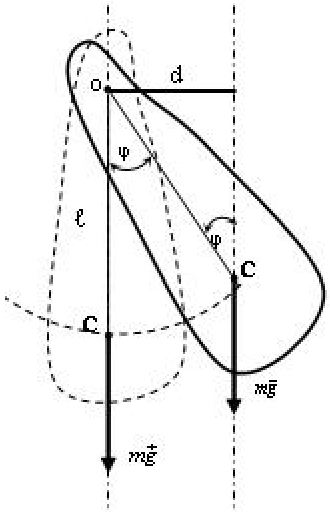

рис. 2

силы, ℓ – расстояние от оси вращения (точка О) до центра тяжести (точка “С”). Таким образом: $M_z = -mg \cdot \ell \cdot \sin\varphi$. Знак “–” связан с тем, что отклонение маятника происходит в одну сторону (на рис. “против часовой стрелки”), а момент силы вращает в противоположную сторону (на рис. “по часовой стрелке”). Запишем закон динамики вращательного движения:

$$M_z = I_z \varepsilon = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow -mg\ell\, sin\varphi = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Для малых углов отклонения ($\varphi < 8^\circ$) $\sin\varphi \approx \varphi$, следовательно:

$$-mg\ell\varphi = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg\ell}{I_z}\varphi = 0.$$ Обозначим $\omega_0^2 = \frac{\mathrm{mg}\ell}{\mathrm{I_z}}$, имеем $\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0}$.

Это **дифференциальное уравнение колебаний физического маятника**. Решением этого уравнения является **кинематическое уравнение колебаний физического маятника**: $\boxed{\varphi = \varphi_m\, cos(\omega_0 t + \alpha)}$, где φ_m - амплитуда колебаний. **Циклическая частота** ω_0 **и период Т колебаний физического маятника** соответственно равны: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_z}}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mg\ell}}}$, где I_z – момент инерции маятника относительно оси вращения, ℓ – расстояние от оси вращения до центра тяжести.

Рис. 3

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на длинной нерастяжимой нити (рис. 3). Его можно рассматривать как частный случай физического маятника. Для материальной точки момент инерции $I_z = m\ell^2$, где в случае математического маятника ℓ - длина нити. Следовательно, :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_z}} = \sqrt{\frac{mg\ell}{m\ell^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}.$$

Математический маятник при небольших углах отклонений совершает гармонические колебания.

Затухающие колебания. Рассмотрим колебания, при которых кроме квазиупругой силы $F_{упр}$, действует и сила трения $F_{сопр}$ (сопротивления). Во многих, практически важных случаях, действует сила вязкого трения, которая при небольших скоростях колебаний равна $\vec{F}_{сопр} = -r\vec{V}$ где r - коэффициент сопротивления. Для одномерного колебания вдоль оси “x”, проекция второго закона Ньютона на эту ось будет иметь следующий вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} = m\vec{a} \Rightarrow \quad -kx - rV_x = ma_x \ ; \ V_x = \frac{dx}{d\,t}\dot{x} \ ; \ a_x = \frac{d^2x}{d\,t^2} \Rightarrow$$

$$-kx - r\frac{dx}{d\ t} = m\frac{d^2x}{d\ t^2} \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{d\ t^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{d\ t} + \frac{k}{m}x = 0$$

Обозначим: $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} \ ; \ 2\beta = \frac{r}{m}}$, где β - **коэффициентом затухания**. Тогда

$$\boxed{\frac{d^2x}{d\ t^2} + 2\beta\frac{dx}{d\ t} + \omega_0^2 x = 0}.$$

Это **дифференциальное уравнение затухающих колебаний.** В нем ω_0 - **собственная циклическая частота**, которую имела бы система в отсутствии сил трения. Решение данного дифференциального уравнения - **кинематическое уравнение затухающих колебаний** имеет вид.

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} cos(\ \omega t + \alpha\ )},$$

где e=2,7 – основание натурального логарифма (экспонента), A_0-амплитуда в начальный момент времени, α - начальная фаза. $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ - циклическая частота затухающих колебаний (в этом уравнении $\omega_0 > \beta$, иначе колебаний не будет). График смещений при затухающих колебаниях показан на рис.4. Амплитуда затухающих колебаний $\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$ убывает по экспоненциальному закону. График амплитуды приведен на рис.5. Колебания со временем постепенно прекращаются т.к. механическая энергия вследствие действия сил трения переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде тепла). Скорость затухания определяется величиной β. Чем больше β, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний.

Отношение амплитуд, отличающихся по времени на период, называется декрементом затухания. Логарифм отношения амплитуд отличающихся на период называется **логарифмическим декрементом затухания** λ :

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta\cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} \Rightarrow \lambda = \ln\frac{e^{-\beta\cdot t}}{e^{-\beta\cdot t}\cdot e^{-\beta\cdot T}} = \ln e^{\beta\cdot T} \Rightarrow$$

$\boxed{\lambda = \beta T}$ - связь логарифмического декремента с коэффициентом затухания. Иногда для характеристики скорости затухания используют время релаксации τ, это время за которое амплитуда колебаний уменьшается в “e” раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta\cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e = \frac{e^{-\beta\cdot t}}{e^{-\beta\cdot t}\cdot e^{-\beta\cdot\tau}} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{\tau}}$$

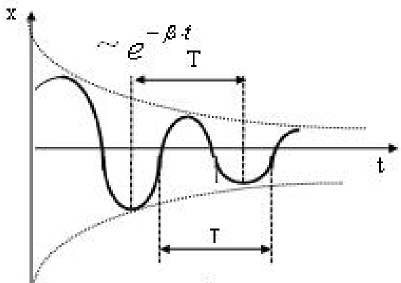

рис 4

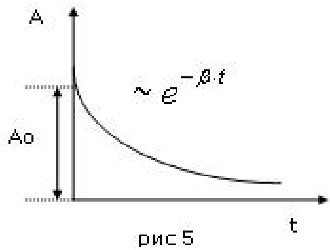

рис 5

Методика выполнения лабораторной работы

Физический маятник – любое тело, имеющее ось вращения, не проходящую через центр его масс. В нашем случае (рис.6) это стальная полоса 1 переменного сечения, на протяжении которой имеется несколько отверстий, с помощью которых маятник крепят на ось вращения. На одном конце имеется отверстие 2, а на другом ряд отверстий 3, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Это позволяет получать физический маятник с различными периодами колебаний. Изменить положение центра масс маятника можно с помощью дополнительного груза 4. Физический маятник, имеющий две оси колебаний, на которых его можно поочередно подвешивать, называется **оборотным.**

Для измерения ускорения свободного падения g данной работе используется зависимость периода T колебаний маятника от величины g. Оборотный маятник является физическим, и период его колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{I / mg\ \ell_c} = 2\pi\sqrt{\left(I_c + m\ell_c^2\right)/ mg\ell_c}\ , \qquad (1)$$

где I – момент инерции маятника относительно точки подвеса. Его можно рассчитать, используя теорему Штейнера $I = I_c + m\ell_c^2$, где I_c – момент инерции относительно центра масс, m – масса маятника, ℓ_c – расстояние от центра масс маятника до точки подвеса. Для физического маятника не удаётся измерить с достаточной точностью период *T*, величины *I*, ℓ_c необходи мые для расчёта *g*

. Поэтому разработан метод, позволяющий с помощью оборотного маятника исключить эти величины из расчётной формулы. Допустим, что удалось найти такое положение осей вращения, что периоды колебаний маятника относительно этих осей совпадают: $T_1 = T_2 = T_0$. Тогда с учётом формулы (1) получим:

$$T_o^2 = 4\pi^2\left(I_c + ml_1^2\right)/\,mgl_1;\ T_o^2 = 4\pi^2\left(I_c + ml_2^2\right)/\,mgl_2. \qquad (2)$$

Здесь l_1 и l_2 – расстояния от первой и второй осей до центра масс маятника, а их сумма $l_1 + l_2 = l_0$ есть расстояние между осями, которое можно измерить достаточно точно. Исключая из уравнений (2) величину I_c, получаем расчётную формулу для ускорения *g* свободного падения:

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 l_o}{T_o^2}}. \qquad (3)$$

Этот метод позволяет с высокой точностью определить *g*, если найти такое расположение осей на стержне, при котором периоды колебаний маятника совпадают.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника. В данной работе время измеряется электронным секундомером, который включается клавишей на задней панели.

1) Подвесьте маятник на отверстие (2) и включите секундомер. 2) Отклоните маятник на угол прядка 10^o. Отпустите маятник и одновременно нажмите кнопку «Пуск» секундомера. 3) Отсчитав N = 20 колебаний, нажмите кнопку «Стоп». Запишите время колебаний t_1 на оси (2) в таб.1. 4) Рассчитайте период $T_1=t_1/N$ на этой оси и занесите в таб.1. 5) Повесьте маятник на нижнее из отверстий 3 (его номер на самом маятнике 1). 6) Измерив время t_2 для N=10 колебаний, рассчитайте период $T_2=t_2/N$ и занесите t_2 и T_2 в таб.2. Расстояния l_2 между центрами отверстия (2) и отверстиями (3) указаны в таб.2. 7) Уменьшая каждый раз расстояние l_2 на одно отверстие (см. таб.2) повторите измерение периода T_2. Результаты измерений занесите в таб.2. 8) Постройте график зависимости периода T_2 от расстояния между осями l_2 (рис.8). На этом же графике из точки, соответствующей периоду T_1 ($T_1=T_0$), проведите прямую параллельную оси l_2 (рис.8). Точка пересечения этих прямых определяет расстояние между осями l_0 (рис.8), на которых

периоды колебаний оборотного маятника одинаковы, т. е. $T_1 = T_2 = T_0$. По формуле (3) $\boxed{g = \dfrac{4\pi^2 l_o}{T_o^2}}$ рассчитайте значение ускорения свободного падения g. 10) Оцените отклонение найденной величины g от табличного значения для Москвы (g_0 = 9,81 м/с^2) по формуле: $\varepsilon_g = \dfrac{g - g_0}{g_0} 100\%$.

