СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть 2

*Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов*

**Минск
«Вышэйшая школа»
1991**

ББК 22.11я73
С23
УДК 51(075.8)

Авторы: А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

С23 **Сборник** индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2/А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко.— Мн.: Выш. шк., 1991.— 352 с.: ил.

ISBN 5-339-00327-2.

Книга является составной частью комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий по следующим разделам: комплексные числа, неопределенные и определенные интегралы, функции нескольких переменных и обыкновенные дифференциальные уравнения.

Для студентов инженерно-технических специальных вузов.

$$С\frac{1602010000-132}{М304(03)-91}11-90$$

ББК 22.11я73

ISBN 5-339-00327-2 (ч. 2)
ISBN 5-339-00483-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является второй частью комплекса учебных пособий под общим названием «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике». Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предполагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Настоящий комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических занятий, самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

Во второй части «Сборника индивидуальных заданий по высшей математике» содержится материал по комплексным числам, неопределенным и определенным интегралам, функциям нескольких переменных и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Структура второй части комплекса аналогична структуре первой его части. Нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию в первой части.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Московского энергетического института, возглавляемой членом-корреспондентом АН СССР, доктором физико-математических наук, профессором С. И. Похожаевым, и заведующему кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также сотрудникам этих кафедр кандидатам физико-математических наук, доцентам Л. А. Кузнецову, П. А. Шмелеву, А. А. Карпуку — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров отмечается символом ▶, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 минут во время этих занятий. Наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-9.1 означает, что АЗ относится к девятой главе и является первым по счету. Во второй части пособия содержится 26 АЗ и 12 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-9.2 означает, что ИДЗ относится к девятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-9.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-9.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16.

При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-9.2:1.2; 2.4; 3.6; 4.1 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-9.2 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4, третью — из варианта 6 и четвертую — из варианта 1. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых втузов (Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Белорусский политехнических институт, Дальневосточный политехнический институт и др.) показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее в себя основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15—20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях (которые созданы, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства) организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемый блочно-цикловой (модульно-цикловой) метод оценки знаний и навыков студентов, состоящий в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 3—5 блоков (модулей), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят два-три теоретических вопроса и 5—6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Подобный метод внедряется, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства.

В заключение отметим, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для одаренных и отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа; $i = \sqrt{-1}$ — так называемая *мнимая единица**, т. е. число, квадрат которого равен -1 (корень уравнения $z^2 + 1 = 0$); x называется *действительной (вещественной) частью комплексного числа*, а y — *мнимой* его *частью*. Для этих чисел приняты обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Если $y = 0$, то $z = x \in \mathbf{R}$; если же $x = 0$, то число $z = iy$ называется *чисто мнимым*. С геометрической точки зрения, всякому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $M(x, y)$ плоскости (или вектор $\overrightarrow{OM}$) и, наоборот, всякой точке $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$. Между множествами комплексных чисел и точек плоскости Oxy установлено взаимно однозначное соответствие, поэтому данная плоскость называется *комплексной* и обозначается символом (z) (рис. 7.1).

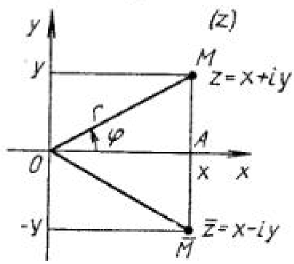


Рис. 7.1

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой **C**. Отметим, что $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Точки, соответствующие действительным числам $z = x$, расположены на оси Ox, которая называется *действительной осью комплексной плоскости*, а точки, соответствующие мнимым числам $z = iy$, — на оси Oy, которую называют *мнимой осью комплексной плоскости*.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа вида $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными* (см. рис. 7.1).

Если $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$ — два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(последняя операция имеет место при условии, что $z_2 \neq 0$). В результате получаем, вообще говоря, комплексные числа. Указанные операции над комплексными числами обладают всеми свойствами соот-

* В технической литературе для мнимой единицы используется также обозначение $j = \sqrt{-1}$.

ветствующих операций над действительными числами, т. е. сложение и умножение коммутативны, ассоциативны, связаны отношением дистрибутивности и для них существуют обратные операции вычитания и деления (кроме деления на нуль).

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 + i$. Найти

$$z = \frac{z_1 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}.$$

▶ Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_3 = (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i,$$
$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(3 - 4i) = (6 + 12) + i(9 - 8) = 18 + i,$$
$$z_2^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i,$$
$$z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 = 2 + 3i + 18 + i - 7 - 24i = 13 - 20i.$$

Тогда

$$z = \frac{13 - 20i}{3 + 4i} = \frac{(13 - 20i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(39 - 80) + i(-60 - 52)}{25} =$$
$$= -\frac{41}{25} - i\,\frac{112}{25}. \blacktriangleleft$$

Число $r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{z\bar{z}}$ называется *модулем комплексного числа* z. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Очевидно, что для всякого комплексного числа $z = x + iy$ (см. рис. 7.1) справедливы формулы:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = x/r, \ \sin\varphi = y/r, \tag{7.1}$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ или $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7.2}$$

или в показательной форме

$$z = re^{i\varphi} \tag{7.3}$$

(так как по формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$). Формулы (7.2) и (7.3) целесообразно применять при умножении комплексных чисел, а также возведении их в степень.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то справедливы формулы:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \ (z_2 \neq 0),$$
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \tag{7.4}$$

Формула (7.4) называется *формулой Муавра.*

Для извлечения корня n-й степени ($n > 1$, $n \in \mathbf{Z}$) из комплексного числа в форме (7.2) используется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n}\,(k=\overline{0,\ n-1}). \tag{7.5}$$

(Под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.)

Пример 2. Вычислить $(1+i)^{12}$.

▶ Представим число $z=1+i$ в тригонометрической или показательной форме, используя формулы (7.1):

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \cos\varphi=1/\sqrt{2},\ \sin\varphi=1/\sqrt{2},\ \varphi=\pi/4,$$
$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\pi i/4}.$$

Тогда по формуле Муавра

$$z^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2^{12}}e^{3\pi i}=$$
$$=64\cdot(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-64. ◀$$

Пример 3. Найти корни уравнения $z^6+1=0$.

▶ Данное уравнение можно переписать так: $z^6=-1$ или $z=\sqrt[6]{-1}$. Согласно формулам (7.1), число -1 в тригонометрической форме имеет вид:

$$-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

С учетом формулы (7.3), корни исходного уравнения:

$$z_k=\sqrt[6]{-1}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)=e^{i(\varphi+2\pi k)/n},$$

где $k=\overline{0,\ 5}$. Придавая k последовательно значения 0,1, ..., 5, находим все шесть возможных корней данного уравнения $z^6+1=0$:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\pi i/6},$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i=e^{\pi i/2},$$

$$z_2=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{-5\pi i/6},$$

$$z_3=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{7\pi i/6}=e^{-5\pi i/6},$$

$$z_4=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i=e^{-\pi i/2}=e^{3\pi i/2},$$

$$z_5=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{11\pi i/6}=e^{-\pi i/6}. ◀$$

Пример 4. Найти корни уравнения $z^3-1+i\sqrt{3}=0$.

▶ Так как $z^3=1-i\sqrt{3}=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то по формуле (7.5)

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3} - i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3}\right) \quad (k = \overline{0,2}).$$

Следовательно, корнями данного уравнения являются:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} - i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} - i\sin\frac{13\pi}{9}\right). \blacktriangleleft$$

АЗ-7.1

1. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2)z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$. (*Ответ:* $54 + 19i$).

2. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = ((z_1 + z_3)z_2)/z_3$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{38}{5} + \frac{41}{5}i.\right)$

3. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -4$.

4. Найти корни уравнения $z^8 - 1 = 0$. $\Bigl($*Ответ:* $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_6 = i$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.\Bigr)$

Самостоятельная работа

1. 1. Найти значение выражения $z_1(z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$. (*Ответ:* $40 - 32i$.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -1/2$.

2. 1. Найти значение выражения $(z_1 + z_2z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$. (*Ответ:* $7 + 19i$.)

2. Решить уравнение $z^2 - i = 0$. (*Ответ:* $\pm(1 + i)/\sqrt{2}$.)

3. 1. Найти значение выражения $(z_1^2 + z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 8 + 12i$. (*Ответ:* $2 + 2i$.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2/(1 + i)$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

7.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 7

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{12} - 2i$; б) $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

(*Ответ:* а) $4e^{7\pi i/6}$; б) $e^{6\pi i/7}$.)

2. Доказать формулу

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{R}).$$

3. Найти сумму $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}.\right)$

4. При каких целых значениях n справедливо равенство $(1+i)^n = (1-i)^n$? (*Ответ:* $n = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$.)

5. Используя формулу Эйлера, найти сумму

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \left(\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}.\right)$

6. Доказать тождество

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos 72° + 1)(x^2 - 2x\cos 144° + 1).$$

Найти и построить на комплексной плоскости (z) области, которым принадлежат точки $z = x + iy$ удовлетворяющие указанным условиям.

7. $|z - z_1| < 4$, где $z_1 = 3 - 5i$. (*Ответ:* внутренность круга радиусом $R = 4$ с центром в точке z_1.)

8. $|z + z_1| > 6$, где $z_2 = 1 - i$. (*Ответ:* внешность круга радиусом $R = 6$ с центром в точке $-z_2$.)

9. $1 < |z - i| < 3$. (*Ответ:* кольцо между окружностями с центром в точке $z = i$, радиусы которых $r_1 = 1$, $r_2 = 3$.)

10. $0 < |z + i| < 1$. (*Ответ:* внутренность круга радиусом $R = 1$ с выколотым центром в точке $z = -i$.)

11. $0 < \mathrm{Re}(3iz) < 2$. (*Ответ:* горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y = 0$, $y = -2/3$.)

12. $\mathrm{Re}(1/z) > a$, где $a = \mathrm{const}$, $a \in \mathbf{R}$. (*Ответ:* если $a = 0$, то $x > 0$ — правая полуплоскость без границы; если $a > 0$ или $a < 0$, то получаем точки, лежащие соответственно внутри или вне окружности $(x - 1/(2a))^2 + y^2 = 1/(4a^2)$.)

13. $\mathrm{Re}((z - ai)/(z + ai)) = 0$, где $a = \mathrm{const}$, $a \in \mathbf{R}$. (*Ответ:* точка $z = ai$.)

14. $\mathrm{Im}(iz) < 2$. (*Ответ:* полуплоскость, лежащая левее прямой $x = 2$.)

8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на интервале $(a;\ b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$, где $x \in (a;\ b)$, то функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$. Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупность первообразных $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Приведем *основные правила интегрирования*:

1) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C,$
$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) - f(x)dx;$

2) $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ $(a = \text{const});$

4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

при условии, что a, b — постоянные числа, $a \neq 0$;

5) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т. е. $(F(x) + C)' = f(x)$.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить *таблицу основных неопределенных интегралов*:

1) $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$; $+C$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4) $\int e^u du = e^u + C;$

5) $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

7) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0);$

8) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C \quad (a\neq 0);$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C \ (a>0);$

11) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

12) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

13) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right| + C;$

14) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u\right| + C;$

15) $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C;$

16) $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C;$

17) $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

18) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Интегралы 1—18 называются *табличными*.

Отметим, что в приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u=\varphi(x)$ аргумента x.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx$.

▶ $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx = 4\int x^3dx - 2\int x^{2/3}dx + 2\int x^{-3}dx + \int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C.$ ◀

Пример 2. Найти $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

▶ $$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$ ◀

Пример 3. Найти $\int 3^x e^{2x}dx$.

▶ $\int 3^x e^{2x}dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C.$ ◀

Пример 4. Найти $\int (2x-7)^9 dx$.

▶ $\int (2x-7)^9 dx = \frac{1}{2}\int (2x-7)^9 \cdot 2dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-7)^{10}}{10} + C = \frac{1}{20} \times$
$\times (2x-7)^{10} + C$. ◀

Пример 5. Найти $\int \cos(7x-3)dx$.

▶ $\int \cos(7x-3)dx = \frac{1}{7}\int \cos(7x-3)d(7x-3) = \frac{1}{7}\sin(7x-$
$-3) + C$. ◀

Пример 6. Найти $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\int \operatorname{ctg} 3x dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{ctg} 3x dx = \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\cos 3x \cdot 3dx}{\sin 3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C. \blacktriangleleft$$

Для того чтобы в примерах 4—7 применить правило 5, некоторые сомножители подынтегральной функции мы «подводили» под знак дифференциала, после чего использовали подходящий табличный интеграл. Такое преобразование называется *подведением под знак дифференциала*. Так, например, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x}{4+\sin^2 x}d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x} = \ln(4+\sin^2 x) + C. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx = \ln\sqrt{x^2+4x+5} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.1

Найти указанные интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1. $\int\left(5x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)dx.$ 2. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx.$

3. $\int\left(3\sin x+2^x\cdot 3^{2x}-\frac{1}{9+x^2}\right)dx.$

4. $\int\sqrt[7]{(5x+3)^3}\,dx.$ 5. $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}\,dx.$

6. $\int\left(\sin 7x-e^{3-2x}+\frac{1}{\cos^2 4x}\right)dx.$

7. $\int\left(e^{-3x}-\frac{1}{3x+2}+3^{2x}-\sin^3 x\cos x\right)dx.$

8. $\int \mathrm{tg}\,3x\,dx.$ 9. $\int\frac{\sqrt{\arcsin x-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

10. $\int\frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx.$ 11. $\int\frac{3^x}{\sqrt{9-9^x}}dx.$ 12. $\int\frac{x-3}{1-x^2}dx.$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1. а) $\int\left(3x-\sqrt[7]{x^5}+2\sin x-3\right)dx;$

б) $\int\left(\sin 3x+x\sqrt{1+x^2}\right)dx;$ в) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx.$

2. а) $\int\left(x^7-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2^x\right)dx;$

б) $\int\left(x^2\sqrt[3]{4-x^2}+\frac{1}{\sin^2 4x}\right)dx;$ в) $\int\frac{x+1}{x^2+2x-3}dx.$

3. а) $\int\left(x^{-2}+7x^6-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx;$

б) $\int\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}-\cos^7 x\sin x\right)dx;$ в) $\int\mathrm{ctg}(3x-2)dx.$

8.2. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путем алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$ или подведения части ее множителей под знак дифференциала.

Пример 1. Найти $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \operatorname{tg} x dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x+3}{x+5} dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x+3}{x+5} dx = \int \frac{x+5-2}{x+5} dx =$$
$$= \int dx - \int \frac{2}{x+5} dx = x - 2\int \frac{d(x+5)}{x+5} =$$
$$= x - 2\ln|x+5| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 4} =$$
$$= \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \int \frac{d(x-2)}{4 + (x-2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \blacktriangleleft$$

Для отыскания интегралов вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

используют следующие формулы:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Пример 4. Найти $\int \cos(2x-1)\cos(3x+5) dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos(2x-1)\cos(3x+5) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(x+6) + \cos(5x+4)) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \cos(x+6) d(x+6) + \frac{1}{10} \int \cos(5x+4) d(5x+4) =$$
$$= \frac{1}{2} \sin(x+6) + \frac{1}{10} \sin(5x+4) + C. \blacktriangleleft$$

При нахождении интегралов вида

$$\int \cos^m x \sin^n x dx \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

возможны следующие случаи:

1) одно из чисел m или n — нечетное, например $m = 2k+1$. Тогда

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = \int \cos^{2k} x \sin^n x \cos x dx =$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^{2k} \sin^n x d(\sin x),$$

т. е. получили интегралы от степенных функций;

2) оба числа m и n — четные. Тогда рекомендуется использовать следующие формулы, позволяющие понизить степень тригонометрических функций:

$$2\cos^2\alpha x = 1 + \cos 2\alpha x,\ 2\sin^2\alpha x = 1 - \cos^2 2\alpha x\ (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Пример 5. Найти $\int \cos^7 x \sin^3 x dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos^7 x \sin^3 x dx = \int \cos^7 x \sin^2 x \sin x dx =$$
$$= -\int \cos^7 x(1 - \cos^2 x) d(\cos x) = -\int \cos^7 x d(\cos x) +$$
$$+ \int \cos^9 x d(\cos x) = -\frac{1}{8}\cos^8 x + \frac{1}{10}\cos^{10} x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\int \cos^2 3x dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos^2 3x dx = \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\int \cos 6x d(6x) =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\int \frac{dx}{5 - 4x - x^2}$.

▶ Для отыскания данного интеграла в знаменателе подынтегральной функции выделим полный квадрат. В результате получим

$$\int \frac{dx}{5 - 4x - x^2} = \int \frac{dx}{9 - (x^2 + 4x + 4)} = \int \frac{d(x+2)}{9 - (x+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{x + 2 + 3}{x + 2 - 3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+5}{x-1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 4} dx$.

▶ Воспользовавшись правилом деления многочлена на многочлен, будем делить числитель подынтегральной функции на ее знаменатель до получения остатка, степень которого меньше степени знаменателя. Это позволит представить подынтегральную функцию в виде суммы целого многочлена и некоторой правильной дроби. Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 4} dx = \int \left(x^3 - 4x + \frac{16x + 1}{x^2 + 4}\right) dx = \int (x^3 - 4x) dx + 8\int \frac{2x dx}{x^2 + 4} +$$
$$+ \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.2

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int (e^{2x} + e^{-2x}) dx$.

2. $\int \sqrt[6]{1 - 7x^3}\, x^2 dx$.

3. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4 + x^2}} dx$.

4. $\int \cos^3 2x \sin^4 2x dx$.

5. $\int \cos^2 3x \cdot \sin^2 3x dx$.

6. $\int \operatorname{ctg}^3 2x dx$.

7. $\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx$.

8. $\int \sin 7x \cdot \sin 9x dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

10. $\int \frac{dx}{x^2-6x+7}$.

11. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 3x} dx$.

12. $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$.

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; б) $\int \cos 2x \cdot \sin 10x dx$;
в) $\int \operatorname{tg}^2 7x dx$.

2. а) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$; б) $\int \sin (7x-1) \sin 5x dx$;
в) $\int \frac{3x+2}{x^2+9} dx$.

3. а) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; б) $\int \sin^3 (1-3x) dx$;
в) $\int \frac{x+3}{x+1} dx$.

8.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx. \tag{8.1}$$

Если $A \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $2x+b$, равное производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. Тогда в результате простых преобразований получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+b)+(2B/A-b)}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx +$$
$$+ (B-Ab/2) \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{A}{2} \ln |x^2+bx+c| +$$
$$+ (B-Ab/2) \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

Для отыскания последнего интеграла выделим в квадратном трехчлене полный квадрат, т. е. представим трехчлен в виде

$$x^2+bx+c = (x+b/2)^2 + c - b^2/4$$

и в зависимости от знака выражения $c-b^2/4$ получим один из табличных интегралов вида $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4-4/3}{x^2+4x+13}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - 8\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+13| -$$

$$-8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-8+8-14/5}{x^2-8x+7}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+7}dx + 13\int \frac{dx}{x^2-2\cdot 4x+16-9} = \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| +$$

$$+13\int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| + 13\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| + \frac{13}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если в интеграле (8.1) квадратный трехчлен имеет вид ax^2+bx+c $(a \neq 0)$, то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе выносят за скобки: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Пример 3. Найти $\int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{4x-3}{x^2-6x+5}dx =$$

$$= -\int \frac{2x-6+6-3/2}{x^2-6x+5}dx = -\int \frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx -$$

$$-\frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = -\ln|x^2-6x+5| + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x-3}{2-x+3}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Методы нахождения интеграла вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

аналогичны рассмотренным выше, однако в результате получаются другие табличные интегралы. При $A \neq 0$ имеем

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Тогда при $c\neq\frac{b^2}{4a}$ и $a>0$ последний интеграл можно привести к виду

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm q^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2\pm q^2}|+C,$$

а при $c>\frac{b^2}{4a}$ и $a<0$ — к виду

$$\int\frac{du}{\sqrt{q^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{q}+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx.$

$$▶ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)+(4-2/3)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx-5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=3\sqrt{x^2-4x+8}-$$

$$-5\ln|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}|+C. ◀$$

Пример 5. $\int\frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx.$

$$▶ \int\frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx=-2\int\frac{-2x+2+5/2-2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx=$$

$$=-2\int\frac{-2x+2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=-4\sqrt{-x^2+2x+3}-$$

$$-\arcsin\frac{x-1}{2}+C. ◀$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx, \tag{8.2}$$

где k — целое, $k>0$; $p^2-4q<0$. При $A\neq0$ $(k=1)$ по аналогии со случаем (8.1) выделим интеграл

$$\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C\ (k\neq1).$$

Тогда задача отыскания интегралов вида (8.2) сводится к нахождению интеграла

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^k}=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}, \tag{8.3}$$

где $u=x+p/2$; $a=\sqrt{(4q-p^2)/4}$; $4q-p^2>0$.

