Лекция 12

Mathcad

§6.1. Назначение

Mathcad является математическим редактором, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчеты, начиная от элементарной арифметики и заканчивая сложными реализациями численных методов. Благодаря простоте применения, наглядности математических действий, обширной библиотеке встроенных функций и численных методов, возможности символьных вычислений, а также превосходному аппарату представления результатов (графики самых разных типов, мощных средств подготовки печатных документов и Web-страниц), Mathcad стал наиболее популярным математическим приложением.

Mathcad 11, в отличие от большинства других современных математических приложений, построен в соответствии с принципом WYSIWYG ("What You See Is What You Get" — "что Вы видите, то и получите"). Поэтому он очень прост в использовании, в частности, из-за отсутствия необходимости сначала писать программу, реализующую те или иные математические расчеты, а потом запускать ее на исполнение. Вместо этого достаточно просто вводить математические выражения с помощью встроенного редактора формул, причем в виде, максимально приближенном к общепринятому, и тут же получать результат. Кроме того, можно изготовить на принтере печатную копию документа или создать страницу в Интернете именно в том виде, который этот документ имеет на экране компьютера при работе с Mathcad. Для эффективной работы с редактором Mathcad достаточно базовых навыков пользователя. С другой стороны, профессиональные программисты могут извлечь из Mathcad намного больше, создавая различные программные решения, существенно расширяющие возможности, непосредственно заложенные в Mathcad.

В соответствии с проблемами реальной жизни, математикам приходится решать одну или несколько из следующих задач:

- ввод на компьютере разнообразных математических выражений (для дальнейших расчетов или создания документов, презентаций, Web-страниц);
- проведение математических расчетов;
- подготовка графиков с результатами расчетов;
- ввод исходных данных и вывод результатов в текстовые файлы или файлы с базами данных в других форматах;
- подготовка отчетов работы в виде печатных документов;
- подготовка Web-страниц и публикация результатов в Интернете;
- получение различной справочной информации из области математики.

Со всеми этими (а также некоторыми другими) задачами с успехом справляется Mathcad:

- математические выражения и текст вводятся с помощью формульного редактора Mathcad, который по возможностям и простоте использования не уступает, к примеру, редактору формул, встроенному в Microsoft Word;
- математические расчеты производятся немедленно, в соответствии с введенными формулами;
- графики различных типов (по выбору пользователя) с богатыми возможностями форматирования вставляются непосредственно в документы;
- возможен ввод и вывод данных в файлы различных форматов;
- документы могут быть распечатаны непосредственно в Mathcad в том виде, который пользователь видит на экране компьютера, или сохранены в формате RTF для последующего редактирования в более мощных текстовых редакторах (например Microsoft Word);
- возможно полноценное сохранение документов Mathcad 11 в формате Web-страниц (генерация вспомогательных графических файлов происходит автоматически);
- имеется опция объединения разрабатываемых Вами документов в электронные книги, которые, с одной стороны, позволяют в удобном виде

хранить математическую информацию, а с другой — являются полноценными Mathcad-программами, способными осуществлять расчеты;

- символьные вычисления позволяют осуществлять аналитические преобразования, а также мгновенно получать разнообразную справочную математическую информацию

Таким образом, следует хорошо представлять себе, что в состав Mathcad входят несколько интегрированных между собой компонентов — это мощный текстовый редактор для ввода и редактирования как текста, так и формул, вычислительный процессор — для проведения расчетов согласно введенным формулам и символьный процессор, являющийся, по сути, системой искусственного интеллекта Сочетание этих компонентов создает удобную вычислительную среду для разнообразных математических расчетов и, одновременно, документирования результатов работы

§6.2. Знакомство с Mathcad

После того как Mathcad 11 установлен на компьютере и запущен на исполнение, появляется основное окно приложения, показанное на рис. 6.1. Оно имеет ту же структуру, что и большинство приложений Windows. Сверху вниз располагаются заголовок окна, строка меню, панели инструментов (стандартная и форматирования) и рабочий лист или рабочая область документа (worksheet). Новый документ создается автоматически при запуске Mathcad. В самой нижней части окна находится строка состояния.

Помимо элементов управления, характерных для типичного текстового редактора, Mathcad снабжен дополнительными средствами для ввода и редактирования математических символов, одним из которых является панель инструментов Math (Математика). С помощью этой, а также ряда вспомогательных наборных панелей, удобно осуществлять ввод уравнений.