Таблица 1

t₁*= *с	***N* = 20**	***T₁*= *с***

Таблица 2

№	ℓ_2,м	t_2, с	N	T_2, с
1	0.46		10	
2	0,45		10	
3	0,44		10	
4	0,43		10	
5	0,42		10	
6	0,41		10	
7	0,40		10	
8	0,39		10	
9	0,38		10	
10	0,37		10	
11	0,36		10	
12	0,35		10	
13	0,34		10	

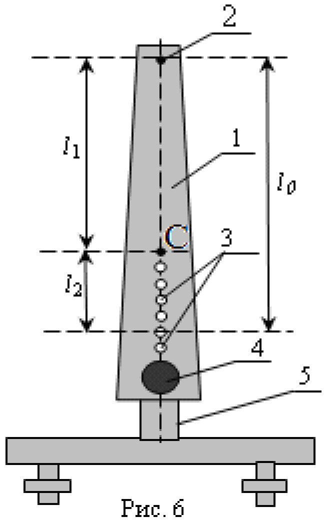

Рис. 6

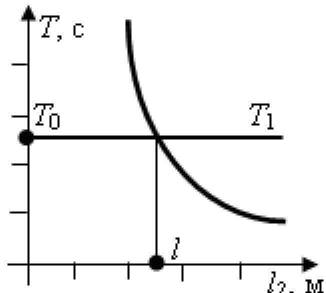

Рис. 7

Задание №2. Определение коэффициента затухания β.
Установка состоит из физического маятника в виде пластины (рис.8), которая может совершать колебания относительно оси «О». Угол

отклонения измеряется по шкале «Ш», время колебаний измеряется электронным секундомером. (Внимание – электронный секундомер показывает только десятки секунд, если время больше ста секунд, то на секундомере будут показаны две цифры секунд, например, при времени 124,6с показания секундомера 24,6с). К маятнику может быть добавлен груз «Г», который завинчивается в резьбовые отверстия на пластине маятника. На маятнике красной точкой отмечено положение центра масс относительно оси колебаний ℓ=0,27м.

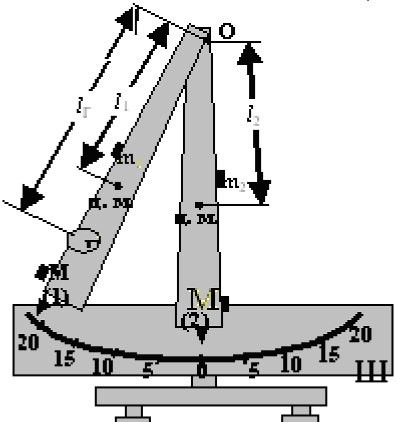

Рис. 8

Таблица 3

N колебаний	A, градус	*lnA*	*t,с*	*T,с*
0				
20				
40				
60				
80				
100				

1) Снимите с маятника дополнительный груз «Г» если он на нем установлен. Отклоните маятник в крайнее правое положение и зафиксируйте его с помощью магнитного держателя. Запишите угол отклонения в таб.3 в строку, где N равно нулю. 2) Включите секундомер клавишами на задней панели. Освободите маятник поворотом рычажка магнитного держателя, одновременно нажмите кнопку «пуск» на передней панели секундомера и начните отсчет 20 полных колебаний. 3) В момент окончания двадцатого колебания определите по шкале «Ш» угол отклонения маятника, запишите его в таб.3 в строку, где N равно 20. 4) Продолжайте отсчет следующих 20 колебаний и в момент окончания двадцатого колебания определите по шкале «Ш» угол отклонения маятника, запишите его в таб.3 в строку, где N равно 40. 5) Продолжайте отсчет как указанно в пп. 3,4 до тех пор, пока маятник не совершит 100 полных колебаний. 6) В момент окончания сотого колебания нажмите кнопку «стоп» секундомера. Запишите показания секундомера в таб.3. Работу выполнять удобнее вдвоём, один ведет отсчет колебаний и измеряет амплитуду, второй записывает результаты в таб.3.

Расчеты 1) Амплитуда *A(t)* затухающих колебаний равна $A(t)=A_0e^{-\beta t}$. Т.к. $t=TN$, где Т период колебаний, то $\boxed{A(t)=A_0e^{-\beta TN}}$. Постройте зависимость амплитуды колебаний от числа колебаний N, график должен иметь вид, показанный на рис. 5 (на горизонтальной оси вместо времени t будет число колебаний из таб.3). 2) Прологарифмируем *A(N)*: $lnA(N)=lnA_0-\beta TN$. Вычислите натуральный логарифм амплитуды *lnA* и запишите в таб.3. 3) Вычислите период затухающих колебаний $T=t/N$, запишите в таб.3 4) Постройте график зависимости логарифма амплитуды *lnA* от числа колебаний *N*. График зависимости *lnA(N)* должен иметь вид, показанный на рис.10. 5) В зависимости $lnA(N)=lnA_0-\beta TN$ угол наклона получившейся прямой равен βT. По формуле $\boxed{\beta=\Delta(lnA(N))/T\Delta N}$ (см. рис. 9) рассчитайте коэффициент затухания β, запишите в таб.4. 7) Рассчитайте время релаксации $\tau=1/\beta$, запишите в таб.4. 8) Определите логарифмический декремент затухания по формуле $\lambda=\beta T$**,** запишите в таб.4. 9) Убедитесь, что при небольших коэффициентах затухания β период затухающих колебаний *T* мало отличается от периода собственных колебаний системы T_0. Для этого по формуле $T_0=T\sqrt{\dfrac{1}{1+(\lambda/2\pi)^2}}$ рассчитайте T_0, и по формуле $\delta_T=\dfrac{T-T_0}{T}100\%$ рассчитайте относительное отклонение. 10) По формуле $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}}$, можно определить момент инерции маятника: $I=T_0^2mg\ell/4\pi^2$ (ℓ и m указаны в таб.5). Результаты расчета *I* запишите

Таблица 4

β, c^{-1}	τ, c	λ	I, *кг*м*^{2}

Таблица 5

ℓ, *м*	m, кг	$\ell_Г$, *м*	$m_Г$, кг
0,27	2,40	0,47	0,428

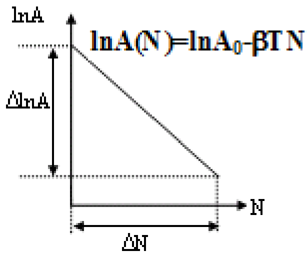

Рис. 9

в таб.4.

Задание №3. Определение момента инерции маятника с грузом. 1)Закрепите на маятнике груз в самом нижнем положении. 2) Отклоните маятник на 8^0-10^0 градусов, отпустите его и одновременно включите кнопку «пуск» секундомера. 3) Отсчитайте время 20 колебаний и в момент окончания 20-го колебания нажмите кнопку «стоп» секундомера. Данные запишите в таб.6. 4) Вычислите период колебаний $T_Г=t/20$, запишите в таб.6) Т.к. трение мало, можно считать, что эти колебания не затухающие. 5) По формуле $\ell_М = \dfrac{m\ell + m_Г\ell_Г}{m + m_Г}$ рассчитайте положение центра масс маятника $\ell_М$ с грузом, запишите в таб.6 ($\ell_Г$ и $m_Г$ указаны в таб.5). Из формулы $T_Г = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_Г}{(m + m_Г)g\ell_М}}$ можно найти момент инерции маятника с грузом: $I_Г = T_Г^2(m+m_Г)g\ell_М/4\pi^2$. Результат расчета запишите в таб.6 6) Если принять груз за материальную точку, то момент инерции маятника с грузом равен: $I_{Г,Р}=I + m_Г \ell_Г^2$. Рассчитайте по этой формуле $I_{Г,Р}$ (I – момент инерции из задания 1). Сравните измеренное значение маятника с грузом $I_Г$ с расчетным $I_{Г,Р}$. Найдите относительную ошибку : $\delta = \dfrac{\left|I_Г - I_{Г,Р}\right|}{I_{Г,Р}}100\ \%$, результат запишите в таб.6.

