**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ
ХИМИКО–ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА»

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

А.Г. ЛОПАТИН, П.А.КИРЕЕВ, С.В. ЛОПАТИНА

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ПРОГРАММА И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Новомосковск
2017**

УДК 517.977
ББК 32.965.09
Л 771

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент Маслова Н.В.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д. И. Менделеева)

Лопатин А.Г., Киреев П.А., Лопатина С.В.
Л 711 Оптимальные системы управления. Методические указания, программа и контрольные задания. /ФГБОУ ВО РХТУ им. Д. И. Менделеева, Новомосковский ин-т (филиал). Новомосковск, 2017.–22 с.

Методические указания предназначены для студентов, заочной формы обучения по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.977
ББК 32.965.09

© Новомосковский институт (филиал) ФГБОУ ВО Российского химико–технологического университета им. Д.И. Менделеева, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1 ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ 4
2 СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ 4
3 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ 5
4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 5
5 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 6
6 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТы 6
6.1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО СИНТЕЗУ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ 7
6.2 СИНТЕЗ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ 8
6.3 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 12
7 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 15
ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ MathCAD 17

ВВЕДЕНИЕ

Целью курса «Оптимальные системы управления» является формирование у студентов способностей разрабатывать практические мероприятия по совершенствованию систем и средств автоматизации и управления изготовлением продукции, ее жизненным циклом и качеством, а также по улучшению качества выпускаемой продукции, технического обеспечения ее (ПК-29).

Задачами преподавания дисциплины являются:

- приобретение знаний о базовой терминологии, относящейся к теории оптимального управления;
- приобретение знаний о постановке задачи синтеза систем оптимального управления;
- формирование и развитие умений находить оптимальное управление на основе уравнения Риккати;
- формирование и развитие умений находить оптимальное управление на основе уравнения Ляпунова;
- приобретение и формирование навыков выбора оптимального алгоритма синтеза системы управления;
- приобретение и формирование навыков проведения расчета оптимальных регуляторов для обеспечения заданных свойств систем.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 15.03.04 – «Автоматизация технологических процессов и производств», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12 марта 2015 г. № 200.

1 ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- базовую терминологию, относящуюся к теории оптимального управления, постановки задачи синтеза оптимальных систем управления.

Уметь:

- применять критерии полной управляемости и полной наблюдаемости линейных систем управления, находить оптимальное управление на основе уравнения Риккати и Ляпунова.

Владеть:

- методиками синтеза систем оптимального управления и выбором оптимального алгоритма синтеза системы управления, проводить расчет оптимальных регуляторов для обеспечения заданных свойств систем.

2 СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Курс «Оптимальные системы управления» для удобства изучения разбит на ряд тем, подлежащих изучению в порядке их расположения

Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
Предмет и задачи курса	Цели и задачи курса. Область применения оптимальных систем управления
Процесс создания САУ	Этапы синтеза оптимальных систем управления
Методы описания объектов управления	Уравнение состояния объекта в нормализованной форме. Каноническая форма уравнения объекта
Понятие управляемости и наблюдаемости	Постановка задачи оценивания состояния. Наблюдатели состояния.
Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов	Синтез оптимальных регуляторов по уравнению Риккати. Аналитическое конструирование регуляторов с использованием принципа обобщенной работы А.А. Красовского. Уравнение Ляпунова.
Синтез модальных регуляторов	Простейшая задача модального управления. Модальное управление по состоянию объекта.

3 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

№ п/п	Наименование лабораторных работ	Код формируемой компетенции
1.	Синтез оптимального регулятора по уравнению Риккати. ЛР1	ПК-29
2.	Синтез оптимального регулятора по уравнению Ляпунова. ЛР2	ПК-29
3.	Синтез оптимального модального регулятора. ЛР3	ПК-29

4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Теория систем автоматического управления [Текст] / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. - СПб. : Профессия, 2007. - 749 с.

2. Корнеев Н. В. Теория автоматического управления с практикумом [Текст] : учеб. пособ. для вузов / Н. В. Корнеев, Ю. С. Кустарёв, Ю. Я. Морговский. - М. : Академия, 2008. - 219 с. - (Высш. проф. образ.).

3. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. / А. А. Воронов, Д. П. Ким,

В. М. Лохин и др.; Под ред. А. А. Воронова.— 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986.— 504 с.

4. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.-184 с.