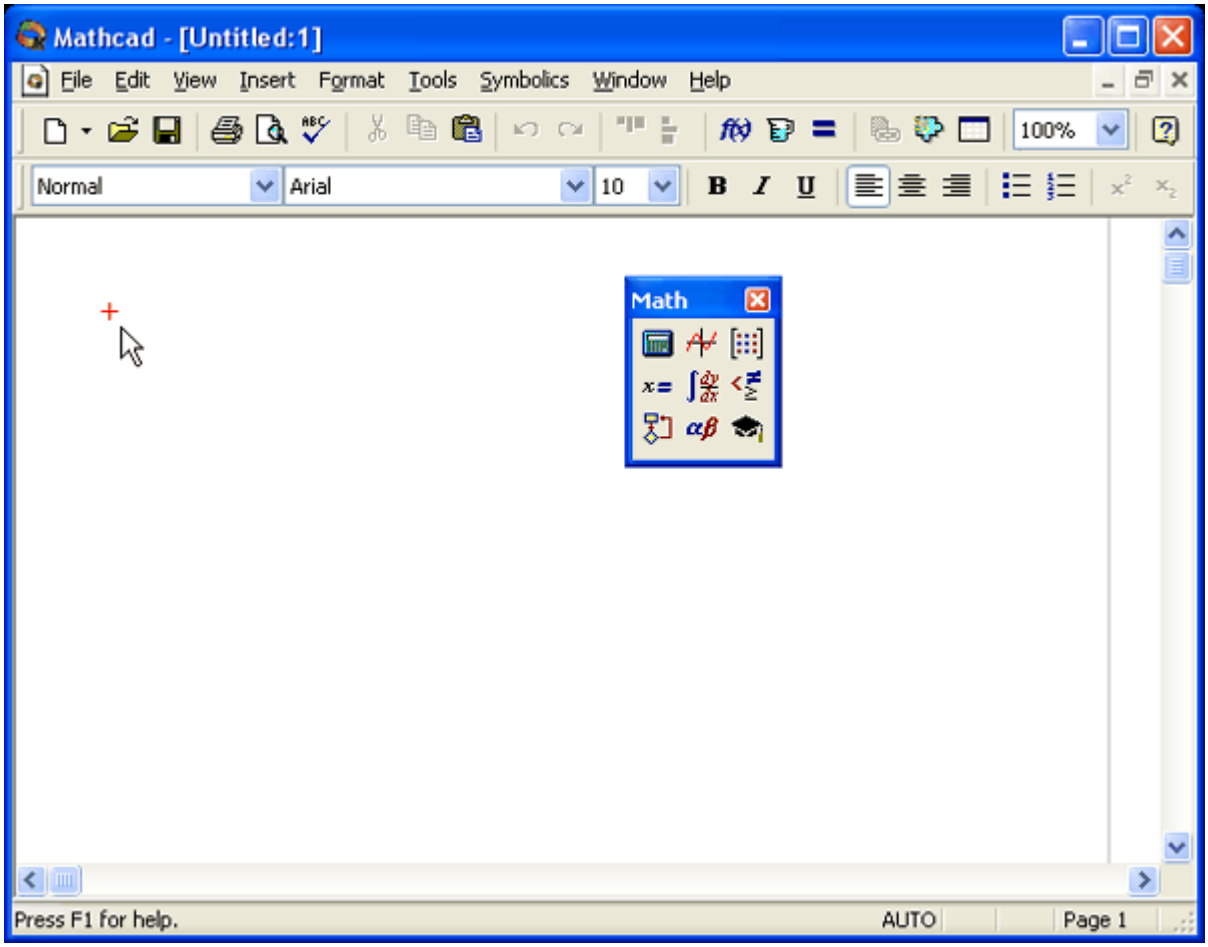

Рис. 6.1. Окно Mathcad 11 с новым документом

Для того чтобы выполнить простые расчеты по формулам, проделайте следующее:

- определите место в документе, где должно появиться выражение, щелкнув мышью в соответствующей точке документа;
- введите левую часть выражения;
- введите знак равенства <=>.

Для вычисления синуса какого-нибудь числа достаточно ввести с клавиатуры выражение типа sin(1/4)=. После того как будет нажата клавиша со знаком равенства, с правой стороны выражения, как по мановению волшебной палочки, появится результат. $\sin\left(\frac{1}{4}\right) = 0.247$

Подобным образом можно проводить и более сложные и громоздкие вычисления, пользуясь при этом всем арсеналом специальных функций, которые встроены в Mathcad. Легче всего вводить их имена с клавиатуры, как в примере с вычислением синуса, но, чтобы избежать возможных ошибок в их

написании, лучше выбрать другой путь. Чтобы ввести встроенную функцию в выражение:

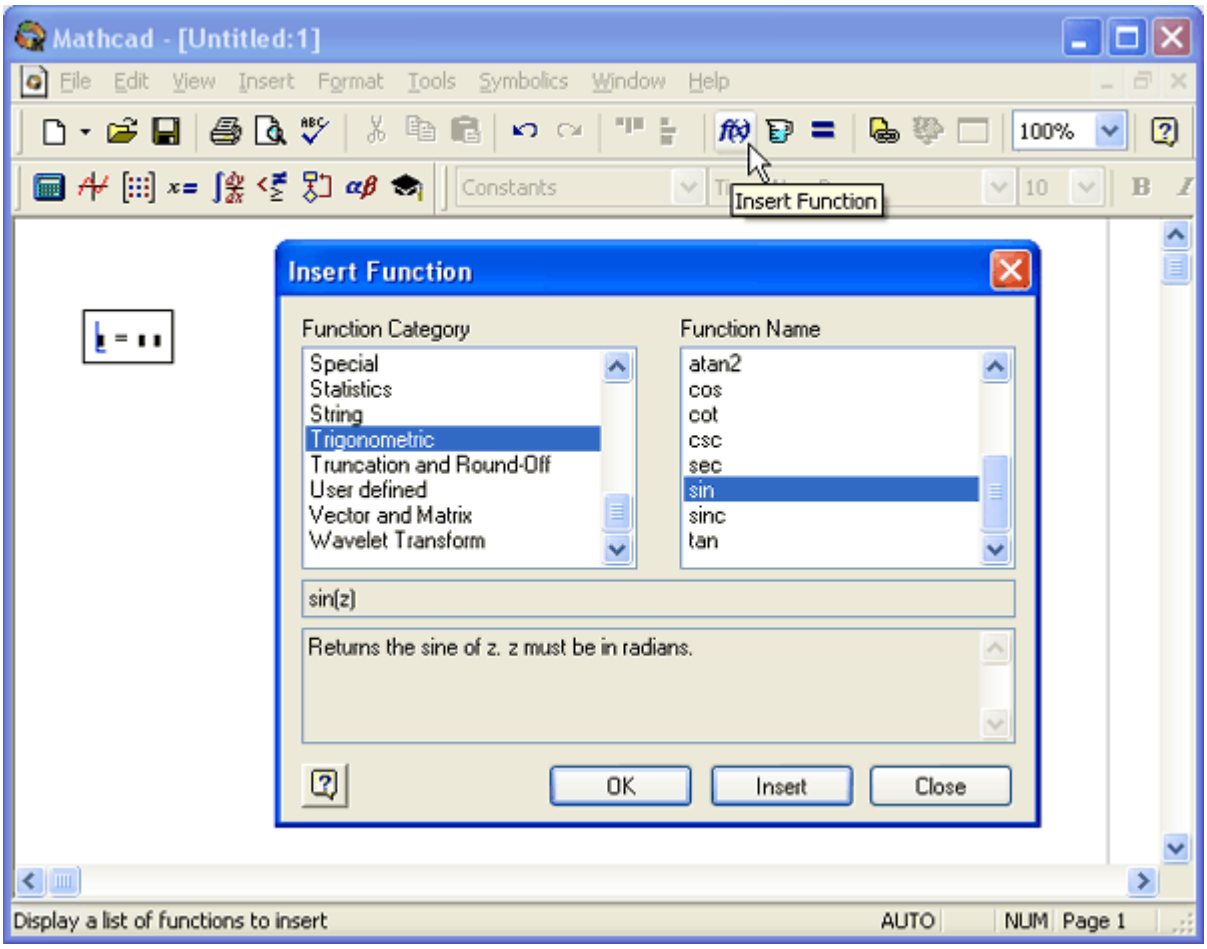

Рис. 6.2. Вставка встроенной функции

- Определите место в выражении, куда следует вставить функцию.
- Нажмите кнопку с надписью f(x) на стандартной панели инструментов (на нее указывает курсор на рис. 6.2).
- В списке Function Category (Категория функции) появившегося диалогового окна Insert Function (Вставить функцию) выберите категорию, к которой принадлежит функция, — в нашем случае это категория Trigonometric (Тригонометрические).
- В списке Function Name (Имя функции) выберите имя встроенной функции, под которым она фигурирует в Mathcad (sin). В случае затруднения с выбором ориентируйтесь на подсказку, появляющуюся при выборе функции в нижнем текстовом поле диалогового окна Insert Function.
- Нажмите кнопку OK — функция появится в документе.

- Заполните недостающие аргументы введенной функции (в нашем случае это 1/4).

Результатом будет введение выражения, для получения значения которого осталось лишь ввести знак равенства.

Конечно, не всякий символ можно ввести с клавиатуры, например знак интеграла или дифференцирования. Для этого в Mathcad имеются специальные панели инструментов, очень похожие на средства формульного редактора Microsoft Word. Как уже было отмечено ранее, одна из них — панель инструментов Math — показана на рис. 6.1. Она содержит инструменты для вставки в документы математических объектов (операторов, графиков, элементов программ и т. п.). Эта панель показана более крупным планом на рис. 6.3 уже на фоне редактируемого документа.