Интегралы вида (8.3) находят с помощью *рекуррентной формулы понижения степени знаменателя:*

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}} + \\ + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}. \qquad (8.4)$$

Пример 6. Найти $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

► $$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+10/3}{(x^2+2x+5)^2}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2} + 2\int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} \overset{(8.4)}{=\!=} -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+5} +$$

$$+ 2\left(\frac{x+1}{8((x+1)^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}\right) = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \blacktriangleleft$$

Запись $\overset{(8.4)}{=\!=}$ означает, что при переходе к последующим вычислениям использована формула (8.4). (Подобная краткая и удобная запись будет встречаться и в дальнейшем.)

АЗ-8.3

Найти указанные определенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.\right)$

2. $\int \frac{3x-7}{x^2+x+1}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| - \right.$ $\left. - \frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3. $\int \frac{x-2}{x^2-8x+7}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2-8x+7| + \right.$ $\left. + \frac{11}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C.\right)$

4. $\int \frac{x^3+3x}{x^2+2x+2}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{5}{2}\ln|x^2+2x+2| - \right.$ $\left. -9\operatorname{arctg}(x-1) + C.\right)$

5. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx$. $\left(\textit{Ответ: } 3\sqrt{x^2-6x+18} + \right.$ $\left. + 5\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+18}| + C.\right)$

6. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$. $\left(\text{Ответ: } -8\sqrt{5+2x-x^2} -\right.$
$\left.-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.\right)$

7. $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+10)^2}dx$. $\left(\text{Ответ:} -\frac{4x+13}{x^2+2x+10}+\right.$
$\left.+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.\right)$

8. $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4+x^2}}dx$. (Ответ: $2\ln|x+\sqrt{4+x^2}| -$
$-3\sqrt{4+x^2}+C.$)

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы

1. а) $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12}dx$; б) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

2. а) $\int \frac{x-7}{x^2-10x+9}dx$; б) $\int \frac{7x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

3. а) $\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9}dx$; б) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$.

8.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ПОДСТАНОВКОЙ)

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{8.5}$$

затем найти интеграл из правой части формулы (8.5) (если это возможно) и вернуться к исходной переменной x. Такой способ нахождения интеграла называется *методом замены переменной* или *методом подстановки*.

Отметим, что при замене $x = \varphi(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями D_t и D_x определения функций $\varphi(t)$ и $f(x)$, такое, чтобы функция $\varphi(t)$ принимала все значения $x \in D_x$ (оно обозначается $D_t \leftrightarrow D_x$).

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$.

▶ Введем новую переменную t по формуле $t = \sqrt{x-1}$. Тогда $x = t^2+1$, $dx = 2tdt$, D_t: $0 \leqslant t < \infty$, D_x: $1 \leqslant x < \infty$, $D_t \leftrightarrow D_x$ и, согласно формуле (8.5), имеем

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int(t^2+1)t\cdot 2t\,dt=2\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+$$
$$+C=\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$.

$\blacktriangleright$ Воспользуемся подстановкой $x=\varphi(t)=a\operatorname{tg}t$, где область определения D_t: $-\pi/2<t<\pi/2$ удовлетворяет следующим условиям: $D_t\leftrightarrow D_x$: $(-\infty,\ +\infty)$ и в D_t производная $\varphi'(t)$ непрерывна. Тогда $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$ и, согласно формуле (8.5), имеем

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2t+a^2}}{a^2\operatorname{tg}^2t}\frac{a\,dt}{\cos^2t}=\int\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}{\sin^2t}dt=$$
$$=\int\frac{1}{\cos t\sin^2t}dt=\int\frac{\cos^2t+\sin^2t}{\cos t\sin^2t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2t}dt+$$
$$+\int\frac{1}{\cos t}dt=-\frac{1}{\sin t}+\ln\left|\operatorname{tg}t+\frac{1}{\cos t}\right|+C=-\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}{\operatorname{tg}t}+$$
$$+\ln\left|\operatorname{tg}t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}\right|+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

$\blacktriangleright$ Применим тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$. Тогда $dx=a\cos t\,dt$, D_t: $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$, D_x: $-a\leqslant x\leqslant a$, $D_t\leftrightarrow D_x$ и

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\overset{(8.5)}{=}\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\,a\cos t\,dt=a^2\int|\cos t|\cos t\,dt=$$
$$=a^2\int\cos^2t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

В полученном выражении перейдем к переменной x, использовав равенства $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и $\cos t=\sqrt{1-\sin^2t}=\sqrt{1-x^2/a^2}$. В результате имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \blacktriangleleft$$

При интегрировании некоторых функций часто целесообразно осуществлять переход к новой переменной с помощью подстановки $t=\psi(x)$, а не $x=\varphi(t)$.

Пример 4. Найти $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos x\,dx$.

$\blacktriangleright$ Применим подстановку $1+\sin x=t$. Тогда $\cos x\,dx=dt$ и

$$\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos x\,dx=\int t^{1/3}dt=\frac{t^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\int e^{-x^3}x^2dx$.

▶ Воспользуемся подстановкой $-x^3=t$. Тогда имеем $-3x^2dt = dt$, $x^2dx=-\frac{1}{3}dt$ и

$$\int e^{-x^3}x^2dx=\int e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$.

▶ В этом случае целесообразно применить подстановку $t=\frac{1}{x+1}$. Тогда $x=\frac{1}{t}-1$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ и

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-1\right)+10}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{t^{-2}+9}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2+1}}=-\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right|+C. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. Для нахождения неопределенных интегралов методом замены переменной (методом подстановки) предлагается схема вычислений, которая дает возможность компактно и последовательно изложить ход решения задачи. Воспользуемся этой схемой при решении уже рассмотренного примера 3:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=a\sin t,\\ dx=a\cos t dt\end{array}\right|=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=$$

$$=a^2\int|\cos t|\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\left|\begin{array}{l}t=\arcsin\frac{x}{a},\ \sin t=\frac{x}{a},\\ \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2/a^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a}{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \blacktriangleleft$$

Здесь и далее при записи решений примеров, в которых используются методы замены переменной и интегрирования по частям, все промежуточные выкладки мы будем заключать между вертикальными линиями.

АЗ-8.4

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$. (*Ответ:* $2(\sqrt{x+3}-\ln|1+\sqrt{x+3}|)+C$.)

2. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{24}\sqrt[5]{(5x^2-3)^{12}}+C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.\right)$

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{1+\ln x}-\ln\ln x+$ $+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C$.)

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. (*Ответ:* $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4(1+\sqrt[4]{x})+C$.)

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\ln\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}+C.\right)$

7. $\int \sqrt{144-x^2}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 72\arcsin\frac{x}{12}+\right.$ $\left.+\frac{x}{2}\sqrt{144-x^2}+C.\right)$

8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ C-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}\right)$.

9. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$.)

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$?. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $x^3\sqrt{4-3x^4}\,dx$; б) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\right.$ а) $-\frac{1}{8}\sqrt{(4-3x^4)^3}+C$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-$ $\left.-4\ln(1+\sqrt{x})^8+C.\right)$

2. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{9-2x^3}}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\text{ а) } -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(9-2x^3)^2}+C;\text{ б) } -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+\right.$
$\left.+C.\right)$

3. а) $\int\sqrt[7]{1+\cos^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\text{ а) } -\frac{7}{8}\sqrt{(1+\cos^2 x)^8}+C;\text{ б) } C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\right.$
$\left.-\arcsin x.\right)$

8.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (8.6)$$

где $u(x)$, $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Формула (8.6) называется *формулой интегрирования по частям*. Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу (8.6) необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется использовать для нахождения интегралов от функций $x^k \sin\alpha x$, $x^k\cos\alpha x$, $x^k e^{\alpha x}$, $x^n \ln^k x$, $x^k \operatorname{ch}\alpha x$, $a^{\beta x}\sin\alpha x$, $a^{\beta x}\cos\alpha x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д., где n, k — целые положительные постоянные, α, $\beta\in\mathbf{R}$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Пример 1. Найти $\int xe^{-2x}dx$.

▶ Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{-2x}dx$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$ (всегда можно считать, что $C=0$). Следовательно, по формуле (8.6) имеем

$$\int xe^{-2x}dx\overset{(8.6)}{=}x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int-\frac{1}{2}e^{-2x}dx=$$
$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int(x^2+2x)\cos 2x dx$.

$$\blacktriangleright \int(x^2+2x)\cos 2xdx=$$
$$=\left|\begin{matrix} u=x^2+2x,\ du=(2x+2)\,dx,\\ dv=\cos 2xdx,\ v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right|\overset{(8.6)}{=}$$
$$\overset{(8.6)}{=}\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x-\int(x+1)\sin 2xdx=$$
$$=\left|\begin{matrix} u=x+1,\ du=dx,\\ dv=\sin 2xdx,\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x-\left(-(x+1)\frac{1}{2}\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\blacktriangleright \int x \operatorname{arctg} x dx=\left|\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg} x,\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=x dx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2 dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $\int e^{2x}\sin x dx$.

$$\blacktriangleright \int e^{2x}\sin x dx=\left|\begin{array}{l} u=\sin x,\ du=\cos x dx, \\ dv=e^{2x}dx,\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx=\left|\begin{array}{l} u=\cos x,\ du=-\sin x dx, \\ dv=e^{2x}dx,\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\sin x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x dx.$$

Перенеся последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$\frac{3}{4}\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{3}{4}C.$$

Следовательно,

$$\int e^{2x}\sin x dx=\frac{2}{3}e^{2x}\sin x-\frac{1}{3}e^{2x}\cos x+C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\int x^2\ln^2 x dx$.

$$\blacktriangleright \int x^2\ln^2 x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx, \\ dv=x^2dx,\ v=x^3/3 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int x^3\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int x^2\ln x dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=dx/x, \\ dv=x^2dx,\ v=x^3/3 \end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx\right)=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{9}\int x^2dx=$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln^2 x-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{27}x^3+C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.5

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int x\cos 3x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.\right)$

2. $\int \arccos x dx$. (*Ответ:* $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.)

3. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $-e^{-x}(x^2+5)+C$.)

4. $\int \ln^2 x dx$. (Ответ: $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.)

5. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\right)$

6. $\int x^3e^{-x^2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C.\right)$

7. $\int e^{\sqrt{x}}dx$. (*Ответ:* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.)

8. $\int \sin(\ln x)dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int xe^{-7x}dx$;
в) $\int x\arcsin x dx$.

2. а) $\int xe^{11x+1}dx$; б) $\int\ln(1+x^2)dx$;
в) $\int x\cos(x/2+1)dx$.

3. а) $\int\ln(x-3)dx$; б) $\int x\cos(2x-1)dx$;
в) $\int x\cdot 2^{3x}dx$.

8.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}, \tag{8.7}$$

где m, n — целые положительные числа; b_i, $a_j \in \mathbf{R}$; $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$.

Если $m < n$, то $R(x)$ называется *правильной дробью*, если $m \geqslant n$,— *неправильной дробью*.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

где $M_{n-m}(x)$, $Q_l(x)$ — многочлены; $\frac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ — правильная дробь; $l < n$.

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ — неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1} = x^2 - 3x + 10 + \frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции $R(x)$ при условии $m < n$.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

где A, a, M, N, p, q — постоянные числа; k — целое, $k \geqslant 2$; $p^2 - 4q < 0$.

Очевидно, что интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C.$$

Методика нахождения интегралов от простейших дробей третьего и четвертого типов рассмотрена в § 8.4. Таким образом, всякая простейшая рациональная дробь может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Известно, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_\beta)^{k_\beta}(x^2+p_1x+ \\ + q_1)^{t_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{t_s}, \tag{8.8}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_\beta$ — действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1, \dots, k_\beta$, а $p_\gamma^2 - 4q_\gamma < 0$ $(\gamma = \overline{1, s})$; $k_1 + \dots + k_\beta + 2t_1 + \dots + 2t_s = n$; числа $k_1, \dots, k_\beta$, $t_1, \dots, t_s$ — целые неотрицательные. Тогда верна

Теорема (о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей). *Всякую правильную рациональную дробь (8.7) со знаменателем, представленным в виде (8.8), можно разложить в сумму простейших* *рациональных дробей типа 1—4. В данном разложении каждому корню α_r кратности k_r $(r=\overline{1,\beta})$ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x-\alpha_r)^{k_r}$) соответствует сумма k_r дробей вида*

$$\frac{A_1}{x-\alpha_r}+\frac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\ldots+\frac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}. \tag{8.9}$$

Каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности l_γ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{l_\gamma}$) соответствует сумма l_γ элементарных дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2}+\ldots+\frac{M_{l_\gamma}x+N_{l_\gamma}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{l_\gamma}}. \tag{8.10}$$

Для вычисления значений A, M, N в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого заключается в следующем. С учетом формул (8.9), (8.10) данную дробь $R(x)$ представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами A, M, N. Полученное равенство является тождеством. Поэтому, если привести все дроби к общему знаменателю $P_n(x)$ в числителе получим многочлен $Q^*_{n-1}(x)$ степени $n-1$, тождественно равный многочлену $Q_m(x)$, стоящему в числителе выражения (8.7). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в этих многочленах, получим систему n уравнений для определения n неизвестных коэффициентов A, M, N (с индексами).

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $Q^*_{n-1}(x)$ тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях x. Придавая x конкретные числовые значения получаем систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется *методом частных значений*. Если значения x совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

Пример 1. Найти $\int\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$.

▶ В соответствии с формулой (8.9) разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\int\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx\overset{(8.9)}{=}\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx. \tag{1}$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадет со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральных функций в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, т. е.

$$2x-3\equiv A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+C(x-1)x. \tag{2}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0\;\;=A+B+C, \\ x^1 & 2\;\;=-3A-2B-C, \\ x^0 & -3=2A, \end{array}\right\}$$

решение которой: $A=-3/2$, $B=1$, $C=1/2$.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в тождество (2) вместо x частные значения, равные корням знаменателя $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$. Получим равенства $-3=$

$=2A$, $-1=-B$, $1=2C$, откуда следует, что $A=-3/2$, $B=1$, $C=1/2$. Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}\right)dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C^*,$$

где C^* — произвольная постоянная интегрирования. ◀

Пример 2. Найти $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

▶ На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} \overset{(8.9)}{=} \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)}\right)dx.$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1). \qquad (1)$$

При $x=1$ и $x=-1$ находим, что $4A=1$, $-1=-2B$, т. е. $A=1/4$, $B=1/2$.

Для вычисления значения C приравняем в тождестве (1) коэффициенты при x^2. Получим $0=A+C$, т. е. $C=-1/4$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{-1/4}{x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C^* =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + C^*. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$.

▶ Согласно формулам (8.9), (8.10), разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей; выполнив приведение к общему знаменателю, получим

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Следовательно,

$$x = A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1).$$

При $x=1$ получаем $1=2A$, т. е. $A=1/2$. Далее,

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+M=0, \\ x_0 & A-N=0, \end{array}\right\}$$

откуда $M=-1/2$, $N=1/2$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $I(x) = \int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx.$

▶ В данном случае подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = x - 2 + \frac{2x^2 + 10x - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x}.$$

Следовательно, с учетом формул (8.9) и (8.10)

$$I(x) = \int (x-2)\,dx + \int \frac{2x^2 + 10x - 5}{x(x^2 + 2x + 5)} dx = \frac{(x-2)^2}{2} +$$

$$+ \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5} \right) dx.$$

Приведя к общему знаменателю дроби в последнем интеграле и приравняв числители подынтегральных дробей в левой и правой частях записанного равенства, получим

$$2x^2 + 10x - 5 \equiv A(x^2 + 2x + 5) + Mx^2 + Nx.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 2 = A + M, \\ x^1 & 10 = 2A + N, \\ x^0 & -5 = 5A, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1$, $M = 3$, $N = 12$.

Окончательно получаем

$$I(x) = \frac{(x-2)^2}{2} + \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{3x + 12}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \frac{(x-2)^2}{2} -$$

$$- \ln|x| + \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2 + 6}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| +$$

$$+ \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 9 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.6

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int_{-6}^{+C} \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} dx.$ (*Ответ:* $\ln \frac{(x-2)^2}{|x-3|} + C.$)

2. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4 + \right.$

$\left. + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.\right)$

3. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C.\right)$

4. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{x-1} + \right.$

$\left. + \ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|} + C.\right)$

5. $\int \frac{(2x^2 - 3x - 3)\,dx}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\frac{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^3}}{|x-1|} + \right.$

$\left. + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2} + C.\right)$

6. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C.\right)$

7. $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \right.$

$\left. + \frac{1}{4}\ln(1 + x^2) + C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right| + C;\ \text{б)}\ \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|} + C.\right)$

2. а) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C;\ \text{б)}\ \frac{1}{x+1} + \right.$

$\left. + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.\right)$

3. а) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$; б) $\int \frac{13dx}{x(x^2 + 6x + 13)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}+C,\ \text{б)}\ \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+6x+13}}+\right.$

$\left. +5\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{2}+C \right)$

8.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Не для всякой иррациональной функции можно найти первообразную в виде элементарной функции Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1/s_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\nu/s_\nu}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, $a,\ b,\ c,\ d$ — постоянные, $r_i,\ s_i$ — целые положительные числа, $i=\overline{1,\ \nu}$, приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=u^m$$

(здесь число m — наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1},\ \ldots,\ \frac{r_\nu}{s_\nu}$, т е $m=\text{НОК}\ (s_1,\ \ldots,\ s_\nu)$).

В частности, интеграл вида

$$\int R(x,\ x^{r_1/s_1},\ \ldots,\ x^{r_\nu/s_\nu})dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки $x=u^m$

Пример 1. Найти $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$

▶ Так как НОК$(2,\ 4)=4$, то

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}=\int\frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+4}=\left|\begin{matrix}x=u^4\\ dx=4u^3du\end{matrix}\right|=$$

$$=4\int\frac{u^2}{u^3+4}u^3du=4\int\frac{u^5du}{u^3+4}=4\int\left(u^2-\frac{4u^2}{u^3+4}\right)du=\frac{4}{3}u^3-$$

$$-\frac{16}{3}\ln|u^3+4|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{16}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+4|+C,$$

поскольку $u=\sqrt[4]{x}$ ◀

Пример 2. Найти $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

▶ Так как НОК(2, 3, 6) = 6, то

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x+1=u^6, \\ dx=6u^5du \end{array} \right| = \int \frac{u}{u^3+u^2}\,6u^5du =$$

$$= 6\int \frac{u^4}{u+1}\,du = 6\int\left(u^3-u^2+u-1+\frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\ln|u+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} + \right.$$

$$\left. + 1\right| + C. \blacktriangleleft$$

Интегрирование некоторых функций, рационально зависящих от $\sqrt{ax^2+bx+c}$, описано в § 8.3, 8.4.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Оказывается, что данный интеграл всегда можно представить в виде

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+ \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (8.11)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$; $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, которые находят следующим образом. Дифференцируем равенство (8.11), в результате получаем тождество, из которого определяем коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 3. Найти $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

▶ Согласно формуле (8.11), имеем

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} +$$

$$+ (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на $\sqrt{x^2+4}$. Тогда

$$x^4+4x^2 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+4) + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)x + \lambda.$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & 1 = 3A + A, \\ x^3 & 0 = 2B + B, \\ x^2 & 4 = 12A + C + B, \\ x^1 & 0 = 4B + D, \\ x^0 & 0 = 4C + \lambda, \end{array}\right\}$$

решение которой: $A = 1/4$, $B = 0$, $C = 1/2$, $D = 0$, $\lambda = -2$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{x^3 + 2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln|x + \sqrt{x^2+4}| + C^*. \blacktriangleleft$$

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

где a, b — постоянные, отличные от нуля, m, n, p — рациональные числа, можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева в следующих трех случаях:

1) если p — целое число, то имеем рассмотренный выше случай интегрирования простейших иррациональных функций;

2) если $(m+1)/n$ — целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = u^s$, $p = r/s$, $s > 0$;

3) если $(m+1)/n + p$ — целое число, то используется подстановка $a + bx^n = u^s x^n$.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$.