Информационно-справочные и поисковые системы

http://eco.sutd.ru/mathcad/docs/mathcad/matrix.htm
http://old.exponenta.ru/soft/Mathcad/UsersGuide/chapter9/9_3.asp
http://itmu.vsuet.ru/Posobija/MathCAD/gl09/index.htm
http://radiomaster.ru/cad/mc12/glava_07/index22.php

5 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Программой предусмотрено выполнение одной домашней контрольной работы.

Номер варианта в контрольной работе соответствует последней цифре шифра зачетной книжки студента. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту и не в полном объеме, преподавателем не проверяется и возвращается обратно студенту.

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы, следует тщательно изучить темы, включенные в содержание вопросов и задания по рекомендуемой литературе. Перед решением задачи следует написать условие задачи. В задании выполняются подробно расчеты, аргументированные пояснениями.

В конце контрольной работы следует указать литературу (автор, наименование, издательство, год издания, страницы), которой воспользовались при выполнении работы.

Контрольная работа должна быть подписана студентом с указанием даты ее выполнения и выслана на рецензию не позднее, чем за 30 дней до начала экзаменационной сессии.

После получения проверенной контрольной работы студент обязан просмотреть все замечания и внести в работу соответствующие исправления. Работа, оцененная неудовлетворительно, должна быть представлена на проверку вторично.

К зачету, завершающему изучение дисциплины «Оптимальные системы управления», допускаются студенты, получившие удовлетворительную оценку за контрольную работу.

6 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа включает в себя задачи по синтезу модального регулятора.

6.1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО СИНТЕЗУ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Суть модального управления состоит в определении численных значений коэффициентов передачи безынерционных обратных связей по всем переменным состояния объекта с целью обеспечения заданного распределения корней характеристического уравнения замкнутой САР.

Корни характеристического уравнения САР полностью определяют ее свободное движение

$$x(t) = c_1 e^{-s_1 t} + c_2 e^{-s_2 t} + \ldots + c_n e^{-s_n t}$$

Каждая составляющая $c_i e^{-s_i t}$ такого движения, соответствующая отдельному корню s_i (или паре комплексно сопряженных корней), в зарубежной литературе называется *модой* – отсюда и термин «модальное управление». Корни уравнения однозначно зависят от его коэффициентов, поэтому модальное управление можно трактовать как целенаправленное изменение коэффициентов характеристического уравнения объекта с помощью безынерционных обратных связей.

В технической литературе приводятся различные наборы стандартных характеристических полиномов 1-8 порядков и соответствующие им графики переходных процессов с указанными на них показателями качества (биноминальные полиномы Ньютона, полиномы Баттерворта и др.). Исходя из порядка объекта и заданных в техническом задании показателей качества САР, разработчик может выбрать требуемый график переходного процесса и соответствующий ему «стандартный» характеристический полином, а затем, используя излагаемый далее алгоритм, выполнить синтез модальных обратных связей, обеспечивающих заданные показатели качества САР. Таким образом, теория модального управления позволяет осуществлять синтез многоконтурных замкнутых САР с заранее заданными показателями качества.

Отсюда следуют четыре основных достоинства модального управления:

1. Синтезированная модальная САР не требует проверки на устойчивость (так как она заранее должна быть устойчивой и обладать требуемой степенью устойчивости).
2. Синтезированная модальная САР не требует введения дополнительных корректирующих устройств (так как она сама уже удовлетворяет требуемым показателям качества).
3. Введение модальных обратных связей, в силу их безынерционности, не повышает порядок объекта и не нарушает его управляемость и наблюдаемость (что зачастую происходит при введении пассивных инерционных корректирующих устройств).
4. Относительная простота и экономичность технической реализации модальных САР (так как реализации модальных обратных связей может быть выполнена с помощью маломощных измерительно-

преобразовательных устройств и электронных усилителей с малыми тепловыми потерями).

6.2 СИНТЕЗ ОДНОМЕРНЫХ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим линейный одномерный объект, который задан в пространстве состояний уравнением:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}u \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|_{n\times n}$; $\mathbf{b} = \left\| b_1 ... b_n \right\|_{n\times 1}^T$ – вещественные матрицы указанных размерностей.