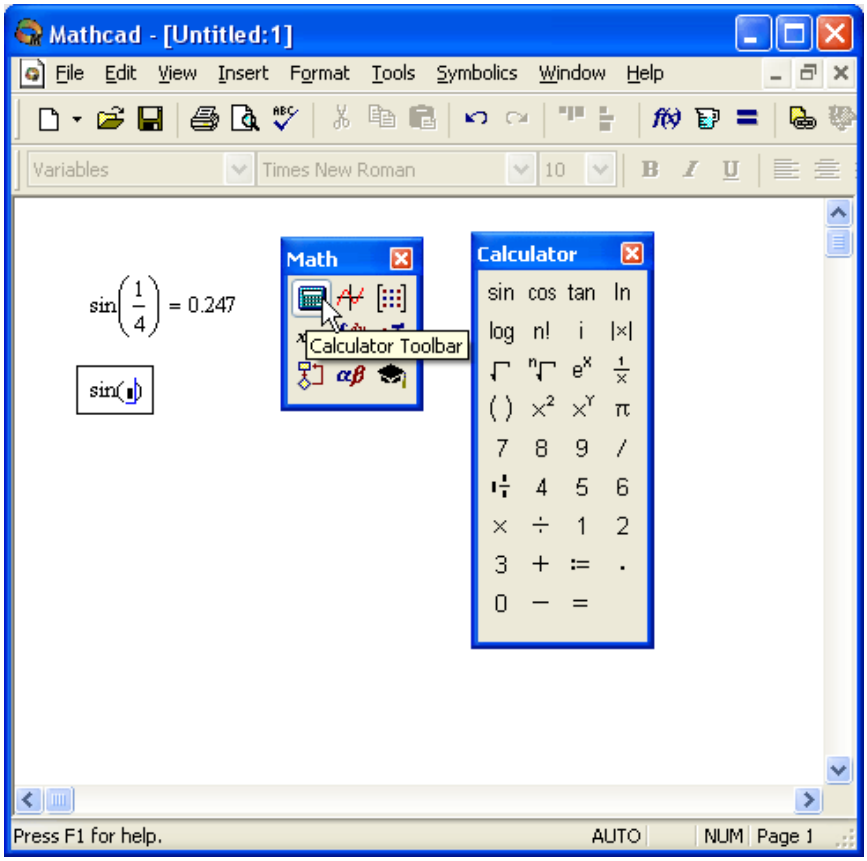

Рис. 6.3. Использование панели инструментов Math

Панель содержит девять кнопок, нажатие каждой из которых приводит, в свою очередь, к появлению на экране еще одной панели инструментов. С помощью этих девяти дополнительных панелей можно вставлять в документы Mathcad разнообразные объекты. На рис. 6.3, как легко увидеть, на панели Math в нажатом состоянии находятся две первые сверху слева кнопки (над левой из

них находится указатель мыши). Поэтому на экране присутствуют еще две панели — Calculator (Калькулятор) и Graph (График).

К примеру, можно ввести выражение исключительно с помощью панели Calculator. Для этого нужно сначала нажать кнопку sin (самую первую сверху). Результат данного действия показан на рис. 6.3 (выражение в рамке). Теперь остается лишь набрать выражение 1/4 внутри скобок (в местозаполнителе, обозначаемом черным прямоугольником). Для этого нажмите последовательно кнопки 1, — и 4 на панели Calculator и затем, на ней же, кнопку —, чтобы получить ответ (разумеется, тот же самый, что и в предыдущей строке документа).

Для математика представляется возможность задания переменных и операций с функциями пользователя. В Mathcad эти действия, как и большинство других, реализованы по принципу "как принято в математике, так и вводится". Обратите внимание на оператор присваивания, который применяется для задания значений переменным в первой строке. Его, как и все остальные символы, можно ввести с помощью панели Calculator. Присваивание обозначается символом ":=" , чтобы подчеркнуть его отличие от операции вычисления.

Использование переменных в расчетах

$x := 1.2 \qquad y := 55 \qquad z := 4$

$$\frac{\left(x^2 \cdot 250\right)}{\sqrt[5]{y}} \cdot \ln\left(z \cdot \pi\right) = 408.814$$

Определение функции пользователя и расчет ее значения в точке x=1

$a := 2$

$f(x) := x^a - \frac{2}{|x - 5|}$

$f(1) = 0.5$

Определяется функция f (x). Ее график показан на рис. 6.4. Чтобы построить его, следует нажать на панели Graph кнопку с нужным типом графика (на нее на рисунке наведен указатель мыши) и в появившейся заготовке графика определить значения, которые будут отложены по осям. В нашем случае потребовалось ввести x в местозаполнитель возле оси x и f (x) — возле оси Y.