▶ Так как $m = -7$, $n = 4$, $p = -1/2$, то $(m+1)/n + p = -3/2 - 1/2 = -2$ — целое число. Имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}} = \left| \begin{array}{c} 1 + x^4 = u^2x^4,\ x = (u^2-1)^{-1/4}, \\ dx = -\frac{1}{2}(u^2-1)^{-5/4}u\,du \end{array} \right| =$$

$$= \int (u^2-1)^{7/4}u^{-1}(u^2-1)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(u^2-1)^{-5/4}u\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (u^2-1)\,du = -\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u + C = \left| u = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^2}\right)\sqrt{1+x^4} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.7

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\ln|3\sqrt{x} + 4| + C.\right)$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln|\sqrt[12]{x^5} - 1| + C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[4]{3x+4}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{3x+4}-$

$-2\sqrt[4]{3x+4}+4\ln\big(\sqrt[4]{3x+4}+21\big)\Big)+C.\Big)$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}}$. $\Big($*Ответ:* $4\Big(\frac{1}{2}\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x}+49\ln|\sqrt[4]{x}-$

$-7|\Big)+C.\Big)$

5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \frac{dx}{x}$. $\Big($*Ответ:* $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+$

$+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.\Big)$

6. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-$

$-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.\Big)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

$\Big($*Ответ:* а) $\frac{4}{3}\big(\sqrt[4]{x^3}-\ln\big(\sqrt[4]{x^3}+1\big)\big)+C$;

б) $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C.\Big)$

2. а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

$\Big($*Ответ:* а) $\frac{2}{9}\sqrt[4]{x^9}-\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$; б) $3\sqrt[3]{x+1}-4(x+1)+$
$+C.\Big)$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}$.

$\Big($*Ответ:* а) $6\Big(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln\big(1+\sqrt[6]{x}\big)\Big)+C$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-8)^4}+\frac{8}{9}(3x-8)+C.\Big)$

8.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интегралы вида

$$\int R(\cos x,\ \sin x)dx, \tag{8.12}$$

где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью *универсальной подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$. В этом случае

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ dx=\frac{2du}{1+u^2} \tag{8.13}$$

(см. § 8.6).

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

▶ Полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$. Тогда, согласно равенствам (8.13),

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{2du/(1+u^2)}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{du}{1+u}=$$

$$=\ln|1+u|+C=\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C. \ ◀$$

В случае, когда имеет место тождество

$$R(-\cos x,\ -\sin x)\equiv R(\cos x,\ \sin x),$$

для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощенную подстановку* $\operatorname{tg}x=u$. При этом

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ dx=\frac{du}{1+u^2}. \tag{8.14}$$

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

▶ Положив $\operatorname{tg}x=u$, согласно формуле (8.14), получим

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)}=\int\frac{du}{3+4u^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C. \ ◀$$

Пример 3. Найти $\int\operatorname{tg}^5 2x dx$.

▶ Применим подстановку $\operatorname{tg}2x=u$. Тогда:

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u,\ dx=\frac{1}{2}\ \frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int\operatorname{tg}^5 2xdx=\frac{1}{2}\int u^5\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\int\left(u^3-u+\frac{u}{1+u^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{8}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+C=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+$$

$$+\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)+C. \ ◀$$

При нахождении интегралов вида

$$\int f(\cos x)\sin x dx \text{ и } \int f(\sin x)\cos x dx \tag{8.15}$$

целесообразно применять подстановки

$$\cos x = t \text{ и } \sin x = t \tag{8.16}$$

соответственно.

Пример 4. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

▶ Положим, $\cos x = t$, тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4}(-dt) = -\int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. ◀$$

Пример 5. Найти $I = \int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}}$.

▶ Положим, $2 + 3\sin 2x = t^3$. Тогда $\cos 2x dx = \frac{1}{2}t^2 dt$ и

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)} + C. ◀$$

АЗ-8.8

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.\right)$

2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.\right)$

4. $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + C.\right)$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x}$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{3}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{3}}\right| + C.\right)$

6. $\int \sin^4 3x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.\right)$

7. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right| + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C.\right)$

8. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. $\left(\text{Ответ: } \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы

1. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$.

$\left(\text{Ответ: а) } \frac{3}{5} \cos^{5/3} x - 3 \cos^{-1/3} x + C; \right.$

$\left. \text{б) } \frac{1}{3} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}\right| + C.\right)$

2. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3 + 4\sin 2x}} dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sin x + 1}$.

$\left(\text{Ответ: а) } \frac{1}{4}\sqrt{3 + 4\sin 2x} + C; \text{ б) } \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C.\right)$

3. а) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{(3 + 2\cos 3x)^2}}$; б) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos^2 x}$.

$\left(\text{Ответ: а) } \frac{1}{2}\sqrt{3 + 2\cos 3x} + C; \right.$

$\left. \text{б) } \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - x + C.\right)$

ИДЗ-8.1

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1—5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1

1.1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}\,dx.$ 1.2. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}\,dx.$

1.3. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}\,dx.$ 1.4. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1.5. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}\,dx.$ 1.6. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.7. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx.$ 1.8. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.9. $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}\,dx.$ 1.10. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}\,dx.$

1.11. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}\,dx.$ 1.12. $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx.$

1.13. $\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx.$ 1.14. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}\,dx.$

1.15. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx.$ 1.16. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}\,dx.$

1.17. $\int \left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx.$ 1.18. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}\,dx.$

1.19. $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}\,dx.$ 1.20. $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}\,dx.$

1.21. $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$ 1.22. $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}\,dx.$

1.23. $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}\,dx.$ 1.24. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx.$

1.25. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx.$ 1.26. $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx.$

1.27. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$ 1.28. $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx.$

1.29. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$ 1.30. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

2.

2.1. $\sqrt{3+x}\,dx.$ 2.2. $\int\sqrt[3]{1+x}\,dx.$

2.3. $\int\sqrt[3]{(1+x)^2}\,dx.$ 2.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

2.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$ 2.6. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}.$

2.7. $\int(1-4x)^7\,dx.$ 2.8. $\int(1+4x)^5\,dx.$

2.9. $\int(1-3x)^4\,dx.$ 2.10. $\int\sqrt{1+3x}\,dx.$

2.11. $\int\sqrt{5-4x}\,dx.$ 2.12. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}.$

2.13. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$ 2.14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$

• 2.15. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$ 2.16. $\int\sqrt[5]{3-2x}\,dx.$

2.17 $\int\sqrt[4]{1+3x}\,dx.$ 2.18. $\int\sqrt[3]{1+3x}\,dx.$

2.19. $\int\frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$ 2.20. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}.$

2.21. $\int\frac{dx}{(2+x)^3}.$ 2.22. $\int\sqrt[3]{5-2x}\,dx.$

2.23. $\int\sqrt{5-4x}\,dx.$ 2.24. $\int\sqrt[5]{(6-5x)^2}\,dx.$

2.25. $\int\sqrt[4]{2-5x}\,dx.$ 2.26. $\int\sqrt[3]{4-2x}\,dx.$

2.27. $\int\sqrt{3-4x}\,dx.$ 2.28. $\int\sqrt[5]{3+2x}\,dx.$

2.29. $\int\sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx.$ 2.30. $\int\sqrt[3]{(2-x)^2}\,dx.$

3

3.1. $\int \frac{dx}{3-x}$. 3.2. $\int \frac{dx}{3x+9}$. 3.3. $\int \frac{dx}{2-3x}$.

3.4. $\int \frac{dx}{1-4x}$. 3.5. $\int \frac{dx}{2+3x}$. 3.6. $\int \frac{dx}{2-5x}$.

3.7. $\int \frac{dx}{3x-2}$. 3.8. $\int \frac{dx}{2x+3}$. 3.9. $\int \frac{dx}{3x-4}$.

3.10. $\int \frac{dx}{4-3x}$. 3.11. $\int \frac{dx}{3x+4}$. 3.12. $\int \frac{dx}{4x-2}$.

3.13. $\int \frac{dx}{5-3x}$. 3.14. $\int \frac{dx}{4-7x}$. 3.15. $\int \frac{dx}{5x-3}$.

3.16. $\int \frac{dx}{3-2x}$. 3.17. $\int \frac{dx}{5+3x}$. 3.18. $\int \frac{dx}{3-5x}$.

3.19. $\int \frac{dx}{5+4x}$. 3.20. $\int \frac{dx}{6-3x}$. 3.21. $\int \frac{dx}{6+5x}$.

3.22. $\int \frac{dx}{1-7x}$. 3.23. $\int \frac{dx}{1+6x}$. 3.24. $\int \frac{dx}{2+7x}$.

3.25. $\int \frac{dx}{7-3x}$. 3.26. $\int \frac{dx}{5-2x}$. 3.27. $\int \frac{dx}{2x+7}$.

3.28. $\int \frac{dx}{2x+9}$. 3.29. $\int \frac{dx}{7x-3}$. 3.30. $\int \frac{dx}{6x+1}$.

4

4.1. $\int \sin(2-3x)dx$. 4.2. $\int \sin(3-2x)dx$.

4.3. $\int \sin(5-3x)dx$. 4.4. $\int \cos(2+3x)dx$.

4.5. $\int \cos(3+2x)dx$. 4.6. $\int \sin(4-2x)dx$.

4.7. $\int \cos(5-2x)dx$. 4.8. $\int \cos(7x+3)dx$.

4.9. $\int \sin(8x-3)dx$. 4.10. $\int \sin(3+4x)dx$.

4.11. $\int \sin(3-4x)dx$. 4.12. $\int \cos(4x+3)dx$.

4.13. $\int \cos(3-4x)dx$. 4.14. $\int \cos(2+5x)dx$

4.15. $\int \cos(3x+5)dx$. 4.16. $\int \sin(5x-3)dx$.

4.17. $\int \sin(5-3x)dx$. 4.18. $\int \sin(3x+6)dx$.

4.19. $\int \cos(5x-8)dx$. 4.20. $\int \cos(3x-7)dx$.

4.21. $\int \cos(5x-6)dx$. 4.22. $\int \sin(7x+1)dx$.

4.23. $\int \cos(7x+3)dx$. 4.24. $\int \sin(7-4x)dx$.

4.25. $\int \cos(3x-7)\,dx$. 4.26. $\int \sin(8x-5)dx$.

4.27. $\int \cos(8x-4)dx$. 4.28. $\int \sin(9x-1)dx$.

4.29. $\int \cos(10x-3)dx$. 4.30. $\int \sin(9x+7)dx$

5

5.1. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$.
5.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$.
5.3. $\int \frac{dx}{9x^2+3}$.

5.4. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$.
5.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$.
5.6. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$.

5.7. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$.
5.8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$.
5.9. $\int \frac{dx}{5x^2-3}$.

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.
5.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$.
5.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$.

5.13. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.
5.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$.
5.15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.
5.17. $\int \frac{dx}{3x^2+2}$.
5.18. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

5.19. $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$.
5.20. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$.
5.21. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

5.22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$.
5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$.
5.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

5.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$.
5.26. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$.
5.27. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$.

5.28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$.
5.29. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$.
5.30. $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

6

6.1. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$.
6.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$.
6.3. $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$.

6.4. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$.
6.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$.
6.6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

6.7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$.
6.8. $\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$.
6.9. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

6.10. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$.
6.11. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$.
6.12. $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$.

6.13. $\int \frac{2xdx}{3x^2-7}$. 6.14. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$. 6.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

6.16. $\int \frac{xdx}{2x^2+9}$. 6.17. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$. 6.18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

6.19. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$. 6.20. $\int \frac{xdx}{3x^2-6}$. 6.21. $\int \frac{xdx}{5x^2+1}$.

6.22. $\int \frac{5xdx}{5x^2-3}$. 6.23. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$. 6.24. $\int \frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

6.25. $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$. 6.26. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$. 6.27. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+5}}$.

6.28. $\int \frac{2xdx}{5x^2-3}$. 6.29. $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$. 6.30. $\int \frac{7xdx}{7x^2+1}$.

7

7.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$. 7.2. $\int \frac{dx}{2x^2-5}$. 7.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$.

7.4. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$. 7.5. $\int \frac{dx}{2x^2+3}$. 7.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.

7.7. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. 7.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$. 7.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$.

7.10. $\int \frac{dx}{5x^2-4}$. 7.11. $\int \frac{dx}{3x^2-7}$. 7.12. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.

7.13. $\int \frac{dx}{6x^2-7}$. 7.14. $\int \frac{dx}{7x^2+6}$. 7.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

7.16. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$. 7.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$. 7.18. $\int \frac{dx}{3x^2-5}$.

7.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. 7.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$. 7.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

7.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. 7.23. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. 7.24. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$.

7.25. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$. 7.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$. 7.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

7.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. 7.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$. 7.30. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

8

8.1. $\int e^{2x-7}dx$. 8.2. $\int e^{3+5x}dx$. 8.3. $\int e^{2-3x}dx$.
8.4. $\int e^{2x+1}dx$. 8.5. $\int e^{7x-2}dx$. 8.6. $\int e^{5x-7}dx$.
8.7. $\int e^{5x+7}dx$. • 8.8. $\int e^{7-2x}dx$. 8.9. $\int e^{3-4x}dx$.
8.10. $\int e^{10x+2}dx$. 8.11. $\int e^{2x-10}dx$. 8.12. $\int e^{4x+3}dx$.
8.13. $\int e^{4x+5}dx$. 8.14. $\int e^{6x-1}dx$. 8.15. $\int e^{5-2x}dx$.
8.16. $\int e^{4-3x}dx$. 8.17. $\int e^{3-5x}dx$. 8.18. $\int e^{1-4x}dx$.
8.19. $\int e^{2-5x}dx$. 8.20. $\int e^{6x-4}dx$. 8.21. $\int e^{8x+1}dx$.
8.22. $\int e^{2-6x}dx$. 8.23. $\int e^{2-4x}dx$. 8.24. $\int e^{3-6x}dx$.
8.25. $\int e^{4-5x}dx$. 8.26. $\int e^{5-x}dx$. 8.27. $\int e^{7+3x}dx$.
8.28. $\int e^{2x+3}dx$. 8.29. $\int e^{8x+1}dx$. 8.30. $\int e^{4-7x}dx$.

9

9.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$. 9.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx$.

9.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$. 9.4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$.

9.5. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$. 9.6. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$.

9.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$. 9.8. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

9.9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$. 9.10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$.

9.11. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$. 9.12. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$.

9.13. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx$. 9.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}$.

9.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx$. 9.16. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$.

9.17. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx.$

9.18. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}.$

9.19. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}.$

9.20. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx.$

9.21. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx.$

9.22. $\int \frac{\ln^3(x-7)}{x-7}dx.$

9.23. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx.$

9.24. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx.$

9.25. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}.$

9.26. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8}dx.$

9.27. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx.$

9.28. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}.$

9.29. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9}dx.$

9.30. $\int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5}dx.$

10

10.1. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx.$

10.2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx.$

10.3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx.$

10.4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

10.5. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx.$

10.6. $\int \cos^7 2x \sin 2x dx.$

10.7. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x+2}.$

10.8. $\int \frac{\cos x dx}{3-\sin x}.$

10.9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x+3}}.$

10.10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x+1}}.$

10.11. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}.$

10.12. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx.$

10.13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx.$

10.14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx.$

10.15. $\int \sin^3 4x \cos 4x dx.$

10.16. $\int \sqrt[3]{\cos 2x}\sin 2x dx.$

10.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x dx.$

10.18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx.$

10.19. $\int \sin^3 5x \cos 5x dx.$

10.20. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}dx.$

10.21. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx.$

10.22. $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx.$

10.23. $\int \sin^6 3x \cos 3x dx.$

10.24. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx.$

10.25. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx.$

10.26. $\int \sin^4 8x \cos 8x dx.$

10.27. $\int \sin^5 4x \cos 4x dx.$

10.28. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx.$

10.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx.$

10.30. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx.$

11

11.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx.$

11.2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}.$

11.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}.$

11.4. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x} dx.$

11.5. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx.$

11.6. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx.$

11.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx.$

11.8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$

11.9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \operatorname{tg}^4 3x}.$

11.10. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx.$

11.11. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx.$

11.12. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx.$

11.13. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x} dx.$

11.14. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x} dx.$

11.15. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x} dx.$

11.16. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{\operatorname{tg} 4x}}.$

11.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \operatorname{ctg}^3 3x}.$

11.18. $\int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x} dx.$

11.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$

11.20. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x} dx.$

11.21. $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 4x}{\sin^2 4x} dx.$

11.22. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 7x}}{\cos^2 7x} dx.$

11.23. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x}\,dx.$

11.24. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}\,dx.$

11.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}.$

11.26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}.$

11.27. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}\,dx.$

11.28. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}\,dx.$

11.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}\,dx.$

11.30. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x}\,dx.$

12

12.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2}\,dx.$

12.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12.3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

12.4. $\int \frac{\arccos \operatorname{tg}^3 2x}{1+4x^2}\,dx.$

12.5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

12.6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}.$

12.7. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

12.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2}\,dx.$

12.9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}.$

12.11. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.12. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x}{1+9x^2}\,dx.$

12.13. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx.$

12.14. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12.15. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.16. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^7 x}.$

12.17. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

12.18. $\int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2}\,dx.$

12.19. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}\,dx.$

12.20. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$

12.21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^5 x}$.

12.22. $\int \frac{\arccos^7 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

12.23. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

12.24. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{1+25x^2} dx$.

12.25. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$.

12.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$.

12.27. $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2} dx$.

12.28. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$.

12.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$.

12.30. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$.

13

13.1. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$.

13.2. $\int \frac{xdx}{e^{x^2}+3}$.

13.3. $\int \frac{x^2dx}{e^{x^3}+1}$.

13.4. $\int e^{\cos x} \sin xdx$.

13.5. $\int e^{2x^3-1}x^2dx$.

13.6. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$.

13.7. $\int e^{7x^2+2}xdx$.

13.8. $\int e^{3-x^2}xdx$.

13.9. $\int e^{4x^2+5}xdx$.

13.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}}$.

13.11. $\int e^{5x^2-3}xdx$.

13.12. $\int e^{1-4x^2}xdx$.

13.13. $\int e^{3x^2+4}xdx$.

13.14. $\int e^{\sin x+1} \cos xdx$.

13.15. $e^{4-x^2}xdx$.

13.16. $\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

13.17. $\int e^{3\cos x+2} \sin xdx$.

13.18. $\int e^{4\sin x-1} \cos xdx$.

13.19. $\int e^{5x^2-3}xdx$.

13.20. $\int e^{5-2x^2}xdx$.

13.21. $\int e^{4-3x^2}xdx$.

13.22. $\int e^{\cos 2x} \sin 2xdx$.

13.23. $\int e^{1-6x^2}xdx$.

13.24. $\int e^{x^3+1}x^2dx$.

13.25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.

13.26. $\int e^{3x^3}x^2dx$.

13.27. $\int \frac{x^4dx}{e^{x^5+1}}$.

13.28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$.

13.29. $\int \frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$.

13.30. $e^{4-5x^2}xdx$.

14.1. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}dx.$

14.2. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx.$

14.3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}dx.$

14.4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

14.5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx.$

14.6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}dx.$

14.7. $\int \frac{5+x}{3x^2+1}dx.$

14.8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx.$

14.9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx.$

14.10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+1}dx.$

14.11. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}dx.$

14.12. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx.$

14.13. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}dx.$

14.14. $\int \frac{x-3}{4x^2+1}dx.$

14.15. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}dx.$

14.16. $\int \frac{3x-1}{4-x^2}dx.$

14.17. $\int \frac{5x-2}{x^2+9}dx.$

14.18. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$

14.19. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx.$

14.20. $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx.$

14.21. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

14.22. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}dx.$

14.23. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2}dx.$

14.24. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

14.25. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx.$

14.26. $\int \frac{3-2x}{x^2-8}dx.$

14.27. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}dx.$

14.28. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx.$

14.29. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx.$

14.30. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx.$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1—5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1. $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx.$

▶ Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель и использовав второе и третье правила интегрирования, а также таблицу основных неопределенных интегралов, получим

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$$

$$= 4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} +$$

$$+ \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Проверим полученный результат:

$$\left(4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}x^{-1/4} - \frac{8}{19}\times$$

$$\times\frac{19}{4}x^{15/4} + \frac{12}{17}\frac{17}{12}x^{5/12} = 3x^{-1/4} - 2x^{15/4} + x^{5/12}. \blacktriangleleft$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}.$

▶ $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-2/5}dx = -\frac{5}{8\cdot 3}(4-8x)^{3/5} +$$

$$+ C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C.$$

Выполним проверку результата:

$$\left(-\frac{5}{24}(4-8x)^{3/5} + C\right)' = -\frac{5}{24}\frac{3}{5}(4-8x)^{-2/5}(-8) =$$

$$= (4-8x)^{-2/5}. \blacktriangleleft$$

3. $\int \frac{dx}{6-7x}.$

▶ $\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C.$

Проверим полученный результат:

$$\left(-\frac{1}{7}\ln|6-7x|+C\right)'=-\frac{1}{7}\frac{1}{6-7x}\cdot(-7)=\frac{1}{6-7x}. \blacktriangleleft$$

4. $\int \cos(2-5x)dx$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int \cos(2-5x)dx=-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C.$

Выполним проверку результата:

$$\left(-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C\right)'=-\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5)=$$
$$=\cos(2-5x). \blacktriangleleft$$

5. $\displaystyle\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2-(\sqrt{3})^2}}=\frac{3}{2}\ln|2x-\sqrt{4x^2-3}|+C.$

Проверим полученный результат:

$$\left(\frac{3}{2}\ln|2x-\sqrt{4x^2-3}|+C\right)'=\frac{3}{2}\left(\frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}}{2x-\sqrt{4x^2-3}}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{2(\sqrt{4x^2-3}+2x)}{(2x+\sqrt{4x^2-3})\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}. \blacktriangleleft$$

6. $\displaystyle\int\frac{7xdx}{3x^2+4}$.