Требуется определить коэффициенты передачи $k_i (i = \overline{1,n})$ модального регулятора

$$u = -k_1 x_1 - ... - k_n x_n = -\mathbf{k}^T \mathbf{X}, \tag{2}$$

при которых замкнутая САР имела бы желаемый «стандартный» характеристический полином

$$g(s) = s^n + g_{n-1} s^{n-1} + ... + g_1 s + g_0 \tag{3}$$

Решение задачи базируется на использовании следующей теоремы: пусть матрицы полностью управляемой системы представлены в двух различных базисах $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ и $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}\}$. Тогда матрица преобразования **P** пары $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ в пару $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}\}$ единственна и вычисляется по формуле (4)

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{R} = \left\| \mathbf{b} \vdots \mathbf{Ab} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{b} \vdots ... \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right\|_{n\times n} \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \left\| \tilde{\mathbf{b}} \vdots \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}} \vdots \tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{b}} \vdots ... \vdots \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}} \right\|_{n\times n} \tag{6}$$

На основании (1), (2) запишем уравнение свободного движения замкнутой САР

$$\dot{X} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{bk}^T\right) X \tag{7}$$

Определяем характеристический полином матрицы **A**:

$$a(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \tag{8}$$

где **I** – единичная матрица.

Записываем соответствующую ему пару $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}\}$ в каноническом базисе:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{Vmatrix} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \tag{9}$$

(такая форма записи называется *нормальной формой*).

Теперь согласно (6), (5), (4) можно вычислить матрицу канонического преобразования **P** и записать уравнение объекта (1) в канонической форме

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{X} + \tilde{\mathbf{b}}u, \; u = -\tilde{\mathbf{k}}^T \tilde{X}, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \; \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb}, \; \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{PX}, \; \mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}, \; \tilde{\mathbf{k}}^T = \mathbf{k}^T\mathbf{P}^{-1} \tag{11}$$

при этом, естественно, матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ будут иметь нормальную форму (9).

На основании (10), подобно (7), получаем

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}})\tilde{\mathbf{X}} \tag{12}$$

Для полинома (3), подобно (9), можно записать

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -g_0 & -g_1 & \dots & -g_{n-2} & -g_{n-1} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

Из (12), (13) очевидно, что

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T = \tilde{\mathbf{G}} \tag{14}$$

Поскольку $\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_{\mathrm{n-1}} & \tilde{k}_{\mathrm{n}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{\mathrm{k}}_1 & \tilde{\mathrm{k}}_2 & \dots & \tilde{\mathrm{k}}_{\mathrm{n-1}} & \tilde{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} \end{Vmatrix}$, то

согласно (14), с учетом (9), (13), получаем

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(a_0+\tilde{k}_1) & -(a_1+\tilde{k}_2) & \dots & -(a_{n-2}+\tilde{k}_{n-1}) & -(a_{n-1}+\tilde{k}_n) \end{matrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -g_0 & -g_1 & \dots & -g_{n-2} & -g_{n-1} \end{matrix} \right\|$$

Отсюда $\tilde{k}_1 = g_0 - a_0$; $\tilde{k}_2 = g_1 - a_1$; … ; $\tilde{k}_{n-1} = g_{n-2} - a_{n-2}$; $\tilde{k}_n = g_{n-1} - a_{n-1}$ или

$$\tilde{k}_i = g_{i-1} - a_{i-1},\ i = \overline{1,n} \qquad (15)$$

Таким образом, коэффициенты передачи модального регулятора (модальных обратных связей) в каноническом виде определяются как разность соответствующих коэффициентов желаемого «стандартного» характеристического полинома САР (3) и характеристического полинома объекта (8).

Используя (11), находим искомую матрицу-строку коэффициентов передачи модального регулятора в исходном базисе:

$$\mathbf{k}^T = \tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{P} \qquad (16)$$

Для проверки полученного решения задачи целесообразно, согласно (7), (16), вычислить матрицу

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \qquad (17)$$

и определить ее характеристический полином

$$g'(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{G}' \right| = s^n + g'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + g'_1 s + g'_0$$

Совпадение коэффициентов этого полинома с соответствующими коэффициентами желаемого полинома (3) указывает на правильность решения задачи.