Таблица 6

$t,с$	$T_Г,с$	$\ell_М$, м	$I_Г$, *кг*м*^{2}	$I_{Г,Р}$, *кг*м*^{2}	δ

Контрольные вопросы

1) Что такое колебания? Какие колебания называются свободными? гармоническими? 2). Какой вид имеют кинематическое и дифференциальное уравнения гармонических колебаний? 3) Что такое амплитуда, период, частота, циклическая частота и фаза колебаний? 4) Что называется физическим маятником? Какой вид имеют дифференциальное и кинематическое уравнения колебаний физического маятника. 5) Чему равны циклическая частота и период колебаний физического маятника? 6) Что представляют собой пружинный и математический маятники? Чему равны периоды их колебаний? 7) Какой вид имеют дифференциальное и кинематическое уравнения затухающих колебаний? Чему равны их амплитуда и частота? Что такое логарифмический коэффициент затухания? Какова связь между временем релаксации, коэффициентом затухания и логарифмическим декрементом затухания? 8) Какой маятник называется оборотным? 9) Как с помощью оборотного маятника можно определить ускорение свободного падения? Выведите расчётную формулу. 10) Как в данной работе вычисляют период колебания маятника? Как находят расстояние l_0 между осями, при котором $T_1 = T_2 = T_0$?

Лабораторная работа 1-8
«Определение скорости звука в воздухе методом стоячих волн»

Цель работы: изучение законов волнового движения и измерение скорости звука в воздухе.

Теоретическое введение

Изучите тему «Колебания» по теоретическому введению к лабораторной работе 1-7.

Волны. Процесс распространения колебаний в пространстве называется **волной.** В **упругой** волне колеблются частицы упругой среды (твердой, жидкой или газообразной). Если в среде возбудить колебания частиц, то вследствие взаимодействия между частицами, эти колебания будут передаваться от частице к частице с некоторой скоростью v – возникает бегущая волна.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около положения равновесия. **Волна** называется поперечной, если колебания частиц перпендикулярны направлению распространения волны (рис.1). **В продольной волне** частицы колеблются вдоль направления распространения волны (рис.2). В жидкостях и газах возникают только продольные волны, в твердых телах и продольные, и поперечные.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени *t*, называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. По форме волновой поверхности различают плоские волны (волновая поверхность - плоскость), сферические волны (волновая поверхность - сфера) и т.п. Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду Т колебаний частиц, называется **длиной волны λ** (рис. 3). Также **длину волны** можно определить, как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе. Так как за время равное периоду $t = T$ волна проходит расстояние равное длине волны, то длина волны $\boxed{\lambda = \mathrm{v}T = \frac{\mathrm{v}}{\nu}}$, где v – скорость распространения волны, T и ν – период и частота колебаний частиц среды в волне. Зная длину волны и частоту, можно найти скорость распространения волны $\boxed{\mathrm{v} = \lambda\nu}$.

Уравнением волны называется выражение, которое дает возможность рассчитать смещение y колеблющейся частицы от положения равновесия как функцию ее координаты *x* и времени *t*. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси *x* (рис.3 и рис.4). Если источник волн, находящийся в плоскости x=0, совершает гармонические колебания по

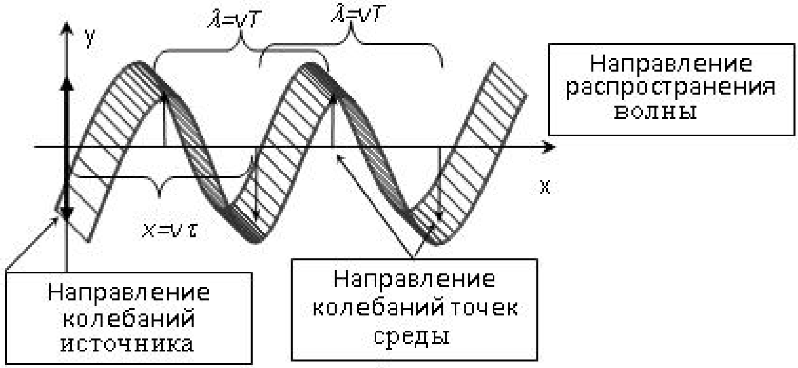

рис. 1

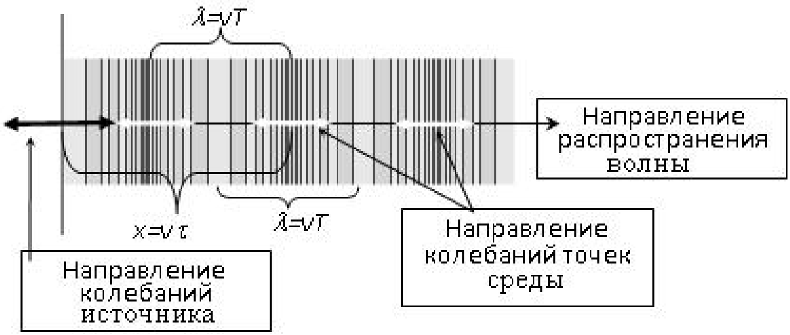

рис. 2

закону $y = A\cos(\omega t + \alpha)$, то колебания частиц среды в произвольной плоскости $x \neq 0$ будут отставать от колебаний источника на время $\tau = \dfrac{x}{v}$ – это время, за которое колебания доходят от источника до плоскости $x \neq 0$. Поэтому колебания частиц в плоскости $x \neq 0$ будет иметь вид:

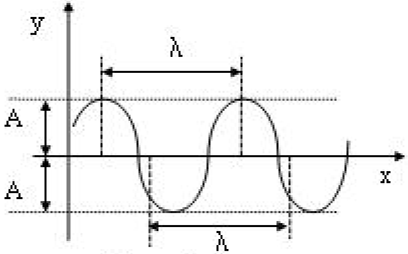

Рис. 3

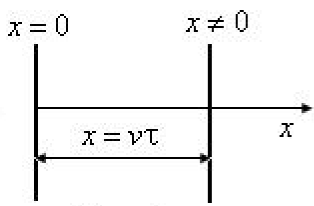

Рис. 4

$y(x,t) = A\cos\left[\omega(t-\tau)+\alpha\right]$ или $\boxed{y(x,t) = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{v})+\alpha\right]}$.

Это **уравнение плоской бегущей волны**, распространяющейся вдоль оси *x*. Преобразуем это выражение: $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Величина $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}}$ - **волновое число**. Раскрыв скобки и подставив k в уравнение волны, получим каноническую форму записи **уравнения плоской бегущей волны**:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)}.$$

Таким образом, смещение $y(x,t)$ точек среды от положения равновесия является функцией двух переменных: координаты x частицы среды и времени t. Из уравнения волны следует, что в плоской бегущей волне частицы среды колеблются с одинаковой амплитудой A и циклической частотой ω, но с различными фазами $\varphi = \omega t - kx + \alpha$. На рис. 3 показаны значения смещений частиц в волне для фиксированного момента времени.

Стоячие волны образуются при наложении волн с одинаковой амплитудой, распространяющихся навстречу друг другу. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей на встречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну. Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу: $y_1 = A\cos(\omega t - kx + \alpha_1)$ и $y_2 = A\cos(\omega t + kx + \alpha_2)$. Сложим эти уравнения и преобразуем результат по формуле для суммы косинусов:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2})\cos(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}).$$

Выберем начало отсчета x так чтобы $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, а начало отсчета времени t так, чтобы сумма $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$. Тогда **уравнение стоячей волны** примет вид:

$$\boxed{y = 2A\cos(\kappa x)\cos\omega t} \text{ или } \boxed{y = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\cos\omega t}.$$

Из формулы видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания с той же частотой ω, что и встречных волн. Сомножитель

$$\boxed{A_{ст} = \left|2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\right|}$$

не зависит от времени, а зависит от координаты x колеблющейся частицы, и называется **амплитудой стоячей волны.**

Таким образом, в стоячей волне частицы среды колеблются с различными амплитудами, но одинаковыми фазами $\varphi = \omega t$. Амплитуда будет наибольшей ($A_{max} = 2A$) в точках, для которых косинус принимает максимальное значение: $\left|cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\right| = 1$, удовлетворяющее условию $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm m\pi \ \ (m = 0,1,2...)$. Точки среды, в которых амплитуда колебаний частиц среды максимальна, называются **пучностями стоячей волны.** Из предыдущей формулы координаты пучностей равны:

$$\boxed{x_{пучн} = \pm m\frac{\lambda}{2} \ \ (m = 0,1,2...)}.$$

Узлами стоячей волны называются точки среды, в которых амплитуда колебаний частиц равна нулю ($A_{min} = 0$; частицы, находящиеся в этих точках, не колеблются). В узлах $\left|cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\right| = 0$, $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} \ \ (m = 0,1,2...)$, откуда **координаты узлов стоячей волны**:

$$\boxed{x_{узл} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}(m = 0,1,2...)}.$$

Вычтем координаты соседних пучностей:

$$x_{m+1} - x_m = (m+1)\frac{\lambda}{2} - m\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом, расстояние между соседними пучностями (или соседними узлами), равно половине длины волны:

$$\boxed{x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2}}.$$

Расстояние между соседними узлом и пучностью

$$\boxed{x_{узл} - x_{пучн} = \frac{\lambda}{4}}.$$

Следовательно, в стоячей волне узлы и пучности периодически повторяются в пространстве, чередуясь между собой.

Звук это упругие волны с частотой от 16Гц до 20кГц, достигнув человеческого уха, они вызывают слуховые ощущения. Упругие волны с частотой меньше 16Гц называется инфразвуком, а с частотой больше 20кГц – ультразвуком. Скорость звука в газах зависит от плотности и давления газа, которые в свою очередь зависят от температуры. В воздухе при 0^0С скорость звука равна 331м/с.

Методика выполнения лабораторной работы.