$\blacktriangleright$ Преобразуем подынтегральную функцию таким образом, чтобы в числителе получилась производная знаменателя:

$$\int\frac{7xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\int\frac{6xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\ln(3x^2+4)+C. \blacktriangleleft$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}+C. \blacktriangleleft$

8. $\int e^{5-4x}dx$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int e^{5-4x}dx=-\frac{1}{4}\int e^{5-4x}d(5-4x)=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C. \blacktriangleleft$

9. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \int \ln^{3/7}(x+2)d(\ln(x+2)) =$$
$$= \frac{7}{10}\ln^{10/7}(x+2) + C = \frac{7}{10}\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)} + C. \blacktriangleleft$$

10. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}}.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}}dx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x - 4)^{-1/5} 3\cos 3x dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int (\sin 3x - 4)^{-1/5} d(\sin 3x - 4) = \frac{1}{3}\,\frac{5}{4}(\sin 3x - 4)^{4/5} +$$
$$+ C = \frac{5}{12}\sqrt[5]{(\sin 3x - 4)^4} + C. \blacktriangleleft$$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 4x}}.$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 4x}} = -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^{-2/3} 4x\left(-\frac{4}{\sin^2 4x}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^{-2/3} 4x d(\operatorname{ctg} 4x) = -\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^{1/3} 4x + C =$$
$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 4x} + C. \blacktriangleleft$$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{5/3} 2x\left(-\frac{2}{1+4x^2}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{5/3} 2x d(\operatorname{arcctg} 2x) = -\frac{1}{2}\,\frac{3}{8}\operatorname{arcctg}^{8/3} 2x +$$
$$+ C = -\frac{3}{16}\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^8 2x} + C. \blacktriangleleft$$

13. $\int e^{3\cos x + 2}\sin x dx.$

$$\blacktriangleright \int e^{3\cos x+2}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x + 2} d(3\cos x + 2) =$$
$$= -\frac{1}{3}e^{3\cos x + 2} + C. \blacktriangleleft$$

14. $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx.$

► $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{12xdx}{6x^2-4} +$

$+ \frac{10}{\sqrt{6}}\int \frac{dx}{(\sqrt{6}x)^2-2^2} = \frac{1}{4}\ln|6x^2-4| + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right| + C.$ ◄

ИДЗ-8.2

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx.$

(*Ответ:* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C.$)

1.2. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

(*Ответ:* $3\arcsin x + 5\sqrt{1-x^2} + C.$)

1.3. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

(*Ответ:* $8\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - 13\sqrt{x^2-1} + C.$)

1.4. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx.$

(*Ответ:* $\frac{3}{2}\ln|2x^2-1| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$)

1.5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx.$

(*Ответ:* $-\sqrt{2-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$)

1.6. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

(*Ответ:* $\frac{3}{2}\arcsin 2x + \frac{7}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$)

1.7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}\right| - \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1} + C.\right)$

1.8. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2-x^2} + C.\right)$

1.9. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{4}\ln|2x^2+1| + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}x + C.\right)$

1.10. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,5x - \frac{1}{10}\ln|1+25x^2| + C.\right)$

1.11. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\ln|3x^2-4| - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right| + C.\right)$

1.12. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx.$

$(\textit{Ответ: } 5\sqrt{x^2-6} + \ln|x+\sqrt{x^2-6}| + C.)$

1.13. $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{18}\ln|9x^2+7| - \frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

1.14. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{4-3x^2} + C.\right)$

1.15. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 2\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\right)$

1.16. $\int \frac{5-x}{2+x^2}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + C.\right)$

1.17. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{1+4x^2}| + \frac{3}{4}\sqrt{1+4x^2} + C.\right)$

1.18. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

$(\text{\textit{Ответ:}}\ 5\arcsin x + 4\sqrt{1-x^2} + C.)$

1.19. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx.$

$(\text{\textit{Ответ:}}\ 5\sqrt{x^2-3} - \ln|x+\sqrt{x^2-3}| + C.)$

1.20. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{3}{8}\ln|4x^2-1| + C.\right)$

1.21. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2| + \right.$

$\left. + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right| + C.\right)$

1.22. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\sqrt{9-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{3} + C.\right)$

1.23. $\int \frac{2x-7}{x^2-5}dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \ln|x^2-5| - \frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.\right)$

1.24. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

(*Ответ:* $7\sqrt{x^2-1}-2\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$)

1.25. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

(*Ответ:* $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+3\sqrt{x^2+1}+C.$)

1.26. $\int \frac{x-5}{x^2+7}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x^2+7|-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C.\right)$

1.27. $\int \frac{3-7x}{1+x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\operatorname{arctg}x-\frac{7}{2}\ln|1+x^2|+C.\right)$

1.28. $\int \frac{8-2x}{1+3x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x-\frac{1}{3}\ln|1+3x^2|+C.\right)$

1.29. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

(*Ответ:* $3\sqrt{x^2+4}+7\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C.$)

1.30. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-4}|+C.\right)$

2

2.1. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x|+C.\right)$

2.2. $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C.\right)$

2.3. $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\ln|3-\cos 3x| + C.\right)$

2.4. $\int \frac{e^x dx}{2e^x+3}.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|2e^x+3| + C.\right)$

2.5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}dx.$

$(\textit{Ответ: } -\ln|\cos^2 x-4| + C.)$

2.6. $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x}.$

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{3}\ln|4-3e^x| + C.\right)$

2.7. $\int \frac{x^2 dx}{7-5x^3}.$

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{15}\ln|7-5x^3| + C.\right)$

2.8. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\ln|3\sin^2 x+4| + C.\right)$

2.9. $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|5+e^{2x}| + C.\right)$

2.10. $\int \frac{4x^3}{7+2x^4}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|7+2x^4| + C.\right)$

2.11. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}dx.$

$(\textit{Ответ: } \ln|2x^2-5x+17| + C.)$

2.12. $\int \frac{7x^3}{2x^4-5}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{7}{8}\ln|2x^4-5| + C.\right)$

2.13. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x - 2}} dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{\sin 3x - 2} + C.\right)$

2.14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$ $(\textit{Ответ: } -2\sqrt{1 + \cos^2 x} + C.)$

2.15. $\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx.$

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + C.\right)$

2.16. $\int \frac{\sin 2x}{4 - \sin^2 x} dx.$

$(\textit{Ответ: } -\ln |4 - \sin^2 x| + C.)$

2.17. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 5} dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3} \ln |e^{3x} - 5| + C.\right)$

2.18. $\int \frac{x^2}{7 + 3x^3} dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{9} \ln |7 + 3x^3| + C.\right)$

2.19. $\int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x} dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x| + C.\right)$

2.20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 3}} dx.$

$(\textit{Ответ: } \sqrt{e^{2x} + 3} + C.)$

2.21. $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 10} dx.$ $(\textit{Ответ: } \ln |x^3 + x - 10| + C.)$

2.22. $\int \frac{x^5}{3x^6 - 7} dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{18} \ln |3x^6 - 7| + C.\right)$

2.23. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 3}}.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{5}\sqrt{x^5 + 3} + C.\right)$

2.24. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx$. (*Ответ:* $\sqrt{2x^3-4x}+C$.)

2.25. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}dx$.

$\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{2}{7}\sqrt{5-\sin 7x}+C.\right)$

2.26. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}dx$. $\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{1}{2}\sqrt{\cos 4x+3}+C.\right)$

2.27. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}dx$. (*Ответ:* $\ln|4x^3+x^5|+C$.)

2.28. $\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. (*Ответ:* $-4\sqrt{1-e^{2x}}+C$.)

2.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{6-\cos^2 x}+C$.)

2.30. $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$. $\left(\textit{Ответ:} \ \frac{7}{5}\sqrt{5x^2-4}+C.\right)$

3

3.1. $\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx$.

$\left(\textit{Ответ:} \ -\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg} x+C.\right)$

3.2. $\int \frac{7-x^2}{1-x}dx$. $\left(\textit{Ответ:} \ \frac{x^2}{2}+x-6\ln|1-x|+C.\right)$

3.3. $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$.

$\left(\textit{Ответ:} \ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\right)$

3.4. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$.

$\left(\textit{Ответ:} \ \frac{4}{3}x^3-x^2+x-\ln|2x+1|+C.\right)$

3.5. $\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$.

$\left(\textit{Ответ:} \frac{1}{4}x^4+2x^2+8\ln|x^2-4|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.\right)$

3.6. $\int\frac{2x^4-3}{x^2+1}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}x^3-2x-\operatorname{arctg}x+C.\right)$

3.7. $\int\frac{x^3-1}{2x+1}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}x-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.\right)$

3.8. $\int\frac{x^5}{1-x^3}dx.$ $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|+C.\right)$

3.9. $\int\frac{x^2}{x^2+3}dx.$ $\left(\textit{Ответ: } x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.\right)$

3.10. $\int\frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } x^3+x^2+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.\right)$

3.11. $\int\frac{x^4}{x^2-3}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{x^3}{3}+3x+\frac{9}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.\right)$

3.12. $\int\frac{x^3+5x}{x^2+1}dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{2}+2\ln|x^2+1|+C.\right)$

3.13. $\int\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } x-\frac{5}{2}\ln|x^2-4|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

3.14. $\int\frac{x^3-1}{x+3}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln|x+3|+C.\right)$

3.15. $\int\frac{x^3}{x^2-1}dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.\right)$

3.16. $\int\frac{x^4+1}{x^2+1}dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}x^3-x+2\operatorname{arctg}x+C.\right)$

3.17. $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^2 + 1} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^3}{3} - 3x + 2 \operatorname{arctg} x + C.\right)$

3.18. $\int \frac{x^4 + 2}{x^2 - 4} dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^3}{3} + 4x + \frac{9}{2} \ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.\right)$

3.19. $\int \frac{x^3 - 3}{x + 5} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 25x - 128 \ln |x + 5| + C.\right)$

3.20. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + \operatorname{arctg} x + C.\right)$

3.21. $\int \frac{1 - 2x^4}{x^2 + 1} dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{2}{3}x^3 + 2x - \operatorname{arctg} x + C.\right)$

3.22. $\int \frac{2x^3 - 3}{x - 2} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 8x + 13 \ln |x - 2| + C.\right)$

3.23. $\int \frac{2x^2 + 5}{x + 1} dx.$ (*Ответ:* $2x + 3 \operatorname{arctg} x + C.$)

3.24. $\int \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 + 2} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.\right)$

3.25. $\int \frac{x^2 + x}{2 - x} dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln |x - 2| + C.\right)$

3.26. $\int \frac{2x^2 + 5}{x - 7} dx.$

(*Ответ:* $x^2 + 14x + 103 \ln |x - 7| + C.$)

3.27. $\int \frac{2x^3 + 3}{x - 1} dx.$

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x + 5 \ln |x - 1| + C.\right)$

3.28. $\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{x^3}{3}+4x-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

3.29. $\int \frac{x^2+4}{x-3}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2}+3x+13\ln|x-3|+C.\right)$

3.30. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ x+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.\right)$

4

4.1. $\int \sin^2(1-x)dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2(1-x)+C.\right)$

4.2. $\int \sin^3(1-x)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \cos(1-x)-\frac{1}{3}\cos^3(1-x)+C.\right)$

4.3. $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3x+20\cos\frac{x}{5}-5\sin\frac{2x}{5}+C.\right)$

4.4. $\int \cos^3 5x\sin 5x dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{20}\cos^4 5x+C.\right)$

4.5. $\int \cos^3(1-x)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\sin(1-x)+\frac{1}{3}\sin^3(1-x)+C.\right)$

4.6. $\int (3-\sin 2x)^2 dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{19}{2}x+3\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.\right)$

4.7. $\int \sin^2\frac{3x}{2}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 3x+C.\right)$

4.8. $\int (\cos x+3)^2 dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{19}{2}x+6\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right)$

4.9. $\int \cos^3(x+3)dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \sin(x+3)-\frac{1}{3}\sin^3(x+\right.$
$\left.+3)+C.\right)$

4.10. $\int \sin^3 \frac{4x}{5}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{5}{4}\cos\frac{4x}{5} + \frac{5}{12}\cos^3\frac{4x}{5} + \right.$ $\left. + C.\right)$

4.11. $\int (1-\cos x)^2\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}x - 2\sin x + \right.$ $\left. + \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right)$

4.12. $\int \sin^2 (2x-1) dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x-2) + C.\right)$

4.13. $\int \sin^3 6x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{18}\cos^3 6x + C.\right)$

4.14. $\int \sin^2 0{,}5x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.\right)$

4.15. $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right) dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin (x + \right.$ $\left. + 2) + C.\right)$

4.16. $\int \cos^2 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.\right)$

4.17. $\int \left(1 + 2\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3x + 8\sin\frac{x}{2} + \right.$ $\left. + 2\sin x + C.\right)$

4.18. $\int \cos^2 3x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.19. $\int \sin^4 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \right.$ $\left. + \frac{1}{64}\sin 8x + C.\right)$

4.20. $\int \sin^2 3x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.21. $\int (1-\cos 3x)^2 dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}\sin 3x + \right.$ $\left. + \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.22. $\int \cos^2 \frac{2x}{5}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}\sin\frac{4x}{5} + C.\right)$

4.23. $\int \sin^3 5x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{15}\cos^3 5x + \right.$ $\left. + C.\right)$

4.24. $\int \sin^4 x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\right)$

4.25. $\int \cos^4 x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\right)$

4.26. $\int \cos^3 4x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin^3 4x + C.\right)$

4.27. $\int \cos^2 7x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}x + \frac{1}{28}\sin 14x + C.\right)$

4.28. $\int (\sin x - 5)^2 dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{51}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 10\cos x + C.\right)$

4.29. $\int \sin^3 4x dx$.

$\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos^3 4x + C.\right)$

4.30. $\int \sin^2 \frac{3x}{4} dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\sin \frac{3x}{2} + C.\right)$

5

5.1. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. (Ответ: $\operatorname{tg} x - x + C.$)

5.2. $\int \operatorname{ctg}^3 (x-6) dx$.

$\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2(x-6) - \ln|\sin(x-6)| + C.\right)$

5.3. $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + x + C.\right)$

5.4. $\int \operatorname{tg}^2 7x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x + C.\right)$

5.5. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.\right)$

5.6. $\int x \operatorname{tg}^2 x^2 dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C.\right)$

5.7. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.\right)$

5.8. $\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C.\right)$

5.9. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.\right)$

5.10. $\int \operatorname{tg}^2 4x\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\operatorname{tg}4x-x+C.\right)$

5.11. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.\right)$

5.12. $\int \operatorname{ctg}^2 5x\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}5x-x+C.\right)$

5.13. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+C.\right)$

5.14. $\int (1-\operatorname{tg}2x)^2\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+C.\right)$

5.15. $\int \operatorname{tg}^5 2x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.\right)$

5.16. $\int (2x+\operatorname{tg}^2 7x)\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x^2+\frac{1}{7}\operatorname{tg}7x-x+C.\right)$

5.17. $\int \operatorname{tg}^4\frac{2x}{3}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{2x}{3}+x+C.\right)$

5.18. $\int (\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x)^2\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+C.\right)$

5.19. $\int (1-\operatorname{ctg}x)^2\,dx$.

$(\textit{Ответ:}\ -2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg}x+C.)$

5.20. $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C.\right)$

5.21. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C.\right)$

5.22. $\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ 6\operatorname{tg}\frac{x}{6}-x+C.\right)$

5.23. $\int \operatorname{tg}^4(x-6)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x-6)-\operatorname{tg}(x-6)+x+C.\right)$

5.24. $\int \operatorname{tg}^3 4xdx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x+\frac{1}{4}\ln|\cos 4x|+C.\right)$

5.25. $\int \operatorname{tg}^4\frac{x}{4}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{4}-4\operatorname{tg}\frac{x}{4}+x+C.\right)$

5.26. $\int \operatorname{tg}^4(x+5)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\operatorname{tg}^3(x+5)}{3}-\operatorname{tg}(x+5)+x+C.\right)$

5.27. $\int \operatorname{tg}^3(x-3)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x-3)+\ln|\cos(x-3)|+C.\right)$

5.28. $\int \operatorname{tg}^2(5x+1)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x+1)-x+C.\right)$

5.29. $\int \operatorname{tg}^2\frac{7x}{4}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{7}\operatorname{tg}\frac{7x}{4}-x+C.\right)$

5.30. $\int \operatorname{tg}^5 4xdx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{46}\operatorname{tg}^4 4x-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x+bx+C.\right)$

6

6.1. $\int \sin 3x\cos xdx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.\right)$

6.2. $\int \sin^5 2x\cos 2xdx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{12}\sin^6 2x+C.\right)$

6.3. $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{9}\sin^3 3x + C.\right)$

6.4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos^4 5x + C.\right)$

6.5. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{4} - 2\cos\frac{x}{4} + C.\right)$

6.6. $\int \cos x \sin 9x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.\right)$

6.7. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{10}\sin^5 2x + C.\right)$

6.8. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos x + C.\right)$

6.9. $\int \cos^5 x \sin x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.\right)$

6.10. $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C.\right)$

6.11. $\int \sin 5x \sin 7x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.\right)$

6.12. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right)$

6.13. $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{16}\cos^4 4x + C.\right)$

6.14. $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\cos^{-2} 2x + C.\right)$

6.15. $\int \cos x \sin 9x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.\right)$

6.16. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{2}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right)$

6.17. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C.\right)$

6.18. $\int \sin^3 7x \cos 7x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{28} \sin^4 7x + C.\right)$

6.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2} \cos^{-2} x + C.\right)$

6.20. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 2x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{6 \sin^3 2x} + C.\right)$

6.21. $\int \cos 2x \cos 5x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{14} \sin 7x + C.\right)$

6.22. $\int \sin^2 2x \cos x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{4}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + C.\right)$

6.23. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{3 \sin^3 x} + C.\right)$

6.24. $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C.\right)$

6.25. $\int \sin x \cos^3 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{\cos^4 x}{4} + C.\right)$

6.26. $\int \sin 5x \cos x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.\right)$

6.27. $\int \sin x \cos 4x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{6} \cos 3x + C.\right)$

6.28. $\int \cos 3x \cos x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.\right)$

6.29. $\int \cos^4 2x \sin 2x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{10} \cos^5 2x + C.\right)$

6.30. $\int \cos 7x \cos 5x dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin 12x + C.\right)$

7

7.1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{39}}+C.\right)$

7.2. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.\right)$

7.3. $\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right|+C.\right)$

7.4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+4}\right|+C.\right)$

7.5. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{34}}+C.\right)$

7.6. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$. $(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg}(2x-1)+C.)$

7.7. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{105}}\ln\left|\frac{4x-11-\sqrt{105}}{4x-11+\sqrt{105}}\right|+C.\right)$

7.8. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{15}}+C.\right)$

7.9. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C.\right)$

7.10. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3/2}\right|+C.\right)$

7.11. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.\right)$

7.12. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{11}} + C.\right)$

7.13. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{10} \ln\left|\frac{3x-9}{3x+1}\right| + C.\right)$

7.14. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right| + C.\right)$

7.15. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.\right)$

7.16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{21}} + C.\right)$

7.17. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{11}} + C.\right)$

7.18. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.\right)$

7.19. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + C.\right)$

7.20. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5} \ln\left|\frac{2x-4}{2x+1}\right| + C.\right)$

7.21. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{7}}{2x-3+\sqrt{7}}\right| + C.\right)$

7.22. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x-3}{\sqrt{7}} + C.\right)$

7.23. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x+7-\sqrt{5}}{2x+7+\sqrt{5}}\right| + C.\right)$

7.24. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right| + C.\right)$

7.25. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.\right)$

7.26. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{dx}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{3}}{2x+3+\sqrt{3}}\right| + C.\right)$

7.27. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + C.\right)$

7.28. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{4} \ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right| + C.\right)$

7.29. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{39}} + C.\right)$

7.30. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{6x+5-\sqrt{13}}{6x+5+\sqrt{13}}\right| + C.\right)$

8

8.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{x-4}{\sqrt{20}} + C.\right)$

8.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|x-\frac{2}{3}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\right| + C.\right)$

8.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{5} + C.\right)$

8.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$.

