Министерство образования и науки

Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ

Конспект лекций по физике для бакалавров

Изд. 2-е, исправленное

Новомосковск
2017

УДК 531+534
ББК 22.2
М 55

Рецензент:
доктор технических наук, профессор *Лукиенко Л.В.*
(Тульский государственный педагогический университет
им. Л.Н. Толстого)

Составители: Подольский В.А., Сивкова О.Д., Коняхин В.П.
М 55 **Механика. Колебания. Волны.** Конспект лекций по физике для бакалавров, Изд. 2-е, исправленное / ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Новомосковск, 2017. - 88 с.

Учебное пособие написано в соответствии с лекционным курсом дисциплины «Физика» НИ РХТУ и содержит краткое изложение следующих разделов механики: кинематика, динамика, работа и энергия, колебания и волны, элементы специальной теории относительности. Данное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов технических специальностей.

Ил. 58. Библиогр.: 4 назв.

УДК 531+534
ББК 22.2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное издание «Механика. Колебания. Волны. Конспект лекций для бакалавров» написано в соответствии с рабочей программой по физике для студентов технических вузов, составленной согласно ФГОС ВО-3+. Необходимость издания данного пособия вызвано вводом нового стандарта обучения и единого государственного экзамена в школе, что существенно изменило уровень подготовки абитуриентов по физике. Современная система оценки знаний основана на компетентностном подходе, одной из важных составляющих которой является текущая оценка знаний студентов. Все это вызвало потребность в подготовке учебного пособия уменьшенного объема благодаря краткости изложения и тщательного отбора изучаемого материала.

Данное издание, прежде всего, предназначено для подготовки студентов дневной и заочной форм обучения к лабораторным и практическим занятиям по теме «Механика» в первом семестре. Материалы могут также быть использованы для подготовки к коллоквиуму и экзамену по физике, при решении контрольных работ студентами-заочниками.

Для улучшения усвоения изучаемого материала все основные понятия, определения и законы механики в пособии четко выделены отдельным шрифтом. Формулы, определяющие физические величины и устанавливающие связь между ними, а также выражающие основные законы механики, обведены рамками. Большое количество рисунков, подробные пояснения математических выводов, разъяснение физического смысла понятий и законов будет способствовать их лучшему пониманию.

Разделы, напечатанные мелким шрифтом можно пропустить.

В конце конспекта помещено несколько приложений, в т.ч. математическое. Оно содержит сведения по тригонометрии, векторной алгебре, дифференциальному и интегральному исчислению, которые помогут студенту разобраться в математических доказательствах изучаемых физических законов.

Авторы надеются, что данное учебное издание будет ценным вспомогательным материалом наряду с традиционными учебниками и поможет студентам успешно усвоить законы механики.

ВВЕДЕНИЕ

Механика – это наука о механическом движении тел и происходящих при этом взаимодействиях между телами. Под механическим движением понимают изменение взаимного положения тел или их частей в пространстве с течением времени. В механике рассматриваются взаимодействия тел (действия тел друг на друга), приводящие к изменению движения этих тел или их деформации.

Механика, как часть физики, относится к естественным наукам. Часто под механикой понимают так называемую классическую механику, в основе которой лежат законы Ньютона. Она изучает движение макроскопических материальных тел при скоростях малых по сравнению со скоростью света. Движение частиц со скоростями, сравнимыми со скоростью света, изучает теория относительности, а движение частиц микромира изучается в квантовой механике.

По характеру решаемых задач механика состоит из трех разделов.

1. Кинематика изучает движение тел без учета их взаимодействия с другими телами. Основной задачей кинематики является нахождение координат тела и его скорости в любой момент времени.
2. Динамика изучает движение тел с учетом их взаимодействия с другими телами, т.е. здесь изучаются, главным образом, причины движения тел.
3. Статика изучает условия равновесия тел.

При описании движения тела в механике рассматривается модели этого тела: материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда и др. Эти понятия позволяют при изучении движения тела соответственно пренебречь или его размерами, или деформацией, или атомно-молекулярной структурой. В соответствии с этим выделяют механику материальной точки или системы материальных точек, механику абсолютно твердого тела, механику сплошных сред и др.

Механика тесно связанна с другими разделами физики. Многие понятия и методы механики при соответствующих обобщениях находят применения в молекулярной физике, электродинамике, оптике, теории относительности, квантовой механике и др.

Особенно большое влияние механика оказывает на развитие техники. Такие общетехнические и специальные дисциплины, как сопротивление материалов, кинематика механизмов, гидравлика, динамика машин и механизмов, теория гироскопических устройств и приборов, баллистика, строительная механика, ряд разделов технологии и многое другое. Все эти дисциплины пользуются уравнениями и методами теоретической механики. Таким образом, механика является одной из основ развития многих областей современной науки и техники.

1 КИНЕМАТИКА

1.1 Механическое движение. Материальная точка. Абсолютно твердое тело. Система отсчета. Радиус вектор. Траектория. Путь. Перемещение

Механическое движение - это *изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Совокупность тел, выделенных для рассмотрения*, называется **механической системой**. *Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь*, называется **материальной точкой** или **частицей**. Это простейшая модель тела, упрощающая математическое описание его движения. Другая модель - **абсолютно твердое тело** - *тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь*. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как состоящее из огромного числа (теоретически - из бесконечного) материальных точек, взаимное расположение которых не изменяется.

Изменение положения данного тела можно указать только по отношению к другому телу. Для описания движения необходимо так же определять время. *Тело, по отношению к которому рассматривается движение других тел*, называется **телом отсчета**. *Тело отсчета и отсчитывающие время часы* называют **системой отсчета**. **Относительность движения** заключается в том, что *движение данного тела относительно различных систем отсчета имеет разный характер*. Например, человек, сидящий в движущемся поезде, покоится относительно вагона и движется относительно Земли.

Начнем изучение механики с кинематики материальной точки (частицы). Для количественного описания движения частицы нужно с телом отсчета связать систему координат. В прямоугольной декартовой системе координат положение частицы в пространстве задается ее координатам x, y, z. Для простоты будем рассматривать движение в плоскости, используя двумерную систему координат с осями координат x и y. В этом случае положение частицы в пространстве определяется двумя ее координатами x и y. **Радиус-вектором** точки называется *вектор, проведенный из начала координат в данную точку* (рис.1.1а, радиус-вектор $\vec{r}$ проведен в точку с координатами x,y). Таким образом, положение частицы можно задавать ее радиус-вектором $\vec{r}$. Из рис. 1.1а видно, что проекции r_x и r_y радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат равны координатам x и y частицы соответственно: $r_x = x$; $r_y = y$. Т.к. $\vec{r} = r_x\vec{e}_x + r_y\vec{e}_y$ (см. математическое приложение (МП), пункт II.7), то **радиус-вектор частицы** в момент времени t

связан с ее координатами x и y в тот же момент времени соотношением:

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}, \qquad (1.1)$$

где $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ - единичные векторы (орты) координатных осей x и y соответственно, причем $\left|\vec{e}_x\right| = \left|\vec{e}_y\right| = 1$.

На рис 1.1б радиус-вектор $\vec{r}_1$ проведен в начальное положение частицы (в момент времени t_1), $\vec{r}_2$ - в конечное положение (в момент времени t_2). *Линия, которую описывает частица при своем движении*, называется **траекторией** (рис. 1.1б). **Длина пути (путь)** S - *расстояние, пройденное частицей вдоль траектории.* **Перемещение** $\Delta\vec{r}$ - *вектор, соединяющий начальное* (в момент времени t_1) *и конечное* (в момент времени t_2) *положение частицы* (рис. 1.1б). В соответствии с правилом вычитания векторов (см. МП, п. II.3)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

т.е. *перемещение равно приращению радиус-вектора* (см. п. I.4 МП).

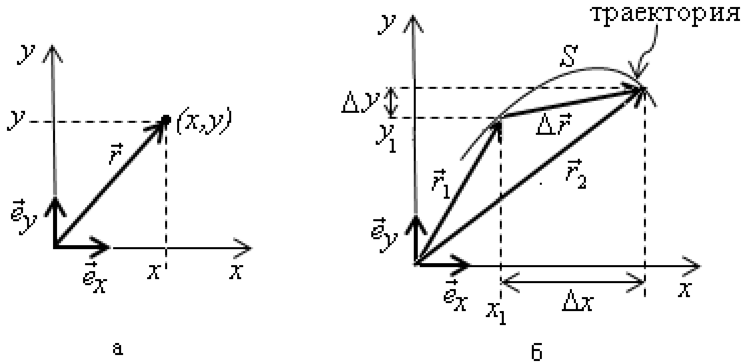


Рис. 1.1

1.2 Средняя и мгновенная скорости. Модуль скорости. Проекции скорости. Уравнение пути

Быстрота и направление движения частицы характеризуются векторной величиной $\vec{\upsilon}$, называемой скоростью. **Средняя скорость** $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна *отношению перемещения* $\Delta\vec{r}$ *к промежутку времени* Δt, *за который оно произошло*:

$$\boxed{\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}. \qquad (1.2)$$

Чем меньше промежуток времени Δt в формуле (1.2), тем ближе значение средней скорости к скорости $\vec{\upsilon}$ в данный момент времени t. В пределе при стремлении Δt к нулю отношение в правой части (1.2) дает скорость в момент времени t (мгновенную скорость):

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Т.о. мгновенная скорость равна пределу (*lim*) при Δt стремящемся к нулю ($\Delta t \to 0$) отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который оно произошло. Сравнивая (1.3) с определением производной (МП, п.III.1), можно сделать вывод, что скорость в момент времени t - **мгновенная скорость** равна *первой производной от радиус-вектора по времени*:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}}. \qquad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что скорость направлена так же, как перемещение $\Delta\vec{r}$. Т.к. при $\Delta t \to 0$ вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ стремится установиться по касательной к траектории (рис. (1.2), сравни с п.III.1 МП), то, следовательно, и *вектор скорости* $\vec{\upsilon}$ *направлен по касательной к траектории.*

Подставим в (1.4) выражение (1.1) для радиус-вектора:

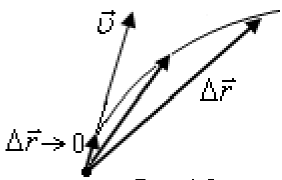


Рис. 1.2

$$\vec{\upsilon} = \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y. \qquad (1.5)$$

Выразим скорость $\vec{\upsilon}$ через ее проекции υ_x и υ_y:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y. \qquad (1.6)$$

Из сравнения уравнений (1.5) и (1.6) видно, что **проекции скорости** равны *производным от соответствующих координат по времени:*

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{dx}{dt}}; \quad \boxed{\upsilon_y = \frac{dy}{dt}}. \qquad (1.7)$$

Найдем модуль скорости как модуль выражения (1.3):

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}.$$

Из рис. 1.2 видно, что модуль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, т.е. его длина, стремится к длине дуги траектории, которая “ограничивает“ вектор. Следовательно, при $\Delta t \to 0$ модуль перемещения равен пути: $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$, а выражение для модуля скорости принимает вид:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1.8)$$

Т.о. **модуль скорости** равен *первой производной от пути по времени*:

$$\boxed{\upsilon = \frac{dS}{dt}}. \qquad (1.9)$$

Модуль скорости можно выразить *через проекции скорости* (рис. 1.3):

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}}.$$

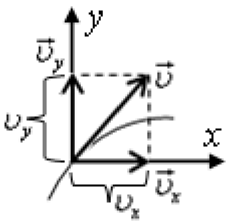


Рис. 1.3

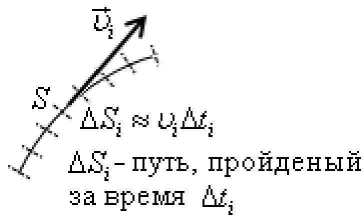


Рис. 1.4

Найдем путь, пройденный частицей за промежуток времени от t_1 до t_2, зная зависимость $\upsilon(t)$ скорости частицы от времени (рис.1.4). Для этого интервал времени от t_1 до t_2 разобьем на малые промежутки Δt_i. Тогда из (1.8) следует, что путь, пройденный за время Δt_i.: $\Delta S_i \approx \upsilon_i \Delta t_i$. Весь путь S равен сумме путей за малые промежутки времени:

$$S \approx \sum \Delta S_i = \sum \upsilon_i \Delta t_i .$$

Чем меньше промежутки Δt_i, тем точнее мы найдем путь (см. МП раздел IV), поэтому при $\Delta t_i \to 0$ сумма переходит в интеграл:

$$S = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \upsilon_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt .$$

Отметим, что это уравнение можно получить чисто математически. Из (1.9): $dS = \upsilon(t)\, dt$. Проинтегрируем это равенство, считая, что $S=0$ в момент времени t_1, а к моменту времени t_2 пройден путь S:

$$\int_0^S dS = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt \ .$$

Т.к. $\int_0^S dS = S$, то получим **уравнение пути**:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt}. \qquad (1.10)$$

Из геометрического смысла интеграла (см. МП, п. IV.1) следует, что путь равен площади под графиком скорости.

*Пример***.** *Путь при равномерном движении.* **Равномерным** *называется движение, при котором частица за равные промежутки времени проходит равные пути*. При таком движении модуль скорости υ постоянен (не изменяется с течением времени). Если υ = const, то в правой части уравнения (1.10) υ можно вынести за знак интеграла:

$$S = \upsilon \int_{t_1}^{t_2} dt = \upsilon \cdot t \Big|_{t_1}^{t_2} = \upsilon \cdot (t_2 - t_1) = \upsilon \cdot \Delta t \ .$$

Если принять $t_1=0$ и $t_2=t$, то получим **уравнение пути для равномерного движения**:

$$\boxed{S=\upsilon t}.$$

1.3 Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

Скорость при движении тел может меняться как по величине, так и по направлению (рис. 1.5): $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$ - изменение скорости за время Δt. *Быстроту изменения скорости* характеризуют **ускорением**:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}, \qquad (1.11)$$

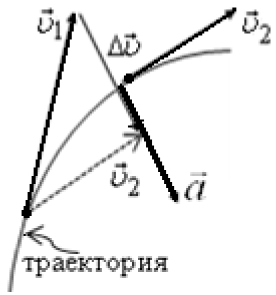


Рис. 1.5

Таким образом, **ускорение** равно *первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени.* Вторая производная в (1.11) обусловлена тем, что скорость есть первая производная от радиус-вектора.

Из (1.11) следует, что ускорение $\vec{a}$ направлено так же, как $\Delta\vec{\upsilon}$ при $\Delta t \to 0$. На рис. 1.5 видно, что вектор $\vec{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории.

Подставим в (1.11) выражение (1.6) вектора $\vec{\upsilon}$ через его проекции и учтем, что производная от суммы функций равна сумме производных:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\upsilon_x \vec{e}_x + \upsilon_y \vec{e}_y) = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{e}_y . \qquad (1.12)$$

Запишем вектор $\vec{a}$ через его проекции a_x и a_y:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y . \qquad (1.13)$$

Сравнивая правые части выражений (1.12) и (1.13) и учитывая (1.7), находим, что

$$\boxed{a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}}, \boxed{a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}}. \qquad (1.14)$$

Т.о. **проекции ускорения** *равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат по времени.*

Из (1.11) получим единицу измерения ускорения: $[a] = \frac{м}{с} \Big/ с = \frac{м}{с^2}$.

Малый участок криволинейной траектории всегда можно представить как дугу окружности радиуса R (рис. 1.6). Этот радиус называется **радиусом кривизны траектории** в данной точке. Центр окружности (точка О) называется центром кривизны траектории. Из сказанного выше следует, что вектор $\vec{a}$ всегда направлен в сторону центра кривизны. Разложим вектор $\vec{a}$ на две составляющие (рис. 1.6): одна из них $\vec{a}_n$ направлена по радиусу кривизны, вторая $\vec{a}_\tau$ - по касательной к траектории (т.е. перпендикулярно радиусу кривизны). Тогда ускорение (в данном случае его называют **полным ускорением**)

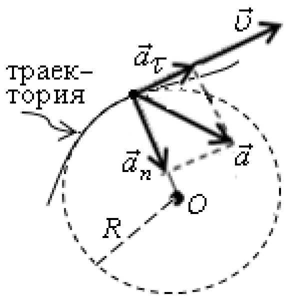


Рис. 1.6

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau}. \qquad (1.15)$$

Составляющая $\vec{a}_n$ называется **нормальным** (или центростремительным) **ускорением** и *характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.* **Модуль нормального ускорения**

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R}}. \qquad (1.16)$$

Составляющая $\vec{a}_\tau$ называется **тангенциальным** (или касательным) **ускорением** и *характеризует быстроту изменения величины скорости*. **Модуль тангенциального ускорения** *равен первой производной от модуля скорости по времени:*

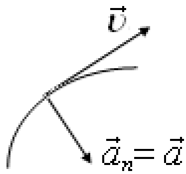
$$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}}. \qquad (1.17)$$

Из рис. 1.6, используя теорему Пифагора, находим **модуль полного ускорения**:

$$\boxed{a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}} \qquad (1.18)$$

Примеры

1. *Прямолинейное движение*: радиус кривизны траектории $R \to \infty$. Из (1.16) получим:
$a_n = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\tau$, т.е. полное ускорение равно тангенциальному.



2. *Криволинейное движение с постоянной по величине скоростью* $\upsilon = const$.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n,$$

т.е. полное ускорение равно нормальному.

3. *Равнопеременное движение:* $\vec{a} = const$ => Проекции ускорения $\vec{a}_x = const$; $\vec{a}_y = const$.

Пусть в начальный момент времени (t=0) частица имела скорость $\vec{\upsilon}_0$ и находилась в точке с координатами x_0, y_0. Из (1.14) $d\upsilon_x = a_x dt$. Проинтегрируем левую и правую части этого выражения:

$$\int_{\upsilon_{0x}}^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \int_0^t a_x dt \Rightarrow \upsilon_x - \upsilon_{0x} = a_x t \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t}. \qquad (1.19)$$

Аналогично для оси y: $\boxed{\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t}$. (1.20)

Выразим из (1.7) $dx = \upsilon_x dt$. Проинтегрируем левую и правую части этого выражения с учетом (1.19):

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (\upsilon_{0x} + a_x t) dt \Rightarrow x - x_0 = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}. \qquad (1.21)$$

Аналогично для оси y:

$$\boxed{y = y_0 + \upsilon_{0y} \cdot t + \frac{a_y t^2}{2}}. \qquad (1.22)$$

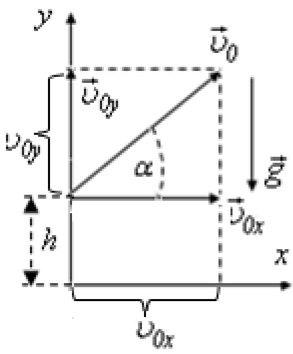


Рис. 1.7

Уравнения (1.19–1.22) позволяют найти скорость $\vec{\upsilon}$ и координаты *x*, *y* частицы в любой момента времени *t*, если известны ее начальная скорость $\vec{\upsilon}_0$, начальные координаты x_0, y_0 и ускорение $\vec{a}$.