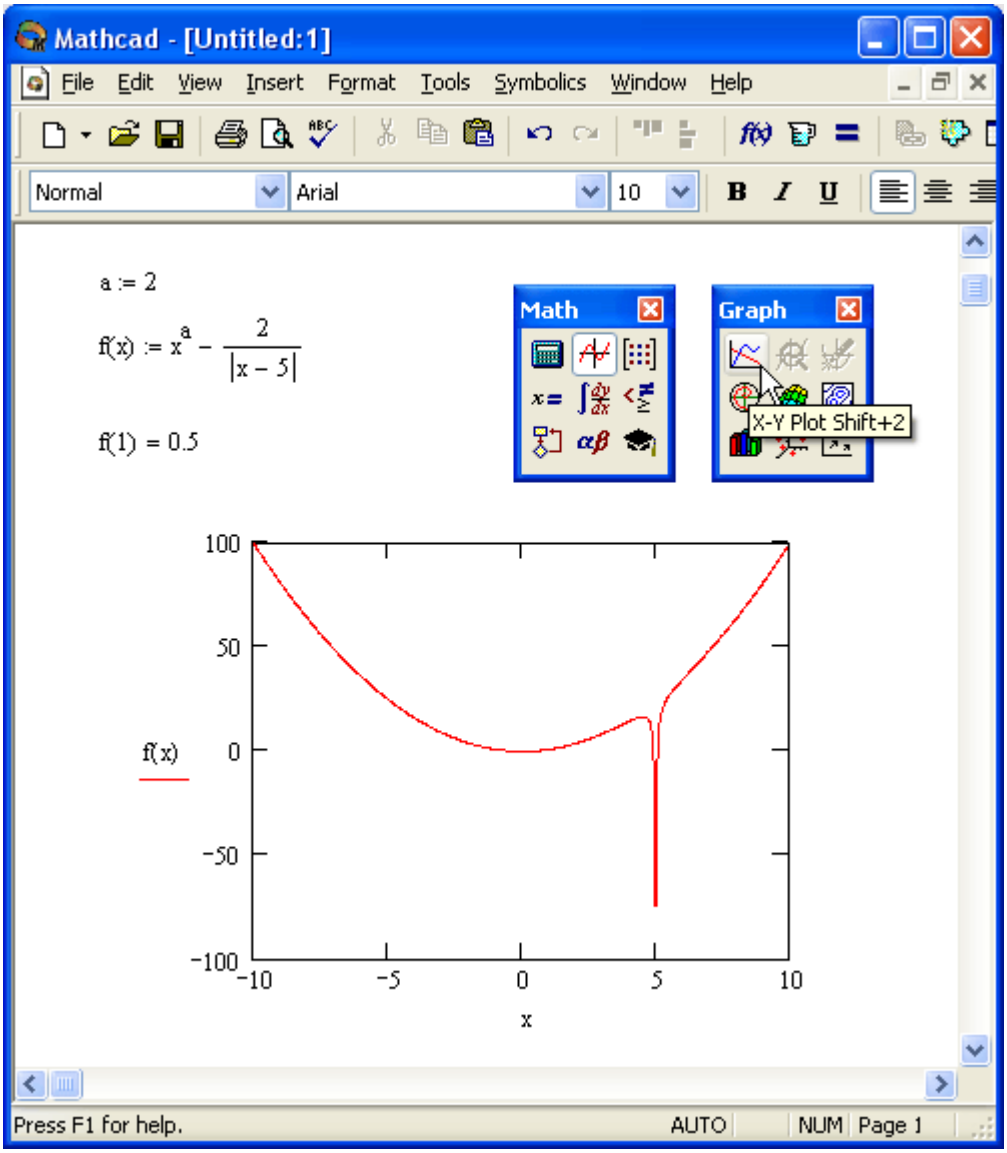

Рис. 6.4. Построение графика функции (листинг 1.3)

Одной из самых впечатляющих возможностей Mathcad являются символьные вычисления, позволяющие решить многие задачи аналитически. Умелое использование интеллекта символьного процессора Mathcad избавит вас от огромного количества рутинных вычислений, к примеру, интегралов и производных.

Символьные вычисления

$$\int \frac{\ln(a\cdot x)}{x^{b}}\,dx \rightarrow \left[\frac{-(1-\ln(a)+b\cdot\ln(a))}{-2\cdot b+1+b^{2}}\cdot x-\frac{1}{b-1}\cdot x\cdot\ln(x)\right]\cdot x^{-b}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\left(x^{2}\cdot 250\right)}{\sqrt[5]{y}}\cdot\ln(z\cdot\pi)\rightarrow 500\cdot\frac{x}{y^{\frac{1}{5}}}\cdot\ln(z\cdot\pi)$$

Обратите внимание на традиционную форму написания выражений, единственная особенность заключается в необходимости применения символа символьных вычислений → вместо знака равенства. Его, кстати, можно ввести в редакторе Mathcad с любой из панелей Evaluation (Выражения) или Symbolic (Символика), а символы интегрирования и дифференцирования — с панели Calculus (Вычисления).

§6.3. Панели инструментов

Панели инструментов служат для быстрого (за один щелчок мыши) выполнения наиболее часто применяемых команд Все действия, которые можно выполнить с помощью панелей инструментов, доступны и через верхнее меню. На рис. 6.5 изображено окно Mathcad, содержащее четыре основные панели инструментов, расположенные непосредственно под строкой меню. Кнопки в панелях сгруппированы по сходному действию команд:

- Standard — служит для выполнения большинства операций, таких, как действия с файлами, редакторская правка, вставка объектов и доступ к справочным системам;
- Formatting — для форматирования (изменения типа и размера шрифта, выравнивания и т. п.) текста и формул;
- Math — для вставки математических символов и операторов в документы;
- Resources — для вызова ресурсов Mathcad (примеров, справок и т.п.)

Группы кнопок на панелях инструментов разграничены по смыслу вертикальными линиями — разделителями. При наведении указателя мыши на любую из кнопок рядом с кнопкой появляется всплывающая подсказка — короткий текст, поясняющий назначение кнопки. Наряду со всплывающей подсказкой более развернутое объяснение готовящейся операции можно отыскать на строке состояния