$(\textit{Ответ:}\ \ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}| + C.)$

8.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$)

8.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{4}{5}}\right| + C.$)

8.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{x-1}{2} + C.$)

8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{3}{4}}\right| + C.$)

8.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$)

8.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x-\frac{1}{8}+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x+1}\right| + C.$)

8.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$. (*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{10}} + C.$)

8.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+1}\right| + C.$)

8.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$. (*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C.$)

8.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$)

8.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

(*Ответ:* $\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right| + C.$)

8.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{3} + C.\right)$

8.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}\right| + C.\right)$

8.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+1}{\sqrt{17}} + C.\right)$

8.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-1}\right| + C.\right)$

8.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C.\right)$

8.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}\right| + C.\right)$

8.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\right)$

8.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+3}{5} + C.\right)$

8.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+1}\right| + C.\right)$

8.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{13}} + C.\right)$

8.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

$(\textit{Ответ:}\ \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}| + C.)$

9

9.1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+3x-4| + \right.$
$\left. + \frac{1}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{41}}{4x+3+\sqrt{41}}\right| + C.\right)$

9.2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{6}\ln|3x^2+x+1| + \right.$
$\left. + \frac{35}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{11}} + C.\right)$

9.3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\ln|3x^2-2x+6| - \right.$
$\left. - \frac{1}{3\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{17}} + C.\right)$

9.4. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+x+5}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+5| - \right.$
$\left. - \frac{1}{2\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{39}} + C.\right)$

9.5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2+x-2| + \right.$
$\left. + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.\right)$

9.6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{10}\ln|5x^2-3x+2| - \right.$
$\left. - \frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C.\right)$

9.7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2-6x-8| + \right.$
$\left. + \frac{11}{20}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C.\right)$

9.8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2-7x+1| + \right.$
$\left. + \frac{23}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right| + C.\right)$

9.9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{5}{4}\ln|2x^2-5x+2| + \right.$
$\left. + \frac{17}{12}\ln\left|\frac{2x-4}{2x-1}\right| + C.\right)$

9.10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|4x^2-4x+5| + \right.$
$\left. + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2} + C.\right)$

9.11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \right.$
$\left. + \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C.\right)$

9.12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{6}\ln|3x^2-2x-3| + \right.$
$\left. + \frac{2}{3\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3x-1-\sqrt{10}}{3x-1+\sqrt{10}}\right| + C.\right)$

9.13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|4x^2+6x-13| + \right.$
$\left. + \frac{5}{2\sqrt{61}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{61}}{4x+3+\sqrt{61}}\right| + C.\right)$

9.14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{2}\ln|x^2-4x+1| + \right.$
$\left. + \frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right| + C.\right)$

9.15. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+5| - \right.$
$\left. - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3} + C.\right)$

9.16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4| - \right.$
$\left. - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C.\right)$

9.17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|2x^2+8x - \right.$
$\left. -6| - \frac{5}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right| + C.\right)$

9.18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{8}\ln|4x^2+16x-$

$-12|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+C.\Big)$

9.19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x\quad 9}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln|3x^2-6x-9|+$

$+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.\Big)$

9.20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{2}\ln|2x^2-x-3|+$

$+\frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right|+C.\Big)$

9.21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{6}\ln|3x^2+x-1|-$

$-\frac{25}{6\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{13}}{6x+1+\sqrt{13}}\right|+C.\Big)$

9.22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\ln|x^2-4x-2|+$

$+\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{6}}{x-2+\sqrt{6}}\right|+C.\Big)$

9.23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{4}\ln|2x^2+x-4|+$

$+\frac{21}{4\sqrt{33}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{33}}{4x+1+\sqrt{33}}\right|+C.\Big)$

9.24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln|3x^2+2x-7|+$

$+\frac{7}{6\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3x+1-\sqrt{22}}{3x+1+\sqrt{22}}\right|+C.\Big)$

9.25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{8}\ln|4x^2+2x-3|-$

$-\frac{\sqrt{13}}{8}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}}\right|+C.\Big)$

9.26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{6}\ln|3x^2-x+5| + \right.$

$$\left. + \frac{13}{3\sqrt{59}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{59}} + C.\right)$$

9.27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\ln|x^2+5x-1| - \right.$

$$\left. - \frac{19}{2\sqrt{29}}\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{29}}{2x+5+\sqrt{29}}\right| + C.\right)$$

9.28. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{8}\ln|4x^2+3x-1| - \right.$

$$\left. - \frac{59}{40}\ln\left|\frac{8x-2}{8x+8}\right| + C.\right)$$

9.29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5}\ln|5x^2+2x-10| + \right.$

$$\left. + \frac{3}{5\sqrt{49}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{49}} + C.\right)$$

9.30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{10}\ln|5x^2-x+7| - \right.$

$$\left. - \frac{39}{5\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{139}} + C.\right)$$

10

10.1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16} - \right.$

$$\left. - 4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}\right| + C.\right)$$

10.2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-1} - \right.$

$$\left. - \sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-\frac{1}{2}}\right| + C.\right)$$

10.3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5} - \right.$

$$\left. - \frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}}\right| + C.\right)$$

10.4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2}+\right.$

$\left.+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{3}}+C.\right)$

10.5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\right.$

$\left.+\frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}\right|+C.\right)$

10.6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -2\sqrt{1+x-x^2}-\right.$

$\left.-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.\right)$

10.7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\sqrt{1-x+x^2}-\right.$

$\left.-7\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.\right)$

10.8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}\,dx$. (Ответ: $3\sqrt{x^2+6x+13}-$

$-5\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}|+C.$)

10.9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-5x+1}+\right.$

$\left.+\frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}}\right|+C.\right)$

10.10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 5\sqrt{x^2+3x-4}-\right.$

$\left.-\frac{11}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-4}\right|+C.\right)$

10.11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-x+7}-\right.$

$\left.-\frac{15}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}}\right|+C.\right)$

10.12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x^2-3x+4}+$

$$+2\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+4}\right|+C.\Big)$$

10.13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-4\sqrt{2+x-x^2}+$

$$+3\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.\Big)$$

10.14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+4x-5}-$

$$-4\sqrt{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{5}{2}}\right|+C.\Big)$$

10.15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-3\sqrt{4+2x-x^2}+$

$$+5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.\Big)$$

10.16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}-$

$$-\frac{20}{3\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C.\Big)$$

10.17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\sqrt{3-6x-x^2}+$

$$+2\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}}+C.\Big)$$

10.18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x-5}+$

$$+\frac{11}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}\right|+C.\Big)$$

10.19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $7\sqrt{x^2-5x+1}+$

$$+\frac{31}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.\Big)$$

10.20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+x-5}-\right.$

$\left.-\frac{65}{16}\ln\left|x+\frac{1}{8}+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}}+C.\right)\right.$

10.21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -3\sqrt{2+3x-x^2}+\right.$

$\left.+\frac{17}{2}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.\right)$

10.22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -\sqrt{3-2x-x^2}-\right.$

$\left.-7\arcsin\frac{x+1}{2}+C.\right)$

10.23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \sqrt{2x^2-x+6}+\right.$

$\left.+\frac{7}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+3}\right|+C.\right)$

10.24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -\sqrt{4+2x-x^2}-\right.$

$\left.-8\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.\right)$

10.25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\sqrt{x^2+5x-4}+\right.$

$\left.+2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right|+C.\right)$

10.26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-6x+1}+\right.$

$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{2}}\right|+C.\right)$

10.27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-4}+\right.$

$\left.+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-\frac{4}{3}}\right|+C.\right)$

10.28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}\,dx$. $\left(Ответ:\ 2\sqrt{2x^2-x+5}+\right.$

$$\left.+2\sqrt{2}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C.\right)$$

10.29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$. $\left(Ответ:\ 3\sqrt{x^2-5x+1}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.\right)$$

10.30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}\,dx$. $\left(Ответ:\ -7\sqrt{2-3x-x^2}-\right.$

$$\left.-\frac{23}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C.\right)$$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}\,dx$.

$$▶ \int \frac{3-7x}{4x^2+5}\,dx = 3\int \frac{dx}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - 7\int \frac{x\,dx}{4x^2+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2} - \frac{7}{8}\int \frac{8x\,dx}{4x^2+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8}\ln(4x^2+5)+C. ◀$$

2. $\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}$.

▶ Воспользуемся подстановкой $u = 2-e^{-3x}$. Тогда $du = 3e^{-3x}dx$ и

$$\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})} = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{-3x}dx}{2-e^{-3x}} = \frac{1}{3}\ln|2-e^{-3x}|+C. ◀$$

3. $\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\,dx$.

▶ Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель, выделим целую часть неправильной дроби, стоящей под знаком интеграла. Получим интеграл от алгебраической суммы:

$$\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\,dx = \int \left(3x^2 - 3x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \blacktriangleleft$$

4. $\int \cos^3(7x+2)\,dx.$

► Используя тригонометрическое тождество $\cos^2(7x+ +2) = 1 - \sin^2(7x+2)$, получаем

$$\int \cos^3(7x+2)dx = \int \cos^2(7x+2)\cos(7x+2)dx =$$
$$= \int (1-\sin^2(7x+2))\cos(7x+2)dx = \int \cos(7x+2)dx -$$
$$- \int \sin^2(7x+2)\cos(7x+2)dx = \frac{1}{7}\sin(7x+2) -$$
$$- \frac{1}{7}\int \sin^2(7x+2)d(\sin(7x+2)) = \frac{1}{7}\sin(7x+2) -$$
$$- \frac{1}{21}\sin^3(7x+2) + C. \blacktriangleleft$$

5. $\int \operatorname{ctg}^4 5x\,dx.$

◄ Так как $\operatorname{ctg}^2 5x = \frac{1}{\sin^2 5x} - 1$, то

$$\int \operatorname{ctg}^4 5x\,dx = \int \operatorname{ctg}^2 5x\left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1\right) dx =$$
$$= \int \operatorname{ctg}^2 5x \frac{1}{\sin^2 5x}\,dx - \int \operatorname{ctg}^2 5x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{5}\int \operatorname{ctg}^2 5x\left(-\frac{5}{\sin^2 5x}\right) dx - \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{15}\operatorname{ctg}^3 5x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + x + C. \blacktriangleleft$$

6. $\int \sin\frac{7}{2}x \sin\frac{3}{2}x\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 5x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{10}\sin 5x + C. \blacktriangleleft$$

7. $\int \frac{dx}{6x^2-3x+2}.$

► Выделим в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат. Тогда

$$\int \frac{dx}{6x^2-3x+2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}x + 1/3} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x-1/4)^2+1/3-1/16} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/4}{\sqrt{13}/(4\sqrt{3})} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{(4x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + C. ◀$$

8. $\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}\,dx.$

▶ Выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя, получим

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}\,dx - \frac{3}{2}\cdot 9\int \frac{dx}{2-5x-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2}\int \frac{dx}{(x-5/2)^2-2-25/4} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2}\int \frac{dx}{(x-5/2)^2-(\sqrt{33}/2)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2| + \frac{27}{2\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x-5/2-\sqrt{33}/2}{x-5/2+\sqrt{33}/2}\right| + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2| + \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right| + C. ◀$$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}.$

▶ Выделив в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-7/5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(x+1/5)}{\sqrt{(x+1/5)^2-7/5-1/25}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+1/5+\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-7/5}\right| + C. ◀$$

10. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx.$

▶ Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, предварительно выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной подкоренного выражения из знаменателя:

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+2/3}{\sqrt{7}/3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-8.3

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + \sqrt{1-x^2} + C.\right)$

1.2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C.\right)$

1.3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \left(\sqrt{4+x^2} + \ln\left|\frac{2-\sqrt{4+x^2}}{2+\sqrt{4+x^2}}\right| + C.\right)\right.$

1.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ:} C - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.5. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.\right)$

1.6. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2+9}+\right.$

$$\left.+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3+\sqrt{x^2+9}}\right|+C.\right)$$

1.7. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x-\sqrt{4+x^2}}\right|-\right.$

$$\left.-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.\right)$$

1.8. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.9. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.\right)$

1.10. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.11. $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{x^5}.\right)$

1.12. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+C.\right)$

1.13. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.\right)$

1.14. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.\right)$

1.15. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}-\right.$

$$\left.-3\sqrt{(9-x^2)^3}+C.\right)$$

1.16. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.\right)$

1.17. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.\right)$

1.18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}-x}\right| - \right.$

$\left. - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C.\right)$

1.19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C.\right)$

1.20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{27}\,\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}.\right)$

1.22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{8}\arcsin x - \right.$

$\left. - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) + C.\right)$

1.23. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \right.$

$\left. - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.\right)$

1.24. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx}{x^4}$. $\left(\text{Ответ: } \arcsin\frac{x}{2} + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3} + C.\right)$

1.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.\right)$

1.26. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{27}\,\frac{\sqrt{(9+x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.\right)$

1.28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.\right)$

1.29. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{48}\,\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}.\right)$

1.30. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{x}{4} - \right.$

$\left. - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + C.\right)$

2

2.1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1} - \right.\right.$

$\left.\left. - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}(x+1)}\right|.\right)$

2.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\text{Ответ: } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.\right)$

2.3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\right)$

2.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|.\right)$

2.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|.\right)$

2.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{1}{x}.\right)$

2.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|.\right)$

2.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{1}{2}\right|.\right)$

2.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}\,x}.\right)$

2.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}\,x}.\right)$

2.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ:* $C - \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$.)

2.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$. (*Ответ:* $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4-x}{3x}$.)

2.13. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$. (*Ответ:* $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3}(x+1)}\right|$.)

2.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$. (*Ответ:* $C - \ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$.)

2.15. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. (*Ответ:* $C - \ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.)

2.16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$. (*Ответ:* $C - \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)}$.)

2.17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{5}(x+1)} + C$.)

2.18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. (*Ответ:* $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right|$.)

2.19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$. (*Ответ:* $C - \ln\left|\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\right|$.)

2.20. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x-1} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x-1}\right|.\right)$

2.21. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin \frac{3-x}{\sqrt{5}(x-1)}.\right)$

2.22. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x-1} - \right.\right.$

$\left.\left. - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x-1}\right|.\right)$

2.23. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x+1} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|.\right)$

2.24. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin \frac{3x-1}{\sqrt{5}(x-1)}.\right)$

2.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x}\right|.\right)$

2.26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6-x}{x\sqrt{3}}.\right)$

2.27. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \right.$

$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+5}{3(x+1)}.\right)$

2.28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x}\right|.\right)$

2.29. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$. $\Bigl($*Ответ:* $C-$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x+1}\right|.\Bigr)$$

2.30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$. $\Bigl($*Ответ:* $C-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\right.$

$$\left.+\frac{\sqrt{1-3x-2x^2}}{x}\right|.\Bigr)$$

3

3.1. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} x \ln(\cos x)+\operatorname{tg} x-$

$-x+C.$)

3.2. $\int \cos(\ln x)dx$. $\Bigl($*Ответ:* $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C.\Bigr)$

3.3. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. $\Bigl($*Ответ:* $C-\frac{\ln x+1}{x}.\Bigr)$

3.4. $\int \ln(x+2)\,dx$. (*Ответ:* $x\ln(x+2)-x+$
$+2\ln(x+2)+C.$)

3.5. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\,dx$. (*Ответ:* $C-\operatorname{ctg} x\ln(\cos x)-x.$)

3.6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$. (*Ответ:* $\ln x\ln(\ln x)-\ln x+C.$)

3.7. $\int \ln^2 x\,dx$. (*Ответ:* $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$)

3.8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$)

3.9. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$. $\Bigl($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x-$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}+C.\Bigr)$$

3.10. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. (*Ответ:* $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-$
$-\sqrt{1+x^2}+C.$)

3.11. $\int \ln(x+4)\,dx$. (*Ответ:* $x\ln(x+4)-x+$
$+4\ln(x+4)+C.$)

3.12. $\int \frac{x \ln (x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. (*Ответ:* $\sqrt{1+x^2}\ln(x+$
$+\sqrt{1+x^2})-x+C.$)

3.13. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$. (*Ответ:* $C-x-\operatorname{ctg} x-$
$-\operatorname{ctg} x \ln(\sin x)$.)

3.14. $\int x^2 \ln(x+1)\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^3}{3}\ln(x+1)-$
$-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(x+1)+C.\Big)$

3.15. $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln^2 x\ln(\ln x)-$
$-\frac{1}{4}\ln^2 x+C.\Big)$

3.16. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. (*Ответ:* $x\ln(x^2+1)-2x+$
$+2\operatorname{arctg} x+C.$)

3.17. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $C-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}.\Big)$

3.18. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x-$
$-\frac{8}{9}\sqrt{x^3}\ln x+\frac{16}{27}\sqrt{x^3}+C.\Big)$

3.19. $\int \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x\ln\frac{1-x}{1+x}-\ln(x^2-1)+C.\Big)$

3.20. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\Big(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+$
$+x\Big)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.\Big)$

3.21. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C.\Big)$

3.22. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$. (Ответ: $\operatorname{tg} x\ln(\sin x)-x+C.$)

3.23. $\int x\ln(x^2+1)\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+$
$+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.\Big)$

3.24. $\int x\ln^2 x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+$
$+\frac{x^2}{4}+C.\Big)$

3.25. $\int x^2 \ln x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.\right)$

3.26. $\int x \ln(x+1) dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \right.$

$\left. + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C.\right)$

3.27. $\int \sin(\ln x) dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \right.$

$\left. - \cos(\ln x)) + C.\right)$

3.28. $\int (x^2 - 4)\sin 5x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{25} x \sin 5x - \right.$

$\left. - \frac{x^2 - 21}{5}\cos 5x + C.\right)$

3.29. $\int \ln(x+5) dx$. $(\textit{Ответ: } x\ln(x+5) - x +$
$+ 5\ln(x+5) + C.)$

3.30. $\int \ln\frac{2-x}{2+x} dx$. $\left(\textit{Ответ: } x\ln\frac{2-x}{2+x} - 2\ln|4 - \right.$

$\left. - x^2| + C.\right)$

4

4.1. $\int \sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x} dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{9}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x} - \right.$

$\left. - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arccos\sqrt{x} + C.\right)$

4.2. $\int \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{x} - \right.$

$\left. - \frac{2}{9}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arcsin\sqrt{x} + C.\right)$

4.3. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \right.$

$\left. + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.\right)$

4.4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$. $(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x+1}\arcsin x +$

$+ 4\sqrt{1-x} + C.)$

4.5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$. $(\textit{Ответ: } 4\sqrt{1-x} -$

$$-2\sqrt{1-x}\arcsin x + C.)$$

4.6. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{x} -$

$$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + C.)$$

4.7. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. (*Ответ:* $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x -$

$$-\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C.)$$

4.8. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. (*Ответ:* $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$.)

4.9. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} +$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C.\Big)$$

4.10. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arcctg}\,x + \frac{x}{2} +$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}\,x + C.\Big)$$

4.11. $\int \frac{x\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $C - \frac{x}{2} -$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x.\Big)$$

4.12. $\int \arccos 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $\arccos 2x -$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\Big)$$

4.13. $\int \mathrm{arctg}\,x dx$. $\Big($*Ответ:* $x\,\mathrm{arctg}\,x -$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\Big)$$

4.14. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. (*Ответ:* $C - 2\sqrt{x} -$

$$-2\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}.)$$

4.15. $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. (*Ответ:* $C - x - \sqrt{1-x^2}\arccos x$.)

4.16. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. (*Ответ:* $C - 4\sqrt{1+x} -$

$$-2\sqrt{1-x}\arccos x.)$$

4.17. $\int \operatorname{arcctg} 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x \operatorname{arcctg} 2x + \right.$

$\left. + \frac{1}{4} \ln (1 + 4x^2) + C. \right)$

4.18. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. (*Ответ:* $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arcctg} x +$

$+ \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C.$)

4.19. $\int \arcsin 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x \arcsin 2x + \right.$

$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C. \right)$

4.20. $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} x - \right.$

$\left. - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x + C. \right)$

4.21. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{1+x} \arccos x -$

$- 4\sqrt{1-x} + C.$)

4.22. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \right.$

$\left. + \frac{1}{6} \ln (x^2 + 1) + C. \right)$

4.23. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x + \frac{x}{4} + \right.$

$\left. + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C. \right)$

4.24. $\int \operatorname{arctg} (x+5) dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x \operatorname{arctg} (x+5) - \right.$

$\left. - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 10x + 26| + 5 \operatorname{arctg} (x+5) + C. \right)$

4.25. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} x + \frac{x^2}{6} - \right.$

$\left. - \frac{1}{6} \ln (x^2 + 1) + C. \right)$

4.26. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C. \right)$

4.27. $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3x^2 \sin \frac{x}{3} + 18x \cos \frac{x}{3} - \right.$

$\left. - 54 \sin \frac{x}{3} + C. \right)$

4.28. $\int x\,\mathrm{arcctg}^2 x dx$. $\Big($Ответ: $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arcctg}^2 x +$
$+\frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}^2 x + x\,\mathrm{arcctg}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.\Big)$

4.29. $\int x^2 \sin 2x dx$. $\Big($Ответ: $\frac{x}{2}\sin 2x -$
$-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.\Big)$

4.30. $\int (x^2+4)e^{2x}dx$. $\Big($Ответ: $\frac{1}{2}(x^2+4)e^{2x} +$
$+\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.\Big)$

5

5.1. $\int x^2 \cos 2x dx$. $\Big($Ответ: $\frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x -$
$-\frac{1}{4}\sin 2x + C.\Big)$

5.2. $\int x \sin^2 x dx$. $\Big($Ответ: $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x -$
$-\frac{1}{8}\cos 2x + C.\Big)$

5.3. $\int x \sin x \cos x dx$. $\Big($Ответ: $\frac{1}{8}\sin 2x -$
$-\frac{x}{4}\cos 2x + C.\Big)$

5.4. $\int x^2(\sin 2x - 3)dx$. $\Big($Ответ: $\frac{x}{2}\sin 2x -$
$-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - x^3 + C.\Big)$

5.5. $\int x^2(\sin x + 1)dx$. $\Big($Ответ: $2x\sin x - x^2\cos x +$
$+2\cos x + \frac{x^3}{3} + C.\Big)$

5.6. $\int (x^2+x)e^{-x}dx$. (Ответ: $C - (x^2+3x+3)e^{-x}$.)