Например, пусть тело брошено с высоты h со скоростью υ_0 под углом α к горизонту (рис.1.7). В данном случае ускорение тела равно ускорению свободного падения: $\vec{a} = \vec{g}$ и направлено вертикально вниз (g=9,81м/с^2). Из рисунка 1.7 видно, что

$$x_0=0;\ y_0=h;\ a_x=0;\ a_y=-g,$$

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha \ ;\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\alpha \ .$$

Поэтому формулы (1.19–1.22) принимают вид: $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$,

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t; \quad y = h + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

1.3а Вывод формул для тангенциального и нормального ускорений

Пусть частица движется по криволинейной траектории с переменной скоростью. При этом изменяются и величина, и направление скорости. На рис. 1.8а для двух последовательных моментов времени показаны векторы скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ частицы, а также сонаправленные с ними единичные векторы $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ - орты вектора скорости. Выразим вектор скорости $\vec{\upsilon}$ через его модуль υ и орт $\vec{\tau}$, как $\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau}$, и подставим в (1.11):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon\vec{\tau}) = \vec{\tau}\,\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\,\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.23)$$

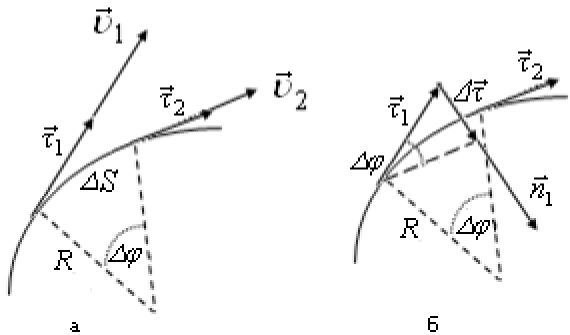


Рис. 1.8

Первое слагаемое в (1.23) есть вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\,\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Следовательно, вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории так же как орт $\vec{\tau}$ и вектор скорости $\vec{\upsilon}$. Т.к. вектор $\vec{\tau}$ - единичный, то модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Второе слагаемое в (1.23) есть нормальное ускорение $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.24)$$

Найдем производную от единичного вектора $\vec{\tau}$ (рис. 1.8б). По определению:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1}{\Delta t}.$$

Направим единичный вектор $\vec{n}_1$ так же как вектор $\Delta\vec{\tau}$ (рис. 1.8б). Тогда:

$$\Delta\vec{\tau} = \Delta\tau\cdot\vec{n}_1,$$

где $\Delta\tau$ - модуль вектора $\Delta\vec{\tau}$. Учитывая, что $\Delta t\to 0$, т.е. $\Delta\varphi$ - мал, длину $\Delta\tau$ можно найти как длину дуги окружности с радиусом $\tau_1=\tau_2=\tau=1$ и центральным углом $\Delta\varphi$ (рис. 1.8б): $\Delta\tau=\tau\Delta\varphi=\Delta\varphi$ *(т.к. $\tau=1$).*

Таким образом: $$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\ \vec{n}_1}{\Delta t}$$

При $\Delta t\to 0$ вектор $\vec{n}_1$ стремится к направлению, совпадающему с радиусом кривизны R:

$$\vec{n}_1 \to \vec{n} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\vec{n}.$$

Из рис. (рис. 1.8а) видно, что путь $\Delta S = R\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \Delta S/R$

Подставим $\Delta\varphi$ в уравнение для $d\vec{\tau}/dt$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\frac{1}{R}\cdot\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\vec{n}\,.$$

Подставим полученное выражение для $d\vec{\tau}/dt$ в (1.24):

$$\vec{a}_n = \upsilon\cdot\frac{\upsilon}{R}\vec{n} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$

Т.е. вектор $\vec{a}_n$ направлен по радиусу кривизны и равен по модулю υ^2/R .

1.4 Вращательное движение. Угловая скорость. Угловое ускорение. Период, частота. Связь между линейными и угловыми величинами

Вращательное движение – *это движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения*. При таком движении все точки тела за одно и то же время поворачиваются на одинаковый угол. Поэтому в случае вращательного движения изменение положения тела и каждой его точки характеризуют углом поворота $\Delta\varphi$ (в радианах). Угол поворота удобно представить в виде вектора $\Delta\vec{\varphi}$ (рис.1.9): вектор $\Delta\vec{\varphi}$ численно равен углу поворота $\Delta\varphi$ и направлен вдоль оси вращения согласно правилу правого винта. При вращении правого винта (буравчика) направление поступательного перемещения буравчика совпадает направлением вектора $\Delta\vec{\varphi}$.

Быстроту вращения тела характеризуют **угловой скоростью** $\vec{\omega}$, *которая равна первой производной от угла поворота по времени:*

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\ ;\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}}. \qquad (1.25)$$

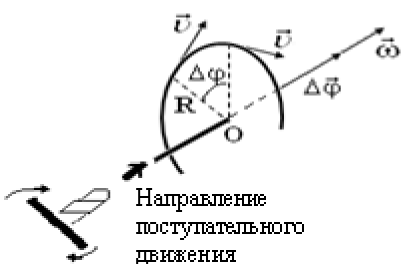


Рис. 1.9

Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (т.е. $\Delta\vec{\varphi}$ при $\Delta t\to 0$) (формула (1.25) и рис. 1.9). Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным. В этом случае:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \qquad (1.26)$$

где φ - угол поворота за время t.

Равномерное вращательное движение характеризуют периодом и частотой вращения. **Период вращения *T*** - *это время, за которое тело совершает один оборот*:

$$\boxed{T = \frac{t}{N}}, \qquad (1.27)$$

где N – число оборотов за время t. **Частота вращения *n*** *равна числу оборотов за единицу времени*:

$$\boxed{n = \frac{N}{t}}. \qquad (1.28)$$

Из (1.27) и (1.28) вытекает **связь частоты и периода**:

$$\boxed{n = \frac{1}{T}}. \qquad (1.29)$$

За время $t=T$ тело совершает один оборот, поворачиваясь при этом на угол 360°, которому в радианах соответствует угол $\varphi = 2\pi$. С учетом этого из (1.26) и (1.29) следует **связь между угловой скоростью, периодом и частотой вращения**:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n} \qquad (1.30)$$

Следует отметить, что понятия периода T и частоты n можно использовать и для неравномерного вращательного движения, принимая за эти величины те значения, которые имела бы точка, вращаясь равномерно с данным значением мгновенной угловой скорости ω. Из (1.25), (1.27) и (1.28) следуют единицы измерения угловой скорости, периода и частоты вращения соответственно:

$[\omega]$=рад/с, $[T]$=с; $[n]$=1/с=с$^{-1}$.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ может изменяться как из-за изменения быстроты вращения вокруг оси (при изменении величины угловой скорости), так и вследствие поворота оси вращения (т.е. изменяется направление вектора $\vec{\omega}$). Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ изменился на $\Delta\vec{\omega}$. Быстроту изменения угловой скорости характеризует **угловое ускорение** $\vec{\varepsilon}$ **,** *которое равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени*:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}} \qquad (1.31)$$

Если ось вращения не меняет своего направления, то изменение угловой скорости $\vec{\omega}$ обусловлено только изменением ее величины ω. Следовательно, при вращении вокруг неподвижной оси из (1.31) получим, что модуль ε углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (1.32)$$

В этом случае, при увеличении величины ω вектор $\Delta\vec{\omega}$ совпадает с вектором $\vec{\omega}$ (рис 1.10), при уменьшении – противоположен (рис. 1.11). Из сказанного и выражения (1.31) следует, что угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ направлено так же, как угловая скорость $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении, и противоположно направлению $\vec{\omega}$ при замедленном. Из (1.32) получим единицу измерения углового ускорения: $[\varepsilon] = \text{рад}/\text{с}^2$.

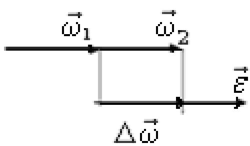


Рис. 1.10

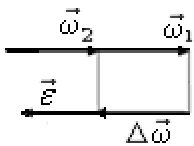


Рис. 1.11

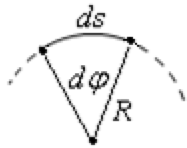


Рис 1.12

Найдем связь линейных характеристик движения (υ, a, a_n, a_τ) с угловыми (ω, ε). Из рис. 1.12 видно, что при повороте тела на угол $d\varphi$ точка тела, находящаяся на расстоянии R от оси вращения, проходит по дуге окружности путь

$$d\,S = d\varphi \cdot R.$$

Разделим это выражение на dt:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R\ .$$

Откуда с учетом формул (1.9) и (1.25) запишем **связь линейной υ и угловой ω скоростей**:

$$\boxed{\upsilon = \omega R}. \qquad (1.33)$$

Подставим (1.33) в (1.16): $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$. Сократив это выражение на R, получим **связь нормального ускорения a_n с угловой скоростью ω**:

$$\boxed{a_n = \omega^2 R}, \qquad (1.34)$$

Возьмем производную от выражения (1.33) с учетом того, что радиус R=*const* и его можно вынести за знак производной:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Отсюда, используя формулы (1.17) и (1.31), находим **связь тангенциального** a_τ **и углового** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **ускорений**:

$$\boxed{a_\tau = \varepsilon \cdot R}. \tag{1.35}$$

Подставив (1.34) и (1.35) в (1.18), выразим **полное ускорение** $\boldsymbol{a}$ **через угловые величины** $\boldsymbol{\omega}$ **и** $\boldsymbol{\varepsilon}$: $a = \sqrt{(\omega^2 \cdot R)^2 + (\varepsilon \cdot R)^2}$ или

$$\boxed{a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}.$$

Пример: *равноускоренное вращательное движение* (ε=*const*).

Из (1.31) выразим $d\omega = \varepsilon \cdot dt \Rightarrow \int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int\limits_0^t \varepsilon \cdot dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \varepsilon t.$

Откуда **уравнение угловой скорости для равноускоренного вращения**:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}, \tag{1.36}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, ω - угловая скорость в момент времени t. Выразим из (1.25) $d\varphi$ и проинтегрируем с учетом (1.36):

$$d\varphi = \omega \cdot dt \Rightarrow \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t (\omega_0 + \beta \cdot t)dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \text{ или } \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}}. \tag{1.37}$$

Выражение (1.37) представляет собой **уравнение угла поворота** $\boldsymbol{\varphi}$ **для равноускоренного вращения**.

2 ДИНАМИКА

2.1 Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Сила. Масса. Второй закон Ньютона. Импульс. Третий закон Ньютона. Понятие состояния

Первый закон Ньютона: *если на тело не действуют другие тела, то тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения*. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются **инерциальными**. Любая система отсчета, которая движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, будет также инерциальной. Следовательно, инерциальных систем отсчета существует бесконечное множество. Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Земля перемещается по криволинейной траектории относительно Солнца и вращается вокруг своей оси, т.е. движется с ускорением. Поэтому система отсчета, связанная с Землей не является инерциальной. Однако ускорение Земли настолько мало, что в большинстве случаев такую систему отсчета можно считать практически инерциальной.

Сила - *это векторная величина, характеризующая меру воздействия на данное тело со стороны других тел*. Если на тело действует несколько сил (т.е. несколько тел), то действие этих сил можно заменить действием одной силы, которую обычно называют результирующей (равнодействующей, суммарной) силой:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i \ , \qquad (2.1)$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$ - силы, действующие на тело, $\vec{F}$ - результирующая сила. Используя понятие силы, для первого закона Ньютона можно записать: если $\vec{F} = 0$, то $\vec{a} = 0$.

При действии на частицу силы ее скорость меняется. Под действием одной и той же силы изменение скорости разных тел различно. Чем меньше изменение скорости, тем больше инертность тела, т.е. меньше реакция на внешнее воздействие. *Количественная мера инертности тела называется* **массой**. За единицу массы в системе СИ принята масса эталонного тела, которое хранится в Международном бюро мер и весов. Эта единица называется килограмм (кг).

Второй закон Ньютона: *в инерциальной системе отсчета ускорение частицы прямо пропорционально силе, действующей на частицу, и обратно пропорционально массе частицы*:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}, \qquad (2.2)$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ - результирующая всех сил, действующих на частицу,

m – масса частицы. Из второго закона Ньютона следует, что вектор ускорения направлен в ту же сторону, что и результирующая сила (т.к. в механике всегда m>0). Из (2.2) следует, что

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}, \qquad (2.3)$$

а единица измерения силы (ньютон): $[F]$=1Н=1кг·1м/с^2.

Подставим в (2.3) выражение (1.11) для ускорения:

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{md\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Т.к. в классической механике масса тела величина постоянная ($m=const$), то ее можно внести под знак производной:

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}. \qquad (2.4)$$

Произведение массы тела на его скорость называют **импульсом тела:**

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{\upsilon}}. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) определяет импульс материальной точки (частицы) или тела, движущегося поступательно (когда все точки тела имеют одинаковую скорость). С учетом (2.5) выражение (2.4) принимает вид:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}}. \qquad (2.6)$$

Мы получили другую формулировку **второго закона Ньютона**: *действующая на частицу сила равна первой производной от импульса частицы по времени, или сила равна скорости изменения импульса.*

В частном случае при $\vec{F}=0$ из (2.2) следует $\vec{a}=0$, т.е. результат совпадает с первым законом Ньютона. Несмотря на это первый закон формулируют независимо от второго, т.к. в нем постулируется (утверждается) существование инерциальных систем отсчета.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{12}$ (рис.2.5). **Третий закон Ньютона** утверждает, что *силы взаимодействия двух тел равны по величине и противоположны по направлению*:

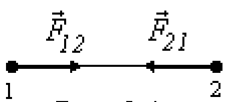


Рис. 2.1

$$\boxed{\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}}. \qquad (2.7)$$

Третий закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета и при скоростях много меньших скорости света, т.е. в рамках классической механики.

Состояние механической системы *характеризуют координатами и скоростями всех частиц этой системы* (или величинами, связанными со скоростью - импульсом и т.п.). Состояние системы можно в принципе найти, решив уравнение (2.2) или (2.6). Таким образом, второй закон Ньютона позволяет, зная состояние системы в данный момент времени t_0 и воздействие на систему $\vec{F}(x,t)$, найти состояние системы в любой последующий момент времени t. В этом смысле этот закон является одним из основных в механике.

2.2 Силы в механике

В механике рассматриваются силы различной физической природы. **Гравитационные силы** – это *силы притяжения между телами*. Каждое тело создает вокруг себя гравитационное поле, которое действует на другие тела. Гравитационное взаимодействие тел описывается **законом всемирного тяготения**, *согласно которому сила F гравитационного притяжения двух частиц прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними* (рис. 2.2):

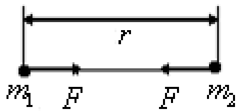


Рис. 2.2

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}, \qquad (2.8)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ - гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы частиц, r – расстояние между частицами. Закон всемирного тяготения (2.8) выполняется и для однородных сферических тел, в этом случае r – расстояние между центрами сфер. Действием сил всемирного тяготения обусловлено движение планет вокруг Солнца, движение Луны и искусственных спутников Земли, движение тел вблизи поверхности Земли. Например, по закону всемирного тяготения (2.8) сила притяжения планеты и ее спутника (рис. 2.3):

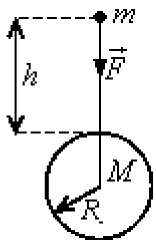


Рис. 2.3

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2}, \qquad (2.9)$$

где M и m – массы планеты и спутника соответственно, R – радиус планеты, h - высота спутника над поверхностью планеты.

Одним из проявлений силы всемирного тяготения является **сила тяжести** - *сила притяжения тела к Земле вблизи ее поверхности*. Т.к. вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением g=9,8 м/с^2 – *ускорением свободного падения*, то согласно второму закону Ньютона (2.3) на тело действует **сила тяжести**

$$\boxed{\vec{F}_T = m\vec{g}}, \qquad (2.10)$$

Эта сила направлена вертикально вниз и примерно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле:

$$mg \approx G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g \approx G\frac{M}{R^2},$$

где m – масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли. Небольшое отличие в силах обусловлено вращением Земли вокруг своей оси, но в большинстве случаев этим различием можно пренебречь. Из последней формулы видно, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Если тело положить на опору (или подвесить), то вследствие притяжения к Земле оно будет давить на опору или растягивать подвес. **Весом тела** $\vec{P}$ *называют силу, с которой тело действует на опору или подвес.* Однако согласно третьему закону Ньютона опора или подвес тоже действуют на тело. **Сила реакции** $\vec{N}$ - *сила, с которой опора или подвес действуют на тело*. С учетом третьего закона Ньютона можно записать, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\boxed{N=P} \text{ или } \boxed{\vec{N}=-\vec{P}}. \tag{2.11}$$

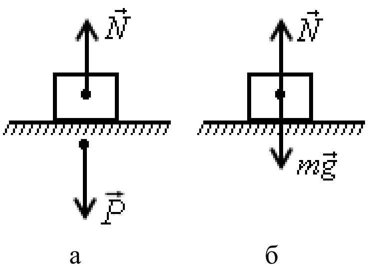


Рис. 2.4

Т.к. вес и сила реакции приложены к разным телам (рис. 2.4а) – вес $\vec{P}$ к опоре, а сила реакции $\vec{N}$ к телу, то они друг друга уравновешивать не могут. Тело, лежащее на опоре (рис. 2.4б), находится в равновесии вследствие того, что сила реакции $\vec{N}$ уравновешивает силу тяжести $m\vec{g}$. Вес $\vec{P}$ и сила реакции $\vec{N}$ всегда направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения тела и опоры (рис. 2.4 и рис.2.6).

Силы трения возникают при соприкосновении тел. Трение между поверхностями твердых тел называется *сухим*, трение между твердым телом и жидкостью или газом - *вязким*. Различают *трение скольжения* - при относительном перемещении соприкасающихся тел и *трение покоя* – при попытке вызвать такое перемещение.

Пусть на тело, лежащее на опоре (рис. 2.5), действует внешняя сила $\vec{F}$. Пока сила $\vec{F}$ мала по величине тело будет оставаться неподвижным. Это означает, что сила $\vec{F}$ уравновешивается **силой трения покоя** $\vec{F}_{\substack{тр \\ покоя}}$, которая равна по величине и противоположна по направлению внешней силе $\vec{F}$, которой пытаются сдвинуть тело:

$$\boxed{\vec{F}_{тр\ покоя}=-\vec{F}}. \tag{2.12}$$

Сила трения покоя может принимать значения от нуля до некоторой максимальной величины $\vec{F}_{max}$, при которой тело начнет скользить по опоре: $0 \le \vec{F}_{\substack{тр \\ покоя}} \le \vec{F}_{max}$. Максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{max}$ равна силе трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.

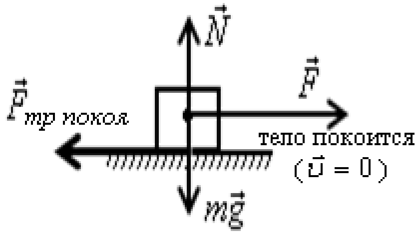


Рис. 2.5

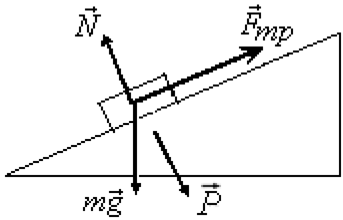


Рис. 2.6

Сила трения скольжения не зависит от площади соприкасающихся тел и приблизительно пропорциональна силе нормального давления N, прижимающей трущиеся поверхности друг другу (рис. 2.6):

$$\boxed{F_{тр} = \mu N}, \tag{2.13}$$

где μ - коэффициент трения, зависящий от состояния трущихся поверхностей. Сила трения скольжения направлена противоположно скорости тела вдоль границы соприкосновения тел.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действует сила трения, тормозящая его движение. При небольших скоростях **сила трения** пропорциональна скорости υ тела:

$$\boxed{\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}}, \tag{2.14}$$

где r – коэффициент, зависящий от формы и размеров тела, а также от свойств среды, в которой оно движется. Знак минус показывает, что сила направлена противоположно скорости. При больших скоростях движения тела в среде сила трения прямо пропорциональна квадрату скорости тела.