Пусть теперь модель объекта представлена в форме его передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{x(s)}{u(s)}, \qquad (18)$$

которой соответствует матричное уравнение состояния

$$\begin{Vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-2} \\ \dot{x}_{n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot b_0 u$$

или в более компактной форме

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{b} \cdot b_0 u \tag{19}$$

Здесь матрицы **A** и **b** уже имеют нормальную форму (9), т.е. $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}$, поэтому согласно (5), (6) $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}$, а согласно (4) $\mathbf{P} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$. Тогда на основании (11), (10) имеем

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = \mathbf{k}^T;\ \tilde{X} = X;\ b_0 u = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \tag{20}$$

$$u = -\frac{1}{b_0}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \tag{21}$$

Первое из равенств (20) означает, что в данном случае коэффициенты передачи модального регулятора сразу же могут быть вычислены по формулам (15). Равенство же (21) означает, что на выходе такого регулятора последовательно с ним должен быть включен общий для всех каналов регулятора усилитель с коэффициентом усиления равным величине $1/b_0$ (это равноценно уменьшению всех расчетных коэффициентов регулятора в b_0 раз).

Подставив (21) в (19), получаем

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{bk}^{\mathrm{T}})\mathbf{X} \tag{22}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (7), поэтому для проверки решения подобно (17), следует вычислить матрицу $\mathbf{G}' = \mathbf{A} - \mathbf{bk}^T$ и определить ее характеристический полином.

Исходя из изложенного, можно предложить следующий алгоритм синтеза одномерных модальных регуляторов.

Шаг 1. На основании (1) определяется характеристический полином $a(s)$ матрицы **A** вида (8).

Шаг 2. Выбирается желаемый “стандартный” характеристический полином $g(s)$ вида (3).

Шаг 3. Согласно (15) вычисляются коэффициенты передачи регулятора в каноническом базисе, которые записываются в виде вектор - строки $\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. На основании (1), (5) составляется матрица управляемости **R** в исходном базисе.

Шаг 5. Для полинома $a(s)$ составляется каноническая пара $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}\}$ вида (9).

Шаг 6. На основании (9), (6) составляется матрица управляемости $\tilde{\mathbf{R}}$ в каноническом базисе.

Шаг 7. Согласно (4) вычисляется матрица преобразования **P.**

Шаг 8. Согласно (16) вычисляется вектор-строка коэффициентов передачи регулятора в исходном базисе $\mathbf{k}^T$.

6.3 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача № 1

Заданы структурная схема (рис. 1) и параметры объекта k_1=1; T_1=0.5; k_2=2; T_2=1.

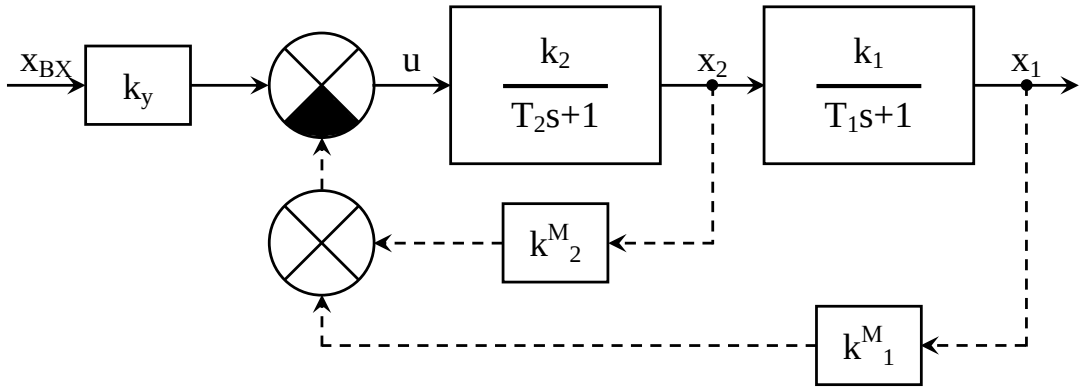

Рисунок 1 – Структурная схема модальной системы управления

Требуется определить значения коэффициента k_y и коэффициенты обратных модальных связей $k_1^м$, $k_2^м$ обеспечивающих желаемые значения корней $s_1 = s_2 = -3$ и соответствующую им степень устойчивости $\eta = 3$ (степень устойчивости η – равна расстоянию от мнимой оси до ближайшего корня или пары комплексно сопряженных корней) замкнутой системы.

Корни характеристического уравнения данного объекта $s_1 = -\dfrac{1}{T_1} = -2$ и $s_2 = -\dfrac{1}{T_2} = -1$, следовательно, степень его устойчивости $\eta = 1$.