5.7. $\int (x^2+x)e^{x}dx$. (Ответ: $(x^2-x+1)e^{x} + C$.)

5.8. $\int (x^2-x+1)e^{-x}dx$. (Ответ: $C - (x^2+x+2)e^{-x}$.)

5.9. $\int (x^2-x+1)e^{x}dx$. (Ответ: $(x^3-3x+4)e^{x} + C$.)

5.10. $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x dx$. $\Big($Ответ: $\ln|\sin x| - x\,\mathrm{ctg}\, x -$
$-\frac{x^2}{2} + C.\Big)$

5.11. $\int x^2e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+2)e^{-x}$.)

5.12. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. (*Ответ:* $\ln|\sin x| - x\operatorname{ctg} x + C$.)

5.13. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$. (*Ответ:* $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.)

5.14. $\int x\operatorname{tg}^2 xdx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.\right)$

5.15. $\int (x^2+2)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+4)e^{-x}$.)

5.16. $\int x^2\sin^2 xdx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.\right)$

5.17. $\int x^2(\cos 2x+3)dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right)$

5.18. $\int (x^2+2)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $(x^2-2x+4)e^x + C$.)

5.19. $\int (x^3+3)\sin xdx$. (*Ответ:* $2x\sin x - (x^2+1)\cos x + C$.)

5.20. $\int (x^2-3)\cos xdx$. (*Ответ:* $(x^2-4)\sin x + 2x\cos x + C$.)

5.21. $\int (x^2+1)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+3)e^{-x}$.)

5.22. $\int (x^2-1)e^xdx$. (*Ответ:* $(x-1)^2e^x + C$.)

5.23. $\int x^2\cos^2 xdx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.\right)$

5.24. $\int (x^2+x)\sin xdx$. (*Ответ:* $(2x+1)\sin x - (x^2+x-2)\cos x + C$.)

5.25. $\int (x^2+x)\cos xdx$. (*Ответ:* $(x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x + C$.)

5.26. $\int (x^2+1)e^xdx$. (*Ответ:* $(x^2-2x+3)e^x + C$.)

5.27. $\int (x^2-1)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x+1)^2e^{-x}$.)

5.28. $\int x\sin^2 xdx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.\right)$

5.29. $\int \arcsin 9x dx$. $\left(\text{Ответ: } x \arcsin 9x + \frac{1}{9}\sqrt{1-81x^2} + C.\right)$

5.30. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C.\right)$

6

6.1. $\int (x+1)e^{2x}dx$.

6.2. $\int (x-2)e^{x}dx$.

6.3. $\int (x-7)\cos 2x dx$.

6.4. $\int (x-1)\cos 5x dx$.

6.5. $\int (x+2)\cos 3x dx$.

6.6. $\int (x-2)\cos 4x dx$.

6.7. $\int (x-4)\sin 2x dx$.

6.8. $\int (x-3)\cos x dx$.

6.9. $\int (x+4)\sin 2x dx$.

6.10. $\int x \sin 3x dx$.

6.11. $\int (x+5)\sin x dx$.

6.12. $\int (x-5)\cos x dx$.

6.13. $\int (x+9)\sin x dx$.

6.14. $\int (x+7)\sin 2x dx$.

6.15. $\int (x+4)\sin 3x dx$.

6.16. $\int (x+3)\sin 5x dx$.

6.17. $\int (x-4)\cos 2x dx$.

6.18. $\int (x-8)\sin x dx$.

6.19. $\int (x+4)\cos 3x dx$.

6.20. $\int (x+8)\sin 3x dx$.

6.21. $\int (x+6)\cos 4x dx$.

6.22. $\int (x-6)\sin \frac{x}{2} dx$.

6.23. $\int (x+1)\cos 7x dx$.

6.24. $\int (x+2)\sin \frac{x}{2} dx$.

6.25. $\int x \sin \frac{x}{5} dx$.

6.26. $\int (x+4)\cos \frac{x}{2} dx$.

6.27. $\int (x+1)\sin \frac{x}{3} dx$.

6.28. $\int (x+2)\cos \frac{x}{4} dx$.

6.29. $\int (x+3)\sin \frac{x}{4} dx$.

6.30. $\int (x-9)\sin \frac{x}{2} dx$.

7

7.1. $\int \ln(x-5)dx$.

7.2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

7.3. $\int x^2 e^{-x} dx$.

7.4. $\int (x+1)e^{-4x}dx$.

7.5. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

7.6. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$.

7.7. $\int x \cos 8x dx$.

7.8. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$.

7.9. $\int \arcsin 5x dx$.

7.10. $\int (x+1)e^{-x}dx$.

7.11. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

7.12. $\int x^2 e^{3x} dx$.

7.13. $\int x \cos(x+4)\,dx$.

7.14. $\int x \cos(x-2)\,dx$.

7.15. $\int x \cos(x+3)\,dx$.

7.16. $\int xe^{x+2} dx$.

7.17. $\int xe^{-7x}\,dx$.

7.18. $\int \arcsin 2x dx$.

7.19. $\int x \sin(x+7)\,dx$.

7.20. $\int x \cos(x-4)\,dx$.

7.21. $\int x \sin(x+4)\,dx$.

7.22. $\int x \cos(x+9)\,dx$.

7.23. $\int (x+3) e^{-x} dx$.

7.24. $\int \arccos x dx$.

7.25. $\int (x^2-3) e^x dx$.

7.26. $\int xe^{-4x} dx$.

7.27. $\int x \cos(x+7)\,dx$.

7.28. $\int xe^{-5x} dx$.

7.29. $\int xe^{x+3} dx$.

7.30. $\int x \cos(2-x)\,dx$.

8

8.1. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

8.2. $\int x \cos 6x dx$.

8.3. $\int \arcsin 3x dx$.

8.4. $\int \arccos 2x dx$.

8.5. $\int \operatorname{arctg} 8x dx$.

8.6. $\int x \sin(x-2)\,dx$.

8.7. $\int \arcsin 8x dx$.

8.8. $\int x \sin(x+3)\,dx$.

8.9. $\int x \cos(x+4)\,dx$.

8.10. $\int \arccos 7x dx$.

8.11. $\int x \cos(x-7)\,dx$.

8.12. $\int x \sin(x-5)\,dx$.

8.13. $\int (x-4) e^x dx$.

8.14. $\int xe^{-6x} dx$.

8.15. $\int \operatorname{arctg} 7x dx$.

8.16. $\int \arcsin 5x dx$.

8.17. $\int \ln(x-7)\,dx$.

8.18. $\int x \cos(x+6)\,dx$.

8.19. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\,dx$.

8.20. $\int \ln(x+8)\,dx$.

8.21. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5}\,dx$.

8.22. $\int \ln(x+12)\,dx$.

8.23. $\int \arcsin \frac{x}{5}\,dx$.

8.24. $\int \ln(2x-1)\,dx$.

8.25. $\int \ln(2x+3) dx$.

8.26. $\int \arccos \frac{x}{5}\,dx$.

8.27. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4}\,dx$.

8.28. $\int \arcsin \frac{x}{7}\,dx$.

8.29. $\int \operatorname{arctg} 6x dx$.

8.30. $\int \arccos \frac{x}{3}\,dx$.

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=4\sin t, & dx=4\cos t\,dt, \\ \sin t = x/4, & t=\arcsin x/4 \end{matrix}\right| \overset{(8.5)}{=}$$

$$\overset{(8.5)}{=} \int 16\sin^2 t\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\,dt = 256\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= 64\int \sin^2 2t\,dt = 32\int(1-\cos 4t)\,dt = 32t - 8\sin 4t + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - 8\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{4}(8-x^2)\sqrt{16-x^2} + C. \blacktriangleleft$$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t}, & t=\frac{1}{x}, \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt & \end{matrix}\right| \overset{(8.5)}{=}$$

$$\overset{(8.5)}{=} -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} =$$

$$= -\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = -\ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1}\right| + C =$$

$$= C - \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x}\right|. \blacktriangleleft$$

3. $\int (x-7)\sin 5x\,dx$.

$$\blacktriangleright \int (x-7)\sin 5x\,dx = \left|\begin{matrix} u=x-7, & du=dx, \\ dv=\sin 5x\,dx, & v=-\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix}\right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int\cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C. \blacktriangleleft$$

1.9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}dx$. (*Ответ*: $3\ln|x+1|+$
$+\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$.)

1.10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$. (*Ответ*: $4\ln|x-1|-$
$-7\ln|x+3|+3\ln|x-4|+C$.)

1.11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$. (*Ответ*: $2\ln|x-2|+$
$+3\ln|x-3|-2\ln|x+1|+C$.)

1.12. $\int \frac{2x^4-7x^3+3x+20}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$. (*Ответ*: x^2+x-
$-4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+3\ln|x+1|+C$.)

1.13. $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$. (*Ответ*: $\ln|x+2|-$
$-\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$.)

1.14. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$. (*Ответ*: $18\ln|x+3|-$
$-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C$.)

1.15. $\int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}$. (*Ответ*: $\ln|x-1|+$
$+3\ln|x+1|-4\ln|x+2|+C$.)

1.16. $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$. (*Ответ*: $3\ln|x+1|+$
$+2\ln|x+3|-\ln|x+5|+C$.)

1.17. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$. (*Ответ*: $4\ln|x-1|-$
$-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C$.)

1.18. $\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{(x^2+2x-3)(x+2)}dx$. (*Ответ*: $x^2-\ln|x-1|+$
$+\ln|x+2|-2\ln|x+3|+C$.)

1.19. $\int \frac{2x^4+17x^3+40x^2+37x+36}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx$. (*Ответ*: x^2-x+
$+3\ln|x+1|+3\ln|x+3|-3\ln|x+5|+C$.)

1.20. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx$. (*Ответ*: $\ln|x-1|-$
$-3\ln|x+1|+8\ln|x+2|+C$.)

1.21. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$. (*Ответ*: $3x^2-12x+$
$+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+32\ln|x+2|+C$.)

1.22. $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}\,dx$. (*Ответ:* $2\ln|x+3|-$
$-3\ln|x+1|+3\ln|x+5|+C$.)

1.23. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}\,dx$. (*Ответ:* $6\ln|x+3|-$
$-2\ln|x+1|-2\ln|x+5|+C$.)

1.24. $\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$. (*Ответ:* x^2-x+
$+4\ln|x-1|-\ln|x+3|+2\ln|x-4|+C$.)

1.25. $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2-5x+6)(x+1)}\,dx$. (*Ответ:* x^2+x+
$+2\ln|x+1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|+C$.)

1.26. $\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)}\,dx$. (*Ответ:* $3x^2-12x+$
$+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+10\ln|x+2|+C$.)

1.27. $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x^2-5x+4)(x+3)}\,dx$. (*Ответ:* x^2+x+
$+4\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x-4|+C$.)

1.28. $\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}\,dx$. (*Ответ:* $2\ln|x-2|+$
$+3\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C$.)

1.29. $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$. (*Ответ:* $3x^2-12x+$
$+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.)

1.30. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$. (*Ответ:* $20\ln|x+3|-$
$-\ln|x-1)-16\ln|x+2|+C$.)

2

2.1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+$
$+2\ln|x-1|+C$.$\Big)$

2.2. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x+\ln|x|+$
$+\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$.$\Big)$

2.3. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1|-$

$$-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.4. $\int\frac{x+2}{x^3-x^2}dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{x}-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C.\Big)$

2.5. $\int\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx.$ $\Big($*Ответ:* $2x^2-3\ln|x|-$

$$-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C.\Big)$$

2.6. $\int\frac{x+2}{x^3+x^2}dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.\Big)$

2.7. $\int\frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx.$ $\Big($*Ответ:* $3\ln|x-1|-$

$$-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.8. $\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{x}-3\ln|x|+$

$$+\ln|x-1|+C.\Big)$$

2.9. $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x|+\ln|x-1|+$

$$+\frac{2}{x-1}+C.\Big)$$

2.10. $\int\frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx.$ $\Big($*Ответ:* $2x^2-2\ln|x|-$

$$-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.\Big)$$

2.11. $\int\frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx.$ $\Big($*Ответ:* $x^2+\ln|x|-$

$$-\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+C.\Big)$$

2.12. $\int\frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-2\ln|x|-$

$$-\frac{6}{x+1}+C.\Big)$$

2.13. $\int\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx.$ $\Big($*Ответ:* $2x-\ln|x|-\frac{1}{x}-$

$$-\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.14. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}\,dx$. $\Big($Ответ: $x+\frac{1}{x-1}+$
$+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C\Big)$

2.15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx$. $\Big($Ответ: $2\ln|x|+\frac{6}{x+1}-$
$-\ln|x+1|+C.\Big)$

2.16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$. $\Big($Ответ: $2\ln|x|-2\ln|x-1|-$
$-\frac{3}{x-1}+C.\Big)$

2.17. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}\,dx$. $\Big($Ответ: $2x^2-\ln|x|-$
$-3\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.\Big)$

2.18. $\int \frac{4x\,dx}{(x^2-1)(x+1)}$. $\Big($Ответ: $\ln|x-1|-\ln|x+1|-$
$-\frac{2}{x+1}+C.\Big)$

2.19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$. $\Big($Ответ: $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C.\Big)$

2.20. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($Ответ: $x-\ln|x|-$
$-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C.\Big)$

2.21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}\,dx$. $\Big($Ответ: $-\ln|x|-\ln|x-1|-$
$-\frac{3}{x-1}+C.\Big)$

2.22. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}\,dx$. $\Big($Ответ: $2x+\ln|x|-$
$-\frac{3}{x}-\ln|x+1|+C.\Big)$

2.23. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$. $\Big($Ответ: $x-\ln|x-1|-$
$-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+1|+C.\Big)$

2.24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx$. $\Big($Ответ: $2\ln|x|+\ln|x+1|+$
$+\frac{5}{x+1}+C.\Big)$

2.25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C.\Big)$

2.26. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.\Big)$

2.27. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x} + C.\Big)$

2.28. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1| + C.\Big)$

2.29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C.\Big)$

2.30. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2x + \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x+1| + C.\Big)$

3

3.1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1| - \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\Big)$

3.2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\Big)$

3.3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13| - \operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\Big)$

3.4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $3\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - 2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\Big)$

3.5. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. (*Ответ:* $\ln|x^2+6x+13|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$)

3.6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$. (*Ответ:* $2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.7. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$. (*Ответ:* $2\ln|x+2|-\ln|x^2-2x+10|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$)

3.8. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|-\ln|x+1|+2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$)

3.9. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$. (*Ответ:* $\ln|x^2-2x+4|-2\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.10. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. (*Ответ:* $3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$)

3.11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$. (*Ответ:* $\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$)

3.12. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. (*Ответ:* $3\ln|x+2|-\ln|x^2-2x+10|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$)

3.13. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|-2\ln|x+2|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$)

3.14. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+1|-$

$-\ln|x^2-4x+13|-\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.\Big)$

3.15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x^2+x+1|-2\ln|x-$

$-1|-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

3.16. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x+2|-\ln|x^2-$

$-2x+4|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

3.17. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+$

$+10|-\ln|x+2|+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.\Big)$

3.18. $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+1|-$

$-\ln|x^2+6x+13|-5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.\Big)$

3.19. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1|+$

$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\Big)$

3.20. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x^2-4x+$

$+13|-3\ln|x+1|+3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.\Big)$

3.21. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+2|+$

$+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10|+\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.\Big)$

3.22. $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-$

$-\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|-\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.\Big)$

3.23. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13| + 3\,\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\right)$

3.24. $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C.\right)$

3.25. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\ln|x+2| + \ln|x^2-2x+4| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.26. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\ln|x-1| + \ln|x^2+2x+5| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right)$

3.27. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.28. $\int \frac{6x\,dx}{x^3-1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1| + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.29. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3\ln|x+1| + \ln|x^2+6x+13| - \frac{9}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C.\right)$

3.30. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10| + \frac{5}{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{3} + C.\right)$

4

4.1. $\int \frac{5x\,dx}{x^4+3x^2-4}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.\right)$

4.2. $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|x+1| - x^2 - \right.$
$\left. - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.3. $\int \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.4. $\int \frac{5dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x + \right.$
$\left. + 1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.5. $\int \frac{x^3 + 8x - 2}{x^4 + 4x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x| + \frac{1}{2x} - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.6. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x^2+4| - \frac{1}{x-1} + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.7. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{3}{x} - \ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \ln|x+1| + C.\right)$

4.8. $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.9. $\int \frac{x^3 - x - 1}{x^4 - x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.\right)$

4.10. $\int \frac{2x^2 - 7x + 10}{(x-1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \right.$
$\left. - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.11. $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \right.$
$\left. - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.12. $\int \frac{x^3-x+2}{x^4+x^2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x|+\frac{2}{x}+\ln|x-1|-\right.$
$\left.-\ln|x+1|+C.\right)$

4.13. $\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln|x^2+1|+\right.$
$\left.+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3}\ln|x^2+4|+C.\right)$

4.14. $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln|x+1|-\right.$
$\left.-\frac{1}{4}\ln|x-1|-x^2-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.\right)$

4.15. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$. $\left(\textit{Ответ:}\ x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\right.$
$\left.-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.16. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+\right.$
$\left.+1|+\frac{3}{4}\ln|x^2+1|-\frac{5}{2}\operatorname{arctg} x+C.\right)$

4.17. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x|+\frac{3}{4x}+\right.$
$\left.+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.18. $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.19. $\int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x-1|+\right.$
$\left.+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.20. $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x-1|-\frac{2}{x}-\ln|x+1|+C.\right)$

4.21. $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x+1|-\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

4.22. $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$. (*Ответ:* $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$.)

4.23. $\int \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+4}$. (*Ответ:* $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C$.)

4.24. $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}\,dx$. (*Ответ:* $\ln|x^2+4| - 2\ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.)

4.25. $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}\,dx$. (*Ответ:* $\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.)

4.26. $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36}\,dx$. (*Ответ:* $\ln|x^2+9| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.)

4.27. $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{3}{2}\ln|x^2+9| + \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C$.)

4.28. $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - x^2 + \ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.)

4.29. $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + C$.)

4.30. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}$. (*Ответ:* $-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.)

5

5.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x+3}-$

$$-4\ln\left|\sqrt{x+3}+2\right|+C.\Big)$$

5.2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C.\Big)$

5.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}-4\sqrt{(x-3)^3}+$

$$+18\sqrt{x-3}+C.\Big)$$

5.4. $\int \frac{x\,dx}{2+\sqrt{x+4}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-2(x+4)+$

$$+2\sqrt{x+4}-4\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C.\Big)$$

5.5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7}-\frac{18}{5}\sqrt{(x+1)^5}+$

$$+9\sqrt{(x+1)^3}-54\sqrt{(x+1)}+C.\Big)$$

5.6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x+2}+$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.\Big)$$

5.7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3}}\right|+C.\Big)$

5.8. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x+2}+$

$$+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C.\Big)$$

5.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt{x}+3\right|+C.\Big)$

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}+C.\Big)$

5.11. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-\right.$

$\left.-4\ln|\sqrt{x}+1|+C.\right)$

5.12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. $\left(Ответ:\ \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C.\right)$

5.13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$. $\left(Ответ:\ 2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.\right)$

5.14. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$. (Ответ: $2\sqrt{x+5}-$

$-6\ln|\sqrt{x+5}+3|+C$.)

5.15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$. (Ответ: $2\sqrt{x-1}-$

$-2\ln|1+\sqrt{x-1}|+C$.)

5.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$. (Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x-7}+C$.)

5.17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$. (Ответ: $2\sqrt{x-1}+$

$+2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$.)

5.18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$. $\left(Ответ:\ \frac{2}{7}\sqrt{(x-7)^7}+\right.$

$\left.+\frac{6}{5}\sqrt{(x-7)^5}+2\sqrt{(x-7)^3}+2\sqrt{x-7}+C.\right)$

5.19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$. $\left(Ответ:\ \frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-4)^3}+\right.$

$\left.+2\sqrt{x-4}+C.\right)$

5.20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$. (Ответ: $2\sqrt{x+4}-$

$-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+4}+C$.)