Под действием внешней силы возникает **деформация тела** – *изменение его размеров и формы*. При упругой деформации после прекращения действия внешней силы тело принимает прежние размеры и форму. При неупругой (пластической) деформации первоначальные размеры и форма тела не восстанавливаются. Рассмотрим упругую деформацию пружины (рис. 2.7). Под действием внешней силы $\vec{F}_{вн}$ пружина получает удлинение x, в результате чего в пружине возникает упругая сила $\vec{F}_{упр}$, уравновешивающая силу $\vec{F}_{вн}$. Согласно **закону Гука** *сила упругости* $\vec{F}_{упр}$ *прямо пропорциональна деформации*:

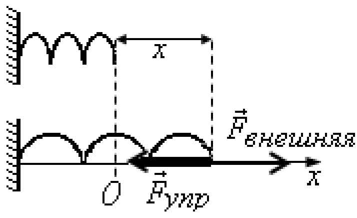


Рис. 2.7

$$\boxed{F_x = -kx}\,, \qquad (2.15)$$

где F_x - проекция силы упругости $\vec{F}_{упр}$ на ось «x», x - величина деформации (удлинение пружины), k – жесткость пружины, зависящая от материала, размера витка и длины пружины. Силами упругости являются силы реакции $\vec{N}$. По своей физической природе силы упругости являются электромагнитными: при растяжении пружины возникают силы электрического притяжения между атомами, а при сжатии – силы отталкивания, стремящиеся вернуть пружину в недеформированное состояние. Силы трения также имеют электромагнитную природу: они возникают из-за электрического взаимодействия молекул соприкасающихся тел.

2.3 Второй закон Ньютона для системы частиц и твердого тела. Центр масс системы. Импульс системы

Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц (рис. 2.8). *Силы взаимодействия между телами системы называются* **внутренними** (на рис. 2.8 это $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$); *силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящими в данную систему, называются* **внешними** (силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$). Запишем второй закон Ньютона (2.6) для первой и второй частиц соответственно:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad , \ \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad ,$$

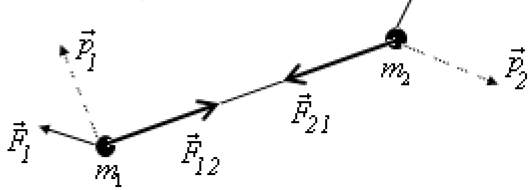


Рис. 2.8

где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ - импульсы частиц; $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ - результирующие внешних сил, действующих на частицы; $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первую частицу со стороны второй (внутренняя сила), $\vec{F}_{21}$ - сила, действующая на вторую частицу со стороны первой (внутренняя сила). Сложим эти уравнения:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad . \tag{2.16}$$

Согласно третьему закону Ньютона (2.7) сумма внутренних сил

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 .$$

Кроме того, сумма производных в правой части выражения (2.16) равна производной от суммы. Поэтому (2.16) принимает вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Аналогичным образом можно доказать, что для системы из N частиц:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \ , \tag{2.17}$$

где $\vec{F}_i$ - результирующая внешняя сила, действующая на i-ую частицу, $\vec{p}_i$ - импульс i-ой частицы. Введем обозначения в (2.17):

$\vec{F}_{внешн} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ - сумма внешних сил, действующих на систему; $\vec{p}_{сист} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ - импульс системы. Тогда **второй закон Ньютона для системы частиц** принимает вид:

$$\boxed{\vec{F}_{внешн} = \frac{d\vec{p}_{сист}}{dt}} . \tag{2.18}$$

Этот закон утверждает, что *производная от импульса системы по времени равна суме внешних сил, действующих на систему.*

Центром масс системы частиц называется *точка пространства, положение которой определяется радиус- вектором центра масс*:

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}} . \tag{2.19}$$

Здесь m_i - масса i-ой частицы, $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i-ой частицы, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ - масса системы. Отметим, что в однородном поле силы тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Возьмём производную по времени от уравнения (2.19):

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}\right) \Rightarrow \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\,; \qquad (2.20)$$

где $\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ - скорость центра масс системы, а $\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ - скорость i-ой частицы. С учетом этих соотношений (2.20) принимает форму:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{\upsilon}_i\,. \qquad (2.21)$$

Т.к. $m_i\vec{\upsilon}_i = \vec{p}_i$ - импульс i-ой частицы, то $\sum m_i\vec{\upsilon}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{сист}$ - импульс системы. Поэтому выражение (2.21) преобразуется к виду:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_C = \frac{\vec{p}_{сист}}{m}}. \qquad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что **импульс системы** *равен произведению массы системы на скорость центра масс*:

$$\boxed{\vec{p}_{сист} = m\vec{\upsilon}_C}. \qquad (2.23)$$

Подставим (2.23) в (2.18):

$$\vec{F}_{внешн} = \frac{d(m\vec{\upsilon}_C)}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{внешн} = m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt}\,.$$

Т.к. $\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \vec{a}_C$ - ускорение центра масс, то получаем, что

$$\boxed{\vec{F}_{внешн} = m\vec{a}_C}. \qquad (2.24)$$

Т.е. **второй закон Ньютона для системы частиц** можно сформулировать следующим образом: *сумма внешних сил, приложенных к системе, равна произведению массы системы на ускорение ее центра масс.*

Все полученные выше соотношения справедливы и для твердого тела, т.к. его можно представить состоящим из большого числа частиц. Если тело является абсолютно твёрдым, то взаимное расположение его частиц при движении не изменяется. Следовательно, не меняется положение центра масс частиц тела относительно самого тела. Таким образом, второй закон Ньютона (2.24) описывает движение центра масс твердого тела – центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, действующих на тело. Отметим, что уравнения (2.18), (2.23) и (2.24) справедливы и для системы твердых тел.

2.4 Момент силы и момент импульса относительно точки и оси

Момент силы характеризует способность силы вращать тело относительно точки или оси. Пусть к твердому телу в точке A приложена сила $\vec{F}$ (само тело на рисунке не показано). Проведем из точки O в точку A радиус-вектор $\vec{r}$ (рис.2.9). **Момент силы** $\vec{M}$ **относительно точки** $\underline{O}$ *равен векторному произведению радиус-вектора* $\vec{r}$ *на силу* $\vec{F}$ *:*

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]}, \qquad (2.25)$$

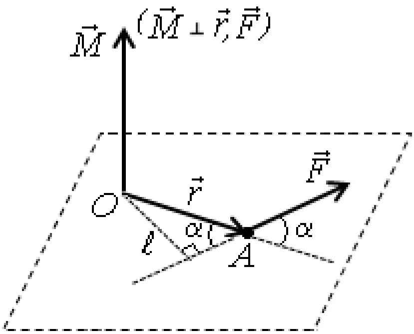


Рис. 2.9

Модуль момента силы относительно точки O

$$\boxed{M = rF\sin\alpha}, \qquad (2.26)$$

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. **Плечом силы** ℓ *называется кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы.* Из рис. 2.9 следует, что $\ell = r\sin\alpha$. С учетом этого выражение (2.26) принимает вид:

$$\boxed{M = F\ell},$$

т.е. **модуль момента силы** *относительно точки равен произведению модуля силы на плечо силы*. Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу векторного произведения векторов (см. п. II.9 МП): на рис. 2.9 пунктиром показана плоскость, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, вектор $\vec{M}$ перпендикулярен этой плоскости.

Вращение тела вокруг оси Z определяет **момент силы M_Z относительно оси,** *который равен проекции на ось Z момента силы* $\vec{M}$ (2.25) *относительно любой точки O, лежащей на оси.*

Рассмотрим более подробно вращение твердого тела вокруг неподвижной оси Z (рис.2.10). Пусть сила $\vec{F}$ приложена к точке A тела (само тело на рисунке не показано). Силу $\vec{F}$ можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_{||}$ - параллельную оси Z, , и $\vec{F}_{\perp}$ - перпендикулярную оси Z. Вектор $\vec{F}_{||}$ не может вращать тело, вращательное движение тела будет определяться составляющей $\vec{F}_{\perp}$. Разложим вектор $\vec{F}_{\perp}$ также на две составляющие (рис. 2.11, ось Z перпендикулярна плоскости рисунка): $\vec{F}_R$ - параллельную радиусу R окружности, по которой движется точка A, и $\vec{F}_\tau$ - перпендикулярную радиусу и направленную по касательной к той же окружности, где R – радиус вращения точки A - длина перпендикуляра, проведённого от точки A к оси Z. При этом радиальная составляющая $\vec{F}_R$ будет стремиться деформировать тело, а вызвать вращение может только касательная (тангенциальная) составляющая $\vec{F}_\tau$. Чем больше R, тем «эффективнее вращательная способность» этой силы. Поэтому **момент силы M_Z относительно оси Z** *равен произведению касательной составляющей силы* $\vec{F}_\tau$ *на радиус вращения* R:

$$\boxed{M_Z = F_\tau R} \tag{2.27}$$

Опустим перпендикуляр от оси Z на линию, вдоль которой действует составляющая $\vec{F}_{\perp}$ (рис.2.11). **Плечо силы ℓ относительно оси Z** – *кратчайшее расстояние от оси Z до линии действия перпендикулярной составляющей силы* $\vec{F}_{\perp}$. Из рисунка видно, что

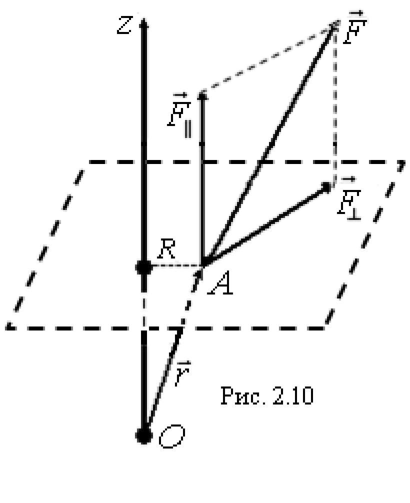


Рис. 2.10

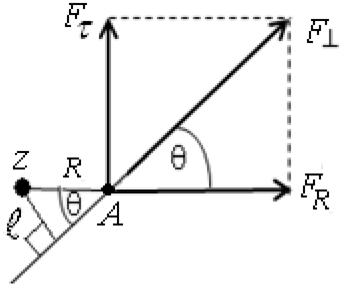


Рис. 2.11

$$\ell = R\sin\theta \Rightarrow M_Z = F_\tau R = F_\perp \cdot \sin\theta \cdot R = F_\perp \ell$$

Следовательно, **момент силы относительно оси *Z***:

$$\boxed{M_z = F_\tau R = F_\perp \ell}. \qquad (2.28)$$

Момент импульса $\vec{L}$ частицы относительно точки *O* *равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от точки O к частице, на импульс $\vec{p}$ частицы* (рис.2.12):

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]}. \qquad (2.29)$$

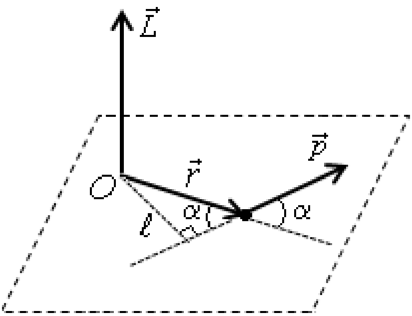


Рис. 2.12

В соответствии с правилом векторного произведения вектор $\vec{L}$ (рис. 2.12) перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$, а **модуль момента импульса**

$$\boxed{L = rp\sin\alpha = p\ell}, \qquad (2.30)$$

где ℓ - плечо импульса – кратчайшее расстояние от точки O до линии, вдоль которой направлен импульс.

Момент импульса L_z частицы относительно оси *Z* равен проекции на эту ось момента импульса $\vec{L}$ относительно любой точки, лежащей на оси. Можно показать, что для L_z выполняются соотношения подобные (2.28):

$$\boxed{L_Z = p_\tau R = p_\perp \ell}. \qquad (2.31)$$

Здесь смысл обозначений в аналогичен тем, что были приняты для момента силы в (2.28).

2.5 Момент импульса и момент инерции твердого тела относительно оси. Теорема Штейнера

Рассмотрим движение частицы (материальной точки) массы m по окружности радиуса R вокруг неподвижной оси Z (рис. 2.13,ось Z перпендикулярна плоскости рисунка). В этом случае скорость $\vec{\upsilon}$ и импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ частицы направлены по касательной к траектории. Поэтому касательная составляющая импульса p_τ в формуле (2.31) равна модулю импульса p: $p_\tau = p$. С учетом этого момент импульса частицы относительно оси Z:

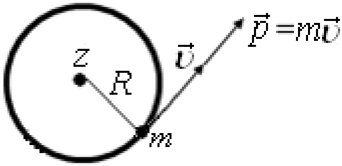


Рис. 2.13

$$L_Z = p_\tau R = pR = m\upsilon R\,.$$

Так как $\upsilon = \omega R$, где ω - угловая скорость, то получаем, что

$$L_z = mR^2\omega\,. \qquad (2.32)$$

В выражении (2.32) величина

$$\boxed{I = mR^2} \qquad (2.33)$$

называется **моментом инерции материальной точки (частицы) относительно оси вращения**, где R – расстояние от частицы до оси вращения. Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$\boxed{L_z = I\omega}, \qquad (2.34)$$

т.е. момент импульса частицы относительно оси вращения равен произведению момента инерции частицы на ее угловую скорость.

Твердое тело можно рассматривать как совокупность большого числа частиц. Поэтому момент импульса тела L_z можно найти как сумму моментов импульсов всех частиц этого тела:

$$L_z = \sum L_{zi}\ , \qquad (2.35)$$

где с учетом (2.34) и (2.33) момент импульса i – ой частицы тела

$$L_{z,i}=I_{,i}\,\omega=\Delta m_i R_i^{\,2}\,\omega.$$

Тогда момент импульса тела (2.35) можно представить в виде:

$$L_z = \sum I_i\omega = \sum \Delta m_i R_i^2\,\omega\,, \qquad (2.36)$$

где Δm_i и R_i - соответственно масса и радиус вращения i-ой частицы тела. Так как угловая скорость ω всех точек твердого тела одинакова, то индекс «i» у ω в уравнении (2.36) не пишется. По той же причине в (2.36) можно вынести ω за знак суммы:

$$L_z = \omega\cdot\sum I_i = \omega\cdot\sum \Delta m_i R_i^2\ . \qquad (2.37)$$

В выражении (2.37) *величина I, равная сумме моментов инерции I_i всех частиц тела*, называется **моментом инерции тела относительно оси вращения:**

$$\boxed{I = \sum I_i = \sum \Delta\, m_i\, R_i^2}. \qquad (2.38)$$

Тогда из (2.37) и с учетом (2.38) получим:

$$\boxed{L_Z=I\omega}. \qquad (2.39)$$

Таким образом, **момент импульса тела относительно оси** *равен произведению момента инерции тела на его угловую скорость.*

Для вычисления момента инерции тела его мысленно разбивают на частицы бесконечно малой массы dm (рис. 2.14). Согласно (2.33) момент инерции такой частицы

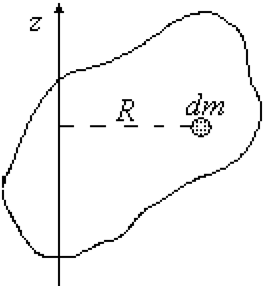


Рис. 2.14

$$dI = dm \cdot R^2 . \qquad (2.40)$$

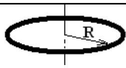
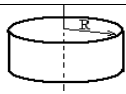
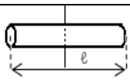
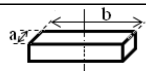
Тогда для нахождения момент инерции всего тела нужно просуммировать выражения (2.40) для всех частиц, что математически сводится к интегрированию. Поэтому **момент инерции тела относительно оси**

$$\boxed{I = \int R^2 \cdot dm}. \qquad (2.41)$$

В таблице 2.1 приведены моменты инерции I_C некоторых однородных тел простой геометрической формы относительно осей, проходящих через их центры масс. Наиболее просто с помощью (2.41) получается формула для момента инерции кольца (см. рисунок в табл. 2.1). Т.к. все элементы кольца находятся на одинаковом расстоянии R от оси, то можно вынести R за знак интеграла:

$$I = \int R^2 \cdot dm = R^2 \int dm = R^2 \cdot m .$$

Таблица 2.1

Тело	Размеры тела	Момент инерции I_c
кольцо, обруч		$I_C=mR^2$
диск, цилиндр, стержень		$I_C=mR^2/2$
тонкий стержень		$I_C=m\ell^2/12$
прямоугольная пластина		$I_C=m(a^2+b^2)/12$

Из (2.38) следует, что момент инерции тела I зависит от положения оси вращения относительно тела: для различных осей расстояние R_i от i-

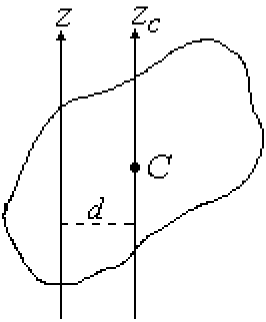


Рис. 2.15

ой частицы тела до этих осей будет разным. Из изложенного следует, что момент инерции тела надо каждый раз рассчитывать для той оси, относительно которой тело вращается. Согласно **теореме Штейнера** *момент инерции I тела относительно оси вращения Z*:

$$\boxed{I=I_C+md^2}, \qquad (2.42)$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси Z_C, проходящий через центр масс и параллельной оси вращения Z, m - масса тела , - расстояние между осями (рис. 2.15).

Выражение (2.38) означает, что момент инерции I является величиной **аддитивной**: *момент инерции тела равен сумме моментов частиц, из которых состоит это тело*. Масса тела так же величина аддитивная: $m=\sum m_i$ - масса тела равна сумме масс частиц, составляющих это тело.

2.6 Закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Уравнение моментов

Пусть частица массы m движется по окружности вокруг оси Z под действием силы $\vec{F}$, касательная составляющая которой $\vec{F}_\tau$ сообщает частице тангенциальное ускорение a_τ (рис. 2.16). Запишем второй закон Ньютона в проекциях на направление касательной: $F_\tau = ma_\tau$. Т.к. в соответствии с (1.35) $a_\tau=\varepsilon R$, то

$$F_\tau=mR\varepsilon. \qquad (2.43)$$

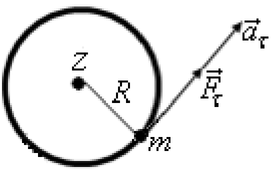


Рис. 2.16

Умножим обе части уравнения (2.43) на R:

$$F_\tau R=mR^2\varepsilon.$$

Откуда, учитывая (2.27) и (2.33), получим, что для частицы

$$M_Z=I\varepsilon. \qquad (2.44)$$

Рассмотрим твердое тело как систему, состоящую из множества частиц. Запишем уравнение (2.44) для каждой из них:

$$M_{Z,i}=I_{,i}\varepsilon, \qquad (2.45)$$

где i - номер частицы,. M_{zi} – сумма моментов сил, действующих на i–ую частицу, I_i – момент инерции i–ой частицы. Угловое ускорение ε для всех частиц тела одинаково и равно угловому ускорению твердого тела. Поэтому индекс «i» у ε в уравнении (2.45) не пишется. Просуммируем левые и правые части уравнений (2.45) для всех частиц тела:

$$\sum M_{zi} = \sum I_i \varepsilon = \varepsilon \sum I_i \; . \qquad (2.46)$$

При суммировании моментов сил следует учесть, что на каждую частицу действуют внутренние и внешние силы (см. п. 2.3). Но вследствие третьего закона Ньютона сумма всех внутренних сил будет равна нулю, и в левой части уравнения (2.46) останется только сумма моментов внешних сил относительно оси Z:

$$M_{z\,внешн} = \sum M_{zi} = \sum M_{zi\,внешн} + \sum I_{zi\,внутр} = \sum M_{zi\,внешн} \; . \qquad (2.47)$$

В правой части (2.46) $I = \sum I_i$ - момент инерции тела. С учетом введенных обозначений из (2.46) получаем **закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**:

$$\boxed{M_{Zвнешн} = I\varepsilon} \; . \qquad (2.48)$$

Этот закон утверждает, что *сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно оси, равна произведению момента инерции тела на его угловое ускорение*.

