

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

Ребенков Е.С.

Теория электромагнитного поля

Учебное пособие

Новомосковск
2017

УДК 621.316
ББК 31.21
Р 851

Рецензент:

доктор технических наук, профессор Логачева В.М.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева),
генеральный директор «Промэнергосбыт»,
профессор Ставцев В.А.

Ребенков Е.С.

Р 851 «Теория электромагнитного поля».
Учебное пособие по курсу «ТОЭ» / ФГБОУ ВО «РХТУ им.
Менделеева» Новомосковский институт (филиал),
Новомосковск, 2017.-71 с.
Ил.19. Табл.1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 621.316
ББК 31.21

©Е.С. Ребенков
©ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»,
Новомосковский институт (филиал), 2017

Введение

Учебное пособие содержит основные теоретические положения раздела «Теория электромагнитного поля» курса «ТОЭ». В пособии рассмотрены основные уравнения электростатического поля, электрического поля в проводящей среде, уравнения магнитного поля постоянного тока и переменного электромагнитного поля.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по учебному плану подготовки бакалавров направления 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» по профилю подготовки «Электроснабжение». Пособие может быть полезным при подготовке к практическим и лабораторным работам по курсу «Теоретические основы электротехники». Учебное пособие содержит многовариантные задания для контрольной работы №5 по «ТОЭ», часть 3.

Теория электромагнитного поля.

§1. Основные уравнения электромагнитного поля.

Электромагнитное поле – это вид материи, оказывающей на заряженные частицы силовое воздействие и определяемый во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны – электрическое поле и магнитное поле.

Электрическое поле – составляющая электромагнитного поля, которая характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле - составляющая электромагнитного поля, которая характеризуется воздействием на движущуюся частицу с силой пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

Для исследования электромагнитных полей наиболее пригодны уравнения электродинамики в интегральной и дифференциальной формах.

Уравнениями электродинамики в интегральной форме называются уравнения, полученные в физике и выражающие интеграл от соответствующего вектора по замкнутой поверхности (поток вектора через замкнутую поверхность S) и интеграл от соответствующего вектора вдоль замкнутой кривой l (циркуляция вектора вдоль замкнутой кривой l).

К интегральной форме приводятся законы Кирхгофа для электрических цепей постоянного тока:

$$\sum I = 0, \quad \sum U = \sum E \quad (1.1)$$

Или в векторной форме:

$$\oint_S \bar{\delta} \bar{dS} = 0, \quad \oint_l \bar{E} \bar{dl} = 0 \quad (1.2)$$

и законы Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\Sigma \Phi = 0, \quad \Sigma Hl = \Sigma IW \quad (1.3)$$

или в векторной форме:

$$\oint_S \bar{B} \bar{dS} = 0; \quad \oint_l \bar{H} \bar{dl} = \Sigma I \quad (1.4)$$

Здесь $\bar{\delta}$ и \bar{E} - соответственно векторы плотности тока и напряженности электрического поля в определённых точках электрической цепи, \bar{B} и \bar{H} - векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля в соответствующих точках магнитной цепи.

В интегральной форме записываются так же основные уравнения электромагнитного поля – уравнения Максвелла.

1-е уравнение Максвелла (закон полного тока):

$$\oint_l \bar{H} \bar{dl} = \Sigma i, \quad (1.5)$$

где Σi - полный ток включает в общем случае алгебраическую сумму токов проводимости, токов обусловленных переносом зарядов и токов смещения.

2-е уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции):

$$e = \oint_l \bar{E} \bar{dl} = -\frac{d}{dt} \int \bar{B} \bar{dS}, \quad (1.6)$$

где э.д.с. наводимая в замкнутом контуре, содержит в себе в общем случае составляющую, обусловленную изменением во времени магнитной индукции и составляющую, вызванную относительным движением контура в магнитном поле.

Теорема Гаусса (постулат Максвелла) в интегральной форме устанавливает связь между потоком вектора электрического смещения \bar{D} сквозь замкнутую поверхность S в электрическом поле и алгебраической суммой свободных зарядов $Q_{\text{своб}}$ внутри

этой поверхности:

$$\int \vec{D} \vec{dS} = \Sigma Q_{\text{своб}} \quad (1.7)$$

Закон непрерывности линий вектора магнитной индукции имеет вид:

$$\int \vec{B} \vec{dS} = 0 . \quad (1.8)$$

Он показывает, что магнитное поле характеризуется всегда замкнутыми линиями вектора магнитной индукции \vec{B} .

Для расширения возможностей расчета эти уравнения преобразуют в дифференциальную форму.

§2. Основные уравнения электростатического поля.

Закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \vec{1}_r \quad (2.1)$$

где $\vec{1}_r$ - единичный вектор, направленный по линии соединяющей заряды q_1 и q_2 , r - расстояние между ними, ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость,

$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi 9 \cdot 10^{-9}} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - электрическая постоянная ($\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды).

Напряженность и потенциал электрического поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \vec{1}_r, \quad \phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r} \quad (2.2)$$

Потенциал электрического поля точечного, линейного, поверхностного и объемного зарядов:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + \int_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a r} + \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a r} + \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a r}, \quad (2.3)$$

где τ – линейная плотность заряда, σ – поверхностная плотность заряда, ρ – объемная плотность заряда.

Зависимость между напряженностью электрического поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi, \quad \phi = -\int \vec{E} \overline{d\vec{l}} + \text{const}, \quad (2.4)$$

где $\overline{d\vec{l}}$ – элемент длины.

Градиент потенциала представляет собой вектор, численно равный производной потенциала по нормали к эквипотенциальной поверхности и направленный в сторону возрастания потенциала:

$$\text{grad } \phi = \frac{d\phi}{dn} \overline{n}_0, \quad (2.5)$$

где \overline{n}_0 – орт нормали.

Одним из основных соотношений характеризующих электростатическое поле, является условие потенциальности поля:

$$\oint \vec{E} \overline{d\vec{l}} = 0. \quad (2.6)$$

Это условие соответствует однозначности потенциала для электростатического поля, силовые линии которого начинаются и кончаются на поверхностях заряженных тел.

Зависимость между напряженностью электрического поля и электрическим смещением \vec{D} (электрической индукцией):

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}, \quad (2.7)$$

Где \vec{P} – вектор поляризации, χ_e – относительная электрическая восприимчивость.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho : \quad (2.8)$$

Дивергенция (расхождение) вектора электрического смещения

\overline{D} равна объемной плотности заряда ρ .

В случае однородного диэлектрика ($\epsilon = \text{const}$) теорема Гаусса в дифференциальной форме может быть представлена соотношением:

$$\text{div} \overline{D} = \text{div} \epsilon_a \overline{E} = \epsilon_a \text{div} \overline{E} = \rho$$

или

$$\text{div} \overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.9)$$

Подстановка в это уравнение $\overline{E} = -\text{grad} \varphi$ приводит к уравнению Пуассона:

$$-\text{div} \text{grad} \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_a} \text{ или } \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.10)$$

где Δ – лапласиан (оператор Лапласа) или ∇^2 наблквадрат.

Общее решение уравнения Пуассона имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (2.11)$$

где r – расстояние от точки наблюдения до элемента объема dV с зарядом ρdV .

Для пространства, свободного от зарядов ($\rho=0$), уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Значение уравнений Пуассона и Лапласа для расчетов поля в однородной диэлектрической среде заключается в том, что сложное решение уравнений для векторов \overline{E} и \overline{D} заменяется более простым решением одного уравнения в частных производных для скалярной величины φ .

Граничные условия в электростатическом поле:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma; E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0,$$

где D_{1n} и D_{2n} – нормальные к граничной поверхности составляющие вектора электрического смещения, $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – тангенциальные (касательные к граничной поверхности)

составляющие вектора напряженности электрического поля, σ – поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела.

Граничные условия на поверхности проводника помещенного в электростатическое поле:

$$E_{\tau}=0; D=D_n=\varepsilon_a E = \sigma.$$

Энергия электрического поля:

$$W_э = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\rho \phi}{2} dV + \oint_S \frac{\sigma \phi}{2} dS \quad (2.12)$$

Сила, действующая на заряд q :

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (2.13)$$

§3. Электрическое поле заряженной оси отрезка.

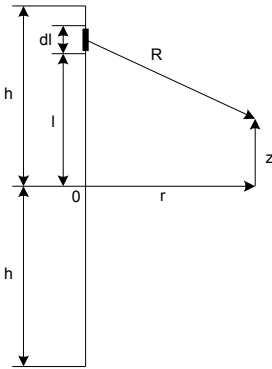


Рис.1.

Пусть в однородном диэлектрике вдоль прямолинейной оси длиной $2h$ равномерно распределены заряды с линейной плотностью $\tau=Q/2h$. Надо определить потенциал поля.

Начало цилиндрической системы координат (r, α, z) поместим в среднюю точку оси отрезка, а ось Oz направим вдоль отрезка $2h$ (рис.1.).