5.21. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$. $\left(Ответ:\ \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7}-\frac{6}{5}\sqrt{(x+2)^5}+\right.$

$\left.+2\sqrt{(x+2)^3}-2\sqrt{(x+2)}+C.\right)$

5.22. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{10}} + C.\right)$

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.\right)$

5.24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$. ($\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-2} -$

$- 2\ln|1+\sqrt{x-2}| + C.$)

5.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.\right)$

5.26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x-2)^3} + \right.$

$\left. + 8\sqrt{x-2} + C.\right)$

5.27. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-2} - \right.$

$\left. - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.\right)$

5.28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{7}\sqrt{(x+6)^7} + \frac{12}{5}\sqrt{(x+6)^5} + \right.$

$\left. + 8\sqrt{(x+6)^3} + 16\sqrt{x+6} + C.\right)$

5.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$. ($\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-6} -$

$- 6\ln|\sqrt{x-6}+3| + C.$)

5.30. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$. ($\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-8} -$

$- 4\ln|\sqrt{x-8}+2| + C.$)

6

6.1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}\,dx$. ($\textit{Ответ:}\ 3\sqrt[3]{x+1} -$

$- \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1| -$

$- 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C.$)

6.2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-\right.$

$\left.-4\sqrt[4]{x}+2\ln|\sqrt{x}+1|+4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.\right)$

6.3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-\right.$

$\left.-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C.\right)$

6.4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\right.$

$\left.+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+C.\right)$

6.5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\right.$

$\left.+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\right)$

6.6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}(2x+1)+\right.$

$\left.+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C.\right)$

6.7. $\int \frac{\sqrt{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-1)^7}-\right.$

$-(x-1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}-$

$\left.-3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln|\sqrt[6]{x-1}+1|+C.\right)$

6.8. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } (x-1)-\right.$

$-\frac{24}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}+12\sqrt[3]{(x-1)^2}+96\sqrt[3]{x-1}-$

$\left.-384\sqrt[6]{x-1}+768\ln|\sqrt[6]{x-1}+2|+C.\right)$

6.9. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-(x+3)+\right.$

$+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt{x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+$

$+6\sqrt[6]{x+3}-6\ln|\sqrt[6]{x+3}+1|+C.\Big)$

6.10. $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}-$

$-2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6\ln|\sqrt[6]{x-1}+$

$+1|+C.\Big)$

6.11. $\int\frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-$

$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}+2\sqrt{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}-$

$-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C.\Big)$

6.12. $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-$

$-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln|\sqrt[3]{x}+1|-$

$-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.13. $\int\frac{\sqrt[6]{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}-$

$-2\sqrt{x+3}+3\sqrt[3]{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}+6\ln|\sqrt[6]{x+3}+$

$+1|+C.\Big)$

6.14. $\int\frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\,dx$.

$\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.\Big)$

6.15. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}-$

$-6\sqrt[6]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.16. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}(3x+1)-$

$-\frac{4}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+2\sqrt[3]{(3x+1)^2}-4\sqrt{3x+1}+$

$+12\sqrt[3]{3x+1}-48\sqrt[6]{3x+1}+96\ln|\sqrt[6]{3x+1}+$

$+2|+C.\Big)$

6.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+$

$+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C.\Big)$

6.18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$

$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}+9\sqrt[3]{x}+30\sqrt[6]{x}+$

$+\frac{54}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt[6]{x}-1+\sqrt{5}}\right|+24\ln|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-$

$-1|+C.\Big)$

6.19. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-$

$-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln|1-\sqrt[4]{x}|+C.\Big)$

6.20. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+$

$+\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}+4\sqrt[6]{3x+1}+$

$+4\ln|\sqrt[6]{3x+1}-1|+C.\Big)$

6.21. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x}+24\sqrt[6]{x}+$

$+24\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+C.\Big)$

6.22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}x^{2/3}+$

$+6x^{1/6}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.23. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}.$ $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+$

$+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\Big)$

6.24. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+$

$+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{9x}+C.\Big)$

6.25. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}.$ $\Big($*Ответ:* $3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|-$

$-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+$

$+\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C.\Big)$

6.27. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-$

$-2\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln|\sqrt[4]{x}+1|+C.\Big)$

6.28. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}(3x+1)-$

$-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+$

$+2\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln|\sqrt[6]{3x+1}+1|+C.\Big)$

6.29. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}+$

$+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\Big)$

6.30. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-$

$-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|+$

$+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.\Big)$

7

7.1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}+$

$+C.\Big)$

7.2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$

$\Big($*Ответ:* $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tg}\,(x/2)-4}{\sqrt{5}}+C.\Big)$

7.3. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+$

$+3\ln\left|\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C.\Big)$

7.4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-4}{\mathrm{tg}\,(x/2)-1}\right|+C.\Big)$

7.5. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$

$\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-2-\sqrt{5}}{\mathrm{tg}\,(x/2)-2+\sqrt{5}}\right|+C.\Big)$

7.6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}.$ $\Big($*Ответ:* $\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-1}{2}+C.\Big)$

7.7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\Big(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\Big)+C.\Big)$

7.8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$ $\Big($*Ответ:* $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-5}{\mathrm{tg}\,(x/2)-3}\right|+C.\Big)$

7.9. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ $\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-2}{\mathrm{tg}\,(x/2)+2}\right|+C.\Big)$

7.10. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\Big|2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+$

$+3\Big|+C.\Big)$

7.11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}(x/2)+4}{3}+C.\right)$

7.12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C.\right)$

7.13. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}{\operatorname{tg}(x/2)+2}\right|+C.\right)$

7.14. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{58}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+7-\sqrt{58}}{3\operatorname{tg}(x/2)+7+\sqrt{58}}\right|+C.\right)$$

7.15. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-4-\sqrt{21}}{\operatorname{tg}(x/2)-4+\sqrt{21}}\right|+C.\right)$$

7.16. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}\right|+C.\right)$$

7.17. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\right.$

$$\left.-\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+C.\right)$$

7.18. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{15}}+C.\right)$$

7.19. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. $\left(\textit{Ответ:}\ C-\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}.\right)$

7.20. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 12\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\right.$

$$\left.+6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-5x+C.\right)$$

7.21. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{7}}+C.\right)$$

7.22. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\right.$

$$\left.-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C.\right)$$

7.23. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } C-\right.$

$$\left.-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1/3}{\operatorname{tg}(x/2)+3}\right|.\right)$$

7.24. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{2}+C.\right)$

7.25. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+2-\sqrt{13}}{3\operatorname{tg}(x/2)+2+\sqrt{13}}\right|+C.\right)$$

7.26. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\right.\right.$

$$\left.\left.+3\right|+C.\right)$$

7.27. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C.\right)$

7.28. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-7}{\operatorname{tg}(x/2)-1}\right|+C.\right)$$

7.29. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}(x/2)+3+\sqrt{10}}\right|+C.\right)$$

7.30. $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

$$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{5\operatorname{tg}(x/2)+1-\sqrt{6}}{5\operatorname{tg}(x/2)+1+\sqrt{6}}\right|+C.\right)$$

8

8.1. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}x}\right|+C.\right)$

8.2. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x\cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,x - 1}{2\,\mathrm{tg}\,x}\right| + C.\right)$

8.3. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{2} + C.\right)$

8.4. $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|\mathrm{tg}^2 x + 2| +\right.$

$\left.+ \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}} + C.\right)$

8.5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

8.6. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{ctg}^2 x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln|\mathrm{tg}^4 x - 1| + C.\right)$

8.7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{5}}\right| + C.\right)$

8.8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{14}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$. (*Ответ:* $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}^2 x) + C.$)

8.10. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x} + \ln|\mathrm{tg}\,x| + C.\right)$

8.11. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C.\right)$

8.12. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x\cos x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x + 2}\right| + C.\right)$

8.13. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(2\,\mathrm{tg}^2 x) + C.\right)$

8.14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C$.)

8.15. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C.\right)$

8.16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$.

$$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg} x}\right| + C.\right)$$

8.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x}$.

$$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{2}} + C.\right)$$

8.18. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

$$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{5}\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}\right| + C.\right)$$

8.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

$$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}}\right| + C.\right)$$

8.20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.\right)$

8.21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.22. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.23. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

8.24. $\int \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{2} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.\right)$

8.25. $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.26. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C.\right)$

8.27. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$. (*Ответ:* $\mathrm{arctg}\,(2\,\mathrm{tg}\,x\sqrt{\ }-$

$-1) + C.$)

8.28. $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,(2\,\mathrm{tg}\,x) + C.\right)$

8.29. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}^2 x + 3| + C.\right)$

8.30. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,x +\right.$

$\left.+\frac{\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x) + C.\right)$

9

9.1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x +\right.$

$\left.+\frac{1}{144}\sin^3 6x + C.\right)$

9.2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9 x} -\right.$

$\left.-\frac{5}{19}\sqrt[5]{\sin^{19} x} + C.\right)$

9.3. $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + C.\right)$

9.4. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\right)$

9.5. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ C - 3\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} -\right.$

$\left.-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}.\right)$

9.6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x} -\right.$

$\left.-\frac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x} + C.\right)$

9.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 3\sqrt[3]{\sin x} -\right.$

$\left.-\frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + C.\right)$

9.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.\right)$

9.9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{3}{\cos x} + C.\right)$

9.10. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{7}\cos^7 x - \right.$

$\left. - \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C\right)$

9.11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{12}\sqrt[5]{\cos^{12} x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{2}\sqrt[5]{\cos^2 x} + C.\right)$

9.12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{11}\sqrt[3]{\cos^{11} x} - \right.$

$\left. - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.\right)$

9.13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \right.$

$\left. - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C.\right)$

9.14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{36}\sqrt[5]{\cos^{18} 2x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{16}\sqrt[5]{\cos^8 2x} + C.\right)$

9.15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{2}\sqrt[5]{\sin^2 x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{12}\sqrt[5]{\sin^{12} x} + C.\right)$

9.16. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{16}x - \right.$

$\left. - \frac{1}{128}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin^3 4x + C.\right)$

9.17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x} - \right.$

$\left. - 3\sqrt[3]{\cos x} + C.\right)$

9.18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{19}\sqrt[5]{\cos^{19} x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^9 x} + C.\right)$

9.19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x -$

$- \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + C.\Big)$

9.20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin 2x} -$

$- \frac{3}{14} \sqrt[3]{\sin^7 2x} + C.\Big)$

9.21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{14} \sqrt[3]{\cos^7 2x} -$

$- \frac{3}{2} \sqrt[3]{\cos 2x} + C.\Big)$

9.22. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.\Big)$

9.23. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x +$

$+ \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\Big)$

9.24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x -$

$- \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\Big)$

9.25. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C.\Big)$

9.26. $\int \frac{3 \cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{\sin x} - \frac{1}{\sin^3 x} + C.\Big)$

9.27. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x}\, dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{5}{9} \sqrt[5]{\cos^{18} x} -$

$- \frac{5}{8} \sqrt[5]{\cos^8 x} - \frac{5}{28} \sqrt[5]{\cos^{28} x} + C.\Big)$

9.28. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x +$

$+ \frac{1}{9} \sin^9 x + C.\Big)$

9.29. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x -$

$- \frac{1}{144} \sin^3 6x + C.\Big)$

9.30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$. (*Ответ:* $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C$.)

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx$.

▶ Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь. Разложим ее знаменатель на множители: $(x+1)(x-2)(x-3)$. Согласно формуле (8.9), в разложении правильной дроби на простейшие каждому множителю знаменателя вида $x - a$ соответствует слагаемое $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае имеем

$$\frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} = \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители дробей, получим тождество

$$7x - x^2 - 4 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) +$$
$$+ C(x+1)(x-2).$$

Коэффициенты A, B, C определим с помощью метода частных значений (см. § 8.6):

$$\left.\begin{array}{l|r} x = -1 & -12 = 12A, \\ x = 2 & 6 = -3B, \\ x = 3 & 8 = 4C, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$. Подставив найденные коэффициенты в разложение подынтегральной функции на простейшие дроби, получим

$$\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right) dx =$$
$$= -\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C^* =$$
$$= \ln\frac{(x-3)^2}{|x+1|(x-2)^2} + C^*,$$

где C^* — постоянная интегрирования. ◀

2. $\int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx.$

▶ $$\int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx = \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)^2(x+2)}\,dx \overset{(8.9)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.9)}{=\!=} \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}\right)dx \overset{\S 8.6}{=\!=}$$

$$\overset{\S 8.6}{=\!=}\left|\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{15x - x^2 - 11 \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2,} \\ x = 1 & \quad 3 = 3B, \qquad B = 1, \\ x = -2 & -45 = 9C, \qquad C = -5, \\ \quad x^2 & \quad -1 = A + C, \quad A = 4 \end{array}\right| =$$

$$= \int\left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{x+2}\right)dx =$$

$$= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 5\ln|x+2| + C^*.$$

Ответим, что для нахождения коэффициентов мы использовали комбинированный метод: метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов (см. § 8.6). ◀

3. $I(x) = \int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27}{(x-2)(x^2-2x+5)}\,dx.$

▶ Так как подынтегральная функция является неправильной дробью, то путем деления числителя на знаменатель можно представить ее в виде суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби:

$$I(x) = \int\left(x - 4 + \frac{-2x^2 + 3x - 13}{(x+2)(x^2-2x+5)}\right)dx \overset{\S 8.6}{=\!=} \frac{x^2}{2} - 4x +$$

$$+ \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}\right)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{-2x^2 + 3x - 13 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x-2),} \\ x = 2 & -15 = 5A, \qquad A = -3, \\ \quad x^2 & \quad -2 = A + B, \qquad B = 1, \\ \quad x^0 & -13 = 5A - 2C, \; C = -1 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int\left(\frac{-3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-2x+5}\right)dx =$$

$$= -3\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 5| + C^*. \;◀$$

4. $\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 32}{x^4 + 9x^2 + 20}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}\,dx = \int \frac{2x\ -5x^2+8x-22}{(x^2+4)(x^2+5)}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+5} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2x^3-5x^2+8x-22 = (Ax+B)(x^2+5) + \\ \qquad + (Cx+D)(x^2+4), \\ \begin{array}{l|r} x^3 & 2 = A+C, \\ x^2 & -5 = B+D, \\ x & 8 = 5A+4C, \\ x^0 & -22 = 5B+4D, \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a\\ a\\ a\\ a \end{array}} \right\} \begin{array}{l} A=0,\ B=-2, \\ C=2,\ D=-3 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x^2+4} + \frac{2x-3}{x^2+5} \right) dx = -\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln(x^2+5) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C^*. \blacktriangleleft$$

5. $\displaystyle\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx \overset{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t,\ x-2=t^2, \\ x = t^2+2,\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= -2\int \frac{(t^2+3)t\,dt}{t-3} = -2\int \left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3} \right) dt =$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 12t + 36\ln|t-3| \right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} - 3(x-2) - 24\sqrt{x-2} -$$

$$- 72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right| + C. \blacktriangleleft$$

6. $\displaystyle\int \frac{4\sqrt{x-2}+\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}\,dx \overset{\S 8.7}{=}$$

$$\overset{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} m = \text{НОК}(2,\ 3,\ 6) = 6,\ x-2 = t^6, \\ x = t^6+2,\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(4t^3-t)6t^5\,dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}\,dt =$$

$$= 6\int \left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2} \right) dt =$$

$$=6\Big(\frac{2}{3}t^6-\frac{8}{5}t^5+\frac{15}{4}t^4-10t^3+30t^2-120t+$$

$$+240\ln|t+2|\Big)+C=4(x-2)-\frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5}+$$

$$+\frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-60\sqrt{x-2}+180\sqrt[3]{x-2}-$$

$$-720\sqrt[6]{x-2}+1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right|+C \quad \blacktriangleleft$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}$.

$$\blacktriangleright \int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1} \overset{(8.13)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.13)}{=\!=}\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ x=2\operatorname{arctg} t \end{matrix}\right|=$$

$$=2\int\frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2}=2\int\frac{dt}{3t^2+6t-1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+2t-1/3}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^2-4/3}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{t+1-2/\sqrt{3}}{t+1+2/\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}+2}\right|+C. \quad \blacktriangleleft$$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin^2x-\sin 2x+3\cos^2x}$

$$\blacktriangleright \int\frac{dx}{2\sin^2x-\sin 2x+3\cos^2x} \overset{(8.14)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.14)}{=\!=}\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg} x,\ \sin^2x=\dfrac{x^2}{1+t^2},\ \cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}, \\ \sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2},\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{2t^2-2t+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+3/2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t-1/2}{\sqrt{5}/2}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{5}}+C. \quad \blacktriangleleft$$

9. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\, dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\, dx \overset{(8.15)}{\underset{(8.16)}{=}} \left| \begin{matrix} \sin 4x = t, \\ dx = 4\cos 4x dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{(1-t^2)\,dt}{\sqrt[5]{t}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(t^{-1/5} - t^{9/5} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} t^{4/5} - \frac{5}{14} t^{14/5} \right) + C =$$

$$= \frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^4 4x} - \frac{5}{56} \sqrt[5]{\sin^{14} 4x} + C. \blacktriangleleft$$

8.10. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 8

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x}{4}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C. \right)$

2. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt{4x^2 + 1}}.$

$$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15} + 2\sqrt{4x^2 + 1}}{x\sqrt{15} - 2\sqrt{4x^2 + 1}} \right| + C. \right)$$

3. $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}\, dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 3x)^3} + C. \right)$

4. $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} + C. \right)$

5. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x + 1}}\, dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x \arccos\sqrt{\frac{x}{x + 1}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C. \right)$

6. $\int \frac{2x\,dx}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x - 1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + \frac{1}{4}\ln(1 + x^2) + C. \right)$

7. $\int \frac{\ln(x + 1)}{\sqrt{x + 1}}\, dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 2\sqrt{x + 1}(\ln|x + 1| - 2) + C. \right)$

8. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right) + C. \right)$

9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,\ n}$. Выберем в каждом из них точку ξ_i, $x_{i-1}<\xi_i<x_i$ (рис. 9.1). Сумма вида

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *n-й интегральной суммой* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Геометрически сумма S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, заштрихованных на рис. 9.1, в основании которых лежат частичные отрезки Δx_i, а высоты равны $f(\xi_i)$

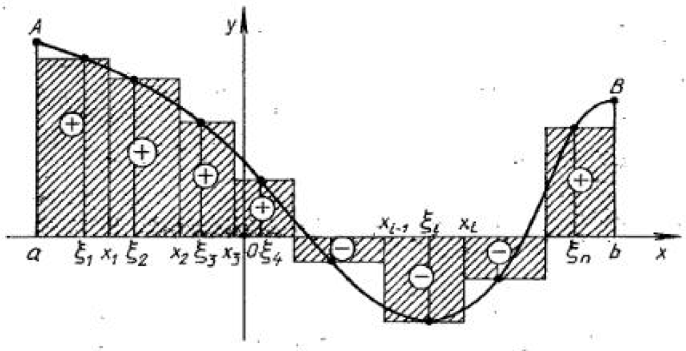


Рис. 9.1

Предел интегральной суммы S_n, найденный при условии, что длина наибольшего частичного отрезка стремится к нулю, называется *определяемым интегралом* от функции $y=f(x)$ в пределах от $x=a$ до $x=b$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е. по определению

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (9.1)$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, $[a;\ b]$ — *отрезком интегрирования*, a и b —

соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, x — *переменной интегрирования.*

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она интегрируема на $[a;\ b]$, т. е. предел интегральной суммы (9.1) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,\ b]$ на частичные отрезки Δx_i и выбора на них точек ξ_i.*

Если $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a;\ b]$, то геометрически определенный интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.* В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «—». Например, для функции, график которой изображен на рис. 9.2, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

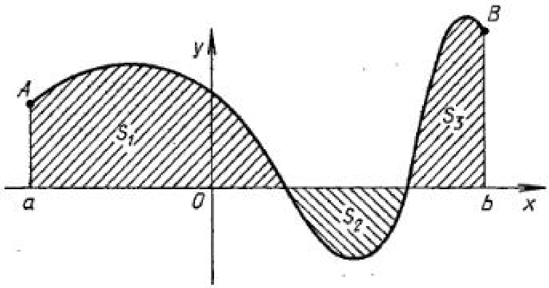


Рис 9.2

Перечислим основные свойства определенного интеграла (предполагаем, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на соответствующих отрезках)

1) $\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx;$

2) $\int_a^b cf(x) = c\int_a^b f(x)\,dx$ ($c = \text{const}$);

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$

5) если $f(x) \geqslant 0$ на $[a;\ b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0;$$

6) если $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $x \in [a;\ b]$, и $a < b$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx;$$

7) если $m = \min\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a);$$

8) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c$, $a \leqslant c \leqslant b$, такая, что верно равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a);$$

9) если функция $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, то имеет место равенство

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т. е. производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу x равна значению подынтегральной функции при том же x Следовательно, $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$,

10) если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\,\Big|_a^b,$$

которое называется *формулой Ньютона — Лейбница* или *формулой двойной подстановки*. Ее целесообразно использовать для вычисления определенных интегралов в тех случаях, когда известна первообразная $F(x)$, нахождение которой при $x = a$ и $x = b$ не вызывает затруднений.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 3(x-1)^2\,dx$

▶ $\int_1^2 3(x-1)^2\,dx = (x-1)^3\,\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1$ ◀

Пример 2. Вычислить $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$.