Из закона динамики вращательного движения (2.48) следует, что чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно получит под действием данного момента силы. Поэтому физический смысл момента инерции состоит в том, что он является мерой инертности тела при вращательном движении.

Подставим в уравнение (2.48) формулу (1.31) для углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow M_{zвнешн} = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \; .$$

Откуда с учетом формулы (2.39) $L_Z = I\omega$ получим **уравнение моментов для твердого тела относительно неподвижной оси**:

$$\boxed{M_{zвнешн} = \frac{dL_z}{dt}} . \qquad (2.49)$$

Выражение (2.49) утверждает, что *сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно оси, равна производной по времени от момента импульса тела относительно той же оси*. Свое название уравнение моментов получило в связи с тем, что оно выражает связь между моментом силы и моментом импульса.

Для частицы уравнение моментов относительно оси и точки (в векторном виде) записывается аналогично:

$$\boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}} \quad \text{и} \quad \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}} , \qquad (2.50)$$

где $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ - векторная сумма моментов всех сил, действующих на частицу (для системы, состоящей из одной частицы деление сил на внутренние и внешние лишено смысла).

Основные величины и законы кинематики и динамики приведены в таблице 2.2. Откуда видно, что имеет место аналогия между законами поступательного и вращательного движения

Таблица 2.2

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Поступательное движение		**Вращательное движение**	
величина, закон	***формула***	***величина, закон***	***формула***
изменение положения точки	$\Delta\vec{r}$; ΔS	изменение положения точки	$\Delta\vec{\varphi}$;$\Delta\varphi$
скорость поступательного движения	$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\upsilon = \frac{dS}{dt}$	скорость вращательного движения	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \omega = \frac{d\varphi}{dt}$
ускорение при поступательном движении	$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	ускорение при вращательном движении	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
масса	m	момент инерции	I
сила	$\vec{F}$	момент силы	$M_z = F_\tau R = F_\perp \ell$
импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	момент импульса	$L_z = I\omega$
второй закон Ньютона	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	закон динамики вращательного движения, уравнение моментов	$M_Z = I\varepsilon$ $M_Z = \frac{dL_Z}{dt}$
*работа	$dA = \vec{F}d\vec{S}$	работа	$dA = M_Z d\varphi$
* кинетическая энергия	$\frac{m\upsilon^2}{2}$	кинетическая энергия	$\frac{I\omega^2}{2}$

(* Последние две темы см. раздел 3)

3 Работа. Мощность. Энергия

3.1 Работа. Мощность

Пусть к частице массой m приложена сила $\vec{F}$ (рис. 3.1), и частица за время dt совершила перемещение $d\vec{\ell}$ (в п. 1.2 перемещение обозначалось $d\vec{r}$). Работа, совершаемая силой F при бесконечно малом (элементарном) перемещении $d\vec{\ell}$ частицы, называется **элементарной работой**:

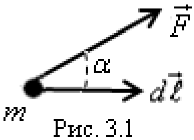


Рис. 3.1

$$\boxed{dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}\,, \tag{3.1}$$

т.е. **элементарная работа** *равна скалярному произведению силы на перемещение.*

Из свойств скалярного произведения (см. п. II.8 МП) следует, что формулу (3.1) можно представить в виде:

$$dA = Fd\ell\, cos\,\alpha = F_{\ell} d\ell\,, \tag{3.2}$$

где $F_{\ell} = F\, cos\,\alpha$ - проекция силы $\vec{F}$ на направление перемещения $d\vec{\ell}$, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{\ell}$. (*Обратите внимание*: т.к. $d\vec{\ell}$ очень мало, то можно считать, что при перемещении $d\vec{\ell}$ сила $\vec{F} = const$).

Из (3.2) следует, что единица измерения работы $[A]$ = *Нм* = *Дж* (*джоуль*).

Для того чтобы найти работу на всем пути, надо весь путь разделить на малые участки, найти работу на каждом из них, а затем результат просуммировать. Таким образом, для того, чтобы найти работу на всем пути, необходимо проинтегрировать уравнение (3.1) или (3.2), (см .п. IV.1 МП):

$$A = \int_{\ell} dA = \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = \int_{\ell} Fd\ell\, cos\,\alpha = \int_{\ell} F_{\ell} d\ell\,. \tag{3.3}$$

Индекс «ℓ» в (3.3) означает, что суммирование (т.е. интегрирование) проводится вдоль траектории, обозначенной «ℓ». (Обратите внимание: $\int_{\ell} dA \neq A_2 - A_1$, т.к. работа в точке 2 и точке 1 смысла не имеет). Таким образом, **работа на всем пути**

$$\boxed{A = \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = \int_{\ell} F_{\ell} d\ell} \tag{3.4}$$

(в (3.4) написаны не все, а наиболее употребляемые выражения для работы). Сила в уравнении (3.4) может быть как одна из действующих на тело сил (т.е. найдем работу этой силы), так и результирующая нескольких сил (т.е. получим работу результирующей силы).

Пример: *работа постоянной силы, частица движется прямолинейно*: $\vec{F}$ = const =>

$$A = \int_\ell F\cos\alpha d\ell = F\cos\alpha \int_\ell d\ell = F\ell\cos\alpha \ .$$

Мощность P - это *работа совершаемая в единицу времени*:

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt}}. \tag{3.5}$$

Единица измерения мощности [*P*]=*Дж/с*=*Вт* (*ватт*).

Подставим в (3.5) выражение (3.1):

$$P = \frac{\vec{F}d\vec{\ell}}{dt}.$$

Т.к. $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\upsilon}$ - скорость точки, то получаем **связь мощности и силы**:

$$\boxed{P = \vec{F}\vec{\upsilon}}. \tag{3.6}$$

Т.о., **мощность** *равна скалярному произведению силы на скорость.*

3.2. Кинетическая энергия. Связь работы и кинетической энергии

Рассмотрим частицу массы m, которая движется под действием нескольких сил, результирующая которых равна $\vec{F}$. В начальном положении 1 частица имела скорость υ_1, а в конечном 2 – скорость υ_2 (рис. 3.2). Работу *A*, которая совершается при таком движении можно найти из соотношения (3.4):

$$A = \int_\ell \vec{F}d\vec{\ell}\ . \tag{3.7}$$

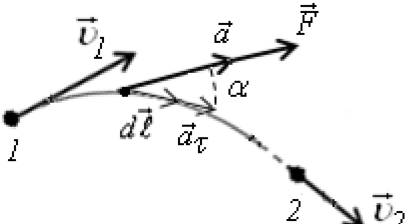


Рис. 3.2

Результирующую силу $\vec{F}$ выразим через ускорение $\vec{a}$ из второго закона Ньютона (2.3) $\vec{F} = m\vec{a}$ и подставим в (3.7):

$$A = \int_\ell m\vec{a}d\vec{\ell}\ . \tag{3.8}$$

Так как $\vec{F}$ - это результирующая всех действующих сил, то выражение (3.8) позволяет найти работу результирующей всех сил, действующих на частицу.

На рис. 3.2 показана результирующая сила $\vec{F}$ и направление ускорения $\vec{a}$ для некоторого произвольного перемещения $d\vec{\ell}$, угол между вектором перемещения и ускорением равен α. По определению скалярного произведения

$$\vec{a}d\vec{\ell} = a \cdot d\ell \cdot cos\,\alpha$$

Из рис. 3.2 видно, что

$$a \cdot cos\,\alpha = a_\tau ,$$

где a_τ - тангенциальная составляющая ускорения. Следовательно, из (3.8) получаем:

$$A = \int_\ell m\vec{a}d\vec{\ell} = \int_\ell m \cdot a \cdot d\ell \cdot cos\,\alpha = \int_\ell ma_\tau d\ell\,. \qquad (3.9)$$

Т.к. согласно (1.17) тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},$$

где υ - скорость частицы, то выражение (3.9) принимает вид:

$$A = \int_\ell m\frac{d\upsilon}{dt}d\ell = \int_\ell m\frac{d\ell}{dt}d\upsilon\,.$$

С учетом того, что в последнем соотношении

$$\upsilon = \frac{d\ell}{dt},$$

оно принимает вид:

$$A = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon.$$

Здесь массу m, как постоянную величину, можно вынести за знак интеграла:

$$A = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon d\upsilon. \qquad (3.10)$$

Табличный интеграл (см. пункт IV 2 МП) в правой части (3.10)

$$\int \upsilon d\upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}\,.$$

Поэтому соотношение (3.10) принимает вид:

$$A = \left.\frac{m\upsilon^2}{2}\right|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}.$$

Откуда, подставляя пределы интегрирования (см. п. IV 1 МП), получим:

$$\boxed{A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}}. \qquad (3.11)$$

Величина

$$\boxed{E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}} \qquad (3.12)$$

называется **кинетической энергией частицы.**

Из (3.11 и 3.12) следует, **связь между работой и кинетической энергией**:

$$\boxed{A = E_{к2} - E_{к1} = \Delta E_к}, \qquad (3.13)$$

или

$$\boxed{dA = dE_к}. \qquad (3.13а)$$

Таким образом, **работа результирующей всех сил**, *действующих на частицу, равна приращению (изменению) кинетической энергии частицы.*

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех частиц, составляющих это тело. При поступательном движении все частицы тела имеют одинаковую скорость υ. Поэтому кинетическая энергия тела при поступательном движении:

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{m_i\upsilon^2}{2} = \frac{\upsilon^2}{2}\sum m_i = \frac{\upsilon^2}{2}\cdot m,$$

где $m = \sum m_i$ - масса тела, равная сумме масс всех частиц этого тела (i – номер частицы, m_i - масса i-ой частицы). Т.о. **кинетическая энергия поступательно движущегося тела** также определяется выражением (3.12). Т.к. кинетическая энергия зависит от скорости тела, следовательно, этой энергией обладают только движущиеся тела.

3.3 Кинетическая энергия и работа при вращательном движении твердого тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Представим тело, состоящим из большого числа частиц. Тогда частица массы m_i, имеющая скорость υ_i (i – номер частицы), будет обладать кинетической энергией

$$E_{кi} = \frac{m_i\upsilon_i^2}{2}.$$

Выразим скорость i-ой частицы через ее угловую скорость ω, используя соотношение (1.33):

$$\upsilon_i = R_i \omega,$$

где R_i – радиус вращения частицы (угловая скорость ω всех точек тела одинакова – это угловая скорость вращения тела). Учитывая это соотношение, кинетическую энергию частицы можно представить в виде:

$$E_{к.i} = \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

Величина $m_i R_i^2$ есть момент инерции i-ой частицы тела (2.33):

$$I_{z.i} = m_i R_i^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия некоторой частицы вращающего тела

$$E_{к.i} = \frac{I_{z.i} \omega^2}{2}. \tag{3.14}$$

Кинетическую энергию всего тела найдем как сумму кинетических энергий всех частиц тела:

$$E_к = \sum E_{к.i} = \sum \frac{I_{z.i} \omega^2}{2} \Rightarrow E_к = \frac{\omega^2}{2} \sum I_{z.i}. \tag{3.15}$$

В уравнении (3.15) сумма моментов инерции материальных точек тела есть момент инерции твердого тела (формула (2.38)):

$$I_z = \sum I_{z,i} = \sum m_i R_i^2. \tag{3.16}$$

Таким образом, из (3.15) с учетом (3.16) получим, что **кинетическая энергия вращающегося тела**

$$\boxed{E_к = \frac{I_z \omega^2}{2}}, \tag{3.17}$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела.

В разделе 3.2 было показано, что элементарная работа всех сил (уравнение (3.13а)) $dA = dE_к$. Следовательно, для вращательного движения с учетом (3.17) можно записать, что

$$dA = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right). \tag{3.18}$$

Проинтегрировав (3.18), приходим к выражению:

$$\boxed{A = \frac{I_Z \omega_2^2}{2} - \frac{I_Z \omega_1^2}{2}}, \tag{3.19}$$

где ω_1 – начальная угловая скорость, ω_2 - конечная угловая скорость тела. Соотношение (3.19) означает, что *при вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси работа результирующей всех сил равна приращению кинетической энергии вращающегося тела.*

Преобразуем соотношение (3.18), учитывая, что для твердого тела, у которого ось вращения не меняет своего направления в пространстве, момент инерции постоянен ($I_z = const$) и его можно вынести за знак дифференциала:

$$dA = d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = I_z d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) \Rightarrow dA = I_z \omega d\omega .$$

Так как $\omega = d\varphi / dt$ (см. 1.25), где φ - угол поворота тела, то

$$dA = I_z \frac{d\varphi}{dt} d\omega \Rightarrow dA = I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi . \qquad (3.20)$$

Производная от угловой скорости по времени есть угловое ускорение (см. (1.32)):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} .$$

Таким образом, из (3.20) следует, что

$$dA = I_z \varepsilon d\varphi .$$

Множитель при $d\varphi$ есть момент сил, действующих на тело (см. (2.48)):

$$M_z = I_z \varepsilon .$$

Следовательно,

$$\boxed{dA = M_z d\varphi} . \qquad (3.21)$$

Т.о., **элементарная работа при вращательном движении** *равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота.*

Работа при повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ находится интегрированием уравнения (3.21):

$$\boxed{A = \int_0^{\Delta\varphi} M_Z d\varphi} . \qquad (3.22)$$

Мощность при вращательном движении $P = dA/dt$ найдем, используя (3.21):

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} ,$$

$$\boxed{P = M_Z \omega} .$$

Т.е., **мощность при вращательном движении тела** *равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела*.

Если тело движется поступательно и одновременно вращается вокруг оси, не меняющей своего направления в пространстве, то кинетическая энергия тела равна:

$$\boxed{E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_Z\omega^2}{2}}. \qquad (3.23)$$

При этом работа всех сил находится из уравнения (3.13), где кинетическая энергия определяется соотношением (3.23).

Пример: колесо катится со скоростью υ (рис. 3.3). В этом случае колесо еще и вращается относительно оси, проходящей через центр тяжести колеса (точка “*O*”):

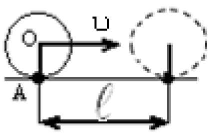


Рис. 3.3

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}.$$

Найдем связь ω и υ. Пусть центр колеса прошел путь ℓ, равный длине окружности колеса $\ell = 2\pi R$. Время этого движения $t = \ell/\upsilon$. За это время каждая точка колеса (например, точка “A”) совершила полный оборот, т.е. повернулась относительно оси вращения на угол φ=2π. Найдем угловую скорость ω колеса, используя (1.26):

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{\ell}\upsilon = \frac{2\pi}{2\pi R}\upsilon = \frac{\upsilon}{R}.$$

Подставим полученное выражение $\omega = \upsilon / R$ в кинетическую энергию:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_z}{2}\left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2.$$

Момент инерции колеса (обруча) относительно оси, проходящей через его центр (точку “O”) и перпендикулярной плоскости колеса, $I_z = mR^2$ (см. табл. 2.1). Учитывая это, получим:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\upsilon^2}{2R^2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}. \Rightarrow \qquad E_к = m\upsilon^2.$$

3.4 Поле сил. Консервативные силы. Потенциальная энергия и работа консервативной силы. Потенциальная энергия в поле сил тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации

Если на частицу в каждой точке пространства действуют силы, то частица находится в *поле сил*. Например, вблизи поверхности Земли частица находится в поле сил тяжести, т.к. в каждой точке на нее действует сила тяжести $m\vec{g}$. Если есть система зарядов, то на любой другой заряд (например, q_0) в любой точке будет действовать силы кулоновского взаимодействия: заряд q_0 находится в поле электростатических сил.

Консервативными называются силы, *работа которых не зависит от формы траектории, а зависит от начального и конечного положения тела* (рис. 3.4а):

$$A_{\ell_1} = A_{\ell_2} = A_{\ell_3} = \ldots = A \quad \text{для любого пути из “1” в “2”.}$$

На рис. 3.4б показана замкнутая траектория. В точку “1” можно попасть, пройдя траекторию «ℓ», а можно не “выходя” из точки “1”. Во втором случае $A = 0$ (т.к. перемещение равно 0). Поскольку для консервативной силы, работа не зависит от формы пути, то и работа на замкнутом пути «ℓ» тоже равна 0. Таким образом, *работа консервативной силы по замкнутой траектории равна* 0. Работа силы по траектории «ℓ» (см. (3.4))

$$A = \int_\ell F_\ell d\ell ,$$

где F_ℓ - проекция силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{\ell}$. Если надо в (3.4) указать, что траектория замкнутая, то интеграл записывается так:

$$\oint_\ell F_\ell d\ell .$$

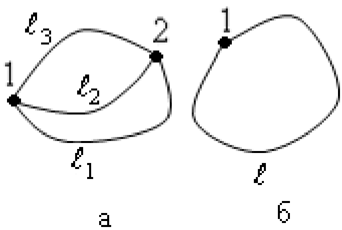


Рис. 3.4

Такой интеграл называется “*циркуляцией* ”. Т.к. работа по замкнутой траектории равна нулю ($A_\circ = 0$), то из (3.4а) получим, что **циркуляция вектора консервативной силы по произвольной замкнутой траектории равна нулю.**

$$\boxed{\oint_\ell F_\ell d\ell = 0}.$$

Силовое поле, силы которого консервативны, *называется потенциальным*. Поскольку работа в таком поле не зависит формы траектории, она должна зависеть от состояния системы в начальном и конечном положении. *Физическая величина, зависящая от положения системы в поле консервативных сил и определяющая работу этих сил*, **называется потенциальной энергией** (E_n). В этом случае работа

$$\boxed{A = E_{n1} - E_{n2} = -\Delta E_n} \tag{3.24}$$

или

$$\boxed{dA = -dE_n}.$$

где E_{n1} и E_{n2} - потенциальная энергия соответственно в начальном и конечном положениях. Т.о., **работа консервативной силы** *равна убыли потенциальной энергии.*

Покажем, что сила тяжести является консервативной. Для этого надо показать, что работа этой силы не зависит от формы траектории при переходе из одной точки в другую. Для этого рассмотрим движение частицы из точки 1 в точку 2 (рис. 3.5) по некоторой *произвольной* траектории. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что элементарная работа силы тяжести при малом перемещении $d\vec{\ell}$:

$$dA = m\vec{g}d\vec{\ell} = mgd\ell \cos\alpha \quad .$$

Из рис.3.5 видно, что

$$d\ell \cos\alpha = y' - y'' = -(y'' - y') .$$

Приращение координаты

$$dy = y'' - y' \Rightarrow d\ell \cos\alpha = -dy .$$

Поэтому выражение для работы принимает вид:

$$dA = -mgdy; \quad A = -\int_{h_1}^{h_2} mgdy = -mgy\Big|_{h_1}^{h_2} = mgh_1 - mgh_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A = mgh_1 - mgh_2}. \tag{3.25}$$

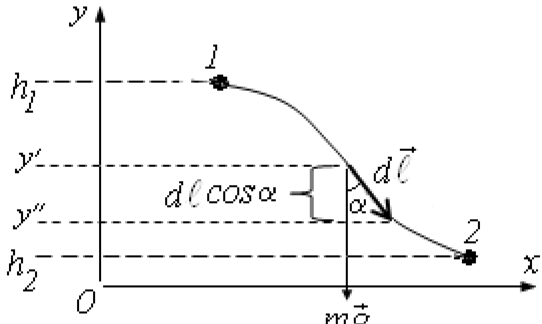


Рис. 3.5

Из (3.25) видно, что **работа силы тяжести** *не зависит от формы траектории*, т.к. в уравнение (3.25) входят только величины h_1 и h_2, определяющие начальное и конечное положение частицы. (Из выше изложенного видно, что для любой другой траектории, начинающейся в точке 1 и заканчивающейся в точке 2 - результат не изменился бы). Сравнивая (3.25) и (3.24), находим, что **потенциальная энергия в поле силы тяжести**

$$\boxed{E_n = mgh}, \qquad (3.26)$$

где h - *расстояние от нулевого уровня отсчета высоты до частицы или центра тяжести тела*. Нулевой уровень может быть выбран произвольно, но для всех тел системы один и тот же. Возможность произвольного выбора нулевого уровня отсчета высоты означает, что к потенциальной энергии тел можно добавить произвольную постоянную - это соответствует изменению нулевого уровня отсчета высоты. Другими словами потенциальная энергия определена с точность до произвольной постоянной. Это, однако, не существенно, так как в физические соотношения входит или разность потенциальных энергий в двух точках, или производная от потенциальной энергии по координатам (см. раздел 3.5). (Утверждение о том, что сила тяжести является консервативной, есть следствие того, что консервативной является сила гравитационного взаимодействия).