Разобьем всю длину отрезка на элементарные участки длиной dl с зарядом $dQ = \tau dl$. Такой точечный заряд, находящийся на расстоянии l от начала координат, обусловит в точке (r, z) потенциал:

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + (l-z)^2}}$$

Результирующий потенциал в этой же точке:

$$\phi = \int_{-h}^h \frac{\tau dl}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 \sqrt{r^2 + (l-z)^2}} = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \left[l - z + \sqrt{r^2 + (l-z)^2} \right] \Big|_{-h}^h .$$

Окончательное решение:

$$\phi = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + (l-z)^2} + (h-z)}{\sqrt{r^2 + (l+z)^2} - (h-z)} \quad (3.1)$$

Если длина отрезка значительно превышает линейные размеры области поля примыкающей к центральной части отрезка, т.е. $h \gg r$ и $h \gg z$ (т.е. имеем бесконечно длинный отрезок), то полученную формулу можно привести к виду:

$$\phi = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{4 h^2}{r^2} = \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}$$

Выделив из этого уравнения постоянное слагаемое и обозначив его через A получим:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln 2h - \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln r, \\ \phi &= -\frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln r + A. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из этого выражения видно, что при $h \rightarrow \infty$ и при $A \rightarrow \infty$ потенциал ϕ в бесконечности будет равен нулю.

§4. Электрическое поле двух разноименно заряженных осей.

Пусть в однородном диэлектрике находятся две параллельные бесконечно длинные оси равномерно и разноименно заряженные с линейной плотностью заряда $\pm\tau$. Расстояние между осями равно $2a$ (рис. 2). Определим потенциал поля.

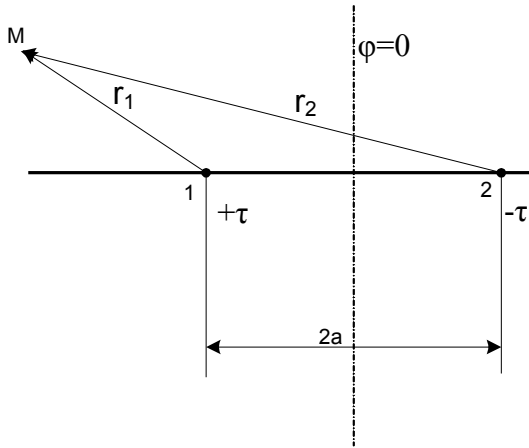


Рис.2.

Потенциал в точке М, отстоящей на расстоянии r_1 от положительной оси и r_2 от отрицательной оси можно получить как сумму потенциалов от отдельных осей. Согласно полученному выше выражению для потенциала заряженной оси (см. §3) можно записать:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_2 + A,$$

(4.1)

$$\phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + A.$$

(4.2)

Первое слагаемое обращается в ноль при $r_1=r_2$, то есть в точках плоскости перпендикулярной к отрезку $2a$ и проходящей через его середину. Если потенциал этой плоскости принять равным нулю, то и постоянная A обратится в ноль. Тогда

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.3)$$

Потенциал будет постоянным в тех точках, где постоянно полученное выражение для φ .

Откуда получаем уравнение равнопотенциальных линий:

$$\frac{r_2}{r_1} = k,$$

где k – параметр семейства этих линий.

Таким образом, для каждой точки искомой линии должно быть постоянным отношение расстояний этой точки до точек 1 и 2 – следов пересечения заряженных осей с перпендикулярной им плоскостью чертежа. Но таким свойством обладают точки окружности, по отношению к которой точки 1 и 2 являются взаимно обратными (инверсными).

Две точки 1 и 2 называются симметричными или взаимнообратными по отношению к окружности радиуса R , центр O которой лежит на продолжении отрезка соединяющего эти точки, если произведение расстояний точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса (рис.3.):

$$(S-a)(S+a)=R^2,$$

откуда

$$\frac{S+a}{R} = \frac{R}{S-a}.$$

Для любой точки P окружности это равенство означает подобие большого $PO2$ и малого $PO1$ треугольников и может быть приравнено отношению третьих сторон r_2 и r_1 треугольников:

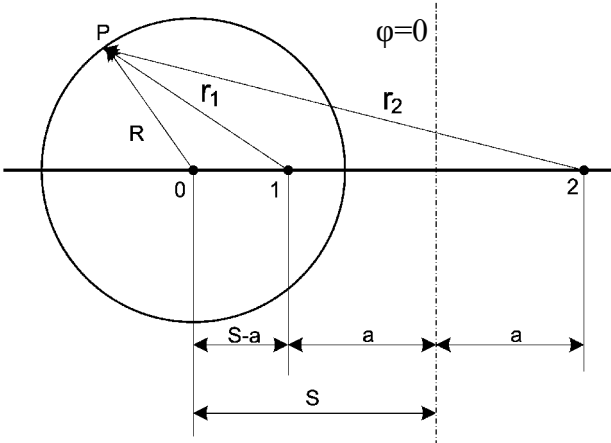


Рис.3.

$$\frac{S+a}{R} = \frac{R}{S-a} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

Это выражение показывает, что хотя r_2 и r_1 меняются вдоль окружности, но их отношение, равное отношению постоянных для данной окружности отрезков, тоже постоянно и равно k . Для разных значений k различны положение центра окружности (отрезок $S-a$) и ее радиус R . При $k > 1$ ($r_2 > r_1$) окружность охватывает точку 1, при $k < 1$ – точку 2.

§5. Электрическое поле и емкость системы цилиндр-плоскость.

Имеем цилиндр радиусом R находящийся над плоской поверхностью (например, земли), потенциал которой равен нулю. Между плоскостью и цилиндром имеем напряжение U . Расстояние между осью цилиндра и плоскостью – h (рис.4.).

Положение электрических осей можно определить по уравнению (см. §4):

$$(S-a)(S+a)=R^2$$

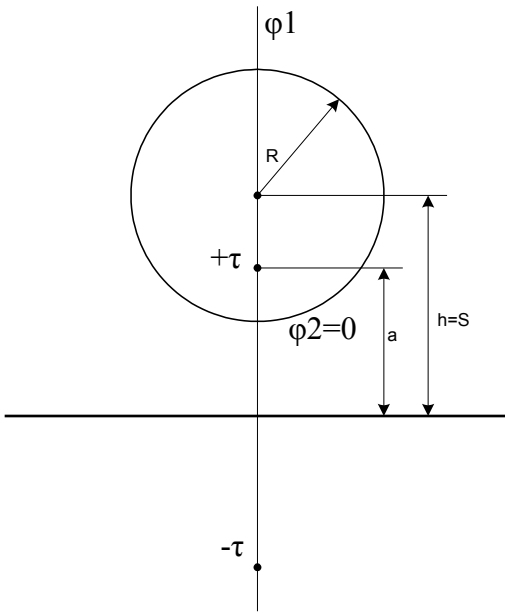


Рис.4.

Приравняем $S=h$, тогда потенциал цилиндра

$$\phi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{S+a}{R} \quad \text{при}$$

$$\text{этом } \frac{S+a}{R} = \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{см. §4}).$$

Так как $\phi_2=0$, то $U = \phi_1 - \phi_2 = \phi_1$. Таким образом, линейная плотность заряда τ :

$$\tau = U \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{S+a}{R}}.$$

Емкость на единицу длины:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{S+a}{R}}. \quad (5.1)$$

Если имеем тонкий провод, подвешенный высоко над землей, то $S+a \approx 2h$ и тогда:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}. \quad (5.2)$$

§6. Электрическое поле и емкость двухпроводной линии.

Двухпроводную линию можно представить как два цилиндра радиусом R , расстояние между осями которых d и напряжение между которыми $U = \phi_1 - \phi_2$ (рис. 5).

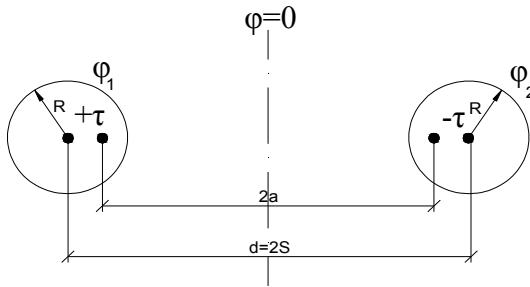


Рис.5.

Положение электрических осей можно определить из уравнений (см. §4):

$$\begin{aligned}(S-a)(S+a) &= R^2, \\ 2S &= d.\end{aligned}$$

Потенциал положительно заряженного провода:

$$\phi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{S+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d - (S-a)}{R}. \quad (6.1)$$

Потенциал отрицательно заряженного провода:

$$\phi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-(S-a)} \quad (r_2 < r_1) . \quad (6.2)$$

Напряжение

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{[d-(S-a)]^2}{R^2} = \frac{\tau}{\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d-(S-a)}{R} . \quad (6.3)$$

Заряд на единицу длины

$$\tau = U \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(S-a)}{R}} . \quad (6.4)$$

Емкость на единицу длины:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(S-a)}{R}} . \quad (6.5)$$

Для воздушных линий, где провода подвешены на столбах, обычно $R \ll d$, тем более $(S-a) \ll d$ и величиной $S-a$ можно пренебречь по сравнению с d , то есть можно принять, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. Таким образом, для тонких проводов получаем:

$$U = \pi\epsilon\epsilon_0 \ln \frac{d}{R} ,$$

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} .$$

§7. Электрическое поле и емкость коаксиального кабеля.

Коаксиальным кабелем называется двухпроводная линия в виде двух разделенных изоляцией цилиндров с совпадающими осями. Заданы a и b – размеры однослойного диэлектрика, ϵ –

его диэлектрическая проницаемость (рис.6).

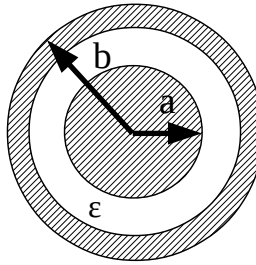


Рис.6.