Цель работы заключается в определении скорости звука в воздухе методом стоячих волн. Поскольку расстояние между соседними пучностями стоячей волны равно половине длины волны: $x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2}$, то, определив расстояние между соседними пучностями стоячей волны, можно найти длину волны: $\lambda = 2(x_{m+1} - x_m)$. Затем, зная длину волны и частоту, можно рассчитать скорость распространения волны по формуле $\boxed{v = \lambda \nu}$.

Лабораторная установка приведена на рис.5. Стоячие волны возникают в воздухе, находящемся в стеклянной трубе. Принцип действия установки состоит в следующем. Генератор низкочастотных электрических колебаний (НГЧ) генерирует синусоидальные электрические колебания звуковой частоты, которые подаются на телефон T_1. В телефоне происходит преобразование электрических колебаний в механические колебания мембраны телефона, которые вызывают колебания воздуха в трубе. В результате внутри стеклянной трубы распространяется звуковая волна.

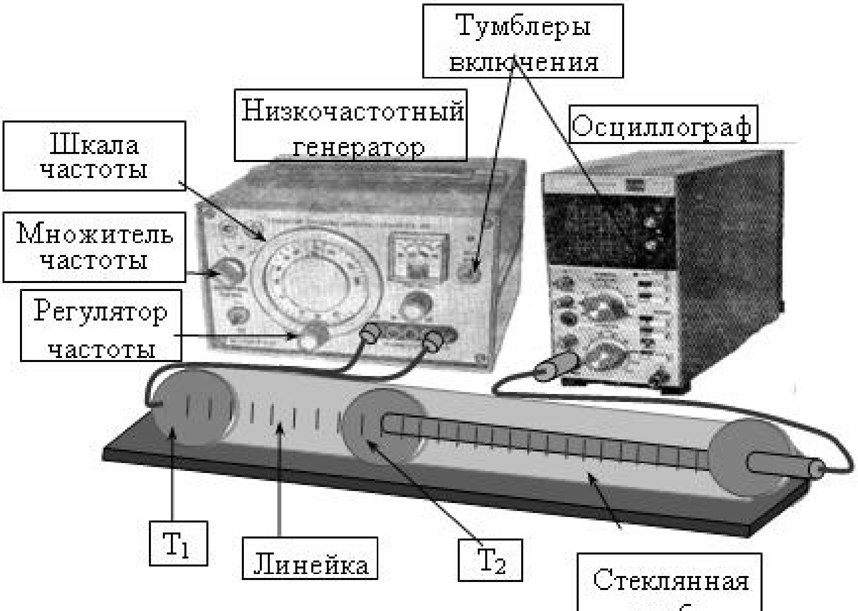

рис.5

Отражение звука происходит от телефона T_2 Таким образом, в трубе происходит наложение двух встречных волн и возникают узлы и пучности стоячей волны. Мембрана телефона T_2 под действием звука совершает колебания с амплитудой пропорциональной амплитуде стоячей звуковой волны в данной точке трубы. Механические колебания мембраны T_2 преобразуется в колебания, электрического напряжения, которые регистрируются осциллографом.

Порядок выполнения работы

1) Включите в сеть НЧГ и электронный осциллограф тумблерами «сеть». 2) Ручкой «Рег. вых. напр.» НЧГ установите такое напряжение на выходе, чтобы стрелка вольтметра находилась в средней части шкалы. 3) Переключатель НЧГ «Множитель» поставить в положение x10 и установить частоту колебаний по шкале частоты равную 1000 Гц. 4) Настройку осциллографа производит лаборант. 5) Перемещая подвижный телефон T_2 в направлении от T_1 найти точку, когда на экране осциллографа наблюдается резкое увеличение амплитуды электрических колебаний.6) Сделайте по линейке отсчет соответствующего положения поршня x_1 и запишите в таблицу. 7) Аналогичные измерения произведите для других положений поршня x_2, x_3, перемещая его вдоль всей длины трубы. Результаты занесите в таблицу 1. 8) Произведите подобные измерения на частотах 1100 и 1200Гц (или по указанию преподавателя). После окончания измерений тумблерами «сеть» отключите НЧГ и осциллограф.

Таблица 1

Частота ν, Гц			Частота ν, Гц			Частота ν, Гц		
Координаты пучностей			Координаты пучностей			Координаты пучностей		
x_1, см	x_2, см	x_3, см	x_1, см	x_2, см	x_3, см	x_1, см	x_2, см	x_3, см

Обработка результатов измерений

1) Для каждой частоты найдите разность координат соседних пучностей x_2-x_1 и x_3-x_2, занесите их значения в таблицу 2. 2) Найдите длину волны λ, умножив разность координат на 2 (т.к. x_{m+1}- x_m = $\lambda/2$, то $\lambda= 2(x_{m+1}- x_m)$). 3) По формуле $\boxed{v = \lambda\nu}$ рассчитайте скорость звука в воздухе для каждой частоты. Результаты вычислений занесите в таблицу 2. 4) Найдите среднее значение $v_{ср} = \frac{\sum v_i}{N}$ скорости звука (N – число значений скорости звука в таблице 2, абсолютные погрешности $\Delta v_i = \left| v_{ср} - v_i \right|$ измерения скорости и

среднюю абсолютную погрешность $\Delta v_{ср}$. 5) Рассчитайте относительную погрешность $\varepsilon = \dfrac{\Delta v_{ср}}{v_{ср}} 100\%$. 6) Запишите окончательный результат в виде: $v = (v_{ср} \pm \Delta v_{ср})м/с$.

ν, Гц	Разность координат пучностей, $(x_{m+1}-x_m)=\lambda/2$, м	$\lambda = 2(x_{m+1}-x_m)$, м	$v=\lambda\nu$, м/с	$V_{ср}$, м/с	Δv_i м/с	$\Delta V_{ср}$, м/с
	$x_2 - x_1 =$					
	$x_3 - x_2 =$					
	$x_2 - x_1 =$					
	$x_3 - x_2 =$					
	$x_2 - x_1 =$					
	$x_3 - x_2 =$					
Окончательный результат и относительная погрешность:						

Контрольные вопросы.

1) Что такое волна, какие величины ее характеризуют? Что такое длина волны? Какие бывают волны? 2) Запишите уравнение плоской бегущей волны и объясните величины, входящие в него. 3) Объясните возникновение стоячих волн и запишите уравнение стоячей волны. Чему равна амплитуда стоячей волны? 4) Чему равны координаты узлов и пучностей стоячей волны, расстояние между соседними пучностями? 5) Что такое звук? От чего зависит скорость звука? 6) Объясните возникновение стоячих волн в трубе с воздухом, закрытой с обоих концов. 7) Объясните принцип действия лабораторной установки для определения скорости звука и назначение отдельных ее элементов.

Лабораторная работа 1-9
«Определение молярной газовой постоянной методом откачки»

Цель работы: изучение некоторых законов, описывающих состояние идеального газа; определение универсальной газовой постоянной.

Теоретическое введение

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ). Молекулярная физика изучает строение и свойства вещества исходя из **молекулярно-кинетических представлений**. Согласно этим представлениям все тела (твердые, жидкие или газообразные) состоят из мельчайших обособленных частиц – атомов и молекул. Молекулы находятся в непрерывном хаотическом (беспорядочном) движении и взаимодействуют между собой (притягиваются и отталкиваются). Правильность данных представлений доказывают следующие явления: броуновское движение, диффузия, сжимаемость газов и др.

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел (т.е. тел, состоящих из очень большого числа молекул), которые могут обмениваться энергией между собой и внешней средой. **Параметрами состояния** называются физические величины, характеризующие состояние системы в целом. Так состояние газа в сосуде обычно задается такими параметрами состояния, как температура T, давление p и объем V. Данная система может находиться в различных состояниях, различающихся температурой, давлением и т.п. Состояние системы называется **равновесным**, если все параметры состояния во всех частях системы имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени. **Неравновесным** называется состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения. **Термодинамическим процессом** называется переход системы из одного состояния в другое. Такой переход связан с нарушением равновесного состояния системы. Следовательно, при протекании процесса система проходит через ряд неравновесных состояний.

В МКТ часто пользуются моделью идеального газа. **Газ можно считать идеальным**, если: 1) собственный объем молекул газа очень мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находится газ (атомы и молекулы газа можно принять за материальные точки); 2) силы взаимодействия между молекулами газа настолько малы, что ими можно пренебречь (молекулы находятся на большом расстоянии друг от друга); 3) столкновения молекул между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими.

Реальный газ можно считать идеальным, если давление газа невелико, а температура не очень низкая (при низких температурах газы превращаются в жидкость).

Количество вещества ν в системе измеряется в молях. **Моль** – это количество вещества, в котором содержится число частиц, равное числу атомов в 12 г углерода ^{12}C. Число частиц, содержащихся в одном моле вещества, называется **постоянной Авогадро** $\boxed{N_A=6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}$. Массу одного моля вещества называют **молярной массой** M. Молярная масса, выраженная в г/моль, численно равна относительной молекулярной массе. Например, молярная масса воды M=18 г/моль=$18\cdot 10^{-3}$ кг/моль (в СИ масса измеряется в килограммах). Молярная масса равна произведению постоянной Авогадро на массу m_0 молекулы: $\boxed{M=N_A m_0}$. Масса всего вещества m равна произведению числа N молекул данного вещества на массу m_0 одной молекулы: $m=Nm_0$. Тогда **количество вещества**

$$\boxed{\nu=\frac{N}{N_A}=\frac{m}{M}.}$$

Содержание газа в сосуде характеризуется объемной **концентрацией *n***, равной числу молекул в единице объема: $\boxed{n=\frac{N}{V}}$, где N – число молекул газа в объеме V.