Консервативной является также и сила упругости. Найдем работу этой силы на примере деформации пружины. Пусть растянутая пружина под действием силы упругости $\vec{F}_{уп}$ совершила малое перемещение $d\vec{\ell}$ (рис. 3.6). При этом в точке A на пружину действует сила упругости, модуль которой

$$F_{уп} = kx .$$

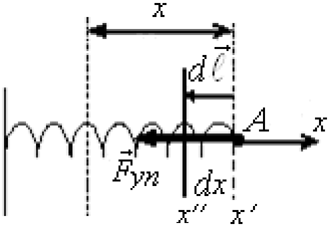


Рис. 3.6

Т.к. $d\vec{\ell} \to 0$, то можно считать, что сила $F_{уп}$ не изменилась на перемещении

$d\vec{\ell}$. Элементарная работа силы упругости:

$$dA = \vec{F}_{yn} d\vec{\ell} = F_{yn} d\ell \cos 0 .$$

Из рис. 3.6 видно, что модуль перемещения

$$d\ell = x' - x'' = -(x'' - x') .$$

Так как приращение координаты

$$dx = x'' - x' \Rightarrow d\ell = -dx ,$$

и выражение для работы принимает вид:

$$dA = -kxdx \quad : \quad A = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} .$$

$$\boxed{A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}} . \qquad (3.27)$$

Сравнивая (3.27) с (3.24) находим, что **потенциальная энергия при упругой деформации**

$$\boxed{E_n = \frac{kx^2}{2}} . \qquad (3.28)$$

Из (3.27) следует, что **работа силы упругости** *зависит только от начального и конечного положения*. Следовательно, *сила упругости является консервативной.*

3.5 Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

Найдем связь между консервативной силой и потенциальной энергией на примере силы тяжести и силы упругости.

Потенциальная энергия частицы в поле сил тяжести определяется выражением (3.26). Если частица находится в точке с координатой y (рис. 3.5), то в формуле (3.26) высоту h надо заменить на y. Тогда получим:

$$E_n = mgy \Rightarrow \quad \frac{dE_n}{dy} = mg .$$

Из рис. 3.5: $mg_y = mg\cos(180) = -mg$. Сравнивая два последних выражения, находим:

$$mg_y = -\frac{dE_n}{dy} . \qquad (3.29)$$

Для силы упругости (см. 3.28):

$$E_n = \frac{kx^2}{2} \quad => \quad \frac{dE_n}{dx} = kx .$$

Из рис. 3.6: $F_{уп,x} = \left|F_{уп}\right| cos(180) = -kx \;\Rightarrow$

$$F_{уп,x} = -\frac{dE_n}{dx} \;. \qquad (3.30)$$

Соотношения типа (3.29) и (3.30) справедливы для любой консервативной силы и в общем случае:

$$\boxed{F_\ell = -\frac{\partial E_n}{\partial\ \ell}} \;, \qquad (3.31)$$

где F_ℓ - проекция вектора консервативной силы $\vec{F}$ на направление оси, обозначенной индексом «ℓ».

Выберем направления, совпадающие с координатными осями «x», «y», «z». Тогда из (3.31) получим:

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial\ E_n}{\partial x}}\,;\,\boxed{F_y = -\frac{\partial\ E_n}{\partial y}}\,;\,\boxed{F_z = -\frac{\partial\ E_n}{\partial z}}. \qquad (3.32)$$

Выразим вектор $\vec{F}$ через его проекции:

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \;,$$

где $\vec{e}_x\ ,\vec{e}_y\ ,\vec{e}_z$ - единичные векторы (орты) осей «x», «y», «z».

Подставим (3.32) в последнее равенство:

$$\vec{F} = -\frac{\partial\ E_n}{\partial\ x}\vec{e}_x - \frac{\partial\ E_n}{\partial\ y}\vec{e}_y - \frac{\partial\ E_n}{\partial\ z}\vec{e}_z \,. \qquad (3.33)$$

Из математики известно, что если имеется некоторая скалярная функция $f(x,y,z)$, то выражение

$$\frac{\partial\ f}{\partial\ x}\vec{e}_x + \frac{\partial\ f}{\partial\ y}\vec{e}_y + \frac{\partial\ f}{\partial\ z}\vec{e}_z$$

является вектором. Этот вектор называется *градиентом функции* f и обозначается символом

$$grad\, f \quad \text{либо} \quad \nabla f$$

(∇ называется *оператором* “*набла*”, ∇f читается: "набла эф” или “градиент эф”).

Таким образом, соотношение (3.33) можно записать в виде:

$$\boxed{\vec{F} = -grad\ E_n = -\nabla E_n}. \qquad (3.34)$$

Соотношение (3.34) выражает **связь консервативной силы и потенциальной энергии**: *консервативная сила равна градиенту потенциальной* *энергии, взятому с противоположным знаком.* (Фактически уравнение (3.34) - сокращенная запись уравнения (3.33)).

Градиент функции ∇f - это вектор, направленный в сторону наибыстрейшего возрастания функции f. Знак «-» в уравнении (3.34) показывает, что консервативная сила направлена в сторону наибыстрейшего убывания потенциальной энергии. Например, в поле сил тяжести потенциальная энергия убывает с уменьшением высоты, в этом же направлении (т.е. «вниз») направлен вектор силы тяжести.

3.6 Работа неконсервативных сил и механическая энергия

В общем случае на систему тел действуют кроме консервативных сил и другие силы, которые в дальнейшем будем называть неконсервативными. Работа неконсервативных сил по замкнутой траектории не равна нулю. В частности к таким силам относится сила трения. Работа всех сил A, действующих на систему, равна сумме работ консервативных $A_к$ и неконсервативных $A_{нк}$ сил:

$$A = A_к + A_{нк}.$$

Откуда

$$A_{нк} = A - A_к . \qquad (3.35)$$

Работа всех сил определяется соотношением (3.13), а работа консервативных сил - соотношением (3.24). Подставим эти выражения в (3.35):

$$A_{нк} = (E_{к2} - E_{к1}) - (E_{п1} - E_{п2}) \Rightarrow$$

$$A_{нк} = (E_{к2} + E_{п2}) - (E_{к1} + E_{п1}). \qquad (3.36)$$

Величина, *равная сумме кинетической и потенциальной энергий*, *называется* **полной механической энергией**:

$$\boxed{E = E_к + E_п} \qquad (3.37)$$

С учетом этого обозначения равенство (3.36) принимает вид:

$$\boxed{A_{нк} = E_2 - E_1 = \Delta E} \qquad (3.38)$$

или $\boxed{dA_{нк} = dE}$.

Следовательно, **работа неконсервативной силы равна приращению (изменению) полной механической энергии системы.**

4 Законы сохранения в механике

4.1 Закон сохранения импульса

Для системы частиц (или системы твёрдых тел) второй закон Ньютона можно записать в виде (см. уравнение (2.17)):

$$\sum \vec{F}_{вн,i} = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i \quad , \tag{4.1}$$

где $\sum \vec{F}_{вн,i}$ - сумма внешних сил, действующих на систему; $\sum \vec{p}_i$ - импульс системы; $\vec{p}_i$ - импульс i-ого тела.

Если отсутствуют внешние силы, действующие на систему, то система называется *замкнутой*. Для такой системы

$$\sum \vec{F}_{вн,i} = 0 \ . \tag{4.2}$$

Из (4.2) и (4.1) получим для замкнутой системы

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum \vec{p}_i = const} \ . \tag{4.3}$$

Т.е., *суммарный импульс замкнутой системы тел остается постоянным.* Это есть **закон сохранения импульса.**

Очевидно, что если внешние силы не равны нулю, но их сумма равна нулю (уравнение (4.2)), то и в этом случае выполняется соотношение (4.3). Таким образом, импульс остается постоянным и у незамкнутой системы, если сумма внешних сил $\sum \vec{F}_{вн,i} = 0$.

Из сказанного выше можно сделать два вывода:

1. Т.к. в замкнутой системе $\sum \vec{F}_{вн,i} = 0$, то в такой системе скорости тел (и импульсов) меняются только вследствие действия внутренних сил. Практически большинство систем не замкнуты, но если в системе скорости тел меняются в основном вследствие действия внутренних сил, то такую систему с достаточной степенью точности можно считать замкнутой.

2. В разделе 2.3 показано, что суммарный импульс системы

$$\sum \vec{p}_i = m\vec{\upsilon}_C ,$$

где m - суммарная масса тел системы; $\vec{\upsilon}_C$ - скорость центра масс.

Из (4.3) и последнего уравнения получим, что в замкнутой системе

$$\vec{\upsilon}_C = const$$

Т.е. *в замкнутой системе скорость центра масс системы постоянна.*

Запишем проекцию уравнения (4.1) на некоторую ось Z:

$$\sum F_{вн,Z} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{p}_{iz}\right).$$

Если $\sum F_{вн,Z}=0$, то (аналогично (4.3)) получим:

$$\boxed{\sum p_{iZ} = const}. \qquad (4.3а)$$

В этом случае остается постоянной сумма проекций импульсов тел на ту ось, для которой сумма проекций внешних сил равна нулю.

4.2 Закон сохранения момента импульса

Уравнение моментов для системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси, имеет вид (см. уравнение (2.49)):

$$\sum M_{вн,Z} = \frac{d}{dt}\left(\sum L_{i,Z}\right), \qquad (4.4)$$

где $\sum M_{вн,Z}$ - суммарный момент внешних сил относительно оси вращения, $\sum L_{i,Z}$ - суммарный момент импульсов тел относительно оси вращения.
Если система замкнута, то

$$\sum M_{вн,Z} = 0, \qquad (4.5)$$

и из (4.4) , аналогично (4.3), получим:

$$\boxed{\sum L_{iZ} = const}\ . \qquad (4.6)$$

Таким образом, *если сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси остается постоянным*. Уравнение (4.6) - частный случай векторного

закона сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным*.

4.3 Закон сохранения механической энергии

Работа неконсервативных сил равна приращению полной механической энергии (см. уравнение (3.38)):

$$A_{нк}=\Delta E. \quad (4.7)$$

Если на систему действуют только консервативные силы, то

$$A_{нк}=0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) следует:

$$\Delta E=0 \Rightarrow \quad E=const \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum E_i=const}\,. \quad (4.9)$$

Мы пришли к **закону сохранения механической энергии**: *если на тела системы действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы остается постоянной*. Из (4.8) следует, что полная механическая энергия будет также оставаться постоянной, если суммарная работа неконсервативных сил будет равна нулю.

Закон сохранения механической энергии - это частный случай общего закона сохранения и превращения энергии, который гласит: энергия не возникает и не исчезает, а переходит из одного вида в другой.

Рассмотренные законы сохранения являются следствием свойств пространства и времени. Они - одни из фундаментальных законов природы.

Пример. Соударение двух тел.

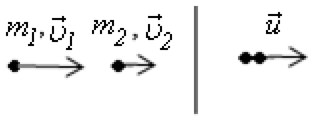


Рис. 4.1

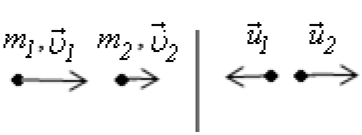


Рис. 4.2

Выполняется закон сохранения импульса, т.к. в этом случае скорость тел меняется в основном вследствие действия внутренних сил.

а) Неупругий удар - скорость тел после удара одинакова (рис. 4.1); механическая энергия после удара уменьшается, т.к. часть её идет на деформацию тел - т.е. *не выполняется закон сохранения механической энергии.*

б) Упругий удар - скорость тел после удара разная (рис. 4.2); *выполняется закон сохранения механической энергии.* Так как время удара очень мало, то за это время положения центров масс тел практически не меняются, поэтому не изменяется потенциальная энергия. Следовательно, в этом случае, закон сохранения механической энергии означает, что суммарная кинетической энергии тел до и после удара одинакова.

4.4. Условие равновесия механической системы. Потенциальная яма, потенциальный барьер

Рассмотрим одномерное движение частицы, у которой зависимость потенциальной энергии от ее положения $E(x)$ имеет вид, показанный на рис. 4.3. На частицу действует консервативная сила, направленная вдоль оси *X*. Согласно (3.32) проекция консервативной силы на ось *X*

$$F_x = -\frac{dE_n}{dx}. \tag{4.10}$$

Будем считать, что другие силы на частицу не действуют, т.е. выполняется закон сохранения механической энергии (4.9):

$$E = E_n + E_к = const. \tag{4.11}$$

Если на графике потенциальной энергии отложить значения *E*, то получим прямую линию, параллельную оси *X* (на рис . 4.3а - линии 1 и 2, соответствующие двум разным значениям *E*). По графикам *E* и E_n можно определить как величину E_n так и $E_к$ (на рис. 4.3а эти величине указаны для полной энергии E_1 в точке x_4). Из уравнения (4.11) и рисунка видно, что при механической энергии E_1 для точек с координатами

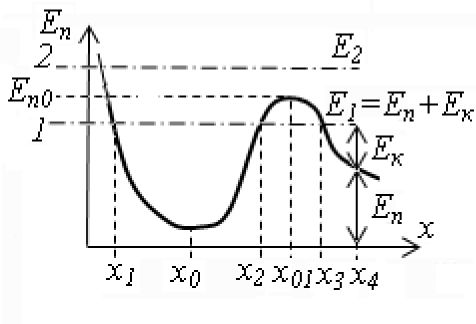
$$x < x_1 \text{ и } x_2 < x < x_3$$

$E_к < 0$. Отрицательное значение кинетической энергии не имеет физического смысла, а это значит, что в этих точках частица быть не может.

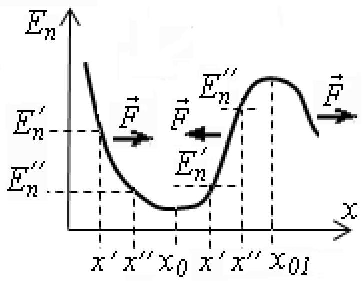
Выясним, как направлена сила, действующая на частицу на различных участках оси *X* (рис. 4.3б), учитывая, что

$$F_x = -\frac{dE_n}{dx} \approx -\frac{\Delta E_n}{\Delta x}. \tag{4.12}$$

На участке $x<x_0$ при движении частицы в сторону увеличения координаты x приращение координаты $\Delta x = x'' - x' > 0$, при этом приращение потенциальной энергии $\Delta E_n = E_n'' - E_n' < 0$. С учетом этого из (4.12) следует, что $F_x>0$. Это значит, что на



а



б

Рис. 4.3

этом участке сила направленна по направлению оси *X*. Это же справедливо и для участка с координатами $x > x_{01}$. На участке $x_0 < x < x_{01}$ при движении частицы в сторону увеличения координаты x приращение координаты $\Delta x = x'' - x' > 0$, а $\Delta E_n = E_n'' - E_n' > 0$. Поэтому из (4.12) следует, что $F_x < 0$, т.е. вектор силы направлен против направления оси *X* (рис. 4.3.б).

В точках экстремума (т.е. в точках x_0 и x_{01}) производная равна нулю:

$$\frac{dE_n}{dx} = 0 .$$

Учитывая (4.10), получим, что в точках x_0 и x_{01} сила, действующая на частицу, равна нулю. Если частица находится в этих точках и скорость её равна нулю, то она в них может находиться сколь угодно долго - эти точки соответствуют положению равновесия частицы. В точке x_0 - положение устойчивого равновесия: если частицу сместить из этой точки на малое расстояние, то сила, действующая на нее, будет возвращать частицу в положение равновесия (рис. 4.3б). В точке x_{01} - положение неустойчивого равновесия. Таким образом, *минимум, действующая потенциальной энергии соответствует положению устойчивого равновесия; в этом положении сила на частицу, равна нулю.*

Рассмотрим частицу с полной энергией E_1, которая находится в точке с координатой x_1 (рис.4.3а). В этом положении ее кинетическая энергия равна нулю (т.к. здесь $E_1 = E_n \Rightarrow E_к = 0$), следовательно равна нулю и скорость. Однако в этом положении на частицу действует сила, направленная в положительном направлении оси *X*. Под действием силы частица начнет двигаться к точке x_0, её потенциальная энергия будет уменьшаться, а кинетическая энергия расти (уравнение (4.11)). В точке x_0 потенциальная энергия достигнет своего минимального значения, а кинетическая, соответственно - максимального. Т.к. в точке x_0 у частицы есть скорость она продолжит движение. При этом её потенциальная энергия будет расти, а кинетическая энергия уменьшаться. В точке с координатой x_2 частица остановится, т.к. в этой точке (также как и в точке x_1) её кинетическая энергия равна нулю. Далее движение повториться в обратном порядке от точки x_2 до точки x_1 и т.д.

Область между точками x_1 и x_2 называется *потенциальной ямой*. Из сказанного выше следует, что *частица в потенциальной яме совершает колебательное движение.*

Область между точками x_2 и x_3 для частицы с механической энергией E_1 не достижима. Эту область пространства *называется потенциальным барьером* (на рис 4.3а E_{n0} - высота потенциального барьера). Для того, чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ее механическая энергия должна быть больше высоты потенциального барьера, например, такая как E_2 на рис. 4.3а (в этом случае $E_к > 0$).

Не трудно понять, какой характер движения будет у частицы, если на нее, кроме консервативной силы, действует сила трения. В этом случае механическая энергия постепенно будет тратиться на работу против силы трения (т.е. переходить во внутреннюю энергию и выделяться в виде тепла) и колебания постепенно прекратятся: *частица будет совершать затухающие колебания.*

5 Колебания. Волны

5.1 Колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Кинематическое уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, частота, период колебаний

Колебаниями *называются процессы, отличающиеся определенной степенью повторяемости во времени* (например: качание маятника, колебание струны, изменение тока в колебательном контуре и т.п.).