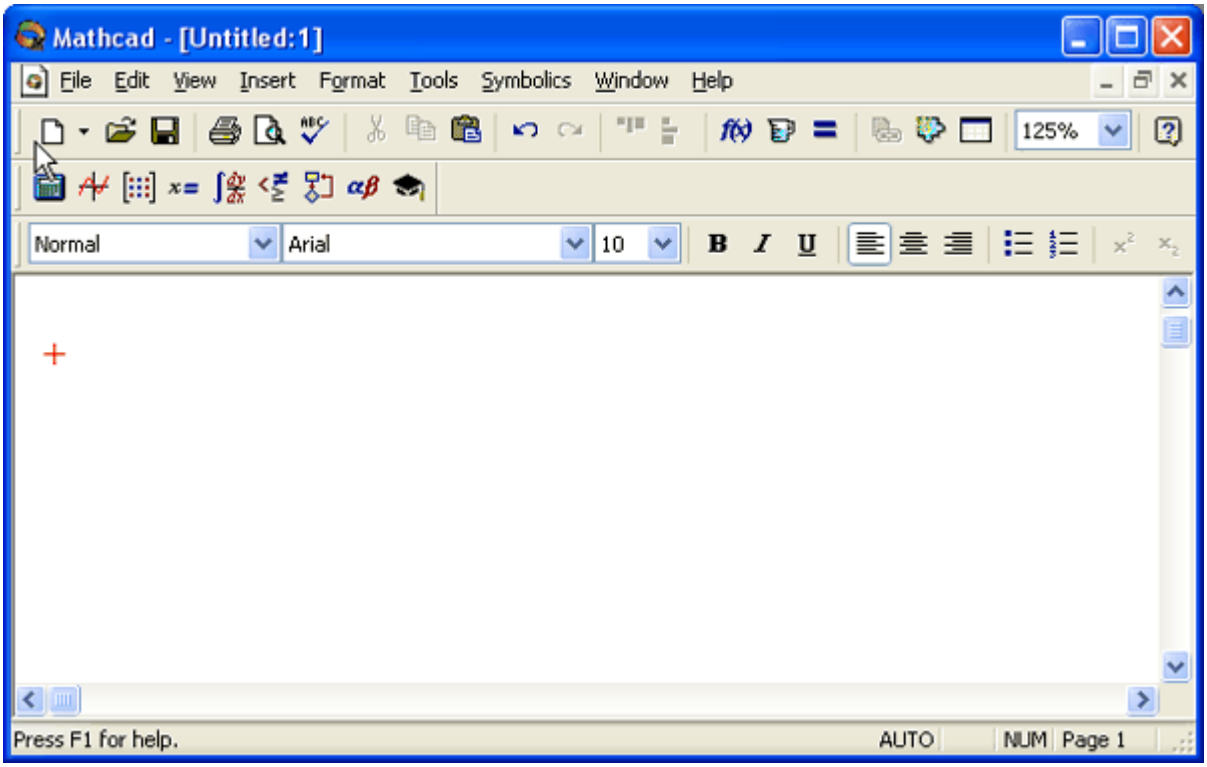

Рис. 6.5. Основные панели инструментов

Панель Math предназначена для вызова на экран еще девяти панелей (рис. 6.6), с помощью которых, собственно, и происходит вставка математических операций в документы Чтобы показать какую-либо из них, нужно нажать соответствующую кнопку на панели Math. Перечислим назначение математических панелей:

- Calculator — служит для вставки основных математических операций;
- Graph (График) — для вставки графиков;
- Matrix (Матрица) — для вставки матриц и матричных операторов;
- Evaluation (Выражения) — для вставки операторов управления вычислениями;
- Calculus (Вычисления) — для вставки операторов интегрирования, дифференцирования, суммирования;
- Boolean (Булевы операторы) — для вставки логических (булевых) операторов;
- Programming (Программирование) — для программирования средствами Mathcad;
- Greek (Греческие символы) — для вставки греческих символов; П Symbolic — для вставки символьных операторов.