Давление p газа обусловлено ударами молекул о стенки сосуда и определяется как $\boxed{p=\frac{F}{S}}$, где F - средняя сила ударов молекул, приходящаяся на площадь S стенки сосуда. Учитывая, что молекулы газа движутся во всевозможных направлениях с различными скоростями, можно показать, что давление идеального газа: $p=\frac{2}{3}n\frac{m<v^2>}{2}$, где $<v^2>$ среднее значение квадрата скорости молекул. Учитывая, что $\langle\varepsilon\rangle=\frac{m<v^2>}{2}$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул, выражение для давления можно записать в виде:

$$\boxed{p=\frac{2}{3}n<\varepsilon>}.$$

Это **основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.** Оно связывает давление (параметр состояния, характеризующий систему в целом) с характеристиками отдельных молекул (массой, скоростью, энергией).

Уравнение состояния выражает связь между параметрами состояния данной системы. **Уравнение состояния идеального газа** имеет вид:

$\boxed{\frac{pV}{T} = B}$, где B – постоянная величина, зависящая от массы газа.

Другой формой записи уравнения состояния идеального газа является **уравнение Менделеева – Клапейрона:**

$$\boxed{pV = \frac{m}{M}RT}, \text{ или } \boxed{pV = \nu RT},$$

где p, V, m, M и T - давление, объем, масса, молярная масса и термодинамическая температура T=($273 + t^{\circ}C$)К соответственно; $\nu = \frac{m}{M}$ - количество вещества (число молей газа); R = 8,31 Дж/(моль К) - молярная газовая постоянная.

Уравнение состояния идеального газа можно записать в другом виде. Т.к. $\nu = \frac{N}{N_A}$, то $pV = \frac{N}{N_A}RT \Rightarrow p = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A}T$. Здесь $\frac{N}{V} = n$ и $k = \frac{R}{N_A}$, поэтому получаем **уравнение состояния идеального газа** в виде:

$$\boxed{p = nkT},$$

где n – концентрация молекул, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана.

Для постоянной массы газа из уравнения Менделеева – Клапейрона получим газовые законы (изопроцессы)

Изотермический процесс протекает при $T = const$, $m=const$. Поэтому из уравнения Менделеева - Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует **уравнение изотермического процесса**: $\boxed{pV = const}$ или $\boxed{p_1V_1 = p_2V_2}$. Из уравнения следует, что при постоянной температуре давление газа обратно пропорционально его объему. График изотермического процесса в координатах P,V представляет собой гиперболу (рис.1а). На рисунке 1 также приведены графики данного процесса в координатах P,T и V,T.

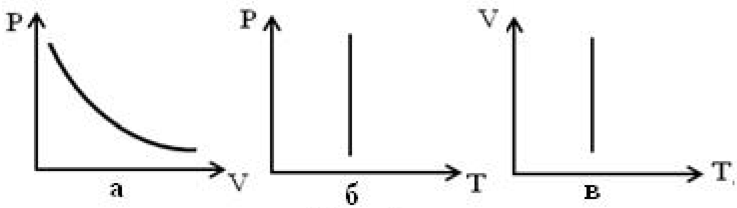

Рис. 1

Изобарный процесс протекает при p = *const*, m=*const*. Поэтому из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует, что $\frac{V}{T} = \frac{mR}{pM}$,

т.е. **уравнение изобарного процесса**: $\boxed{\frac{V}{T} = const}$ или $\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$.

Из уравнения следует, что при постоянном давлении объем газа прямо пропорционален его температуре. Графики изобарного процесса показаны на рис. 2.

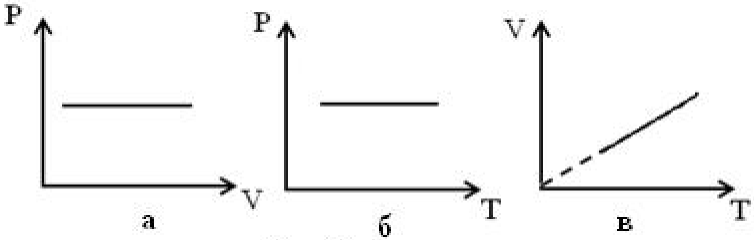

Рис. 2

Изохорный процесс протекает при V = *const*, m=*const*. Поэтому из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, следует, что $\frac{p}{T} = \frac{mR}{VM}$,

т.е. **уравнение изохорного процесса** $\boxed{\frac{p}{T} = const}$ или $\boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}}$. Из уравнения следует, что при постоянном объеме давление газа прямо пропорционально его температуре. Графики изохорного процесса даны на рис.3.

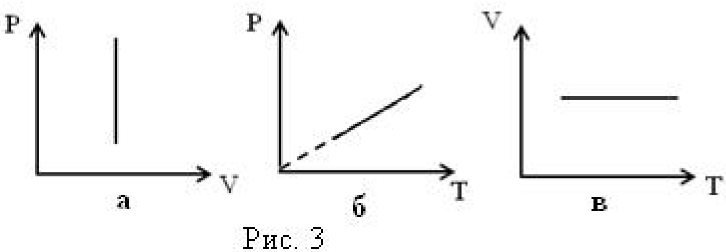

Рис. 3

Уравнение Клапейрона (объединенный газовый закон). Если m= const , то из уравнения Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ следует, что $\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}R$, т.е. $\boxed{\frac{pV}{T} = const}$ или $\boxed{\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}}$.

Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, входящих в нее газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots + p_N \text{ или } \boxed{p = \sum_{i=1}^{N} p_i},$$

где p_i - парциальное давление i-ого компонента смеси, т.е. давление, которое производил бы этот газ, если бы он один занимал весь объем сосуда.

Связь кинетической энергии молекул и абсолютной температуры. Из сравнения соотношений $p=nkT$ и $\boxed{p = \frac{2}{3}n < \varepsilon >}$ следует, что **средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул**

$$\boxed{<\varepsilon>=3kT/2.}$$

Т.о., средняя кинетическая энергия молекул пропорциональна термодинамической температуре. Это утверждение справедливо не только для газа, но и для любого состояния вещества. В этом смысле можно сказать: **термодинамическая температура** есть мера средней кинетической энергии молекул.

Для изобарного процесса (p = const) из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что $p\Delta V = \nu R\Delta T$, ΔV – приращение объема, ΔT – приращение температуры. Учитывая, что при изобарном процессе работа газа $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$, получим, что газовая постоянная: $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{A}}{\nu\Delta\mathrm{T}}$. Из этого соотношения следует размерность R**:** $[\mathrm{R}] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\right]$. Полагая в последней формуле ν=1моль ΔT = 1К, получаем R=A. Таким образом, **молярная газовая постоянная R** численно равна работе, совершаемой одним молем идеального газа при изобарном нагревании его на один градус. Молярная газовая постоянная R используется не только в учении о газах, но и в других разделах физики. Поэтому существенным является определение численного значения этой величины. В данной работе используется один из методов нахождения R.

Методика выполнения работы.

Имеется колба (металлический цилиндрический баллон), соединенный с окружающим воздухом. Масса воздуха в колбе m_1, давление воздуха p_1 и температура окружающей среды T связаны между собой уравнением

Клапейрона - Менделеева $p_1V = \dfrac{m_1}{M}RT$. Если из колбы откачать воздух до давления p_2, то масса воздуха в колбе уменьшится до величины m_2: $p_2V = \dfrac{m_2}{M}RT$. Вычитая из первого уравнения второе, после преобразования получим:

$$\boxed{R = \frac{MV\Delta p}{(m_1 - m_2)T},}$$

где $\Delta p=p_1-p_2$.

Порядок выполнения работы.

Лабораторная установка изображена на рис.4. В лабораторной установке давление измеряется техническим манометром, поэтому шкала манометра проградуирована в кГс/см^2. 1кгс/см^2 = 9,81Па. Для перевода значений Δр в Па на установке дана таблица.