Электрическое поле обладает осевой симметрией, поэтому на расстоянии r от оси кабеля электрическое смещение равно

$$D = D_r = \frac{\tau}{2\pi r},$$

а напряженность электрического поля

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (7.1)$$

Откуда напряжение

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}, \quad (7.2)$$

а емкость на единицу длины кабеля

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (7.3)$$

Максимальное значение напряженности поля имеем у поверхности внутреннего цилиндра ($r=a$):

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a} = \left| \tau = \frac{U 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \right| = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}}.$$

Если изменить в этой формуле a , то значение напряженности примет наименьшее значение при $a=a_{\text{опт}}$, которое определяется из условия:

$$\frac{d}{da} \left(a \ln \frac{b}{a} \right) = 0 ,$$

откуда

$$\ln \frac{b}{a} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = e = 2,7.$$

При этом соотношении радиусов достигается максимальная электрическая прочность кабеля.

§8. Основные уравнения электрического поля в проводящей среде.

Закон Ома в интегральной форме для проводника

$$U_{12} = IR ,$$

где напряжение

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} ,$$

а ток через поверхность сечения S определяется

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} . \quad (8.1)$$

В общем случае ток по сечению S проводника распределен неравномерно. Выделим в проводнике бесконечно малый цилиндр, в котором направление вектора плотности тока совпадает с направлением движения зарядов и осью цилиндра (рис.7).

Сопротивление выделенного цилиндрического участка:

$R = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}$, где γ – удельная проводимость.

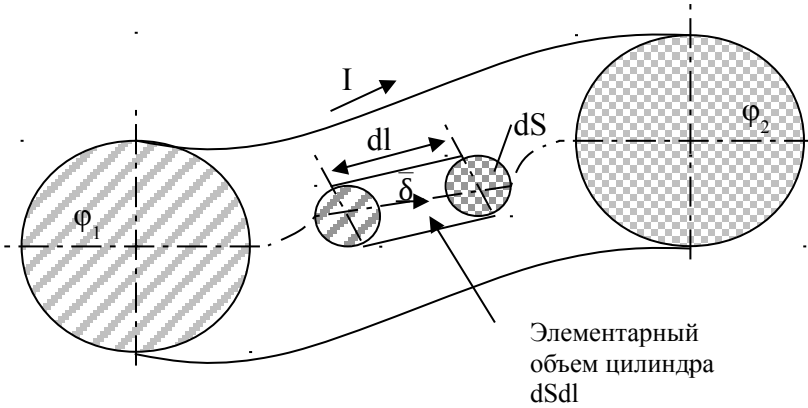


Рис.7.

Подставляя в уравнение закона Ома получим:

$$\delta dS = \frac{Edl}{\frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}}, \text{ откуда } \delta = \gamma E .$$

Вектор $\vec{\delta}$ в изотропных телах совпадает с вектором напряженности поля \vec{E} ; поэтому $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ - это закон Ома в дифференциальной форме.

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме $P = RI^2$.

Для выделенного цилиндра:

$$dP = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS} (\delta dS)^2 = \frac{\delta^2}{\gamma} dl dS = \frac{\delta^2}{\gamma} dV .$$

Откуда энергия поглощаемая вблизи цилиндра, отнесённая к единице времени и объёма:

$$p = \frac{dP}{dV} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \underbrace{|\delta = \gamma E|}_{\text{закон Ома}} = \gamma E^2$$

это уравнение Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Выражая токи через уравнение (8.1), получим уравнение, которое показывает, что поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \bar{\delta} \bar{dS} = 0 \quad (8.2)$$

это уравнение справедливо для любой сколь угодно малой поверхности S в стационарном режиме.

Разделив (8.2) на объем V заключенный внутри поверхности S и стянув поверхность так, что $V \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{\delta} \bar{dS}}{V} = 0 .$$

Этому выражению соответствует дивергенция вектора $\bar{\delta}$:

$\text{div} \bar{\delta} = 0$ - это первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Второй закон Кирхгофа для участка электрической цепи не содержащего источника энергии $\Sigma U = 0$ или в интегральной форме:

$$\oint \bar{E} \bar{dl} = 0 . \quad (8.3)$$

Разделив уравнение (8.3) на поверхность S , ограниченную контуром интегрирования бесконечно малого размера и перехода в пределу $S \rightarrow 0$ получим:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} \bar{dl}}{S} = 0$$

Выражение слева в этом уравнении называется вихрь или ротор вектора \bar{E} , точнее, проекция $\text{rot} \bar{E}$ на направление нормали \bar{n} к площадке $S \rightarrow 0$ (рис.8).

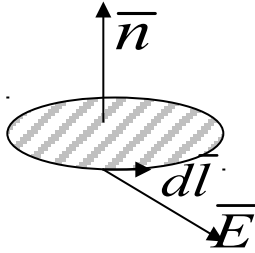


Рис.8.

Полученная дифференциальная форма второго закона Кирхгофа для участка цепи не содержащего источник энергии

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

позволяет обосновать потенциальный характер электрического поля в проводниках. Это следует из того, что согласно (8.3) напряжение между двумя точками не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положения этих точек. Поэтому в каждой точке поле может быть однозначно охарактеризовано скалярной величиной называемой потенциалом, связанным с напряженностью поля уравнением $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ (см. §2).

В источниках энергии движение зарядов происходит под действием сторонних сил ($F_{\text{стор}}$). Поле сторонних сил характеризуется вектором напряженности:

$$E_{\text{стор}} = \frac{F_{\text{стор}}}{q},$$

где q – положительный заряд на который действует сила $F_{\text{стор}}$.

Напряженность стороннего электрического поля связанная с э.д.с. источника определяется интегралом:

$$e = \int_a^b \overline{E_{\text{стор}} dl}, \quad (8.4)$$

где интегрирование производится по пути лежащему внутри источника энергии (рис.9).

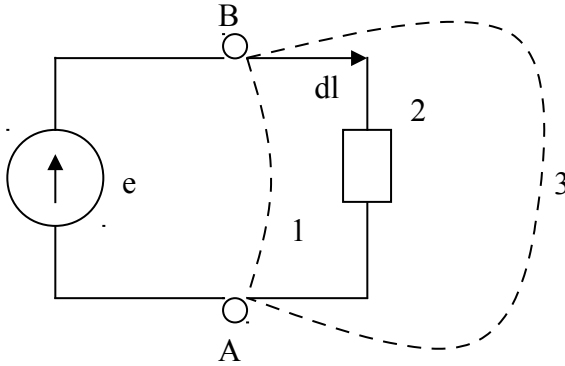


Рис.9.

В общем случае величина интеграла (8.4) зависит от пути интегрирования. Например, вне источника он будет равен нулю, т.к. здесь $E_{стор} = 0$.

Таким образом:

- 1) поле сторонних сил не является потенциальным;
- 2) величина интеграла (8.4) не изменится, если распространить его на любой их контуров 1, 2 или 3, включающий э.д.с. Для такого контура

$$e = \oint \overline{E_{стор}} dl .$$

Второй закон Кирхгофа для участка цепи содержащего источник э.д.с (рис.10).

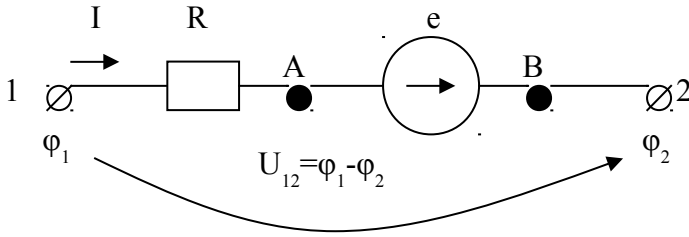


Рис.10.

в интегральной форме: $e = IR - U_{12}$,

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2 + e}{R}.$$

(8.5)

Разность потенциалов образуется только потенциальным полем без учета потенциального поля источника э.д.с.:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l}.$$

Тогда $\phi_1 - \phi_2 + e = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l} + \int_1^2 \overline{E}_{\text{стоп}} d\overline{l}$. Подставляя в (8.5)

получим

$$I = \frac{\int_1^2 (\overline{E} + \overline{E}_{\text{стоп}}) d\overline{l}}{R}.$$

Если к элементарному цилиндру с током I применить уравнения (8.4) и (8.5), учитывая что этот цилиндр находится внутри источника энергии, получим второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме:

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \overline{E_{\text{смор}}}) .$$

(8.6)

При $E_{\text{смор}} = 0$ получим закон Ома в дифференциальной форме

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} . \quad (8.7)$$

§9. Расчет сферического заземлителя.

Сферический заземлитель радиуса a находится в среде с относительно небольшой проводимостью γ . Ток, подводимый к заземлителю, равен I (рис. 11).

Определим сопротивление растеканию R_p . Заземлитель зарыт на глубину во много раз больше его радиуса.