На основании рисунка 1 запишем

$$T_1\dot{x}_1 + x_1 = k_1 x_2; \quad T_2\dot{x}_2 + x_2 = k_2 u$$

Отсюда получим:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{k_1}{T_1}x_2 \ ;$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2}x_2 + \frac{k_2}{T_2}u \ ,$$

при этом матрицы **A** и **b** уравнения (1) имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & \dfrac{k_1}{T_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{T_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \ b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dfrac{k_2}{T_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Дальнейший синтез модального регулятора выполняем в строгом соответствии с приведенным выше алгоритмом:

1 $$a(s)=|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}(s+2) & -2\\ 0 & (s+1)\end{vmatrix}=s^2+3s+2$$

2 $$g(s)=(s-s_1)(s-s_2)=s^2-s(s_1+s_2)+s_1s_2=$$
$$=(s+3)(s+3)=s^2+6s+9$$

3 $$\tilde{k}_1^{м}=9-2=7;\ \tilde{k}_2^{м}=6-3=3;\Rightarrow\quad \tilde{\mathbf{k}}^T=\begin{Vmatrix}7 & 3\end{Vmatrix}$$

4 $$\mathbf{R}=\begin{Vmatrix}0 & 4\\ 2 & -2\end{Vmatrix};\ \mathbf{R}^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{Vmatrix}-2 & -4\\ -2 & 0\end{Vmatrix}$$

5 $$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{Vmatrix};\ \tilde{\mathbf{b}}=\begin{Vmatrix}0\\ 1\end{Vmatrix}$$

6 $$\tilde{\mathbf{R}}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{Vmatrix}$$

7 $$\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{Vmatrix}-2 & 0\\ 4 & -4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0.25 & 0\\ -0.5 & 0.5\end{Vmatrix}$$

8 $$\mathbf{k}^T=\begin{Vmatrix}7 & 3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0.25 & 0\\ -0.5 & 0.5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0.25 & 1.5\end{Vmatrix}\Rightarrow k_1^M=0.25;\ k_2^M=1.5$$

Проверка. Согласно (17) вычисляем

$$\mathbf{G}'=\begin{Vmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}0\\ 2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0.25 & 1.5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2 & 2\\ -0.5 & -4\end{Vmatrix};\Rightarrow$$

$$g(s)=|\,s\mathbf{I}-\mathbf{G}'\,|=\begin{vmatrix}(s+2) & -2\\ 0.5 & (s+4)\end{vmatrix}=s^2+6s+9$$

Полученный характеристический полином замкнутой модальной системы совпадает с указанным ранее желаемым полиномом $g(s)$, следовательно, коэффициенты k_1^M, k_2^M определены правильно.

Безынерционные модальные обратные связи изменяют общий коэффициент передачи системы и тем самым влияют на установившееся значение выходной переменной объекта. Чтобы исключить такое влияние, достаточно на входе системы (рисунок 1) установить усилительное звено с коэффициентом усиления k_y, равным обратной величине коэффициента усиления k замкнутой модальной САР.

Для определения коэффициента усиления k замкнутой модальной САР (рисунок 1) получим эквивалентную передаточную функцию по каналу $x_{\text{ВХ}} \to x_1$ для случая $s = 0$:

$$k_y = \frac{1 + k_2 k_2^M + k_1 k_2 k_1^M}{k_1 k_2} = \frac{1 + 2 \times 1.5 + 1 \times 2 \times 0.25}{1 \times 2} = 2.25$$

Задача №2.

Для заданной структурной схемы (рисунок 2) определить значения коэффициента k_y, коэффициенты обратных модальных связей $k_1^м$, $k_2^м$,обеспечивающих желаемые значения корней $s_1 = s_2 = -3$ и соответствующую им степень устойчивости $\eta = 3$ замкнутой системы. Значения параметров объекта как в задаче 1.