1) Измерьте температуру воздуха по термометру, весящему на стене аудитории и, выразив её кельвинах (T =273+t^{0}C), запишите в таблицу. 2) Запишите объем колбы в таблицу, выразив его в *м^3*. Объем в *см^3* указан на самой колбе. (1см^3 = 10^{-6}м^3). 3) Определить на аналитических весах массу M_1, колбы с воздухом с точностью до 2 мг (с открытым краном). Результат запишите в таблицу. 4) Присоедините колбу к трубке манометра, краны колбы и манометра должны быть открыты. 5) Включите насос, следите, как происходит откачка воздуха. При максимальном значении Δp выключите

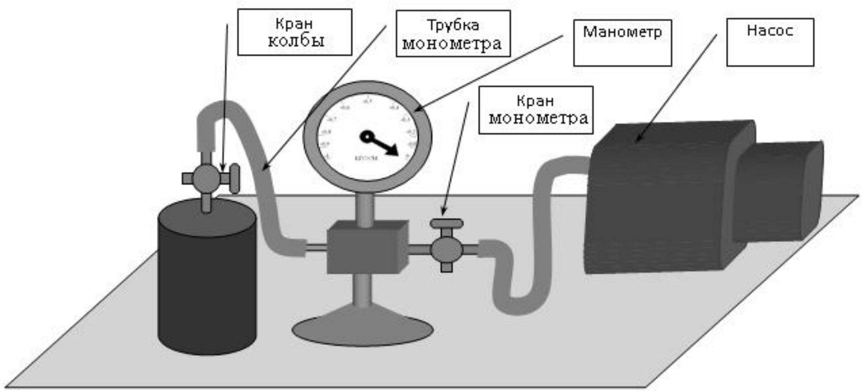

Рис.4

насос и быстро закройте кран манометра. По манометру определите Δp и запишите в таблицу. 6) Закройте кран колбы. Отсоедините колбу от трубки манометра. 7) Определить массу M_2 на аналитических весах и запишите в таблицу. 8) Откройте кран колбы. Откройте кран манометра. Произведите измерения (пункты 4 - 7) еще четыре раза. 9) Разность масс колбы с воздухом равна разности масс воздуха в колбе $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$. По расчетной формуле $\boxed{R = \dfrac{MV\Delta \mathbf{p}}{(m_1 - m_2)T},}$ определите значения газовой постоянной для каждого измерения. 10) Определите среднеарифметическое значение $\langle R \rangle$ газовой постоянной и запишите его в таблицу. 11) Сравните среднеарифметическое значение газовой постоянной с табличным значением ($R_т$=8,31Дж/мольК). Для этого рассчитайте относительную погрешность по формуле: $\varepsilon = \dfrac{\left|\langle R \rangle - R_T\right|}{R_T} 100\%$.

№	M_1,кг	M_2,кг	m_1-m_2,кг	Δp, кгс/см^2	Δp,10^4 Па	R, Дж/моль·К
1						
2						
3						
4						
5						
T = К						
Молярная масса воздуха M=0,029кг/моль						
V = м^3						
$\langle R \rangle$ = Дж/(моль·К)						
ε= %						

Контрольные вопросы.

1) Сформулируйте основные положения молекулярно кинетической теории. 2) Что понимается под идеальным газом? 3) Что такое моль вещества, молярная масса, число Авогадро, количество вещества? Как связаны эти величины? 4) Что такое концентрация и давление? 5)Запишите основное уравнение МКТ и поясните его смысл. 6) Что такое уравнение состояния, какой вид имеет уравнение состояния идеального газа, уравнение Менделеева – Клапейрона?. 7) Какой процесс называется изотермическим? Какой вид имеют уравнение и графики этого процесса? 8) Какой процесс называется изобарным? Какой вид имеют уравнение и графики этого процесса? 9) Какой процесс называется изохорным ? Какой вид имеют уравнение и графики этого процесса? 10) Как можно вычислить молярную газо-

вую постоянную, используя уравнение состояния идеального газа при нормальных условиях? 11) Сформулируйте закон Дальтона. Какое давление газа называется парциальным? 12) Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул? Как средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул зависит от температуры? 13) Каков физический смысл молярной газовой постоянной? Дайте обоснование. 14) Выведите расчетную формулу для опытного определения молярной газовой постоянной.

Лабораторная работа 1-10
«Определение отношения теплоемкостей газа по методу Клемана и Дезорма»

Цель работы: ознакомиться с одним из метода экспериментального определения коэффициента Пуассона.

Теоретическое введение

Числом степеней свободы *i* механической системы называется количество независимых величин (координат), с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве, или число независимых возможных движений системы. Положение в пространстве одноатомной молекулы определяется тремя координатами x, y, z (рис.1а). Следовательно, **одноатомная молекула** имеет три поступательные степени свободы (i=3). **Двухатомная молекула** (рис.1б) с жесткой связью (т.е. с неизменным расстоянием между атомами) кроме трех степеней свободы поступательного движения (трех координат ее центра масс С) имеет еще две степени свободы вращательного движения относительно осей z и y . Вращение относительно третьей оси x не вносит вклада в энергию молекулы, так как ее момент инерции относительно этой оси равен нулю. Таким образом, двухатомная молекула (связь между атомами жесткая) имеет i=5 степеней свободы (3 поступательных и 2 вращательных): $i = i_{пост} + i_{вращ} = 3+2$. Если в многоатомной молекуле атомы образуют линейную цепочку и связь между атомами жесткая, то такая молекула имеет также 5 степеней свободы (3 поступательных и 2 вращательных). **Многоатомная молекула**, состоящая из трех или более атомов (не расположенных на одной прямой, с жесткой связью), имеет 6 степеней свободы. Из них три поступательные и три вращательные (рис.1в): $i = i_{пост} + i_{вращ} = 3+3=6$.

Рис.1

Приравняв уравнение состояния идеального газа $p = nkT$ и основное уравнение молекулярно–кинетической теории $p = \frac{2}{3} n < E >$, находим, что **средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул**

$\boxed{\langle E\rangle = \frac{3}{2}kT}$. Это соотношение означает, что **термодинамическая температура *T*** есть мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул (в этом состоит физический смысл температуры). При любом числе степеней свободы молекулы три из них поступательные, причем ни одна из них не имеет преимущества перед другими. Поэтому на каждую поступательную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\boxed{\frac{1}{2}kT}$. В статистической физике выводится **закон равнораспределения энергии по степеням свободы:** на каждую степень свободы (поступательную или вращательную) молекулы идеального газа приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия $\boxed{\varepsilon = kT/2}$. Тогда **средняя кинетическая энергия молекул идеального газа** $\boxed{\langle E\rangle = \frac{i}{2}kT}$,

где $i = i_{пост} + i_{вращ}$, i - число степеней свободы молекулы с жесткой связью между атомами, $i_{пост}$ и $i_{вращ}$ - число поступательных и вращательных степеней свободы соответственно, k - постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия тела равна сумме кинетической энергии хаотического движения молекул, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами и внутримолекулярной энергии. **Внутренняя энергия - функция состояния системы**. Вследствие того, что молекулы идеального газа не взаимодействуют на расстоянии, потенциальная энергия их взаимодействия равна нулю. Так как атомы идеального газа можно считать материальными точками, то внутримолекулярная энергия идеального газа равна нулю. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий всех молекул газа: $U = \sum_{n=1}^{N} E_n$, где N число молекул газа. Тогда внутреннюю энергию U газа можно найти, умножив среднюю энергию молекул на их число N: $U = N \cdot \langle E\rangle$, где $\langle E\rangle = \frac{i}{2}kT$ - средняя кинетическая энергия молекул. Число молекул газа $N = N_A \cdot \nu$, где N_A - постоянная Авогадро, $\nu = \frac{m}{M}$ - количество вещества. Тогда выражение для U принимает вид: $U = \nu N_A \cdot \frac{i}{2}kT$. Т.к. $kN_A = R$ – молярная газовая постоянная, то **внутренняя энергия идеального газа**: $\boxed{U = \frac{i}{2}\nu RT}$.

Видно, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. **Приращение внутренней энергии** $\boxed{U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)}$ или $\boxed{\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T}$, $\boxed{dU = \frac{i}{2}\nu RdT}$ - **элементарное приращение внутренней энергии**. Здесь ΔT и dT – конечное и элементарное приращение температуры соответственно.

Работа при изменении объема. Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде (рис.2), закрытом поршнем. Пусть газ очень медленно (обратимо) расширяется и перемещает поршень на расстояние dh, настолько малое, что давление газа p можно считать в течение процесса расширения неизменным. Газ, действуя на поршень с силой $F = pS$, совершает при расширении элементарную работу $dA = Fdh\cos 0^\circ = pSdh$ (здесь $\alpha = 0^\circ$ - угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $d\vec{h}$, $\cos 0^\circ = 1$). Так как $dV = Sdh$ - приращение объема газа (S – площадь поршня), то **элементарная работа** $\boxed{dA = pdV}$. Это уравнение справедливо при изменении объема любого вещества. **Работа при конечном изменении объема**, вычисляется путем интегрирования этого выражения: $\boxed{A = \int_{V_1}^{V_2} pdV}$.

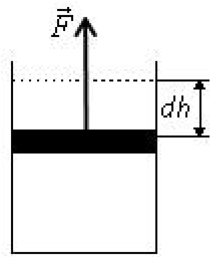

Рис. 2

Работа зависит от того, в каком процессе изменяется состояние вещества, т.е. **работа есть функция процесса**.

Теплопередача. Количество теплоты. Теплоемкость. Первое начало термодинамики. В термодинамике представляет интерес не сама внутренняя энергия U системы, а ее приращение ΔU при изменении состояния системы. Внутренняя энергия может изменяться, в основном, за счет двух различных процессов: совершения над телом работы A и сообщения ему количества теплоты Q. Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел (например, поршня), воздействующих на систему. Работу, совершаемую системой над внешними телами, обозначим A, а работу, совершаемую внешними телами над системой – A'. Очевидно, что для одного и того же процесса $A = -A'$ (это следует из третьего закона Ньютона). Сообщение тепла не связано с перемещением внешних тел. В этом случае молекулы более нагретого тела передают энергию молекулам менее нагретого тела (т.е. совершается микроскопическая работа). Передача энергии может происходить также посредством излучения. Количество переданной таким образом энергии называется количеством теплоты Q (теплотой), а такой способ передачи энергии называется процессом теплообмена или теплопередачей. Если Q>0 - система получает терло, Q<0 - отдает. **Теплоемкостью тела** называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин. Если сообщение телу количества теплоты dQ повышает его температуру на dT, то теплоемкость тела равна: $\boxed{C_{тела} = \frac{dQ}{dT}}$. Теплоемкость одного моля вещества ($\nu = \frac{m}{M}$ называется **молярной теплоемкостью**: $\boxed{C_м = \frac{dQ}{\nu\, dT} = \frac{C_{тела}}{\nu}}$. Теплоемкость единицы массы вещества называется **удельной теплоемкостью** $\boxed{c_{уд} = \frac{dQ}{mdT} = \frac{C_{тела}}{m}}$. Из сравнения формул с учетом того, что $\nu = \frac{m}{M}$, получим связь между теплоемкостями: $\boxed{c_{уд} = \frac{C_м}{M}}$.