По условиям симметрии ток будет равномерно растекаться во все стороны. Линии вектора плотности тока будут радиальными прямыми. На расстоянии r от центра заземлителя численное значение плотности тока:

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2} . \quad (9.1)$$

В той же точке напряженность электрического поля определяется по закону Ома:

$$\bar{E} = \frac{I}{\gamma} \delta = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \bar{I}_r . \quad (9.2)$$

Соответственно, потенциал

$$\phi = - \int \bar{E} d\bar{l} + const .$$

Напряжение между любой точкой почвы и поверхностью заземлителя определяется из выражения:

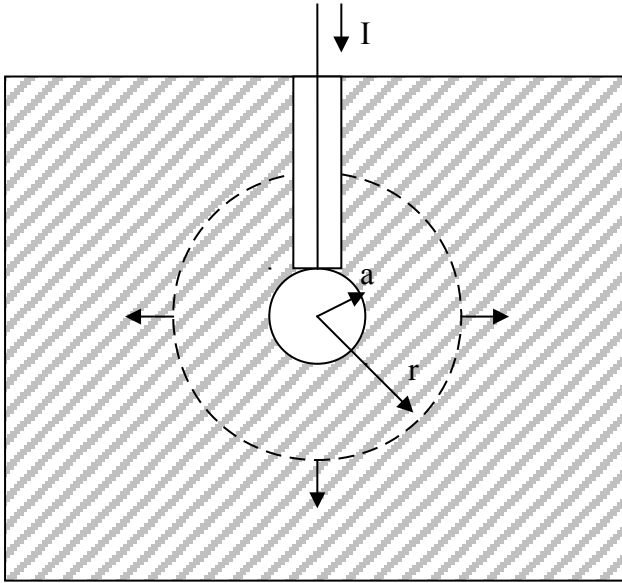


Рис.11.

$$U = \phi_a - \phi_r = \int_a^r E dr = \frac{\bar{I}}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \quad (9.3)$$

С увеличением расстояния r напряжение стремится к пределу:

$$U_p = \frac{I}{4\pi\gamma a} \quad (9.4)$$

Это предельное напряжение называется напряжением растекания. На расстоянии $r = 100a$ с достаточной степенью точности можно считать $U = U_p$. Отношение U_p к току называется сопротивлением растекания:

$$R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a} \quad (9.5)$$

Рассмотрим полусферический заземлитель радиуса a погруженный в землю вровень с её поверхностью (рис.12). Для него

$$R_p = \frac{1}{2\pi\gamma a}$$

Определим напряжение шага $U_{ш}$ - напряжение, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. Ток I , протекающий в землю через заземлитель, задан.

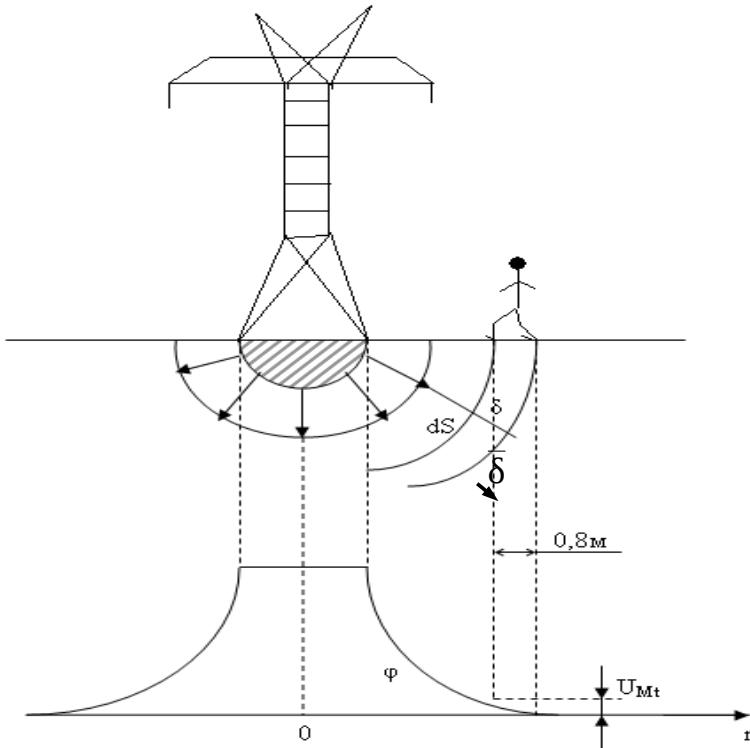


Рис.12.

 $U_{ш}$

Пользуясь формулами предыдущего примера можно записать выражение напряженности электрического поля в точке, удаленной от центра заземлителя на расстояние r :

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \quad (9.6)$$

Считая длину шага равной 0,8 м, получим:

$$U_w = \int_r^{r+0,8} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right) \quad (9.7)$$

Если принять потенциал $\phi = 0$ при $r = \infty$, то в остальных точках на поверхности земли, начиная от $r = a$, потенциал распределится по уравнению:

$$\phi = \frac{I}{2\pi\gamma r} = U_p \frac{a}{r} \quad (9.8)$$

На рис.12 показана кривая $\phi = f(r)$.

§10. Основные уравнения магнитного поля постоянного тока.

В основе расчета магнитного поля постоянного тока лежит следующая система уравнений в интегральной форме:

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = I \quad (10.1)$$

$$\oint \overline{B} d\overline{S} = 0 \quad (10.2)$$

$$\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H} \quad (10.3)$$

Эта система дополняется выражением удельной энергии магнитного поля:

$$\frac{dW_m}{dV} = \frac{\overline{B} \overline{H}}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (10.4)$$

Уравнения поля в дифференциальной форме, так же как и

граничные условия, получаются обычно из уравнений поля в интегральной форме путем предельного перехода к бесконечно малым величинам контура и поверхности интегрирования. Применим уравнение (10.1) к элементарному контуру, ограничивающему площадку ΔS , через которую проходит ток ΔI для точек, где значение μ непрерывно:

$$\oint \overline{H} \overline{dl} = \Delta I$$

После деления обеих частей этого равенства на ΔS и перехода к пределу получим:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \overline{H} \overline{dl}}{\Delta S} = \text{rot}_n \overline{H} = \delta_n,$$

или учитывая, что проекции векторов равны независимо от положения контура,

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta} \quad (10.5)$$

Это и есть закон полного тока в дифференциальной форме. Применение уравнения (10.2) к поверхности элементарной призмы объема ΔV приводит к выражению:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \overline{B} \overline{dS}}{\Delta V} = 0,$$

или

$$\text{div} \overline{B} = 0. \quad (10.6)$$

Получен закон непрерывности линий магнитной индукции в дифференциальной форме. Он свидетельствует о чисто соленоидальном характере поля вектора \overline{B} : не существует магнитных зарядов, которые служили бы началами и концами линий вектора магнитной индукции.

Для точек, лежащих на поверхности раздела двух сред с различными значениями μ уравнения (10.1) и (10.2) приводят к граничным условиям. Граничное условие для тангенциальных

составляющих вектора \overline{H}_1 и \overline{H}_2 имеет вид:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0 .$$

Граничное условие для нормальных составляющих вектора \overline{B}_1 и \overline{B}_2 :

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 .$$

Таким образом, в магнитном поле постоянных токов непрерывны тангенциальные составляющие векторов \overline{H} и нормальные составляющие векторов \overline{B} .

§11. Векторный потенциал магнитного поля.

Рассчитаем магнитное поле в однородной среде ($\mu = const$), если задано распределение плотности тока $\overline{\delta} = \overline{\delta}(x, y, z)$; то есть требуется решить систему уравнений: (10.1), (10.2) и (10.3).

Введем новую векторную функцию $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$, позволяющую исключить неизвестные векторы \overline{B} и \overline{H} из уравнений (10.5) и (10.6) и получить взамен их дифференциальное уравнение

$$\overline{B} = rot \overline{A} , \quad (10.7)$$

удовлетворяющее требованию $div \overline{B} = 0$, так как дивергенция ротора тождественно равна нулю.

После преобразований получим:

$$\overline{A} = \int \frac{\mu \mu_0 \overline{\delta}}{4 \pi R} dV , \quad (10.8)$$

где R – расстояние от элемента тока $\overline{\delta} dV$ до точки, в которой определяется поле.

Таким образом, здесь проявляется принцип двойственности.

Определив \bar{A} из уравнения (10.8), можно найти магнитную индукцию дифференцированием $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$ и напряженность магнитного поля $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu\mu_0}$.

Полученная векторная функция \bar{A} , с помощью которой решена поставленная задача, называется векторным потенциалом магнитного поля.

Из уравнения (10.4) после преобразования по теореме Остроградского получим выражение энергии магнитного поля через векторный потенциал:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \bar{H} \bar{B} dV = \frac{1}{2} \int \delta \bar{A} dV \quad (10.9)$$

Для одиночного провода, диаметр которого $2a$, с током I в цилиндрической системе координат r , α и z с центром на оси провода векторный потенциал магнитного поля можно определить по закону полного тока из выражения (10.7):

$$B_\alpha = \text{rot}_\alpha \bar{A} = -\frac{dA_z}{dr}.$$

Для внешнего магнитного поля: ($r \geq a$):

$$A_e = -\int B_e dr = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r. \quad (10.10)$$

Для внутреннего магнитного поля ($r < a$):

$$A_i = -\int B_i dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2}. \quad (10.11)$$

При $r=a$, имеем $A_e = A_i$.

§12. Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии.

В случае двух параллельных цилиндров (проводников) диаметра $2a$ длиной l и расстоянием между ними d с прямым током I в первом проводнике и обратным током I во втором проводнике в цилиндрической системе координат с осью z в первом проводнике (рис.13) имеем:

По уравнению (10.10) результирующий векторный потенциал магнитного поля:

$$A_e = A_{e1} + A_{e2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r'_2}{r'_1}.$$

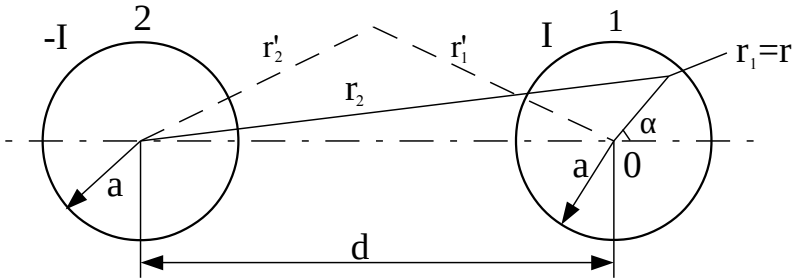


Рис.13.