Свободными или собственными колебаниями называют такие колебания, которые происходят в системе, представленной самой себе, после того как ее вывели из положения равновесия. При *вынужденных колебаниях* на систему действует внешняя периодически меняющаяся сила. Частный случай вынужденных колебаний – *автоколебания,* при которых моменты действия вынуждающей силы задает сама система.

Рассмотрим одномерное движение частицы вдоль оси x, при котором зависимость потенциальной энергии $E_n(x)$ от координаты x частицы имеет минимум (рис.5.1). Выберем нулевой уровень отсчета и начало координат так, что бы минимум E_n=0 соответствовал координате x=0.

Вблизи минимума, т.е. при достаточно малых x, большинство функций $f(x)$ имеет вид параболы. Следовательно, для достаточно малых x потенциальная энергия частицы

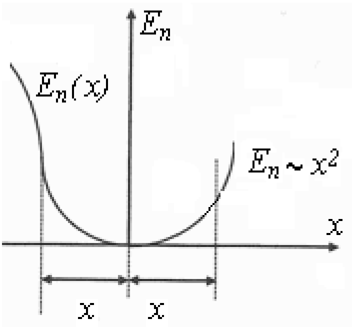


Рис. 5.1

$$E_n(x) \sim x^2. \tag{5.1}$$

Если выполняется условие (5.1), то движение частицы называют *малыми колебаниями*. Обозначим коэффициент пропорциональности в соотношении (5.1) $k/2$, где «k» некоторая постоянная. Тогда

$$E_n(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{5.2}$$

Из уравнения (3.32) получим:

$$F_x = -\frac{\partial\ E_n}{\partial\ x} = -kx, \qquad (5.3)$$

где F_x – проекция силы на ось x.

Из соотношения (5.3) следует, что вблизи минимума потенциальной энергии на частицу действует такая же по форме записи сила, как сила упругости. Ее называют квазиупругой силой. Из соотношения (5.3) видно, что в точке с координатой x=0 действующая на частицу сила равна нулю. Следовательно, это *положение равновесия (устойчивого*).

Рассмотрим движение частицы под действием **квазиупругой силы**

$$\boxed{F_x = -kx},$$

где k – коэффициент квазиупругой силы. Запишем второй закон Ньютона для данного случая в векторном виде и проекциях на ось x:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x = ma_x.$$

Т.к. согласно (1.14) проекция ускорения

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},$$

то второй закон Ньютона с учетом выражения для квазиупругой силы принимает вид:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Откуда после алгебраических преобразований, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (5.4)$$

В (5.4) величина $\frac{k}{m} > 0$; обозначим ее ω_0^2:

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}. \qquad (5.5)$$

Подставим (5.5) в (5.4):

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}. \qquad (5.6)$$

Выражение (5.6) называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. Решением этого уравнения являются функции, имеющие вид:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)} \qquad (5.7)$$

$$\text{или } x = A\sin(\omega_0 t + \alpha'), \qquad (5.7a)$$

где A, α, α' - некоторые константы (то, что выражения (5.7) и (5.7а) являются решениями уравнения (5.6), можно проверить непосредственной подстановкой). Уравнения (5.7) и (5.7а) называются **кинематическим уравнением гармонических (или свободных незатухающих) колебаний.**

Поскольку $\cos\varphi = \sin(\varphi - \pi/2)$, то от первого уравнения (5.7а) всегда можно перейти ко второму и наоборот. В дальнейшем, для определенности, будем использовать первое из уравнений (5.7):

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}. \qquad (5.7)$$

В уравнении (5.7) x - *смещение частицы от положения равновесия в момент времени* t; ω_0 - *циклическая частота*; $\varphi = \omega_0 t + \alpha$ - *фаза колебаний* (измеряется в радианах); при $t = 0$ фаза $\varphi = \alpha$, т.е. α - *начальная фаза колебаний.* Т.к. максимальное значение $\cos\varphi = 1$, то из (5.7) получим модуль максимального смещения от положения равновесия $\left|x_m\right| = A$. Величина A - *амплитуда колебаний – максимальное смещение частицы от положения равновесия.* На рис.(5.2) показан график гармонических колебаний (т.е. график функции (5.7)).

Период колебаний $\boldsymbol{T}$ – *время одного полного колебания.* За это время фаза колебания изменяется на 2π (функция косинуса является периодической с периодом 2π). На рис 5.2 $T=t_2 - t_1$. Фазы колебаний в эти моменты времени:

$$\varphi_1=\omega_0 t_1+\alpha;\ \varphi_2=\omega_0 t_2+\alpha; \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2=\omega_0(t_2-t_1)=\omega_0 T.$$

Так как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \ \Rightarrow \ \omega_0 T = 2\pi ,$$

То из последнего равенства следует, что циклическая частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \qquad (5.8)$$

Если за время t совершилось число N полных колебаний, то период T - *время, за которое совершается одно полное колебание*:

$$\boxed{T=t/N}. \qquad (5.8a)$$

Частота колебаний ν - число колебаний за единицу времени:

$$\boxed{\nu = N/t}.$$

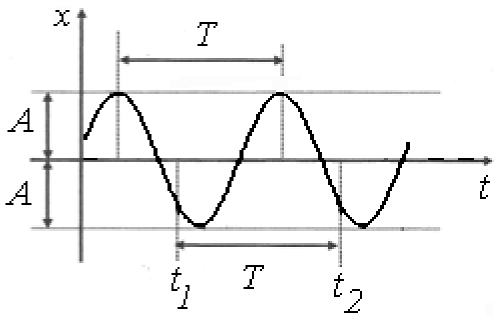


Рис. 5.2

Из сравнения с уравнением (5.8а) видно, что *частота колебаний* ν *- величина обратная периоду колебаний.* Поэтому **связь частоты и периода колебаний** имеет вид:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}. \qquad (5.9)$$

Подставив (5.9) в (5.8), получим **связь циклической частоты с периодом и частотой колебаний**

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}. \qquad (5.9а)$$

Из уравнений (5.8а) и (5.9) получим единицы измерения T и ν:

[T]=с; [ν]=1/с=Гц (герц).

5.2 Скорость, ускорение и энергия при гармонических колебаниях

Проекция на ось x скорости колеблющейся частицы

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}. \qquad (5.10)$$

Подставим (5.7) в (5.10) и возьмем производную по времени в полученном выражении:

$$\upsilon_x = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega_0 t + \alpha)\right] \Rightarrow \upsilon_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Обозначим: $$\boxed{\upsilon_m = A\omega_0}. \qquad (5.11)$$

Тогда $$\boxed{\upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \alpha)}, \qquad (5.12)$$

где υ_m - *амплитуда скорости.* Видно, что скорость, так же как и координата x частицы, изменяется по гармоническому закону. Т.к.

$-\sin(\omega_0 t + \alpha) = \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2)$,

то из (5.12) следует, что

$$\upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \qquad (5.12а)$$

Из сравнения (5.12а) и (5.7) видно, что разность фаз между x и υ_x (другими словами - сдвиг фаз) равна $\pi/2$. В тех точках, где $x=0$ (т.е. для которых $\varphi=\omega_0 t+\alpha=\pi/2, 3\pi/2, \cdots$), $|\upsilon_x|=\upsilon_m$.

Проекция ускорения на ось x

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}\Rightarrow a_x=\frac{d}{dt}\left[-\upsilon_m\, sin(\omega_0 t+\alpha)\right]\Rightarrow a_x=-\upsilon_m\omega_0\, cos(\omega_0 t+\alpha)$$

Обозначим: $$\boxed{a_m=\upsilon_m\omega_0=A\omega_0^2}. \qquad (5.13)$$

Тогда $$\boxed{a_x=-a_m\, cos(\omega_0 t+\alpha)}, \qquad (5.14)$$

т.е. ускорение тоже подчиняется гармоническому закону; a_m - амплитуда ускорения.

$$a_x=-a_m\, cos(\omega_0 t+\alpha)=a_m\, cos(\omega_0 t+\alpha+\pi). \qquad (5.14а)$$

Видно, что сдвиг фаз между a_x и x равен π (см. уравнения (5.14а) и (5.7)); сдвиг фаз между a_x и υ_x равен $\pi/2$ (уравнения (5.14а) и (5.12а)). Отметим, что подстановка уравнений (5.14) и (5.7) в уравнение (5.6) с учетом (5.13) дает тождество. Это означает, что выражение (5.7) есть решение уравнения (5.6).

В разделе 5.1 было показано, что незатухающие собственные гармонические колебания возникают при действии квазиупругой силы. Так же как и сила упругости - это консервативная сила. Так как других сил нет, то в рассматриваемом случае должен выполняться закон сохранения механической энергии (раздел 4.3). Найдем кинетическую и потенциальную энергии частицы, совершающей гармонические колебания:

$$E_к=m\upsilon^2/2;\ E_п=kx^2/2.$$

Подставим в первое из этих выражений уравнение (5.12), во второе - (5.7) (для краткости обозначим $\varphi=\omega_0 t+\alpha$):

$$E_k=\frac{m\upsilon_m^2\, sin^2\varphi}{2}\ ;\ E_п=\frac{kA^2\, cos^2\varphi}{2}. \qquad (5.15)$$

Подставим $\upsilon_m=A\omega_0$ и найдем полную механическую энергию:

$$E=E_к+E_п\Rightarrow E=\frac{mA^2\omega_0^2\, sin^2\varphi}{2}+\frac{kA^2\, cos^2\varphi}{2}.$$

Из (5.5) следует: $$m\omega_0^2=k. \qquad (5.16)$$

Тогда

$$E=\frac{kA^2}{2}(sin^2\varphi+cos^2\varphi)=\frac{kA^2}{2}.$$

С учетом (5.16) и (5.11) для полной механической энергии получим:

$$\boxed{E=\frac{kA^2}{2}=\frac{m\upsilon_m^2}{2}}. \qquad (5.17)$$

Видно, что при гармонических колебаниях механическая энергия частицы не зависит от времени, т.е. остается постоянной, а, следовательно, выполняется закон сохранения механической энергии. Выражение (5.17) показывает, что *при гармонических колебаниях полная механическая энергия равна максимальной потенциальной энергии* (т.е. энергии при $|x|=A$; в этих точках $E_к = 0$), либо максимальной кинетической энергии (т.е. энергии в точке x =0, где $|\upsilon|=\upsilon_m$, а $E_п$=0).

5.3 Сложение одинаково направленных колебаний

Гармонические колебания часто удобно представить в виде векторной диаграммы (рис. 5.3а). Возьмем вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A колебаний и расположим его к оси x под углом α, равным начальной фазе колебаний. Представим, что этот вектор вращается вокруг оси, проходящей через точку O с угловой скоростью ω, равной циклической частите колебаний. При равномерном вращении за время t он повернется на угол ωt. Угол φ между вектором $\vec{A}$ и осью x будет с течением времени изменяться по тому же закону, что и фаза колебаний:

$$\varphi=\omega t+\alpha .$$

При этом проекция вектора $\vec{A}$ на ось x будет равна:

$$x=A\cos\varphi=A\cos(\omega t+\alpha).$$

Таким образом, проекция вектора $\vec{A}$ на ось x совершает гармоническое колебание.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющейся частицы будет суммой смещений x_1 и x_2, уравнения которых имеют вид:

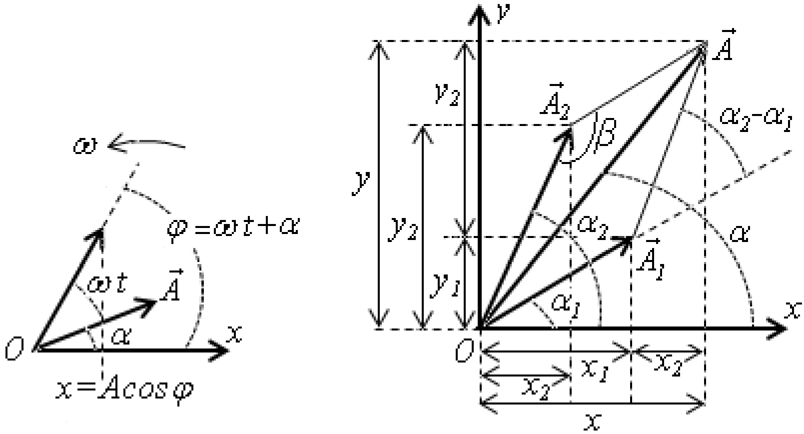
$$x_1=A_1\cos(\omega t+\alpha_1);\; x_2=A_2\cos(\omega t+\alpha_2)\;. \qquad (5.18)$$

Представим оба колебания в виде векторной диаграммы (рис. 5.3б). Очевидно, результирующий вектор $\vec{A}$ будет тоже вращаться с угловой скоростью ω, а его проекция

$$x=x_1+x_2\;.$$

Следовательно, результирующее колебание тоже гармоническое и имеет частоту ω. Амплитуда этого колебания равна модулю вектора $\vec{A}$, а начальная фаза – углу α между вектором $\vec{A}$ и осью x (рис. 5.3б):

$$x=A\cos\varphi=A\cos(\omega t+\alpha).$$



а б

Рис. 5.3

Найдем амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания. Из рис. 5..3б по теореме косинусов получаем, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\beta \, .$$

Так как $\beta=\pi-(\alpha_2-\alpha_1)$, то $\cos\beta = \cos[\pi-(\alpha_2-\alpha_1)]=-\cos(\alpha_2-\alpha_1)$,

где $\alpha_2-\alpha_1$ – **разность фаз колебаний**. Поэтому выражение **для результирующей амплитуды A** принимает вид:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \, . \qquad (5.19)$$

Рассмотрев на рис. 5.3б прямоугольный треугольник с гипотенузой A и катетами x и y, можно получить выражение для **начальной фазы α** результирующего колебания:

$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}} \, . \qquad (5.20)$$

5.4 Пружинный, физический и математический маятники

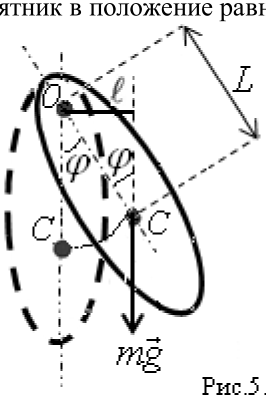
Пружинный маятник - *это твердое тело, соединенное с пружиной и совершающее колебания под действием силы упругости*. Очевидно, что действие силы упругости аналогично действию квазиупругой силы, рассмотренной в 5.1. Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0, определяемой выражением (5.5), и периодом T, который можно найти из (5.19а). Поэтому **циклическая частота и период колебаний пружинного маятника** соответственно равны:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}, \qquad (5.21)$$

где k – жесткость пружины, m – масса тела. **Дифференциальное и кинематическое уравнения колебаний пружинного маятника** имеют соответственно вид (5.6) и (5.7).

Физический маятник - *это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс* (рис. 5.4).

В положении равновесия линия, соединяющая ось вращения и центр масс, расположена вертикально. При колебаниях все точки маятника и эта линия отклоняются от положения равновесия на угол φ. При этом возникает момент M_z силы тяжести (уравнение (2.28)), который стремиться вернуть маятник в положение равновесия:



O - точка подвеса маятника

C - центр масс маятника

Ось вращения Z проходит через точку O и перпендикулярна плоскости рисунка.

Рис.5.4

$$\left|M_z\right| = F\ell \Rightarrow F = mg \, ; \, \ell = L \cdot \sin\varphi \, ,$$

где m - масса маятника, ℓ - плечо силы, L - расстояние от оси вращения до центра масс (точки C). Таким образом, *момент силы тяжести относительно оси вращения Z*

$$M_z = -mg \cdot L \cdot \sin\varphi \, . \qquad (5.22)$$

Знак "–" показывает, что отклонение маятника происходит в одну сторону (на рис. "против часовой стрелки"), а момент силы вращает в противоположную сторону (на рис. "по часовой стрелке").

Запишем закон динамики вращательного движения

$$M_Z = I_Z \varepsilon ,$$

где $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$ - угловое ускорение. Следовательно, для физического маятника закон динамики вращательного движения принимает вид:

$$-mg \cdot L \cdot sin\varphi = I_Z \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \qquad (5.22а)$$

Для малых углов отклонения (φ < 0,1 рад.), т.е. для малых колебаний $sin\,\varphi \approx \varphi$. Тогда

$$- mg \cdot L \cdot \varphi = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgL}{I_z}\varphi = 0 .$$

Обозначим
$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I_Z} . \qquad (5.23)$$

Следовательно, **дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника** имеет вид:

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0}, \qquad (5.24)$$

Это значит, что маятник совершает гармонические колебания, **кинематическое уравнение** которых:

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \,cos(\,\omega_0 t + \alpha\,)},$$

где φ - угол отклонения маятника от положения равновесия в момент времени t, φ_m - амплитуда колебаний, т.е. максимальный угол отклонения от положения равновесия. **Циклическую частоту ω_0** и **период T колебаний физического маятника** находим из (5.23):

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_z}} \;\; ; \;\; T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgL}}}, \qquad (5.25)$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси вращения, L - расстояние от оси вращения до центра масс (точки C).

Математический маятник – *это материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити.* Его можно рассматривать как частный случай физического маятника. Для материальной точки

$$I_z = mL^2 ,$$

где в случае математического маятника L - длина нити. Поэтому для такого маятника из (5.25) получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_z}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} \ .$$

Откуда следует, что **циклическая частота ω_0** и **период T колебаний математического маятника** соответственно равны:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \ ; \ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}. \qquad (5.26)$$

5.5 Затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания

Рассмотрим колебания, при которых кроме квазиупругой силы F_x=-kx действует и сила трения $F_{тр}$ (сопротивления). Во многих, практически важных случаях, действует сила вязкого трения, которая при небольших скоростях определяется формулой (2.14):

$$\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon} \ ,$$

где r - коэффициент сопротивления, υ -скорость частицы. Для одномерного колебания вдоль оси x второй закон Ньютона в проекциях на ось x имеет вид:

$$F_x + F_{тр} = ma_x \Rightarrow -kx - r\upsilon_x = ma_x \ ; \ \upsilon_x = \frac{dx}{dt} \ ; \ a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$-kx - r\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \, .$$

Обозначим:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} \ ; \ 2\beta = \frac{r}{m}}, \qquad (5.27)$$

где β - *коэффициент затухания*. Тогда

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}. \qquad (5.28)$$

Это уравнение называется **дифференциальным уравнением затухающих колебаний,** где ω_0 - *собственная частота колебаний,* т.е. частота, которую имела бы система в отсутствии сил трения.

Для затухающих колебаний физического маятника получится аналогичное уравнение. В этом случае в уравнение динамики вращательного движения маятника (5.22а) $M_Z = I_Z\varepsilon$ надо добавить момент силы трения $M_{тр}$=-$r_{вр}\omega$, где $r_{вр}$ – коэффициент сопротивления при вращательном движении. Тогда закон динамики вращательного движения примет вид: $M_Z + M_{тр} = I_Z \varepsilon$. Обозначив $2\beta = r_{вр}/I_Z$, получим **дифференциальным уравнением затухающих колебаний физического маятника**:

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0}, \qquad (5.28.а)$$

где φ - угол отклонения маятника (рис. 5.4).

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний (5.28, 5.28.а) необходимо рассмотреть для двух случаев.

1. $\beta < \omega_0$.

Прямой подстановкой можно убедиться, что в этом случае решение уравнения (5.28) имеет вид:

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)}, \qquad (5.29)$$

или $x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)$, где

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \qquad (5.30)$$

A_0 и α - постоянные.