Так как внутренняя энергия системы может изменяться как при сообщении системе теплоты, так и при совершении системой работы, то в термодинамике закон сохранения энергии имеет вид:

$$\boxed{Q = \Delta U + A}$$

и называется **первым началом (законом) термодинамики**. Здесь Q - количество теплоты, сообщенное системе; $\Delta U = U_2 - U_1$ - приращение внутренней энергии (U_1 и U_2 - начальная и конечная внутренняя энергия системы), A - работа, совершенная системой. Согласно **первому началу термодинамики**: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами. При вычислении работы и теплоты приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, соответствующих бесконечно малому изменению параметров системы. **Первое начало термодинамики** для элементарного процесса имеет вид:

$$\boxed{dQ = dU + dA}.$$

Т.к. внутренняя энергия - функция состояния, а работа - функция процесса, то и **количества теплоты Q – функция процесса**. Первое начало термодинамики можно сформулировать еще и следующим образом: невозможен вечный двигатель первого ряда, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

Теплоемкость идеального газа. Уравнение Майера. Так как теплота Q - функция процесса, то величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит изменение температуры. Найдем молярную теплоемкость идеального газа при постоянном объеме $V = const$ (обозначается C_V) и при постоянном давлении $p = const$ (C_p).

а) $V = \text{const}$. Запишем первое начало термодинамики $dQ=dU+dA$. Так как $V = \text{const}$, то $dV=0 \Rightarrow dA= pdV = 0$, т.е работа в изохорном процессе равна нулю. Следовательно, первое начало термодинамики для этого процесса принимает вид $\boxed{dQ=dU}$. Отсюда следует: $dQ = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT$. Тогда **молярная теплоемкость при постоянном объеме** $C_V = \frac{dQ}{\nu dT} = \frac{\frac{i}{2}\nu RdT}{\nu dT} \Rightarrow$

$$\boxed{C_V = \frac{i}{2}R}.$$

б) $p = const$. Запишем первое начало термодинамики, подставив в него выражение для работы: $dQ=dU+pdV$. Найдем дифференциал от левой и правой части уравнение Менделеева – Клапейрона $pV = \nu RT$ при условии $p=const$: $pdV = \nu RdT$. Тогда первое начало термодинамики примет вид: $dQ = \frac{i}{2}\nu RdT + \nu RdT = \nu RdT\left(\frac{i+2}{2}\right)$. Найдем **молярную теплоемкость при постоянном давлении**: $C_p = \frac{dQ}{\nu dT} = \frac{i}{2}R + R \Rightarrow \boxed{C_p = \frac{i+2}{2}R}$.

Молярные теплоемкости C_V и C_p идеального газа являются постоянными величинами, не зависящими от параметров состояния газа, в частности от температуры. Найдем разность этих теплоемкосте:

$$C_P - C_V = \frac{i+2}{2}R - \frac{i}{2}R = \frac{i}{2}R + R - \frac{i}{2}R \Rightarrow \boxed{C_p - C_V = R} \text{ или } \boxed{C_p = C_V + R}.$$

Это выражение называется **уравнением Майера**.

Работа и количество теплоты при изопроцессах.

Изотермический процесс ($T = const$, $m = const$). Уравнение изотермического процесса $pV = const$. Т.к. $T = const$, $dT = 0$, то приращение внутренней энергии $dU = \frac{im}{2M}RdT = 0$. Поэтому первое начало термодинамики $dQ=dU+dA$ примет вид $\boxed{dQ = dA}$ или для конечных значений величин $\boxed{Q = A}$. Проинтегрировав соотношение $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} \mathrm{p}dV$, подставив в него выраженное из уравнения Менделеева – Клапейрона давление p, получим **работу и количество теплоты в изотермическом процессе**:

$$\boxed{A=\frac{m}{M}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}},\ \boxed{Q=\frac{m}{M}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

Изохорный процесс ($V = const$, $m = const$). Уравнение изохорного процесса $\frac{P}{T}=const$. Т.к. $V = const$, то $dV = 0$ и $dA = pdV = 0$. **Работа газа при изохорном процессе** $\boxed{A=0}$. В этом случае первое начало термодинамики примет вид: $\boxed{Q=\Delta U}$ или $\boxed{dQ = dU}$. Поскольку $U=\frac{i}{2}\nu RT$, то

$$\boxed{Q=\frac{im}{2M}R(T_2-T_1)}\text{ или }\boxed{dQ=\frac{i}{2}\nu RdT}.$$

Изобарный процесс ($p = const$, $m=const$). Уравнение изобарного процесса: $\frac{V}{T}=const$. Первое начало термодинамики имеет вид: $\boxed{dQ=dU+dA}$ или $\boxed{Q=\Delta U+A}$. Т.к. $A=\int_{V_1}^{V_2}pdV$, то при $p=const$

$A = p\int_{V_1}^{V_2}dV = p(V_2 - V_1)$, т.е. **работа при изобарном процессе**

$$\boxed{A=p(V_2-V_1)}\text{ или }\boxed{A=p\Delta V},$$

где ΔV - приращение объема.

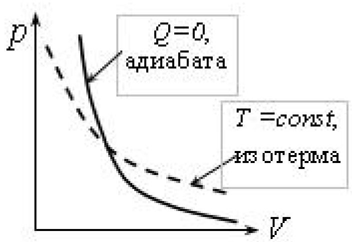

Рис. 3

Адиабатный процесс происходит без теплообмена с внешней средой **(*dQ=0*)**. Близкими к адиабатным являются все быстро протекающие процессы. Если масса газа при протекании процесса не изменяется (m = const), то давление и объем при адиабатном процессе связаны соотношением: $\boxed{pV^{\gamma}=const}$ или $\boxed{p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}}$

Это **уравнение адиабатного процесса** (уравнением Пуассона). График адиабатного процесса дан на рис. 3 в сравнении с графиком изотермического. Видно, что адиабата идет более круто, чем изотерма. **Показатель адиабаты** (коэффициент Пуассона) $\boxed{\gamma=\frac{C_p}{C_V}}$, т.е. равен отношению теплоемкостей при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V. Если подставить в эту формулу молярные теплоемкости $C_p = \frac{i+2}{2}R$ и $C_V = \frac{i}{2}R$, то можно выразить коэффициент Пуассона через число степеней свободы: $\boxed{\gamma = \frac{i+2}{i}}$. Показатель адиабаты γ зависит от структуры молекул газа и принимает значения: 1,67 - для одноатомного (i = 3); 1,40 - для двухатомного (i = 5); 1,33 - для многоатомного газа (i = 6). Воздух можно считать состоящим в основном из двухатомных молекул (O_2 и N_2).

Для адиабатного процесса $dQ=0$ и $Q=0$, поэтому первое начало термодинамики примет вид: $0 = dU + dA$ и $0 = \Delta U + A$, т.е. $\boxed{dA = -dU}$ и $\boxed{A = -\Delta U}$. Т.к. $A = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$, где $U_1 = \frac{im}{2M}RT_1, U_2 = \frac{im}{2M}RT_2$, то **работа в адиабатном процессе** $\boxed{A = \frac{im}{2M}R(T_1 - T_2)}$. При расширении газ совершает положительную работу $A>0$. Из формулы следует, что в этом случае конечная температура газа меньше, чем начальная ($T_1 - T_2 > 0$). Следовательно, при адиабатном расширении газа его температура уменьшается. При адиабатном сжатии газ совершает отрицательную работу $A<0$, а температура газа увеличивается.

Методика лабораторной работы

Прибор Клемана - Дезорма состоит из баллона с воздухом, ручного насоса для откачки воздуха (насоса Камовского) и водяного манометра (рис. 4). При закрытом кране в баллон с помощью насоса накачивают воздух. Через 2 - 3 минуты после этого температура воздуха в баллоне становится равной температуре T_1 окружающей среды (рис.5а), давление $p_1 = p_0 + \rho g h_1$, где P_0 - атмосферное давление, ρ - плотность манометрической жидкости (подкрашенная вода), g - ускорение свободного падения, h_1 - разность уровней жидкости в манометре (рис.5а). Затем открывают кран на короткое время, достаточное для выравнивания давления в сосуде с атмосферным (рис.5б), и закрывают его. За счет кратковременности процесса в баллоне осуществляется адиабатическое (практически без теплообмена) расширение воздуха массой m, которая остается в сосуде после закрывания крана. Эта масса воздуха занимала до расширения объем V_1 - часть объема V_C сосуда (рис.5а). После адиабатного расширения объем воздуха массой m становится равным $V_2=Vc$, а давление $P_2 = P_0$ (рис.5б).