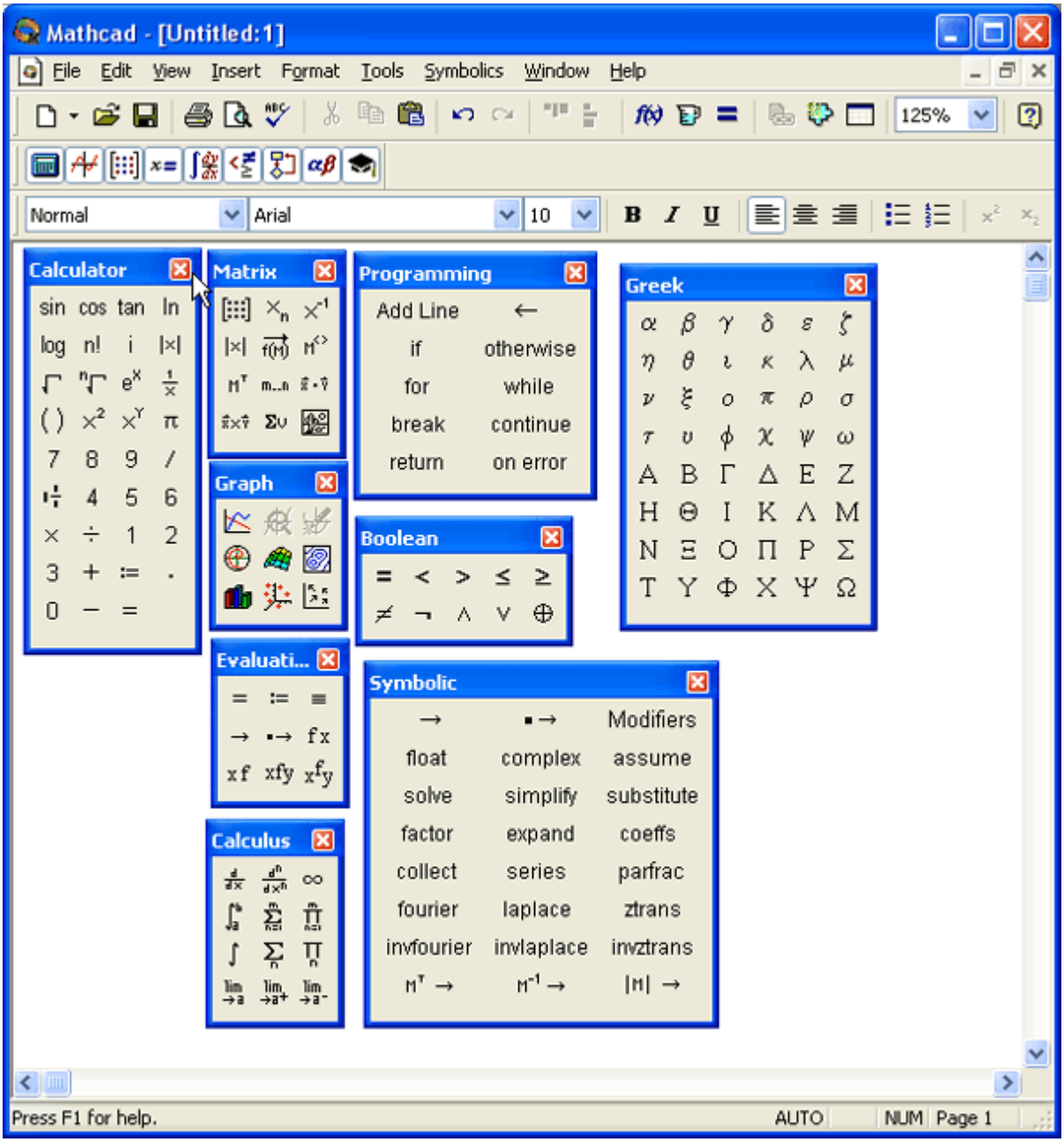

Рис. 6.6. Математические панели инструментов

При наведении указателя мыши на многие из кнопок математических панелей появляется всплывающая подсказка, содержащая еще и сочетание "горячих клавиш", нажатие которых приведет к эквивалентному действию.

§6.4. Решение уравнений.

Одно уравнение с одним неизвестным

Рассмотрим одно алгебраическое уравнение с одним неизвестным x.

f(x)=0, (1)

например, *sin(x)=0.*

Для решения таких уравнений Mathcad имеет встроенную функцию root, которая, в зависимости от типа задачи, может включать либо два, либо четыре аргумента и, соответственно, работает несколько по-разному.

- root(f(x),x);
- root(f(x),x,a,b);
    - f (x) — скалярная функция, определяющая уравнение (1);
    - x — скалярная переменная, относительно которой решается уравнение;
    - a,b — границы интервала, внутри которого происходит поиск корня.

Первый тип функции root требует дополнительного задания начального значения (guess value) переменной x. Для этого нужно просто предварительно присвоить x некоторое число. Поиск корня будет производиться вблизи этого числа. Таким образом, присвоение начального значения требует априорной информации о примерной локализации корня.

Приведем пример решения очень простого уравнения sin(x)=0, корни которого известны заранее.

Поиск корня нелинейного алгебраического уравнения

$x := 0.5$

$f(x) := \sin(x)$

$solution := root(f(x), x)$

$solution = -6.2 \times 10^{-7}$

Обратите внимание, что, хотя уравнение имеет бесконечное количество корней x_n=npi (n=0,±1,±2,...), Mathcad находит (с заданной точностью) только один из них, x_0, лежащий наиболее близко к x=0.5. Если задать другое начальное

значение, например x=3, то решением будет другой корень уравнения x1=pi и т. д. Таким образом, для поиска корня средствами Mathcad требуется его предварительная локализация. Это связано с особенностями выбранного численного метода. Если уравнение неразрешимо, то при попытке найти его корень будет выдано сообщение об ошибке.

Когда root имеет **четыре** аргумента, следует помнить о двух ее особенностях:

- внутри интервала [a,b] не должно находиться более одного корня, иначе будет найден один из них, заранее неизвестно, какой именно;
- значения f (a) и f (b) должны иметь разный знак, иначе будет выдано сообщение об ошибке.

Если уравнение не имеет действительных корней, но имеет мнимые, то их также можно найти.

Пример, в котором уравнение $x^2+i=0$, имеющее два чисто мнимых корня, решается два раза с разными начальными значениями. При задании начального значения 0.5 (первая строка листинга) численный метод отыскивает первый корень (отрицательную мнимую единицу -i), а при начальном значении -0.5 находится и второй корень (i).

Поиск мнимого корня

$$x := 0.5$$

$$\mathrm{root}\left(x^2 + 1, x\right) = -i$$

$$x := -0.5$$

$$\mathrm{root}\left(x^2 + 1, x\right) = i$$

f (x) может быть функцией не только x, а любого количества аргументов. Именно поэтому в самой функции root необходимо определить, относительно какого из аргументов следует решить уравнение. Эта возможность проиллюстрирована на примере функции двух переменных $f(x,y)=x^2-y^2+3$. В нем сначала решается уравнение f(x,0)=0 относительно переменной x, а потом - другое уравнение f (1,y) =0 относительно переменной y.