По уравнениям (10.10) и (10.11) результирующий векторный потенциал при $a > r_1 = r$ и геометрически выражая r_2 :

$$r_2 = \sqrt{d^2 + 2dr \cos \alpha + r^2}$$

после преобразований имеем:

$$A_i = A_{i1} + A_{e2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d}{a} - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(1 + 2 \frac{r}{d} \cos \alpha + \frac{r^2}{d^2} \right). \quad (10.12)$$

Подставляя уравнение (10.12) в (10.9) с учетом $\delta = \frac{I}{\pi a^2}$ и

$dV = IdS$ получим энергию магнитного поля двухпроводной линии для точек расположенных внутри сечения S первого провода:

$$W_m = \frac{I^2 \mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

Откуда из известного выражения $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ можно определить полную индуктивность линии:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

§13. Магнитное поле и индуктивность коаксиального кабеля.

Коаксиальный кабель представляет собой два проводящих цилиндра с совпадающими осями, выполняющих роль прямого и обратного проводов. Провода разделены изоляцией (рис.14).

Если считать ток I внутреннего цилиндра – жилы кабеля – положительным, тогда ток оболочки кабеля будет по величине таким же, но отрицательным. Объем кабеля имеет три области:

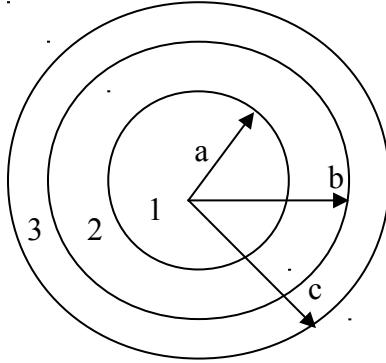


Рис.14.

первая область - это жила кабеля с плотностью тока

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi a^2};$$

вторая область, занимаемая изоляцией; третья область, занимаемая оболочкой кабеля с плотностью тока

$$\delta_3 = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (13.1)$$

Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности с центром, расположенным на оси кабеля. В области 1 магнитная линия радиуса $r \leq a$ охватывает часть тока:

$$\delta_1 \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2. \quad (13.2)$$

По закону полного тока напряженность магнитного поля в этой области

$$H_I = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{I}{a^2} r^2 \right) = \frac{I}{2\pi a^2} r. \quad (13.3)$$

Во второй области магнитная линия радиуса $a \leq r \leq b$

охватывает весь ток I , поэтому

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad (13.4)$$

В третьей области магнитная линия радиуса $b \leq r \leq c$ охватывает ток

$$I + \delta_3 \pi (r^2 - b^2) = I - I \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad (13.5)$$

значит,

$$H_3 = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)}. \quad (13.6)$$

Магнитное поле вне кабеля равно нулю. Его энергия:

$$W_m = \int \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} dV, \quad (13.7)$$

запасенная на участке кабеля длиной l , равна сумме энергий отдельных областей. Элемент объема dV целесообразно для всех областей выразить как:

$$dV = 2\pi r dr,$$

тогда

$$W_m = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2} LI^2,$$

причем энергией W_2 внешнего магнитного поля определяется так называемая внешняя индуктивность кабеля:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_e I^2, \quad (13.8)$$

откуда

$$L_e = \frac{2W_2}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (13.9)$$

а энергией $W_1 + W_3$ внутреннего магнитного поля определяется

внутренняя индуктивность

$$L_i = \frac{2(W_1 + W_3)}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{c^4 \ln \frac{c}{b}}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \quad (13.10)$$

Полная индуктивность

$$L = L_e + L_i.$$

Внешняя индуктивность кабеля не будет изменяться и при питании кабеля переменным током любой частоты. Внутренняя индуктивность из-за поверхностного эффекта с увеличением частоты уменьшается до нуля при сверхвысокой частоте, так как ток становится поверхностным.

В этом случае магнитная задача становится аналогична электростатической, при этом внешняя индуктивность L_{eo} и емкость C_o на единицу длины системы соответствуют формуле

$$L_{eo} C_o = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2},$$

где c – скорость света в вакууме.

§14. Теорема Умова-Пойнтинга.

Рассмотрим процесс передачи энергии через коаксиальный кабель (рис.15).

Передаваемая мощность при постоянных токе I и напряжении U :

$$P=UI$$

Если $r_2 - r_1 \ll r_1$, тогда приближенно можно считать, что значения напряженности E и H во всех точках диэлектрика одинаковы и

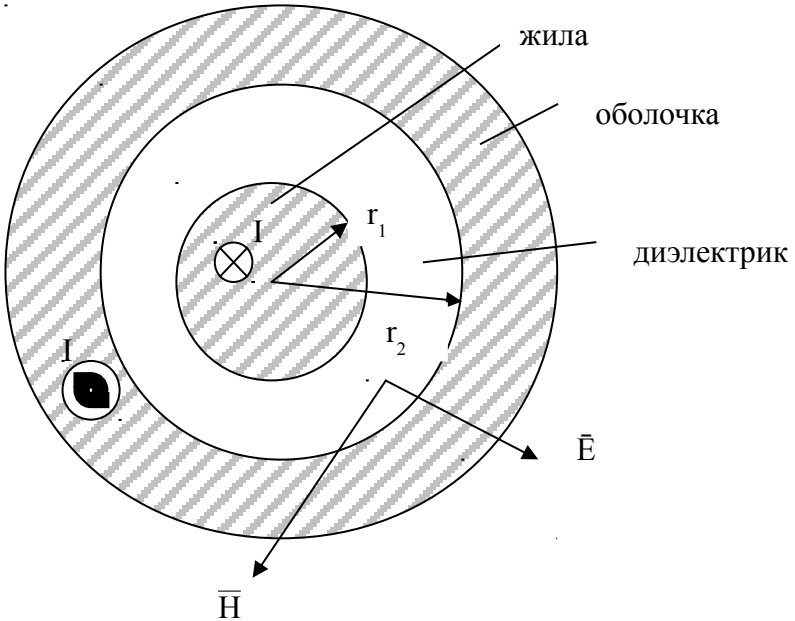


Рис.15.

равны

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}; \quad H = \frac{I}{\pi(r_2 + r_1)},$$

откуда

$$P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где S – площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение $EH = \frac{P}{S}$ характеризует мощность, передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика. Так как вектор \vec{E} направлен по радиусу, вектор \vec{H} перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение EH можно рассматривать как векторное.

Вектор $\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]$ называется вектором Пойнтинга. Из выражения $\vec{P} = \frac{P}{S}$ следует, что вектор Пойнтинга равен энергии электромагнитного поля в единицу времени (мощности), передаваемой через единицу площади сечения изоляции кабеля от генератора к приемнику. Это можно доказать в общем виде для любого электромагнитного поля.

Пусть в произвольном объеме V , ограниченном поверхностью S электромагнитное поле изменяется во времени. Часть объема V занимают сторонние источники и проводящие тела с постоянной проводимостью γ ; в остальной части объема – непроводящая однородная среда с $\gamma=0$, $\epsilon=const$ и $\mu=const$.

Энергия электромагнитного поля в объеме V :

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV, \quad (14.1)$$

где \vec{D} - вектор электрического смещения (электрической индукции), а изменение энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV \quad (14.2)$$

Подставляя в это уравнение первое и второе уравнения Максвелла и, преобразуя по теореме Остроградского и вводя вектор Пойнтинга, получим уравнение, называемое теоремой Умова-Пойнтинга, которое выражает закон сохранения энергии.

Мощность сторонних источников в объеме V определяется как сумма составляющих:

$$P_{\text{стоп}} = P + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint \bar{\Pi} d\bar{S}, \quad (14.3)$$

где P – тепловые потери в проводящей среде, $\oint \bar{\Pi} d\bar{S}$ – часть мощности, переносимой через поверхность S . Эта мощность может быть направлена и внутрь объема. Так, например, если процесс стационарный ($\frac{\partial W}{\partial t} = 0$) и в объеме V нет сторонних источников ($P_{\text{стоп}} = 0$), то

$$P + \oint \bar{\Pi} d\bar{S} = 0. \quad (14.4)$$

Так как $P > 0$, $\oint \bar{\Pi} d\bar{S} < 0$, то есть выделение тепла в объеме V в этом случае происходит за счет энергии, входящей через поверхность S внутрь объема V .

§15. Уравнение Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме.

Для синусоидально изменяющихся во времени электромагнитных полей вводится символическая запись уравнений поля, переходя от действительных векторов поля к их комплексным изображениям.

Мгновенное значение синусоидально изменяющегося вектора в декартовой системе координат:

$$\bar{H} = iH_{xm} \sin(\omega t + \Psi_x) + jH_{ym} \sin(\omega t + \Psi_y) + kH_{zm} \sin(\omega t + \Psi_z).$$

Комплексная амплитуда вектора \bar{H} :

$$\bar{H}_m = i\dot{H}_{mx} + j\dot{H}_{my} + k\dot{H}_{mz}, \text{ где}$$

$$\dot{H}_{mx} = H_{mx} e^{j\Psi_x}, \quad \dot{H}_{my} = H_{my} e^{j\Psi_y}, \quad \dot{H}_{mz} = H_{mz} e^{j\Psi_z}.$$

Если $\Psi_x = \Psi_y = \Psi_z$ составляющие вектора \bar{H} совпадают по фазе, то направление его с течением времени не изменится. В

общем случае $\Psi_x \neq \Psi_y \neq \Psi_z$ конец вектора \vec{H} описывает некоторую кривую.