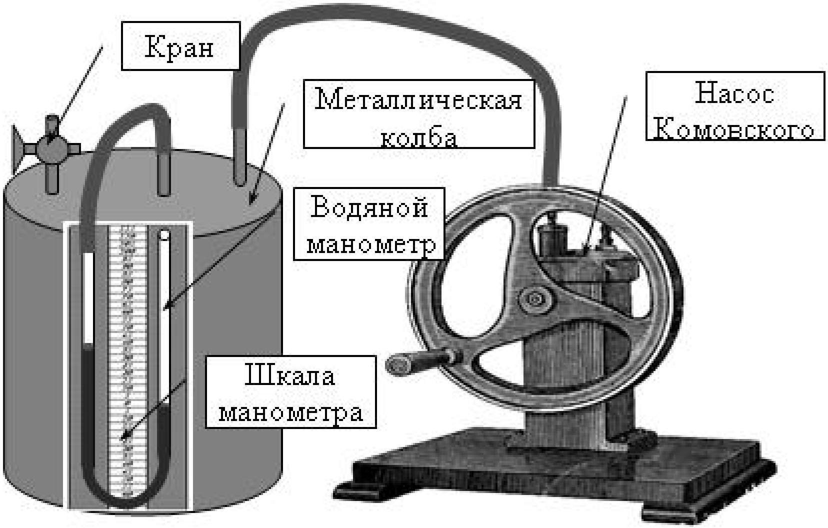

Рис.4

Так как при адиабатическом расширении, работа совершается воздухом (массой m) за счет убыли его внутренней энергии, то это означает понижение температуры воздуха до $T_2<T_1$. Через 2-3 минуты после закрытия крана, вследствие теплообмена со стенками колбы, воздух в баллоне изохорически нагревается до температуры T_1 (рис.5в). При неизменном объеме ($V_2 = V_3$) давление возрастает до $p_3 = p_0 + \rho \cdot g h_2$, где h_2 - разность уровней жидкости в манометре для воздуха в состоянии, изображенном на рис .5в

На рис.6 в осях PV показаны описанные выше процессы. Сначала происходит адиабатический процесс – переход воздуха в сосуде из состояния 1 (рис.5а) в состояние 2 (рис.5б), где T_1 – температура в момент открытия крана, T_2 – в момент закрытия крана (как отмечалось выше $T_2<T_1$). При этом давление и объем в состояниях 1 и 2 связаны между собой уравнением Пуассона: $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$, где V_1 - часть объема V_C сосуда, которую занимала масса воздуха m на рис.5а, $V_2=Vc$ (рис.5б). Затем воздух изохорически нагревается от температуры T_2 до T_1 (рис.5в), переходя из состояния 2 в состояние 3 (рис.6). Воздуху массой m в состояниях 1 и 3 соответствует одинаковая температура T_1 окружающей среды. Поэтому состояния 1 и 3 на рис.6 оказываются лежащими на одной изотерме (пунктирная линия) и к ним применимо уравнение изотермического процесса (закон Бойля-Мариотта): $P_1V_1 = P_3V_2$. Возведя последнее соотношение в степень γ, и

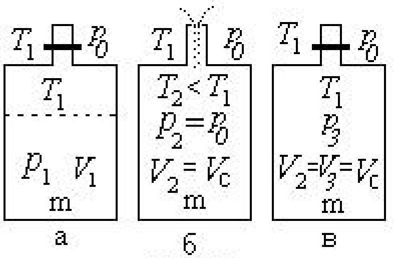

Рис.5

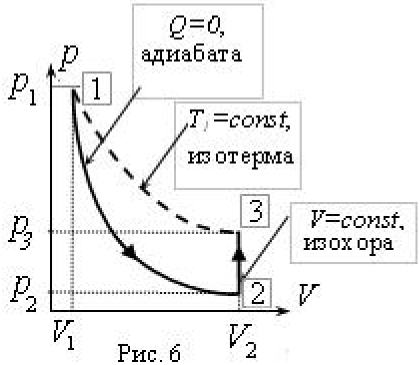

Рис. 6

поделив его на равенство $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$, получим $\dfrac{P_1^\gamma V_1^\gamma}{P_1V_1^\gamma} = \dfrac{P_3^\gamma V_2^\gamma}{P_2V_2^\gamma}$ или

$P_1^{\gamma-1}=P_3^\gamma/P_0$, где учтено $P_2=P_0$ (см. рис.5б). Подставим в это выражение $p_1 = p_0 + \rho g h_1$, $p_3 = p_0 + \rho \cdot g h_2$ и вынесем P_0 за скобки:

$$P_0^{\gamma-1}(1+\rho gh_1/P_0)^{\gamma-1}=P_0^{\gamma-1}(1+\rho gh_2/P_0)^\gamma =>$$
$$(1+\rho gh_1/P_0)^{\gamma-1}=(1+\rho gh_2/P_0)^\gamma$$

Величины $\rho gh_1/P_0<<1$, $\rho gh_2/P_0<<1$. Воспользуемся приближенным равенством: при $X<<1$ $(1+X)^\alpha=1+\alpha X$. Получим

$$1+(\gamma-1)\rho gh_1/P_0=1+\gamma\rho gh_2/P_0$$

После сокращения на P_0 и ρg: $(\gamma-1)h_1=\gamma h_2$.

Отсюда получаем расчетную формулу для коэффициента Пуассона:

$$\boxed{\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}},$$

где h_1-разность уровней жидкости в манометре после накачки (состояние рис5.б), h_2 – разность уровней жидкости в манометре после адиабатного расширения и последующего изохорического нагревания (состояние рис.5в).

Порядок выполнения работы.

1) При закрытом кране (рис. 4) накачать воздух в баллон до создания разности уровней жидкости в манометре порядка 10-15 см (но не более 20 см). 2) Выждать пока температура воздуха в баллоне сравняется с температурой окружающей среды (перестанет изменяться разность уровней жидкости в манометре). Это происходит за 2—3 минуты. 3) Отсчитать разность уровней жидкости в манометре h_1 (отсчет производить по нижним краям ме-

ниска). В имеющемся приборе «0» шкалы манометра расположены посредине. Поэтому удобно отсчитывать опускание левого столба и поднятие столба жидкости в правом колене манометра от «0» и складывать эти величины. 4) Быстро полностью открыть кран до выравнивания давления с атмосферным (уровни жидкости в коленах манометра сравняются) и сейчас же закрыть его. 5) Подождав 2-3 минуты, пока температура воздуха в баллоне станет постоянной – равной температуре окружающей среды (давление в колбе перестанет изменяться, разность уровней в коленах манометра перестанет расти), отсчитать показание манометра h_2. 6) Результаты измерений занести в таблицу, повторив пункты 1 - 5 пять - восьми раз по указанию преподавателя. 7) Рассчитать среднее значение $\langle\gamma\rangle$. 8) Рассчитать теоретическое значение $\gamma_T = \dfrac{i+2}{i}$ для воздуха, считая его двухатомным газом. 9) Определите относительное расхождение между экспериментальным и теоретическим значениями:

$$\varepsilon = \frac{\left|\langle\gamma\rangle - \gamma_T\right|}{\gamma_T}\cdot 100\% =$$

№	h_1 мм	h_2 мм	γ
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
$\langle\gamma\rangle =$, $\varepsilon =$			

Контрольные вопросы.

1) Что такое число степеней свободы? Сколько степеней свободы у одноатомной, двухатомной и многоатомной молекул? Какая энергия приходится на одну степень свободы? Чему равна средняя кинетическая энергия молекул газа? 2) Чему равны в термодинамике работа газа и приращение внутренней энергии? От чего зависит внутренняя энергия газа? Как можно изменить внутреннюю энергию? 3) В чем состоит первое начало термодинамики, как оно записывается для различных процессов газа? 4) Что такое теплоемкость тела, молярная и удельная теплоемкости вещества? 5) Чему равны молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении? Выведите уравнение Майера. 6) Какой процесс называется адиабатным? Запишите уравнение Пуассона. Чему равен показатель адиабаты? Как показатель адиабаты зависит от числа степеней свободы? Чем отличаются графики адиабаты и изотермы?. 7) Как изменяется температура при адиабатном расширении и сжатии? 8) По каким формулам находят работу газа в различных процессах? 9) Как изменяется температура, давление и объем газа в процессе проведения лабораторного эксперимента? Поясните на графике. 10) Выведите расчетную формулу для показателя адиабаты.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс физики: Учеб. В 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1989.- 352с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа. 2003. -541с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. Учеб. Пособие для студ. Вузов. М.: Академия. 2005. -720с.
4. Бондарев Б.В., Спирин Г.Г. Курс общей физики. Учеб пособие. М.: Высшая школа. 2005. -560с.
5. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: Учеб. пособие для спец. вузов. М.: Высш. шк., 1987. – 360 с

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО ФИЗИКЕ

ЧАСТЬ 1

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Составители:
ПОДОЛЬСКИЙ Вадим Александрович
ГУКАСОВ Александ Степанович
ЛОГАЧЕВА Валентина Михайповна
РЕЗВОВ Юрий Герасимович
СИВКОВА Ольга Дмитриевна

Издано на средства авторов

Редактор Туманова Е.М.
Подписано к печати . Формат 60x80$^{1/16}$
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл.печ.л. 5,1. Уч.-изд.л. 4,2
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл.,9
Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы,8