Поиск корня уравнения, заданного функцией двух переменных

$$f(x,y) := x^2 - y^2 + 3$$

$$x := 1$$

$$y := 0$$

$$\mathrm{root}(f(x,y),x) = -1.732i$$

$$\mathrm{root}(f(x,y),y) = 2$$

В первой строке определяется функция f (x,y), во второй и третьей — значения, для которых будет производиться решение уравнения по y и x, соответственно. В четвертой строке решено уравнение f (x,0)=0, а в последней —уравнение f (1,y)=0. Не забывайте при численном решении уравнений относительно одной из переменных предварительно определить значения остальных переменных. Иначе попытка вычислить уравнения приведет к появлению ошибки "This variable or function is not defined above", в данном случае говорящей о том, что другая переменная ранее не определена. Конечно, можно указать значение других переменных непосредственно внутри функции root, беспрепятственно удалив, например, вторую и третью строки и введя его последние строки в виде root(f (x,0) ,x)= и root(f (1,y) ,y)=, соответственно.

§6.5. Экстремум функции одной переменной

Поиск экстремума функции включает в себя задачи нахождения локального и глобального экстремума. Последние называют еще задачами оптимизации. Рассмотрим конкретный пример функции f(x), показанной графиком на рис. 6.7 на интервале (-2,5). Она имеет глобальный максимум на левой границе интервала, глобальный минимум, локальный максимум, локальный минимум и локальный максимум на правой границе интервала (в порядке слева направо).

В Mathcad с помощью встроенных функций решается только задача поиска локального экстремума. Чтобы найти глобальный максимум (или минимум), требуется либо сначала вычислить все их локальные значения и потом выбрать из них наибольший (наименьший), либо предварительно

просканировать с некоторым шагом рассматриваемую область, чтобы выделить из нее подобласть наибольших (наименьших) значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности. Последний путь таит в себе некоторую опасность уйти в зону другого локального экстремума, но часто может быть предпочтительнее из соображений экономии времени.

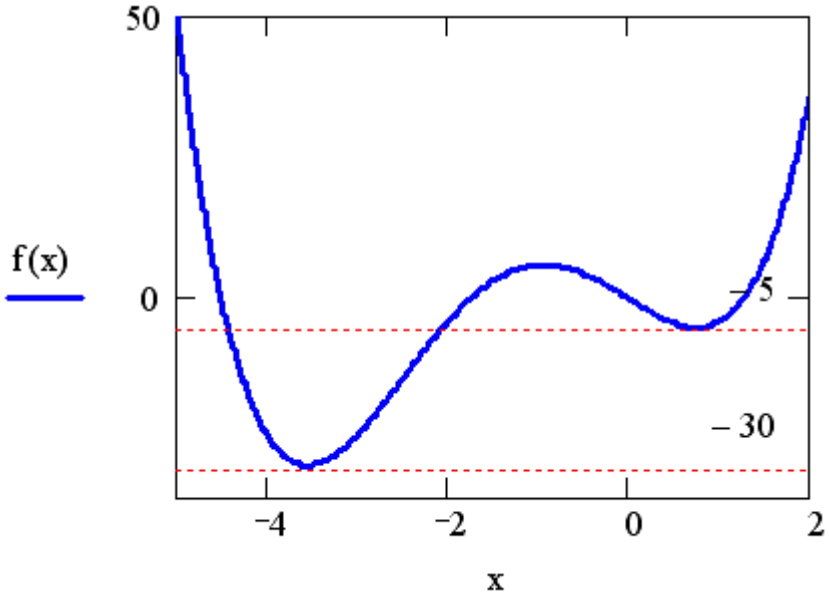

Рис. 6.7. График функции $f(x)=x^4+5x^3-10x$

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции, которые могут применяться как в пределах вычислительного блока, так и автономно.

- Minimize (f, x1, ... ,xм) — вектор значений аргументов, при которых функция f достигает минимума;
- Maximize (f, x1, ... ,xм) — вектор значений аргументов, при которых функция f достигает максимума;
    - f (x1, ... , xм,...) — функция;
    - x1, ... , xм — аргументы, по которым производится минимизация (максимизация).

Всем аргументам функции f предварительно следует присвоить некоторые значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения.

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

$x := -1$

$\text{Minimize}(f, x) = -3.552$

$x := 1$

$\text{Minimize}(f, x) = 0.746$

Минимум функции одной переменной

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

$x := 1$

$\text{Maximize}(f, x) = -0.944$

$x := -10$

$\text{Maximize}(f, x) =$

Максимум функции одной переменной

Как видно, существенное влияние на результат оказывает выбор начального приближения, в зависимости от чего в качестве ответа выдаются различные локальные экстремумы. В последнем случае численный метод вообще не справляется с задачей, поскольку начальное приближение x=-10 выбрано далеко от области локального максимума, и поиск решения уходит в сторону увеличения f (x).