Подстановка в основные уравнения поля комплексных выражений векторов и переход к действующим значениям даёт законы Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}} + j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad (15.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu \mu_0 \dot{\vec{H}}, \quad (15.2)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = \mathbf{0}; \quad \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}.$$

В электромагнитном поле, где напряжению соответствует вектор \vec{E} , а току – вектор \vec{H} можно ввести понятие комплексного вектора Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*].$$

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме для стационарного режима принимает вид:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = P + j\omega(W_{Mm} - W_{Элм}) = P + jQ = RI^2 + j\omega L_i I^2, \quad (15.3)$$

где $(W_{Mm} - W_{Элм})$ – разность максимальных значений энергий, запасенных в магнитном и электрическом полях в объеме V (в проводнике $W_{Элм} \ll W_{Mm}$), здесь обозначено:

P – активная мощность, поглощаемая внутри объема V ,

R и L_i – активное и внутреннее индуктивное сопротивление проводника.

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме позволяет доказать теорему единственности:

Если для одного из векторов \vec{E} или \vec{H} известны комплексные амплитуды тангенциальных составляющих на граничной поверхности S , то решение, удовлетворяющее в любой точке объема V уравнениям Максвелла и граничным условиям (на поверхности S), является единственным.

§16. Распространение электромагнитных волн

На большом расстоянии от источника сферическую волну можно считать плоской волной, для которой в каждой точке плоскости, перпендикулярной направлению распространения, напряженности поля имеют одинаковые значения.

Если в однородной изотропной непроводящей среде ($\varepsilon=const$, $\mu=const$, $\gamma=0$) нет свободных зарядов и поле создается в источнике синусоидальным током, то напряженности поля изменяются во времени синусоидально.

Уравнения Максвелла в комплексной форме, выраженные в декартовой системе координат x, y, z при распространении электромагнитных волн по оси z , позволяют сделать вывод, что в плоской волне, так же как и в сферической, векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу. Мгновенные значения напряженностей определяются как суммы падающей и отраженных волн:

$$E_x = E_{nad} + E_{omp} = \sqrt{2} [A_1 \sin \omega(t - \frac{z}{v}) + A_2 \sin \omega(t + \frac{z}{v})], \quad (16.1)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ - скорость волны, A_1 и A_2 - постоянные интегрирования определяемые граничными условиями.

$$H_y = H_{nad} + H_{omp} = \frac{1}{\rho} (E_{nad} - E_{omp}), \quad (16.2)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon v}$ - волновое сопротивление среды.

Откуда следует, что как в падающей, так и в отраженной волнах плотности энергии электрического и магнитного полей равны друг другу:

$$\frac{\varepsilon E_{nad}^2}{2} = \frac{\mu H_{nad}^2}{2} ; \quad \frac{\varepsilon E_{omp}^2}{2} = \frac{\mu H_{omp}^2}{2} \quad (16.3)$$

Если среда однородна и отраженной волны нет, то уравнения (16.1) и (16.2) будут иметь вид:

$$E_x = E_0 \sqrt{2} \sin \omega(t - \frac{z}{v}), \quad H_y = \frac{E_0}{\rho} \sqrt{2} \sin \omega(t - \frac{z}{v}),$$

где E_0 – действующее значение напряженности электрического поля в начале координат.

Вектор Пойнтинга имеет лишь составляющую по оси Z :

$$\Pi_z = \Pi = E_x H_y = \frac{2E_0^2}{\rho} \sin^2 \omega(t - \frac{z}{v}) = \frac{E_0^2}{\rho} [1 + \cos 2\omega(t - \frac{z}{v})] > 0$$

со средним значением:

$$\Pi_{cp} = \frac{E_0^2}{\rho} .$$

Плотность энергии падающей волны:

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \varepsilon E^2 = \mu H^2 .$$

Тогда вектор Пойнтинга:

$$\Pi = EH = \rho H^2 = \frac{\rho}{\mu} W_0 = v W_0 ;$$

или в векторной форме:

$$\vec{\Pi} = \vec{v} W_0 ,$$

Откуда видно, что энергия электромагнитной волны движется по оси z со скоростью v .

Графически распределение E, H , и Π для падающей волны в некоторый момент времени имеет вид, показанный на рис.16.

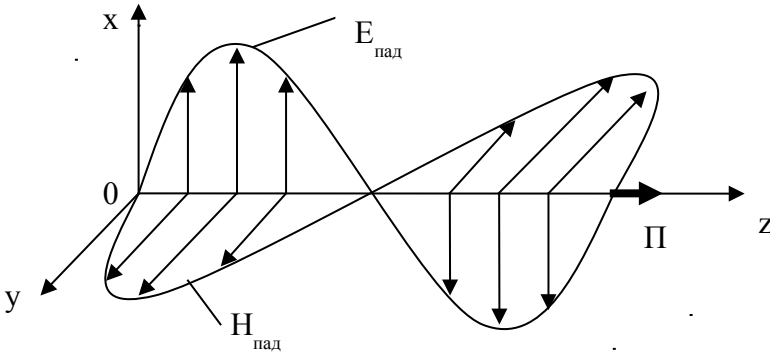


Рис.16.

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется в диэлектрической среде, падает нормально на плоскую поверхность проводящей среды (рис.17).

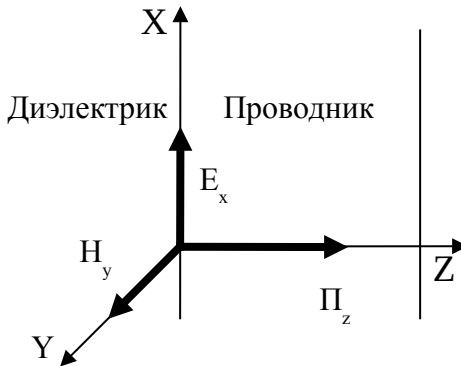


Рис.17.

На границе имеют место преломление и отражение волны. Далее рассматривается только преломленные волны в проводящей среде. Пусть поле изменяется во времени синусоидально и заданы действующие значения H_0 и фаза Ψ_0 напряженности магнитного поля у поверхности проводящей среды (при $z=0$). Применяя уравнение Максвелла (15.1) и (15.2) и вводя коэффициент затухания:

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}},$$

получим мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей в проводящей среде:

$$H_y = \sqrt{2} H_0 e^{-kz} \sin(\omega t + \Psi_0 - kz),$$

$$E_x = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_0 e^{-kz} \sin\left(\omega t + \Psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz\right).$$

Откуда видно, что в отличие от диэлектрической среды в проводящей среде напряженности поля убывают по мере проникновения в глубь среды по экспоненциальному закону. Начальные фазы напряженностей изменяются пропорционально z , а напряженность электрического поля в любой точке проводящей среды опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол $\pi/4$.

На расстоянии в одну длину волны фаза волны изменяется на 2π . Следовательно:

$$\lambda k = \lambda \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = 2\pi,$$

откуда
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{f \mu \gamma}},$$

а скорость распространения
$$v = \lambda f = 2 \sqrt{\frac{\pi f}{\mu \gamma}}.$$

Таким образом, в отличие от диэлектрической среды, где

скорость распространения определяется только свойствами среды, в проводящей среде эта скорость зависит не только от удельной проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты.

Вектор плотности тока изменяется так же, как вектор напряженности электрического поля, так как $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$.

Волновое сопротивление проводящей среды имеет комплексный характер:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \xi e^{j\frac{\pi}{4}}, \text{ где } \xi = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} - \text{модуль волнового сопротивления.}$$

Вектор Пойнтинга имеет одну составляющую:

$$\Pi_z = E_x H_y = 2 \xi H_0^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \Psi_0 - kz) \sin(\omega t + \Psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz),$$

а ее среднее значение за период:

$$\Pi_{cp} = \xi H_0^2 e^{-2kz} \cos \frac{\pi}{4}.$$

В среде с большой удельной проводимостью (например, в металлах) длина волны оказывается очень малой. Малым оказывается и волновое сопротивление. Это означает, что энергия электромагнитной волны в основном сосредоточена в магнитном поле, так как:

$$\frac{W_{0H}}{W_{0E}} = \frac{\mu H^2}{\varepsilon E^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\xi^2}$$

Например, для меди на частоте $f=10^{10}$ Гц, $\xi=3,74 \cdot 10^{-2}$ Ом отношение $\frac{W_{0H}}{W_{0E}}=10^6$, то есть, энергия электрического поля

исчезающе мала по сравнению с энергией магнитного поля.

На расстоянии одной длины волны напряженность поля уменьшается в $e^{2\pi}=540$ раз. Энергия же уменьшается в 540 раз уже на расстоянии полуволны. Поэтому на практике считают, что волна проникает в толщу проводящей среды меньше, чем на

$\lambda/2$.

Вводится условная величина – эквивалентная глубина проникновения:

$$\sigma = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}.$$

Это расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз, так как $e^{-k\sigma} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Таким образом, все соотношения для бесконечно протяженной проводящей среды, практически пригодны для проводника конечных размеров, если его протяженность в направлении распространения волны не меньше половины длины волны.

§17. Поверхностный эффект.

Так как переменное электромагнитное поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды, то поле по сечению провода распределено не равномерно. В установившемся режиме ток и магнитный поток имеют максимальные значения у поверхности провода – в этом заключается поверхностный эффект (скин-эффект). Поверхностный эффект в основном является вредным, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току. Однако этот эффект используется, например, в установках индукционного поверхностного нагрева и закалки металлов.

Допустим, что по прямому цилиндрическому проводу радиусом r_0 из однородного не ферромагнитного провода ($\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$) протекает синусоидальный ток с действующим значением I и частотой ω . Используя уравнения Максвелла (15.1) и (15.2) получено выражение для определения плотности тока на расстоянии r от оси провода:

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 b_0 e^{j\beta_0} \quad (17.1)$$

На рис.18 даны зависимости $b_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$ и $\beta_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$.