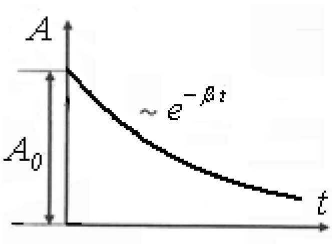


Рис. 5.5

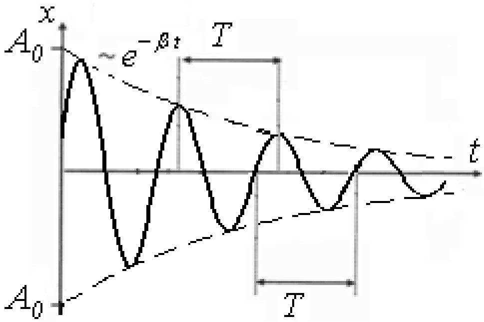


Рис. 5.6

Уравнение (5.29) - **кинематическое уравнение затухающих колебаний**; ω (уравнение(5.30)) - **циклическая частота затухающих колебаний**. Из (5.29) видно, что **амплитуда** A затухающих **колебаний в момент времени** t

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}, \qquad (5.31)$$

где A_0 – начальная амплитуда (в момент времени t=0). Из формулы видно, что с течением времени амплитуда уменьшается (рис. 5.5).

На рис. 5.6 показан график затухающих колебаний. Колебания со временем постепенно затухают, т.к. полная механическая энергия вследствие действия сил трения переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде тепла). Скорость затухания определяется величиной β. За время $\tau=1/\beta$ амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$A(\tau)=A_0e^{-\beta\tau}=A_0e^{-\beta\frac{1}{\beta}}=A_0e^{-1}=\frac{A_0}{e}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания** β - *величина обратная промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз*. В этом состоит физический смысл коэффициента затухания. Чем больше β, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний.

Отношение амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, называется **декрементом затухания**, а логарифм этой величины называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\boxed{\lambda=ln\frac{A(t)}{A(t+T)}}.$$

Подставляя соотношение (5.31), получим:

$$\lambda=ln\frac{A_0e^{-\beta\cdot t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}\Rightarrow\lambda=ln\frac{e^{-\beta\cdot t}}{e^{-\beta\cdot t}\cdot e^{-\beta\cdot T}}=lne^{\beta\cdot T}\Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda=\beta T}. \qquad (5.32)$$

Уравнение (5.32) выражает **связь между величинами** λ, β и T.

Из (5.32) следует: $$\beta=\frac{\lambda}{T}\ ;\ A(t)=A_0e^{-\beta t}=A_0e^{-\lambda\frac{t}{T}}.$$

Здесь ***T* – период затухающих колебаний**, который с учетом (5.30) равен:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}.$$

2. $\beta\geq\omega_0$.

В этом случае сила трения настолько большая, что процесс носит непериодический (апериодический) характер. В зависимости от начальных условий (начального отклонения, начальной скорости, ее направления) зависимость $x(t)$ будет иметь вид, приблизительно представленный на рис. 5.7 кривой 1 или 2.

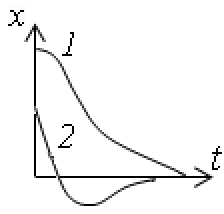


Рис. 5.7

5.6 Вынужденные колебания

Рассмотрим колебания, когда на систему, кроме квазиупругой силы и силы трения, действует и вынуждающая сила, меняющаяся по гармоническому закону с частотой Ω:

$$F = F_0 \cos \Omega \cdot t, \tag{5.33}$$

где F_0 - амплитуда вынуждающей силы. В этом случае установившиеся колебания будут иметь частоту, равную частоте вынуждающей силы и называются *вынужденными колебаниями.*

Кинематическое уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\boxed{x = A\cos(\Omega \cdot t + \alpha)}\ .$$

Можно показать, что **амплитуда** A и **начальная фаза** α вынужденных колебаний определяются соотношениями:

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}}, \tag{5.34}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}}. \tag{5.35}$$

где ω_0 - собственная частота колебаний системы, β - коэффициент затухания. Из уравнения (5.34) следует, что амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде F_0 вынуждающей силы и зависит от частоты этой силы Ω и коэффициента затухания β. На рис. (5.8) показана эта зависимость для двух различных значений β. Видно, что при некоторой частоте Ω_p амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум. *Явление резкого возрастания амплитуды колебаний при частоте вынуждающей силы Ω_p* называется **резонансом**, а частота Ω_p - *резонансной частотой.* Так как при Ω_p амплитуда $A(\Omega)$ имеет максимум, то в этой точке производная от A по Ω должна равняться нулю:

$$\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega_p} = 0\ .$$

Отсюда можно найти **резонансную частоту**:

$$\boxed{\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}\ . \tag{5.36}$$

Чем больше β, тем меньше Ω_p. При небольших β (малое затухание) $\Omega_p \approx \omega_0$, т.е. резонанс наступает тогда, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте ω_0.

Подставив (5.36) в (5.34), найдем **резонансную амплитуду** A_p:

$$\boxed{A_p = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}. \qquad (5.37)$$

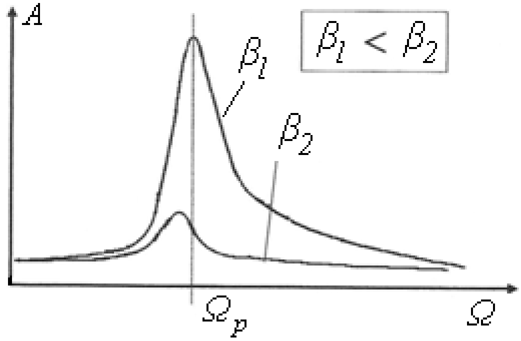


Рис. 5.8

5.7 Волны. Волны поперечные и продольные. Волновая поверхность, фронт волны. Уравнение плоской волны, длина волны, волновое число. Фазовая скорость

Если в среде возбудить колебания частиц, то вследствие взаимодействия между частицами, эти колебания будут передаваться от частицы к частице. *Процесс распространения колебаний в пространстве называется* **волной**. Волны, распространяющиеся в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной) называются *упругими*.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около положения равновесия. Волна называется *поперечной,* если колебания частиц перпендикулярны направлению распространения волны. В *продольной волне* частицы колеблются вдоль направления распространения волны. В жидкостях и газах возникают только продольные волны, в твердых телах и продольные, и поперечные.

Под частотой ν и периодом T волны понимают соответственно частоту и период колебаний частиц среды. В частности звук – это упругие волны с частотой от 16Гц до 20кГц.

На рис. 5.9 показан процесс распространения поперечных колебаний вдоль цепочки частиц, вызванный колебанием первой из этих частиц (источник волны - первая частица). За время $T/4$ (T - период колебаний) первая частица A из положения равновесия сместиться на расстояние, равное амплитуде колебаний. К концу этого промежутка времени в колебания вовлекутся все частицы вплоть до той, которая обозначена *B* (рис. 5.9а). Таким образом, частица *B* начнет колебания через время $T/4$ после начала колебаний первой частицы. Через время $T/2$ первая частица вернется в положение равновесия. Для частицы *B* время от начала ее колебаний составит $T/4$ и, следовательно, она будет в положении максимального отклонения. При этом в колебания вовлекутся все частицы до той, которая обозначена *C* (рис. 5.9б). Частица *C* начнет совершать колебания через время $T/2$ после начала колебаний частицы *A*. Рассматривая процесс дальше, увидим, что через время $t = T$ колебания дойдут до частицы *E*.

На рис. 5.9 показано распространение колебаний вдоль оси *x*. В действительности в колебания вовлекаются частицы расположенные в некотором объеме. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени *t*, называется *волновым фронтом.* Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Очевидно, что отклонения точек волновой поверхности от положения равновесия одинаковые, т.к. фаза колебаний этих точек одна и та же. Волновых поверхностей можно выделить сколь угодно много.

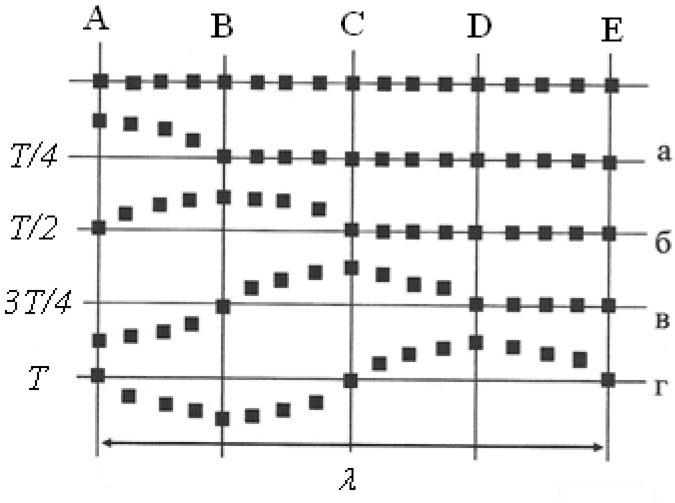


Рис. 5.9

По форме волновой поверхности различают *плоские волны* (волновая поверхность - плоскость), *сферические волны* (волновая поверхность - сфера) и т.п.

Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц, называется **длиной волны**. Так за время

$t = T$ волна проходит расстояние равное длине волны λ, то **скорость распространения волны**

$$\boxed{\upsilon=\lambda/T=\lambda\nu}\ . \qquad (5.38)$$

Уравнением волны называется выражение, которое дает возможность рассчитать смещения колеблющихся частиц среды как функцию их координат и времени. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси y (рис. 5.10). Плоскость 1, расположенная в начале координат, является источником волн. Т.к. волна плоская, то отклонения x всех точек источника от положения равновесия в некоторый момент времени t одинаковы:

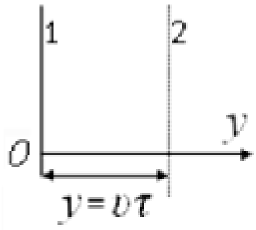


Рис. 5.10

$$x=A\cos(\omega t+\alpha). \qquad (5.39)$$

Плоскость 2 - некоторая волновая поверхность, поэтому отклонения точек этой поверхности от положения равновесия равны друг другу. Следовательно, для этой поверхности x зависит только от y и t (т.е. $x(y,t)$). Найдем эту зависимость. Из объяснений к рис. 5.9 следует, что точки волновой поверхности (плоскость 2) колеблются с той же частотой, что и точки источника, но начинают колебания на некоторое время τ позже. Если t - это время колебаний точек источника, то время колебаний точек волновой поверхности равно t-τ. Из сказанного и уравнения (5.39) получим:

$$x(y,t) = A\cos\left[\omega(t-\tau)+\alpha\right],$$

где τ- время, за которое волна дошла от источника 1 до плоскости 2. Возвращаясь к рисункам (5.9) и (5.10), можно найти τ:

$$\tau = \frac{y}{\upsilon}.$$

Следовательно,

$$\boxed{x(y,t) = A\cos\left[\omega(t-\frac{y}{\upsilon})+\alpha\right]}. \qquad (5.40)$$

Это есть **уравнение плоской волны**, *распространяющейся вдоль положительного направления оси* y, (если волна распространяется в противоположную сторону, то в уравнении (5.40) надо y заменить на $-y$).

Преобразуем уравнение (5.40):

$$\frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{T\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Эту величину называют *волновым числом* k:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}}. \qquad (5.41)$$

В общем случае используют *волновой вектор* $\vec{k}$ - это вектор, направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны и числено равный $2\pi/\lambda$.Подставим (5.41) в (5.40):

$$\boxed{x = A\cos(\omega t - ky + \alpha)}. \qquad (5.42)$$

Это другая форма записи **уравнения плоской волны**.

Отклонение от положения равновесия $x(y,t)$ функция двух переменных. Поэтому удобно строить график этой функции либо для некоторой фиксированной координаты y_0 $(x(y_0,t))$, либо для некоторого фиксированного момента времени t_0 $(x(y,t_0))$. В первом случае это будет график колебаний для частиц с координатой y_0 (см. раздел 5.1). Во втором случае получим график, показывающий отклонение от положения равновесия частиц с разными координатами y в некоторый момент времени t_0, (рис. 5.11). Это будет *график волны*. Рассмотрим некоторую волновую поверхность (соответствующую, например, гребню волны). Фаза колебаний частиц этой поверхности

$$\varphi_0 = \omega t - ky + \alpha. \qquad (5.43)$$

Ясно, что данное значение фазы с изменением времени t будет оставаться неизменным ($\varphi_0 = const$) с распространением колебаний вдоль оси y. Т.е. волновая поверхность, частицы которой имеют фазу φ_0, движется вдоль оси y (подобно движению “круга” на воде от брошенного камня). Скорость движения волновой поверхности называется *фазовой скоростью* $\upsilon_ф$. Для того чтобы найти $\upsilon_ф$, продифференцируем уравнение (5.43):

$$0 = \omega \cdot dt - kdy \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Т.к.
$$\upsilon = \frac{dy}{dt},$$

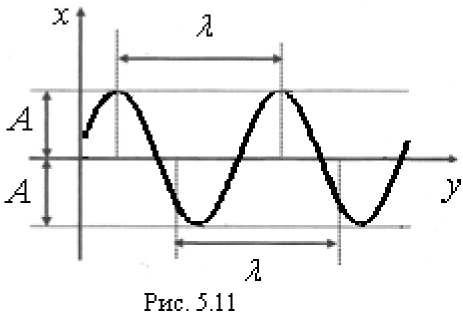


Рис. 5.11

то
$$\boxed{\upsilon_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}. \qquad (5.44)$$

Отсюда видно, что для рассматриваемого случая монохроматической волны скорость волны υ и фазовая скорость $\upsilon_ф$ совпадают (см. уравнения (5.41) и (5.44)).

6 Принцип относительности Галилея. Элементы специальной теории относительности

6.1 Принцип относительности Галилея

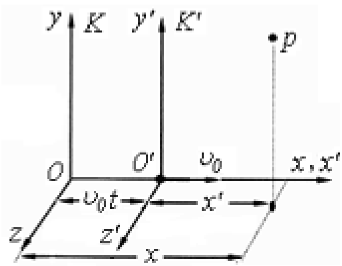


Рис. 6.1

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (рис. 6.1). Систему K будем считать неподвижной, систему K' - подвижной. Ее скорость $\vec{\upsilon}_0$ относительно неподвижной системы K постоянна и направлена вдоль оси x. Координатные оси систем выберем так, что бы они были параллельны друг другу; а в начальный момент времени начала координат систем совпадали. Такое расположение осей выбрано для упрощения вида нижеприведенных уравнений. (Результаты, которые будут получены в дальнейшем, можно обобщить для любого взаимного расположения систем K и K').

Найдем связь координат частицы P в системе K с ее координатами в системе K'. Из рис. (6.1) видно:

$$\boxed{x=x'+\upsilon_0 t;\ y=y';\ z=z';\ t=t'}. \qquad (6.1)$$

Последнее из равенств (6.1) означает, что длительность некоторого события в системах K и K' одинакова. Уравнения (6.1) называются **преобразованиями Галилея**.

Найдем связь между скоростями $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$ частицы P в системах отсчета K и K'. Проекции этих скоростей на ось x в системах K и K' соответственно равны:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \ \upsilon_x' = \frac{dx'}{dt}.$$

Продифференцируем первое выражение из (6.1), получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_x' + \upsilon_0.$$

Аналогично $\upsilon_y = \upsilon_y' \ ; \ \upsilon_z = \upsilon_z'$.

После преобразований получим:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0}, \qquad (6.2)$$

где $\vec{\upsilon}$ - скорость частицы относительно неподвижной системы *K,* $\vec{\upsilon}'$ - скорость частицы относительно подвижной системы *K′,* $\vec{\upsilon}_0$ - скорость подвижной системы K' относительно неподвижной системы *K*.

Соотношение (6.2) – это **закон сложения скоростей в классической механике**.

Найдем ускорение точки в системах K и K':

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}; \ \ \vec{a}' = \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt}.$$

После дифференцирования (6.2) получим (учитывая, что $\vec{\upsilon}_0 = const \Rightarrow d\vec{\upsilon}_0 / dt = 0$):

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}'}. \qquad (6.3)$$

Отсюда следует, что ускорение точки во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, одинаково. В частности, если одна из систем инерциальная (т.е. при отсутствии сил $\vec{a} = 0$), то и остальные системы будут инерциальными (т.е. $\vec{a}' = 0$).

Второй закон Ньютона в системах K и K' будет иметь вид:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \ \ \vec{F}' = m\vec{a}'. \qquad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует, что силы, действующие в системах K и K' тоже одинаковы. Следовательно, *законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.* Это утверждение носит название **принцип относительности Галилея**. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета эквивалентны: все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, поэтому никакими механическими опытами нельзя установить, что данная система отсчета покоится или равномерно и прямолинейно движется. Величины, имеющие одно и то же числовое значение во всех системах отсчета, называются инвариантными (например, масса). В этом смысле говорят, что уравнения динамики инварианты по отношению к преобразованиям координат от одной инерциальной системы отсчета к другой**.**

6.2 Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца и следствия из них

Специальная теория относительности Эйнштейна (релятивистская механика) основана на двух постулатах (утверждениях), которые носят названия: **принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света**

Принцип относительности Эйнштейна является распространением принципа относительности Галилея (механического принцип относительности) на все физические явления. Согласно этому принципу **все законы природы одинаковы для всех инерциальных системах отсчета**. Следовательно, уравнения, выражающие законы природы, инварианты по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Принцип постоянства скорости света утверждает, что *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источников и приёмников света*

Возьмём две инерциальных системы отсчета, аналогичные тем, что рассмотрены на рис 6.1: система K неподвижная, система K' движется относительно системы K со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Для того чтобы выполнялись постулаты Эйнштейна, переход от координат и времени, отсчитанных в системе K', к координатам и времени, отсчитанных в системе K, должен выполнятся согласно следующим соотношениям:

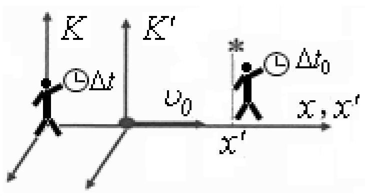


Рис. 6.2

$$\boxed{x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + x' \upsilon_0 / c^2}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}}}. \qquad (6.5)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$м/с - скорость света в вакууме. Уравнения (6.5) называются **преобразованиями Лоренца**. При скоростях $\upsilon_0 << c$ величину υ_0 / c можно принять равной нулю. В таком случае преобразования Лоренца (6.5) переходят в преобразования Галилея (6.1). Следовательно, преобразования Галилея можно применять только при малых скоростях по сравнению со скоростью света (это же утверждение относится и ко всей нерелятивистской физике).

Рассмотрим следствия из преобразований Лоренца.

I. **Промежуток времени между событиями в различных системах отсчёта.** Пусть в системе отсчета K' (рис. 6.2), движущейся относительно системы K со скоростью υ_0, в одной и той же точке с координатой x' в моменты времени t'_1 и t'_2 происходят два каких–то события (например, две вспышки света). В системе K' промежуток времени между этими событиями $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$.

Эти же события относительно системы отсчета K происходят соответственно в моменты времени t_1 и t_2, которые можно выразить из преобразований Лоренца (6.5):

$$t_1 = \frac{t'_1 + x'\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}\ ,\ t_2 = \frac{t'_2 + x'\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}. \qquad (6.6)$$

(Здесь учтено, что событие происходит в одной же точке с координатой x', т.е. x'=const). Промежуток времени между этими событиями в системе K:

$$\Delta t = t_2 - t_1\ . \qquad (6.7)$$

Подставим в (6.7) выражения (6.6):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}}. \qquad (6.8)$$

Здесь промежуток времени Δt_0 - это *собственное время*, измеренное по часам системы K', движущимся со скоростью υ_0 относительно системы K. Из (6.8) следует, что промежуток времени Δt, измеренный по неподвижным часам системы K, всегда больше собственного времени ($\Delta t > \Delta t_0$).