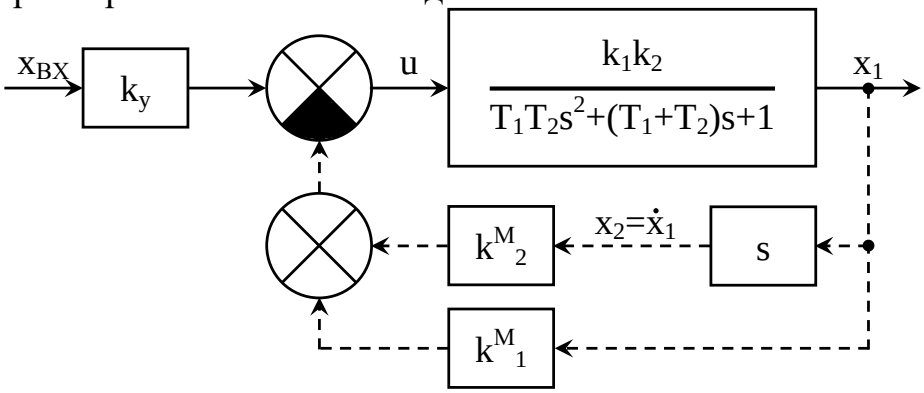

Рисунок 2 – Структурная схема модальной системы управления

Отличие структурных схем состоит в том, что в структурной схеме на рисуноке 2 доступной для управления является только одна выходная переменная объекта x_1.

Подобно (18) представим передаточную функцию объекта в следующей форме

$$W(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k_1 k_2 / T_1 T_2}{s^2 + \dfrac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \dfrac{1}{T_1 T_2}} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2} \qquad (23)$$

Тогда на основании (21), (20), (15) находим искомые коэффициенты $k^T = \tilde{k}^T = \|(g_0 - a_0) \quad (g_1 - a_1)\| = \|(9-2) \quad (6-3)\| = \|7 \quad 3\| \Rightarrow k_1^M = 7,\ k_2^M = 3$

Таким образом, при тех же параметрах объекта, но измеряемой только одной из его переменных, получили увеличенные по сравнению с задачей 1, значения коэффициентов модальных ОС.

Проверка. На основании (23) записываем матрицы объекта в нормальной форме

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{Vmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Далее согласно (17) вычисляем

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{Vmatrix}$$

и тогда

$$\left| s\mathbf{I} - \mathbf{G}' \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 9 & (s+6) \end{vmatrix} = s^2 + 6s + 1$$

Полученный полином совпадает с ранее принятым “стандартным” характеристическим полиномом $g(s)$. Следовательно, коэффициенты k_1^M, k_2^M определены правильно.

Для определения коэффициента усилителя k_y запишем коэффициент передачи всей системы (рисунок 2) и возьмем его обратное значение:

$$k_y = \frac{1 + k_1 k_2 k_1^M}{k_1 k_2} = \frac{1 + 1 \times 2 \times 7}{1 \times 2} = 7.5$$

Пример выполнения контрольной работы в пакете программ MathCAD представлен в приложении.

7 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача №1

Для заданной структурной схемы (рисунок 1) и параметров объекта управления k_1, T_1, k_2, T_2 требуется определить значения коэффициента k_y и коэффициенты обратных модальных связей $k_1^м$, $k_2^м$ обеспечивающих желаемые значения корней s_1, s_2 и соответствующую им степень устойчивости замкнутой системы.

Задача №2.

Для заданной структурной схемы (рисунок 2) и параметров объекта управления k_1, T_1, k_2, T_2 требуется определить значения коэффициента k_y и коэффициенты обратных модальных связей $k_1^м$, $k_2^м$ обеспечивающих желаемые значения корней s_1, s_2 и соответствующую им степень устойчивости замкнутой системы.

Номер варианта в контрольной работе соответствует последней цифре шифра зачетной книжки студента.

№ варианта	k_1	T_1	k_2	T_2	s_1	s_2
0	1	2	21	22	–1	–2
1	3	4	23	24	–2	–4
2	5	6	25	26	–3	–6
3	7	8	27	28	–4	–8
4	9	10	29	30	–5	–10
5	11	12	31	32	–6	–2
6	13	14	33	34	–7	–4
7	15	16	35	36	–8	–6
8	17	18	37	38	–9	–8
9	19	20	39	40	–10	–10

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ MathCAD

Задача №1

$ORIGIN := 1$

Параметры объекта управления

$k1 := 1 \qquad k2 := 2$

$T1 := 0.5 \qquad T2 := 1$

$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Единичная матрица**

Корни характеристического уравнения данного объекта

$s1 := \frac{-1}{T1} = -2 \qquad s2 := \frac{-1}{T2} = -1$

Матрицы заданного объекта управления

$A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{T1} & \frac{k1}{T1} \\ 0 & \frac{-1}{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k2}{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.Характеристический полином матрицы А