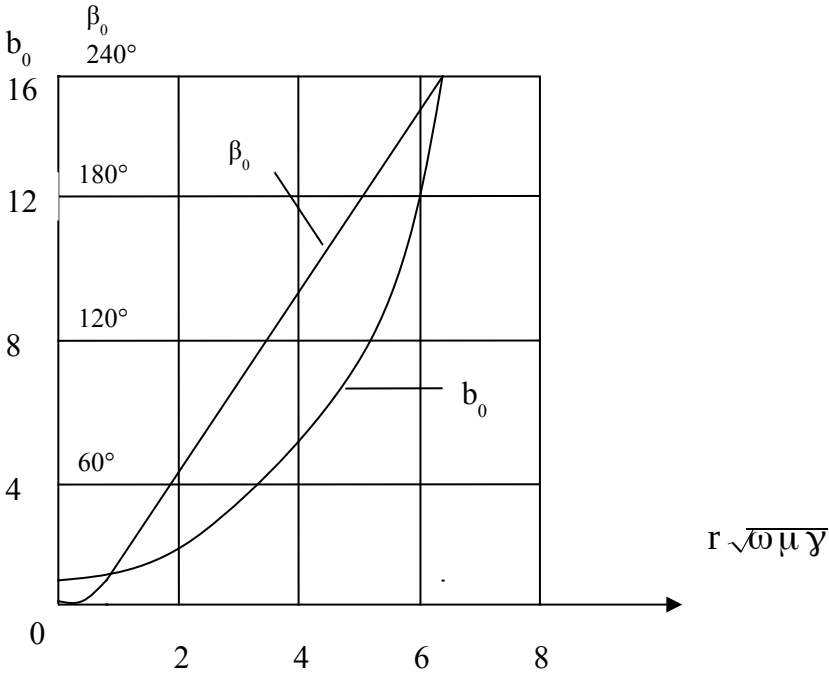


Рис.18.

Первая из них для $b_0 = \frac{\delta}{\delta_0}$ определяет отношение действующих значений плотности токов в данной точке и на оси провода, вторая – фазный сдвиг между указанными плотностями тока. Из этих кривых видно, что плотность тока на оси провода может быть очень малой по сравнению с плотностью тока у поверхности провода, но в ноль никогда не обращается. Сдвиг по фазе между этими плотностями может быть любым, в том числе и 180° , то

есть в проводе могут существовать зоны, в которых направление токов противоположно.

Плотность тока связана с током в проводе выражением:

$$\dot{\delta} = \dot{I} \frac{\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2\pi r_0} \cdot \frac{b_0}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_0 - \beta_{1r_0} - \frac{\pi}{4})} \quad (17.2)$$

где b_{1r_0} и β_{1r_0} - значение модуля и аргумента функции Бесселя первого порядка у поверхности провода. По этому выражению, задавая ток, размер и материал провода возможно определить плотность тока по модулю и фазе в любой точке сечения провода.

Комплексное полное внутреннее сопротивление провода:

$$\underline{Z} = R + j\omega L_i,$$

где R – активное сопротивление провода, а L_i – внутренняя индуктивность провода.

Напряжение на отрезке провода длиной l можно выразить через напряженность поля на поверхности провода:

$$\begin{aligned} \underline{Z} \dot{I} &= (R + j\omega L_i) \dot{I} = \dot{E}_{ro} l = \frac{\dot{\delta}_{ro}}{\gamma} l = \\ &= \dot{I} \frac{l}{\gamma} \frac{\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2\pi r_0} \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0ro} - \beta_{1r_0} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (17.3)$$

После сокращения на \dot{I} :

$$\begin{aligned} R + j\omega L_i &= \frac{l}{\pi r_0^2 \gamma} \cdot \frac{r_0 \sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} \cdot \frac{b_{0ro}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0ro} - \beta_{1r_0} - \frac{\pi}{4})} = \\ &= R_0 \frac{r_0 \sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \frac{\pi}{4})}, \end{aligned}$$

где $R_o = \frac{1}{\pi r_o^2 \gamma}$ - сопротивление постоянному току. Отсюда,

приравнивая вещественные и мнимые части получаем:

$$\frac{R}{R_o} = \frac{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \cos(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) \quad (17.4)$$

и

$$\frac{\omega L_i}{R_o} = \frac{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \sin(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) . \quad (17.5)$$

При постоянном токе внутренняя индуктивность одного провода:

$$L_{oi} = \frac{\mu l}{8 \pi} ,$$

поэтому

$$\frac{L_i}{L_{oi}} = \omega \frac{L_i}{R_o} \cdot \frac{R_o}{\omega L_{oi}} = \frac{4}{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \sin(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) . \quad (17.6)$$

На рис.19 представлены зависимости $\frac{R}{R_o}$ и $\frac{L_i}{L_{oi}}$ от параметра $r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}$.

Таким образом, для данного провода с ростом частоты активное сопротивление R и внутреннее индуктивное сопротивление ωL_i увеличивается, а внутренняя индуктивность уменьшается.

При этом неравномерность распределения тока по сечению не влияет на величину внешней индуктивности L_e , так как из закона полного тока магнитное поле вне проводника определяется всем током провода.

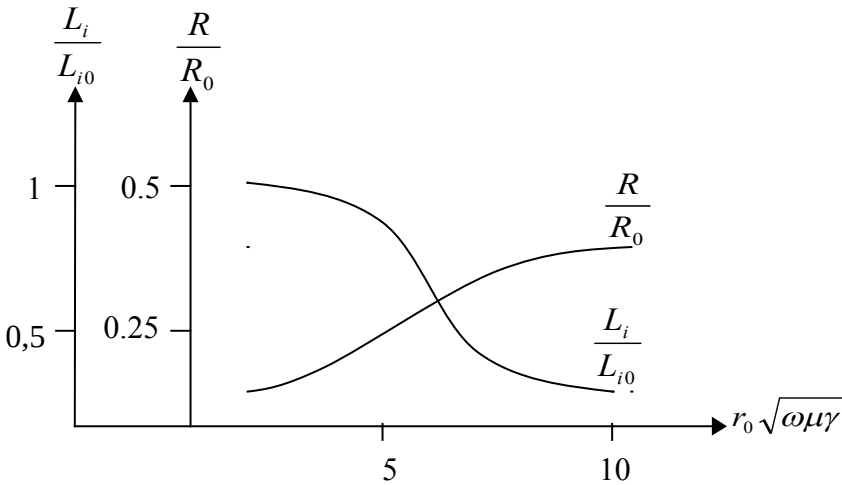


Рис.19.

Для уменьшения влияния поверхностного эффекта на величину активного сопротивления при высокой частоте используется провод, свитый и большого числа тонких, изолированных друг от друга жил. Жилы скручены между собой так, что каждая из них последовательно занимает все положения в проводе. При этом каждая из жил сцепляется практически с одинаковым магнитным потоком, и, несмотря на большое общее сечение провода, увеличение сопротивления из-за поверхностного эффекта будет незначительно.

Контрольная работа №5 по ТОЭ, часть 3. Расчёт электромагнитных полей.

В контрольной работе №5 по ТОЭ выполняются две задачи, выбираемые по своему варианту или по указанию преподавателя, в соответствии с приведённой таблицей:

Таблица

№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи	№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи
1	2	3	1	2	3
00	1-1-98	2-1-57	13	3-1-42	5-1-23
01	4-1-40	3-1-20	14	3-1-54	5-1-20
02	2-1-85	4-1-32	15	4-1-54	5-1-37
03	5-1-41	3-1-34	16	4-1-12	2-1-48
04	4-1-22	3-1-35	17	4-1-48	5-1-19
05	4-1-62	3-1-50	18	4-1-28	1-1-44
06	3-1-29	5-1-28	19	1-1-16	2-1-63
07	2-1-52	3-1-41	20	3-1-50	2-1-36
08	1-1-22	2-1-77	21	5-1-56	1-1-31
09	2-1-71	1-1-40	22	3-1-18	4-1-27
10	4-1-18	1-1-76	23	1-1-32	5-1-29
11	1-1-10	2-1-61	24	3-1-61	2-1-53
12	1-1-53	5-1-36	25	2-1-47	1-1-48

№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи	№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи
1	2	3	1	2	3
26	4-1-40	3-1-20	45	1-1-10	2-1-61
27	5-1-41	3-1-34	46	2-1-71	1-1-40
28	4-1-62	3-1-50	47	2-1-52	3-1-41
29	1-1-16	2-1-63	48	3-1-29	5-1-28
30	1-1-22	2-1-77	49	4-1-22	3-1-35
31	4-1-18	1-1-76	50	2-1-85	4-1-32
32	1-1-53	5-1-36	51	1-1-98	2-1-57
33	3-1-54	5-1-20	52	1-1-16	2-1-63
34	4-1-12	2-1-48	53	3-1-18	4-1-27
35	4-1-28	1-1-44	54	2-1-47	1-1-48
36	3-1-50	2-1-36	55	3-1-50	2-1-36
37	3-1-18	4-1-27	56	4-1-12	2-1-48
38	3-1-61	2-1-53	57	3-1-54	5-1-20
39	2-1-47	1-1-48	58	4-1-62	3-1-50
40	1-1-32	5-1-29	59	5-1-41	3-1-34
41	5-1-56	1-1-31	60	4-1-40	3-1-20
42	4-1-48	5-1-19	61	3-1-61	2-1-53
43	4-1-54	5-1-37	62	5-1-56	1-1-31
44	3-1-42	5-1-23	63	4-1-48	5-1-19