II. Длина тел в разных системах отсчета. Пусть имеется стержень, расположенный вдоль оси x и движущийся со скоростью υ_0. Аналогично пункту I можно показать, что длина стержня ℓ_0, измеренная в системе K', относительно которой он покоится (т.е. длина покоящегося стержня) и длина стержня ℓ в системе K (т.е. длина, измеренная в системе, относительно которой он движется) разная. Повторяя рассуждения пункта I, получим:

$$\boxed{\ell = \ell_0\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}\ . \qquad (6.9)$$

Видно, что $\ell < \ell_0$, Этот результат называется *лоренцевым сокращением*.

III. Сложение скоростей. Для упрощения формул будем считать, что скорость частицы параллельна оси *x*. Тогда модули скоростей частиц в системах *K* и *K′* соответственно равны:

$$\upsilon = \upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \ \upsilon' = \upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Учитывая преобразования (6.5) можно для рассматриваемого случая получить **релятивистский закон сложения скоростей**:

$$\boxed{\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1 + \upsilon' \upsilon_0 / c^2}}. \tag{6.10}$$

В случае малых скоростей $\upsilon_0 << c$ формула (6.10) переходит в закон сложения скоростей классической (нерелятивистской) механики (6.2).

Пусть скорость $\upsilon' = c$. Из (6.10) получим:

$$\upsilon = \frac{c + \upsilon_0}{1 + c\,\upsilon_0 / c^2} = c,$$

что согласуется со вторым постулатом Эйнштейна.

6.3 Основные понятия релятивистской динамики

Релятивистская динамика изучает движение частиц с большими скоростями, т.е. соизмеримыми со скоростью света.

Релятивистской импульс частицы

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}}, \tag{6.11}$$

где υ - скорость частицы, *m* – масса частицы, не зависящая от ее скорости, инвариантная по отношению к выбору системы отсчета. (До недавнего времени массу *m* называли массой покоя и обозначали m_0.) Множитель в (6.11) $m\Big/\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$ называли релятивистской массой или массой движения. От понятия релятивистской массы, зависящей от скорости, сейчас отказываются.)

Релятивистское выражение **второго закона Ньютона** имеет вид:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}\right)}. \tag{6.12}$$

Известно, что работа силы равна приращению энергии частицы (см. раздел 3), т.е.

$$dA = \vec{F} d\vec{\ell} = dE. \tag{6.13}$$

Подставив в (6.13) уравнение (6.12) и проинтегрировав результат, можно получить энергию свободной частицы

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}, \qquad (6.14)$$

которую **называют полной энергией**.

Если частица покоится ($\upsilon = 0$), получим **энергию покоя *E*₀**:

$$\boxed{E_0 = mc^2}. \qquad (6.15)$$

Энергия покоя, также как и масса m – инвариант в отличие от полной энергии, которая зависит от системы отсчета. Энергия покоя тела является его внутренней энергий. Она состоит из суммы энергий покоя всех частиц тела, кинетической энергии всех частиц и потенциальной энергии их взаимодействия. В нее не входит потенциальная энергия во внешнем силовом поле. Энергия покоя тела не равна сумме энергий покоя частиц, из которых состоит тело. Это же относится и к массе (в прежней терминологии - массе покоя). Т.е. в релятивистской механике не выполняется закон сохранения массы. Например, масса покоя атомного ядра меньше суммы масс покоя частиц, входящих в ядро. Свойство аддитивности массы выполняется лишь в пределе, когда $\upsilon \ll c$.

Кинетическая энергия $E_к$ равна *разности полной энергии и энергии покоя*:

$$\boxed{E_к = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right)}. \qquad (6.16)$$

При $\upsilon = c$ подкоренное выражение в знаменателе в уравнениях релятивистской динамики стремится к бесконечности. Если $m \neq 0$, то эти уравнения теряют смысл. Это означает, что частица с массой $m \neq 0$ не может двигаться со скоростью света.

Все вышеприведенные уравнения при $\upsilon \ll c$ переходят в уравнения классической физики.

Исключив из (6.11) и (6.14) скорость υ, получим **связь между энергией и импульсом**:

$$\boxed{E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}}. \qquad (6.17)$$

Из этих же уравнений следует:

$$\vec{p} = E\vec{\upsilon}/c^2 . \qquad (6.18)$$

При $m = 0$ из (6.17) получим **связь энергии и импульса для частицы с нулевой массой** (безмассовая частица)

$$\boxed{E = cp} . \qquad (6.19)$$

Это соотношение согласуется с (6.18) если, $\upsilon=c$. Следовательно, частица с массой, равной нулю, всегда движется со скоростью света. Импульс таких частиц может быть найден из соотношения (6.19). В частности такой частицей является квант света - фотон.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНЕ А
(математическое)

I Основные сведения из алгебры, геометрии и тригонометрии

I.1 Квадратное уравнение и его корни.

$ax^2+bx+c=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $D=b^2-4ac$.

I.2 Некоторые геометрические характеристики окружности.

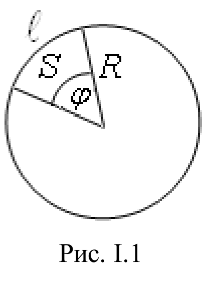


Рис. I.1

Длина окружности: $L=2\pi\cdot R=\pi\cdot d$ (d – диаметр)

Площадь круга: $S=\pi R^2=\dfrac{\pi d^2}{4}$.

Длина дуги окружности (рис. 1): $\ell=\varphi\cdot R$.

Площадь сектора (рис. 1): $S=\dfrac{\varphi\cdot R^2}{2}$.

Угол φ выражается в радианах.

I.3 Некоторые геометрические характеристики сферы.

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$. *Объем шара*: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$.

I.4 Приращение величины x: $\Delta x = x_2 - x_1$,

т.е. разность между конечным и начальным значениями x.

Убыль величины x: $-\Delta x = x_1 - x_2$.

I.5 Сумма значений величины a:

$$a_1 + a_2 + ... + a_i + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

где знак $\sum\limits_{i=1}^{n}$ - есть сумма по i от 1 до n.

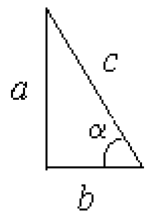


Рис. I.2

I.6 Тригонометрические функции (рис. I.2)

$sin\alpha = \frac{a}{c}$ - отношение противолежащего катета к гипотенузе;

$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$ - отношение прилежащего катета к гипотенузе;

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ - отношение противолежащего катета к прилежащему;

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}, \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$$

I.7 Значения тригонометрических функций для некоторых углов
$sin0^0 = 0$; $sin90^0 = 1$; $sin180^0 = 0$; $cos0^0 = 1$; $cos90^0 = 0$; $cos180^0 = -1$.
I.8 Соотношения между тригонометрическими функциями.

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$
$$sin(-\alpha) = -sin\alpha \;; cos(-\alpha) = cos\alpha \,;$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha \quad ; \quad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha \,.$$

$cos(90^0 - \alpha) = sin\alpha$; $cos(90^0 + \alpha) = -sin\alpha$; $cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha$; $cos(180^0 + \alpha) = -cos\alpha$;
$cos(270^0 - \alpha) = -sin\alpha$; $cos(270^0 + \alpha) = -sin\alpha$;
$cos(360^0 - \alpha) = cos\alpha$; $cos(360^0 + \alpha) = cos\alpha$.

1.9 Теорема косинусов.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

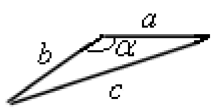


Рис. I.3

II. Основные сведения из векторной алгебры.

II.1. Векторы – величины, характеризующиеся численным значением, направлением и складывающиеся по правилу параллелограмма (треугольника, многоугольника). Модуль вектора - численное значение вектора: $|\vec{a}| = a$.

II.2. Сложение векторов (рис. II.1): $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;
$c = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha)^{1/2}$.

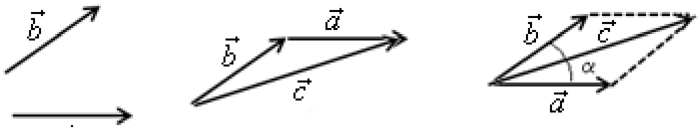


Рис. II.1

II.3 Вычитание векторов (рис. II.2): $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

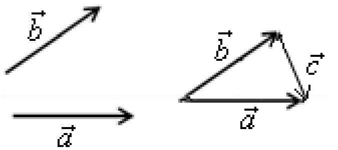


Рис. II.2

II.4 Умножение вектора на скаляр.

$\vec{b} = c \cdot \vec{a}$. $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $c > 0$; $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}$, если $c < 0$.

$\vec{a} = a\vec{e}_a$; $\vec{e}_a$ - единичный вектор или орт вектора $\vec{a}$, который по направлению совпадает с вектором $\vec{a}$. $\vec{e}_a \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|\vec{e}_a| = 1$ (рис. II.3)

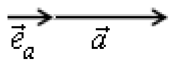


Рис. II.3

II.5 $\odot\vec{a}$ - вектор $\vec{a}$ направлен перпен
"нам"

$\otimes\vec{a}$ - вектор $\vec{a}$ направлен перпенд
"нас".

II.6 Разложение вектора на составляюи

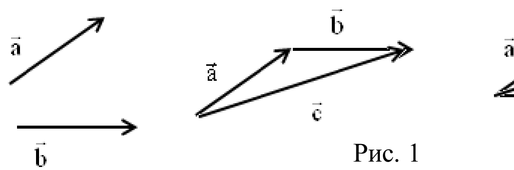
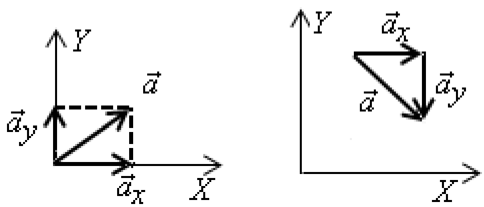


Рис. 1



В общем случае:
$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$,

Рис. II.4

где $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ - составляющие вектора $\vec{a}$ вдоль осей координат x, y, z.

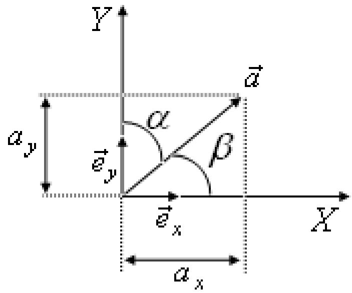


Рис. II.5

Составляющие вектора являются векторами.

II.7 Проекции вектора.

Проекции вектора на оси координат (рис. II.5):

$$a_x = a\cos\alpha;\ a_y = a\cos\beta;$$

a_x и a_y - проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси x и y; α и β - углы между вектором $\vec{a}$ и положительными полуосями.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y;\ a = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}.$$

В общем случае:

$$a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2},$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - единичные векторы (орты) координаты осей x, y, z; $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$.

II.8 Скалярное произведение двух векторов (рис. II.6).

$$c = \vec{a}\vec{b} = abcos\alpha = a_b b = ab_a$$

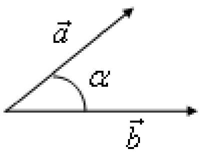


Рис. II.6

где a_b - проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

b_a - проекции вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ - скалярное произведение двух векторов коммутативно, т. е. не зависит от порядка расположения сомножителей.

$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\vec{a} = aa\ cos\ 0 = a^2$, т.е. квадрат вектора равен квадрату его модуля.

II.9 Векторное произведение двух векторов (рис. II.7).

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \vec{a}\times\vec{b}.$$

Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направление вектора $\vec{c}$ (векторного произведения) определяют по правилу правого винта (буравчика): буравчик располагают перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вращают от первого сомножителя (вектор $\vec{a}$) ко второму (вектор $\vec{b}$) по кратчайшему пути. Поступательное движение буравчика совпадает с направлением вектора $\vec{c}$.

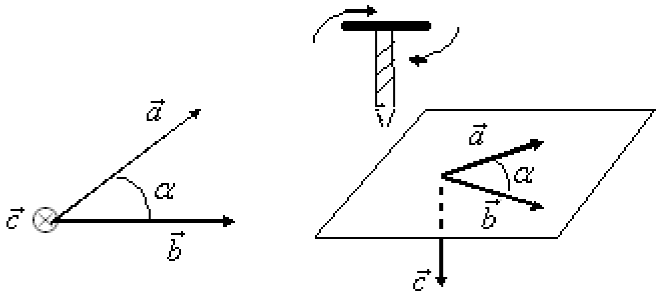


Рис. II.7

III Основные сведения о производных

III.1 Производная функции $y = f(x)$ по переменной x (рис. III.1).

Δx и Δy - приращения аргумента x и функции y.

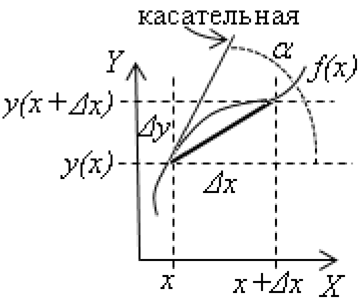


Рис. III.1

$\Delta x \to 0$ обозначают dx – бесконечно малое приращение аргумента, $\Delta y \to 0$ обозначают dy - бесконечно малое приращение функции.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла наклона секущей.

Производная от y по x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ секущая переходит в касательную. Следовательно, графически производная равна тангенсу угла наклона касательной: $dy/dx = tg\alpha$.

Для дальнейшего отметим, что в физике производные не принято обозначать значком «штрих: y'». Есть специальные обозначения

только для функции времени. Если $z = f(t)$, то производная по времени обозначается следующим образом: $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}\left(= z'\right)$.

Вторая производная: $\ddot{z} = \dfrac{d^2 z}{dt^2}\left(= z''\right)$.

III.2 Производные: постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы (разности), произведения, частного.

А. Производная от постоянной величины равна 0, т.е. если $y = c$, где $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

Б. Постоянный множитель можно вынести за знак производной, т.е. если $y = cu(x)$, где $c = const$, то $y' = c \cdot u'(x)$.

В. Производная от суммы (разности) функций равна соответствующей сумме (разности) производных этих функций, т.е. если

$$y = u(x) + v(x) + w(x) \text{, то } \quad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Г. Производная от произведения двух функций. Если $y = u(x) \cdot v(x)$, то $\quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Д. Производная от частного. Если

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \text{, то } \quad y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} .$$

III.3. Некоторые табличные производные.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad , \quad (e^x)' = e^x \quad , \quad (a^x)' = a^x \ ln\ a,$$

$$(ln\ x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad (cos\ x)' = -sin\,x \quad , \quad (sin\,x)' = cos\,x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x} \quad , \quad (ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}.$$

Если $a = const$, то $(cosax)' = -a\,sinax$, $(sinax)' = a\,cosax$.

III.3 Частная производная.

Если z есть функция двух переменных x и y, то частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y есть постоянная величина. Аналогично определяется частная производная по y.

Если $z = x^2 y^3$ *, то* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2$.

III.4. Дифференциал функции dy.

Если $y = f(x)$, то $dy = y'dx$, где dy - дифференциал функции $y = f(x)$ – т.е. бесконечно малое приращение функции при бесконечно малом приращение аргумента.

IV. Основные сведения об интегральном исчислении.

IV.1 Интеграл (Рис. IV.1)

$S \approx \sum y_i \Delta x_i$ - площадь ограничения кривой $y(x)$ на участке от a до b.

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum y_i \Delta x_i \Rightarrow$$

это есть интеграл $S = \int_a^b y(x)dx$.

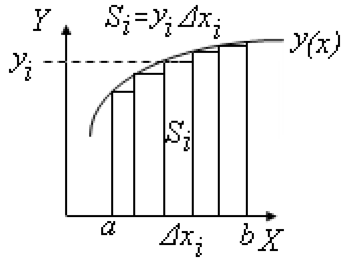


Рис. IV.1

Первообразная $F(x)$ для функции $y(x)$: $y(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$.

Определенный интеграл: $\int_a^b y(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример: $\int_a^b \dfrac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \dfrac{b}{a}$.

IV.2 Некоторые табличные интегралы.

$\int dx = x + const$; $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + const$;

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + const$; где $n \neq -1$;

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + const$; $\int e^x dx = e^x + const$;

$\int \cos x \cdot dx = \sin x + const$; $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + const$.

IV.2. Некоторые правила интегрирования.

Интеграл от суммы (разности) функции равен сумме (разности) интегралов, т.е.

$$\cdot \int \left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) \right] \cdot dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx$, где c - постоянная величина.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы		Название буквы	Буквы		Название буквы
печатные	рукописные		печатные	рукописные	
Α α	Α α	альфа	Ν ν	Ν ν	ню
Β β	Β β	бета	Ξ ξ	Ξ ξ	кси
Γ γ	Γ γ	гамма	Ο ο	Ο ο	омикрон
Δ δ	Δ δ	дельта	Π π	Π π	пи
Ε ε	Ε ε	эпсилон	Ρ ϱ	Ρ ϱ	ро
Ζ ζ	Ζ ζ	дзэта	Σ σ	Σ σς	сигма
Η η	Η η	эта	Τ τ	Τ τ	тау
Θ ϑ	Θ ϑ	тэта	Υ υ	Υ υ	ипсилон
Ι ι	Ι ι	йота	Φ φ	Φ φ	фи
Κ ϰ	Κ ϰ	каппа	Χ χ	Χ χ	хи
Λ λ	Λ λ	ламбда	Ψ ψ	Ψ ψ	пси
Μ μ	Μ μ	мю	Ω ω	Ω ω	омега

ПРИЛОЖЕНИЕ С
(справочное)

МНОЖИТЕЛИ, ПРИСТАВКИ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ
(жирным текстом выделены часто употребляемые множители)

Множитель	Приставка	Обозначение	
		Русское	Между-народное
10^{24}	иотта	И	Y
10^{21}	зетта	З	Z
10^{18}	экста	Э	E
10^{15}	пета	П	P
10^{12}	тера	Т	T
10^{9}	**гига**	**Г**	**G**
10^{6}	**мега**	**М**	**M**
10^{3}	**кило**	**к**	**к**
10^{2}	**гекто**	**г**	**h**
10^{1}	дека	да	da
10^{-1}	**деци**	**д**	**d**
10^{-2}	**санти**	**с**	**c**
10^{-3}	**милли**	**м**	**m**
10^{-6}	**микро**	**мк**	**μ**
10^{-9}	**нано**	**н**	**n**
10^{-12}	**пико**	**п**	**p**
10^{-15}	**фемто**	**ф**	**f**
10^{-18}	атто	а	a
10^{-21}	зепто	з	z
10^{-24}	иокто	и	y

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс физики: Учеб. В 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М.: Лань, 2016.- 352с.

2. Трофимова Т.И. Физика. Учебник для бакалавров. М.: Академия. 2012. -320с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. Учеб. Пособие для студ. Вузов. М.: Академия. 2015. -720с.
4. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спирин Г.Г. Курс общей физики. Книга 1: Механика. Учебник для бакалавров. М.: Юрайт. 2015. -353с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ

Конспект лекций по физике для бакалавров

Составители:
ПОДОЛЬСКИЙ Вадим Александрович
СИВКОВА Ольга Дмитриевна
КОНЯХИН Василий Петрович

Изд. 2-е, исправленное

Редактор Туманова Е.М.
Подписано к печати . Формат 60x80$^{1/16}$
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл.печ.л. 5,05. Уч.-изд.л. 4,1.
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»,
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл.,9
Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы,8