$a(s) := |s \cdot I - A| \rightarrow s^2 + 3 \cdot s + 2$

2.Заданные желаемые значения корней

$sg1 := -3 \qquad sg2 := -3$

$g(s) := s^2 - s \cdot (sg1 + sg2) + sg1 \cdot sg2 \rightarrow s^2 + 6 \cdot s + 9$

3.Коэффициенты передачи регулятора в каноническом базисе

$kk1_m := sg1 \cdot sg2 - s1 \cdot s2 = 7$

$kk2_m := -(sg1 + sg2) - [-(s1 + s2)] = 3$

$kk := \begin{pmatrix} kk1_m \\ kk2_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$kk^T = (7 \quad 3)$

4.Матрица управляемости R

$$R := \mathrm{augment}(b, A\cdot b) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

5.Каноническая пара

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(s1\cdot s2) & (s1+s2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$bb := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.Матрица управляемости в каноническом базисе

$$RR := \mathrm{augment}(bb, AA\cdot bb) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

7.Матрица преобразования P

$$P := RR\cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

8.Вектор-строка коэффициентов передачи регулятора в исходном базисе

$$k := kk^{T}\cdot P = (0.25 \quad 1.5)$$

$$k1m := k^{\langle 1\rangle} = (0.25) \qquad k2m := k^{\langle 2\rangle} = (1.5)$$

Проверка

$$G := A - bk = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -0.5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$gg(s) := \left|s \cdot I - G\right| \rightarrow s^2 + 6.0 \cdot s + 9.0$$

Коэффициент усиления

$$Ky := \frac{1 + k2 \cdot k2m + k1 \cdot k2 \cdot k1m}{k1 \cdot k2} = (2.25)$$

Задача №2

$ORIGIN := 1$

Параметры объекта управления

$k1 := 1 \qquad k2 := 2$

$T1 := 0.5 \qquad T2 := 1$

$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Единичная матрица**

Корни характеристического уравнения данного объекта

$s1 := \frac{-1}{T1} = -2 \qquad s2 := \frac{-1}{T2} = -1$

Параметры передаточной функции

$b0 := \frac{k1 \cdot k2}{T1 \cdot T2} = 4$

$a0 := \frac{1}{T1 \cdot T2} = 2$

$a1 := \frac{T1 + T2}{T1 \cdot T2} = 3$

$W(s) := \frac{b0}{s^2 + a1 \cdot s + a0} \rightarrow \frac{4}{s^2 + 3 \cdot s + 2}$

2.Заданные желаемые значения корней

$sg1 := -3 \qquad sg2 := -3$

$g(s) := s^2 - s \cdot (sg1 + sg2) + sg1 \cdot sg2 \rightarrow s^2 + 6 \cdot s + 9$

$g1 := -(sg1 + sg2) = 6$

$g0 := sg1 \cdot sg2 = 9$

3.Коэффициенты передачи регулятора в каноническом базисе

$kk := \begin{pmatrix} g0 - a0 \\ g1 - a1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$kk^T = (7 \quad 3)$

$k1m := kk_1 = 7$

$k2m := kk_2 = 3$

5.Каноническая пара

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(s1 \cdot s2) & (s1 + s2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$bb := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$G := AA - bb\,kk^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$gg(s) := \left| s \cdot I - G \right| \rightarrow s^2 + 6 \cdot s + 9$$

Коэффициент усиления

$$Ky := \frac{1 + k1 \cdot k2 \cdot k1m}{k1 \cdot k2} = 7.5$$

Учебное издание

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ПРОГРАММА И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЛОПАТИН Александр Геннадиевич
КИРЕЕВ Павел Анатольевич
ЛОПАТИНА Светлана Викторовна

Редактор Туманова Е.М.
Подписано в печать . . . Формат 60x84 1/16
Бумага Снегурочка. Отпечатано на ризографе
Усл. печ. л. 1,25. Уч.- изд. л. 0,7.
Тираж 50 экз. Заказ № .

ФГБОУ ВО Российский химико-технологический университет
им. Д. И. Менделеева
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета:125047, Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульской обл., Дружбы 8