№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи	№ варианта	№ первой задачи	№ второй задачи
1	2	3	1	2	3
64	4-1-54	5-1-37	82	5-1-56	1-1-31
6	1-1-53	5-1-36	83	1-1-32	5-1-29
66	2-1-71	1-1-40	84	3-1-54	5-1-20
67	2-1-52	3-1-41	85	1-1-10	2-1-61
68	3-1-29	5-1-28	86	2-1-52	3-1-41
69	4-1-22	3-1-35	87	5-1-41	3-1-34
70	2-1-85	4-1-32	88	1-1-98	2-1-57
71	1-1-98	2-1-57	89	3-1-42	5-1-23
72	3-1-42	5-1-23	90	3-1-61	2-1-53
73	1-1-10	2-1-61	91	2-1-47	1-1-48
74	3-1-50	2-1-36	92	4-1-28	1-1-44
75	3-1-18	4-1-27	93	2-1-71	1-1-40
76	1-1-32	5-1-29	94	3-1-29	5-1-28
77	4-1-62	3-1-50	95	2-1-85	4-1-32
78	4-1-40	3-1-20	96	1-1-22	2-1-77
79	4-1-22	3-1-35	97	4-1-48	5-1-19
80	4-1-54	5-1-37	98	4-1-18	1-1-76
81	1-1-16	2-1-63	99	4-1-28	1-1-44

Задача 4-1-40.

В воздушной окружающей среде находится линия электропередачи, состоящая из двух параллельных проводников. Расстояние между осями проводов $2h$, радиус цилиндрического сечения проводов R , напряжение между проводами U , координаты точки a в пространстве над проводами $[a_1, a_2]$ указаны в таблице. Координата a_1 - расстояние от левого провода, координата a_2 - расстояние от правого провода. Определить напряжённость и потенциал электростатического поля в точке a в пространстве над проводами.

Исходные данные:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	40	72	35	2	250

Задача 4-1-27.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	27	53	31	2,7	660

Задача 4-1-28.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	27	42	21	1,1	127

Задача 4-1-48.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	48	86,4	42	2,4	300

Задача 4-1-12.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	12	22	8	1,8	120

Задача 4-1-54.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	54	89	47	1,2	280

Задача 4-1-18.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	18	28	17	1,5	190

Задача 4-1-62.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	62	110	75	2,4	780

Задача 4-1-22.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	22	36	20	1,6	160

Задача 4-1-32.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	h , см	a_1 , см	a_2 , см	R , мм	U , В
	32	78	28	1,8	420

Задача 3-1-61.

Заземлитель сферического вида, радиусом R находится в среде с удельной проводимостью γ . К заземлителю подведён ток I . Определить напряжение растекания и сопротивление растеканию R_p заземлителя, если он зарыт в грунт на глубину во много раз больше его радиуса. Начертить схему расположения заземлителя. Значения R , γ , I приводятся в таблице.

Исходные данные:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{СМ}}{\text{М}}$	I , А
	61	$3,2 \cdot 10^{-2}$	120

Задача 3-1-18.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{СМ}}{\text{М}}$	I , А
	18	$1,4 \cdot 10^{-2}$	50

Задача 3-1-54.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	54	$1,8 \cdot 10^{-2}$	180

Задача 3-1-42.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	42	$1,9 \cdot 10^{-2}$	85

Задача 3-1-41.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	41	$2,2 \cdot 10^{-2}$	35

Задача 3-1-29.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	29	$2,9 \cdot 10^{-2}$	60

Задача 3-1-50.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	50	$2,1 \cdot 10^{-2}$	100

Задача 3-1-35.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	34	$1,8 \cdot 10^{-2}$	220

Задача 3-1-34.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	34	$2,8 \cdot 10^{-2}$	56

Задача 3-1-20.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	R , см	γ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	I , А
	20	10^{-2}	120

Задача 1-1-48.

В двухпроводной воздушной линии электропередачи протекает постоянный ток I . Диаметр проводов линии R , расстояние между осями линии $2h$, a_1 и a_2 - расстояние соответственно от левого провода и правого провода до точки m заданы в таблице. Определить для точки m скалярный магнитный потенциал, вектор магнитной индукции, вектор напряженности магнитного поля и векторный потенциал.

Исходный данные:

№ варианта	I, A	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	40	1,7	72	32	60

Задача 1-1-32.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, A	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	32	1,5	54	24	40

Задача 1-1-31.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, A	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	31	2,1	80	35	60

Задача 1-1-16.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	16	2,3	26	11,7	20

Задача 1-1-44.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	44	1,8	67	28	47

Задача 1-1-53.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	53	1,85	72	31	56

Задача 1-1-10.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	100	2,1	61	25	46

Задача 1-1-76.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	76	2,4	68	30	51

Задача 1-1-40.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	40	1,7	72	32	60

Задача 1-1-22.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	22	2,3	48	21	41

Задача 1-1-98.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	a_1 , см	a_2 , см
	98	2,9	84	40	71

Задача 2-1-47.

В неограниченном пространстве распространяется плоская линейно поляризованная гармоническая электромагнитная волна. Абсолютная магнитная проницаемость среды $\mu_a = \mu_0$, абсолютная диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon_a = \epsilon_0$, удельная проводимость среды равна нулю. Амплитуда E_m и частота ω напряжённости электрического поля заданы в таблице. Определить величину и направление вектора напряжённости магнитного поля, вектора Пойтинга, вектора плотности тока смещения. Составить уравнение волны и определить её параметры.

Исходные данные:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}$

Задача 2-1-53.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	0,053	$2,1 \cdot 10^8$	$12,566 \cdot 10^{-7}$	$8,842 \cdot 10^{-12}$

Задача 2-1-36.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 2-1-63.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$63 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^8$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 2-1-48.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 2-1-61.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$6,1 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}$

Задача 2-1-71.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$4,71 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 2-1-77.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$8,842 \cdot 10^{-1}$

Задача 2-1-52.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 2-1-85.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$85 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^8$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$	$8,842 \cdot 10^{-1}$

Задача 2-1-57.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	E_m , В/м	ω , c^{-1}	μ_0 , Гн/м	ϵ_0 , Ф/м
	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

Задача 5-1-29.

Плоская электромагнитная волна передаётся по ленточной линии, состоящей из двух медных параллельных плоских полос, разделённых диэлектриком толщиной b и шириной m .

Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ , относительная магнитная проницаемость диэлектрика μ . Амплитудное значение напряжённости электрического поля E_m , его частота f . Все параметры заданы в таблице.

Определить потери мощности в медных полосах на один метр длины ленточной линии передачи. Потери мощности в

диэлектрике считать равными нулю. Удельная проводимость меди $\gamma_m = 5,6 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$.

Исходные данные:

№ вариант а	ϵ	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	2,98	1	2	7	3700	$4,4 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-56.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ϵ	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	5,68	1	3	8	5100	$1,8 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-19.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ϵ	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	1,96	1	4	12	2100	$1,8 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-37.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ε	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	3,72	1	4	16	2800	$1,6 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-20.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ε	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	2,05	1	1,9	11,5	2970	$2,4 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-23.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ε	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	2,37	1	5	17	4800	$3,9 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-36.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ε	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	3,65	1	2,7	12	2450	$1,82 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-28.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ϵ	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	2,88	1	1,75	8,5	1870	$2,3 \cdot 10^{10}$

Задача 5-1-41.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	ϵ	μ	b, мм	m, мм	E_m , В/м	f, Гц
	4,11	1	3	14	3600	$2,1 \cdot 10^{10}$

Библиографический список

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле.- 9-е изд. - М.: Гардарики, 2001.
2. Демирчан К.С., Нейман Л.Р. Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: В 3 т. - 4-е изд.- СПб.: СП, 2003.
3. Миронов В.Г., Бутырин П.А. Теория электрических цепей. - М.: Наука, 2005.
4. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. - М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди, С.Э. Расовская, С.А. Миленина, В.П. Каменская. - М.: Высш. шк., 2003.

Оглавление

Введение.....	3
Теория электромагнитного поля.....	4
§1. Основные уравнения электромагнитного поля.....	4
§2. Основные уравнения электростатического поля.....	6
§3. Электрическое поле заряженной оси отрезка.....	9
§4. Электрическое поле двух разноимённых заряженных сей...11	
§5. Электрическое поле и ёмкость системы цилиндр- плоскость.....	13
§6. Электрическое поле и ёмкость двухпроводной линии.....	15
§7. Электрическое поле и ёмкость коаксиального кабеля.....	17
§8. Основные уравнения электрического поля в проводящей среде.....	18
§9. Расчёт сферического заземлителя.....	24
§10. Основные уравнения магнитного поля постоянного тока...27	
§11. Векторный потенциал магнитного поля.....	29
§12. Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии....	31
§13. Магнитное поле и индуктивность коаксиального кабеля....	32
§14. Теорема Умова-Пойнтинга.....	35
§15. Уравнение Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме.....	38
§16. Распространение электромагнитных волн.....	40
§17. Поверхностный эффект.....	45
Контрольная работа №5 по ТОЭ, часть 3.....	50
Библиографический список.....	70

Учебное издание

Ребенков Евгений Степанович

Теория электромагнитного поля

Учебное пособие

по курсу «Теоретические основы электротехники»

Редактор Туманова Е.М.

Подписано в печать Формат 60 x 81^{1/16}

Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.

Усл. Печ. л. 4,7. Уч. Изд. л. 3,1.

Тираж 100 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.

Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9

Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульская обл., ул. Дружбы, 8