▶ $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx = \int_0^8 \sqrt{2x}\,dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_0^8 = \frac{1}{3}(16)^{3/2} + \frac{3}{4}(8)^{4/3} = 33\frac{1}{3}$$ ◀

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi\,d\varphi$.

$$\blacktriangleright \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = -\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi) d(\cos\varphi) =$$

$$= -\cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x} dx$.

▶ Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим ее на простейшие рациональные дроби (см. § 8.6):

$$\frac{2x-1}{x^3+3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},\ 2x-1 \equiv A(x^2+1) + Bx^2 + Cx,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & \ \ 0 = A + B, \\ x^1 & -1 = A, \\ x^0 & \ \ 2 = C, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1$, $B = 1$, $C = 2$.

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \Big(-\ln|x| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2\operatorname{arctg} x\Big)\Big|_1^2 = -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + 2\operatorname{arctg} 2 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln 2 - 2\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{8} + 2(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) \approx 0{,}38. \blacktriangleleft$$

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной и монотонна на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и сложная функция $f(\varphi(t))$ непрерывна на $[\alpha;\ \beta]$. Тогда справедлива *формула замены переменной для определенного интеграла*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (9.2)$$

Пример 5. Вычислить $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

▶ Сделаем замену переменной по формуле $\sqrt{1+x} = t$. Тогда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. При $x = 3$ получим $t = 2 = \alpha$, а при $x = 8$ $t = 3 = \beta$. Все перечисленные выше условия, при которых верна формула (9.2), выполнены. Следовательно,

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_2^3 = 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3} \blacktriangleleft$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$

▶ Положим $\operatorname{tg}(x/2) = u$. Тогда $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$, $dx = 2du/(1+u^2)$, $\alpha = \operatorname{tg} 0 = 0$, $\beta = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int\limits_0^1 \frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2)+3} = \int\limits_0^1 \frac{2du}{u^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}38. \blacktriangleleft$$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x). \tag{9.3}$$

Формула (9.3) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$

▶ $$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, \ du = dx, \\ dv = \cos x dx, \ v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \blacktriangleleft$$

Пример 8. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln^2 x dx$

▶ $$\int\limits_1^e x\ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, \ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ dv = xdx, \ v = \frac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, \ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx, \ v = \frac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{1}{2}dx \right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1). \blacktriangleleft$$

АЗ-9.1

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4}\right) dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{21}{4}.\right)$

2. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\, dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{14}{3}.\right)$

3. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. (*Ответ:* 2.)

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. $\left(\textit{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.\right)$

5. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{3}.\right)$

6. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. (*Ответ:* $2 - \ln 2$.)

7. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2}\, dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{848}{105}.\right)$

8. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$. (*Ответ:* π.)

9. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}.\right)$

10. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{5} \ln 112.\right)$

Самостоятельная работа

Вычислить определенные интегралы.

1. а) $\int\limits_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$.

(*Ответ*: а) 21; б) $7+2\ln 2$)

2. а) $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$; б) $\int\limits_0^4 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

(*Ответ*: а) 23/3; б) $16/3 - 2\ln 3$.)

3. а) $\int\limits_4^9 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^3}$; б) $\int\limits_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

(*Ответ*: а) 3/16; б) $3+4\ln 2$.)

9.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant +\infty$, то $\int\limits_a^B f(x)dx = I(B)$ — некоторая непрерывная функция B (рис 9.3) Тогда предел

$$\lim_{B \to +\infty} \int\limits_a^B f(x)dx \tag{9.4}$$

называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* функции $y=f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{9.5}$$

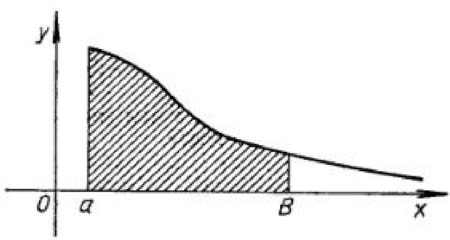


Рис 9.3

Следовательно, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_a^B f(x)dx$$

Если предел (9.4) существует, то интеграл (9.5) называется *сходящимся*, если же предел (9.4) не существует, в частности бесконечен,— *расходящимся*.

Аналогично определяются *несобственный интеграл с бесконечным* *нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B \to +\infty} \int_{c}^{B} f(x)dx,$$

где $-\infty < c < +\infty$. Если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл (9.5) называется *абсолютно сходящимся*. Для установления сходимости интеграла (9.5) можно пользоваться следующими *признаками сравнения*.

Теорема 1. Пусть для всех $x \geqslant a$ *справедливо неравенство* $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Тогда:

1) *если интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, *причем*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) *если интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *расходится, то будет расходиться и интеграл* $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Отметим, что всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Пример 1. Дан интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Установить, при каких значениях α этот интеграл сходится, а при каких — расходится.

▶ Предположим, что $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_{1}^{B} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{1}^{B} = \frac{1}{1-\alpha} (B^{1-\alpha} - 1),$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (B^{1-\alpha} - 1).$$

Следовательно, если $\alpha > 1$, то

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1},$$

т. е. данный интеграл сходится; если $\alpha < 1$, то

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится. При $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x} = \lim_{B \to +\infty} \ln B = +\infty,$$

т. е. данный интеграл расходится.

Отметим, что рассмотренный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ относится к табличным. ◀

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$ или установить его расходимость.

▶ Имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} \Big|_{1}^{B} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{B \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{B+2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \ ◀$$

Пример 3. Доказать, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)e^x}$ сходится.

▶ Так как $\frac{1}{(x^2+1)e^x} \leqslant \frac{1}{x^2+1}$ при $x \geqslant 1$ и интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{B \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{B} =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

сходится, то исходный интеграл также сходится (на основании теоремы 1). ◀

Замечание. При вычислении несобственных интегралов с бесконечным промежутком интегрирования часто пользуются символическим равенством

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x) \Big|_{a}^{+\infty},$$

где $F'(x) = f(x)$ и $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением точки $x = c$, где она терпит бесконечный разрыв (рис. 9.4) Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx, \tag{9.6}$$

где $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$. Интеграл (9.6) называется *несобственным интегралом от разрывной функции*. Если оба предела, стоящие в правой части равенства (9.6) существуют, то данный интеграл называется *сходящимся*, а если хотя бы один из них не существует,— *расходящимся*. В случае, когда $c = a$ или $c = b$, в правой части равенства (9.6) будет только один предел.

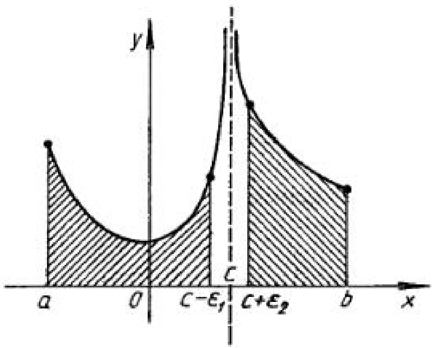


Рис. 9.4

Пример 4. Найти условия сходимости и расходимости несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha = \text{const} > 0)$

▶ Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв при $x = 0$. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\frac{1}{-\alpha+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty & \text{при } \alpha > 1 \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Итак, данный интеграл (который также относится к табличным в теории несобственных интегралов от разрывных функций) сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$ ◀

Пример 5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

▶ Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=1$. Следовательно, по определению

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} (-2)(1-x)^{1/2} \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0}\right) = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\sqrt{\varepsilon}) = 2 \quad (\varepsilon > 0),$$

т. е. данный интеграл сходится. ◀

Теорема 2. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$ терпят бесконечный разрыв в точке $x=c$ и во всех точках отрезка $[a;\ b]$, кроме $x=c$, выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$. Тогда

1) *если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$;*

2) *если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.*

Утверждения 1 и 2 называются также *теоремами сравнения*.

Пример 6. Исследовать, сходится ли интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2x^3}.$$

▶ Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=0$. Очевидно, что при $x \geqslant 0$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2x^3} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Так как несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{3}\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\sqrt{\varepsilon}) = \frac{2}{3} \quad (\varepsilon > 0),$$

т. е. сходится, то сходится и исходный интеграл (на основании утверждения 1 из теоремы 2). ◀

АЗ-9.2

Вычислить данные определенные интегралы.

1. $\int\limits_1^e \ln x dx$. (*Ответ:* 1.)

2. $\int\limits_0^\pi x^2 \cos x dx$. (*Ответ:* -2π.)

3. $\int\limits_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\, dx$. (*Ответ:* -4.)

4. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$. (*Ответ:* $e - 2$.)

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

6. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$. (*Ответ:* 0,5.)

7. $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$. (*Ответ:* 0,5.)

8. $\int\limits_1^\infty \frac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} dx$. (*Ответ:* расходится.)

9. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. (*Ответ:* 1.)

10. $\int\limits_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$. (*Ответ:* 8/3.)

Самостоятельная работа

1. 1) Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 x e^{-x} dx;$$

2) вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

(*Ответ:* 1) $1-2/e$; 2) 2.)

2. 1) Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{\pi} x\sin x dx;$$

2) вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$$

(*Ответ:* 1) π; 2) 0,5.)

3. 1) Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{1} xe^{3x}dx;$$

2) вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}.$$

(*Ответ:* 1) $(2e^3+1)/9$; 2) расходится.)

9.3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

Вычисление площадей плоских фигур. Как отмечалось в § 9.1, определенный интеграл в случае, когда $f(x)\geqslant 0$, $x\in[a;\ b]$, с геометрической точки зрения определяет площадь криволинейной трапеции. Но площадь всякой плоской фигуры можно рассматривать как сумму или разность площадей некоторых криволинейных трапеций. Это означает, что с помощью определенных интегралов можно вычислять площади различных плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-2x$, прямыми $x=-1$, $x=1$ и осью Ox.

▶ Вначале построим фигуру, ограниченную данными линиями (рис. 9.5). Искомая площадь $S=|S_1|+|S_2|=S_1-S_2$, поэтому

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}-1\right)=2. \blacktriangleleft$$

В более общем случае, когда данная фигура ограничена двумя кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$, причем $f_1(x)\leqslant f_2(x)$, $x\in[a;\ b]$, имеем (рис. 9.6).

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \tag{9.7}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x-x^2$ и $y=-x$.

▶ Находим точки пересечения данных кривых и строим искомую фигуру (рис. 9.7):

$$\left.\begin{array}{l} y=3x-x^2, \\ y=-x, \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-x, \\ -x=3x-x^2. \end{array}\right.$$

Решая последнюю систему, получаем: $x_1=0$, $x_2=4$, $y_1=0$, $y_2=-4$.

Следовательно, согласно формуле (9.7), имеем

$$S=\int_0^4 (3x-x^2-(-x))\,dx=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=$$

$$=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

Если кривая AB, ограничивающая криволинейную трапецию (рис. 9.8), задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt, \tag{9.8}$$

где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha)=a$ и $\psi(\beta)=b$ ($\psi(t)\geqslant 0$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$).

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

▶ Запишем параметрические уравнения эллипса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. С учетом свойств симметрии фигуры и формулы (9.8) получаем (рис. 9.9)

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\pi/2}^{0} a\sin t(-b\sin t)\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi ab. \blacktriangleleft$$

В случае, когда непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, площадь криволинейного сектора OM_1M_2 (рис. 9.10), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OM_1 и OM_2, соответствующими значениям φ_1 и φ_2 полярного угла, выражается интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\rho(\varphi))^2\,d\varphi. \tag{9.9}$$

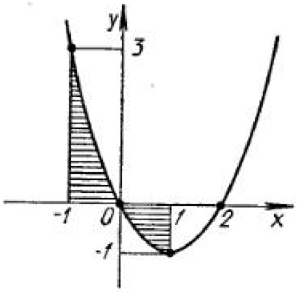


Рис. 9.5

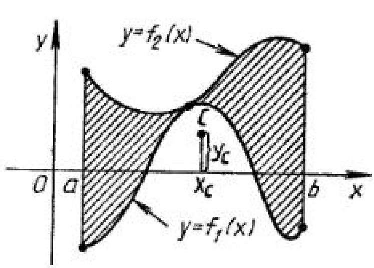


Рис. 9.6

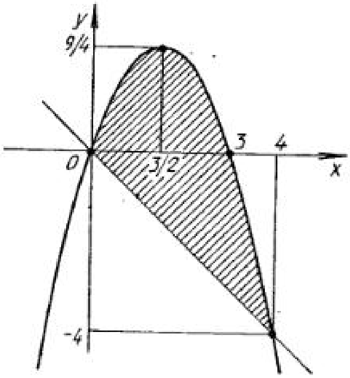


Рис 9.7

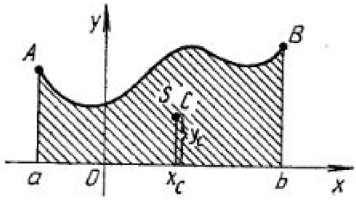


Рис. 9.8

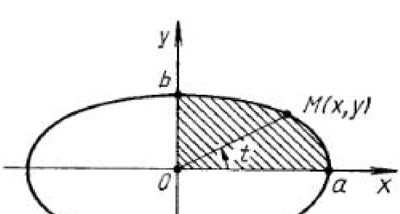


Рис 9.9

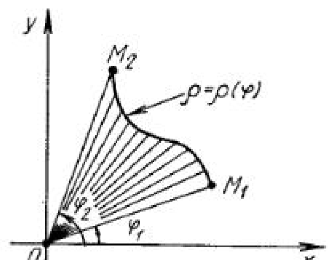


Рис. 9.10

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (рис. 9.11).

► Запишем уравнение данной кривой в полярных координатах. Для этого заменим x и y в исходном уравнении выражениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Получим: $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ или $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. С учетом свойств симметрии фигуры искомая площадь S может быть вычислена по формуле (9.9):

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2. ◄$$

Вычисление длины дуги кривой. Пусть дуга $\breve{AB}$ кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда длина дуги $\breve{AB}$ (рис. 9.12)

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx. \tag{9.10}$$

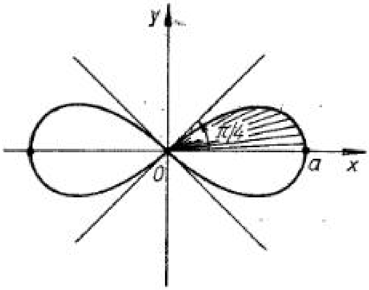


Рис. 9.11

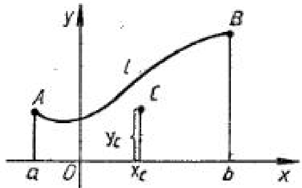


Рис. 9.12

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, длина дуги l вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt. \tag{9.11}$$

Здесь α, β — значения параметра t, соответствующие концам дуги A и B.

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то длина l дуги $\breve{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + q'^2}d\varphi, \tag{9.12}$$

где φ_1 и φ_2 соответствуют концам дуги M_1 и M_2.

Пример 5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциссы концов которой $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$.

▶ Согласно формуле (9.10), имеем

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+x}\,dx=$$

$$=\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=\frac{34}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 6 Вычислить длину одной арки циклоиды $y=a(1-\cos t)$, $x=a(t-\sin t)$

▶ Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую ее арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π Тогда, согласно формуле (9.11), имеем

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Вычислить длину первого витка логарифмической спирали $\rho=e^{\varphi}$.

▶ Из формулы (9.12) следует, что

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^{\varphi}d\varphi=\sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)\approx 108{,}16. \blacktriangleleft$$

Вычисление объемов тел. Пусть в пространстве дано некоторое тело, проектирующееся на ось Ox в отрезок $[a;\ b]$. Всякая плоскость, перпендикулярная к оси Ox и проходящая через точку $x\in[a;\ b]$, в сечении с телом образует фигуру площадью $S(x)$ (рис. 9.13) Тогда объем V этого тела вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \tag{9.13}$$

В частности, при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 9.14) площади поперечных сечений равны: $S(x)=\pi(f(x))^2$ Поэтому объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox, выражается формулой

$$V_x=\pi\int_a^b(f(x))^2\,dx \qquad 9\ 14$$

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

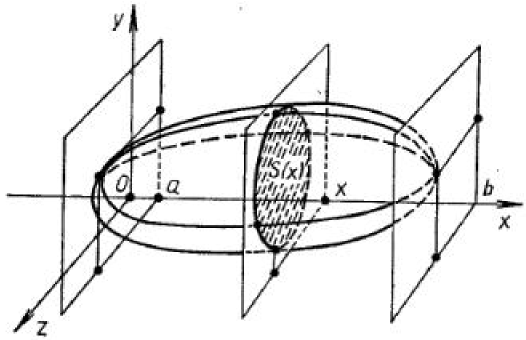


Рис. 9.13

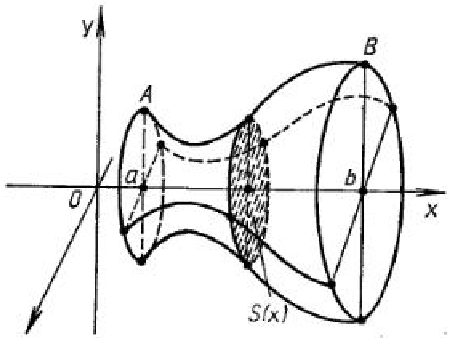


Рис. 9.14

Рис. 9.15

► По данному уравнению строим эллипсоид (рис. 9.15) Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными к оси Oy и проходящими через произвольную точку $y \in [-b;\ b]$. В сечении с поверхностью получим кривые

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},\ y=\text{const},$$

или, если $1-y^2/b^2>0$,

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2}=1,\ y=\text{const},$$

т. е. эллипсы с полуосями $a_1=a\sqrt{1-y^2/b^2}$, $c_1=c\sqrt{1-y^2/b^2}$ Площади этих сечений

$$S(y)=\pi a_1c_1=\pi ac(1-y^2/b^2).$$

Тогда из формулы (9.13) следует, что

$$V=\int\limits_{-b}^{b}\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi ac\int\limits_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=2\pi ac\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4}{3}\pi abc\ ◀$$

Пример 9. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y^2=4-x$, $x=0$.

▶ Очевидно, что (рис. 9.16)

$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2dy=\pi\int\limits_{-2}^{2}(4-y^2)^2\,dy=2\pi\int\limits_0^2(4-y^2)^2\,dy=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2(16-8y^2+y^4)dy=2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{512}{15}\pi\approx107{,}23.\ ◀$$

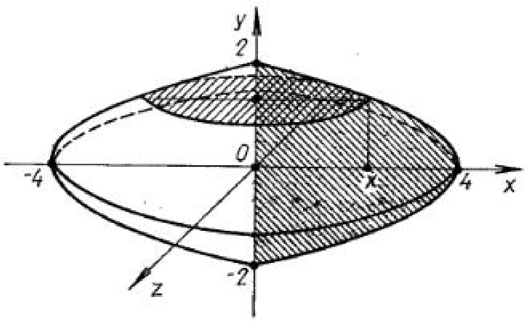


Рис 9.16

Вычисление площади поверхности тела вращения. Если дуга AB кривой $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, вращается вокруг оси Ox, то площадь описанной ею поверхности выражается формулой

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{9.15}$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2x+1$, заключенной между точками с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 7$

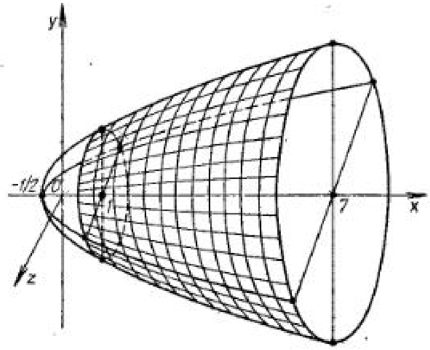


Рис. 9.17

▶ Как видно из рис. 9.17 и формулы (9.15), искомая площадь поверхности вращения

$$Q_x = 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2}\,dx =$$

$$2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+1+1}\,dx = 2\pi\int_1^7\sqrt{2x+2}\,dx =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\,\frac{(2x+2)^{3/2}}{3/2}\bigg|_1^7 = \frac{2}{3}\pi(64-8) = \frac{112\pi}{3} \quad ◀$$

АЗ-9.3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$. (*Ответ:* 0,5.)

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. (*Ответ:* 125/6.)

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/(1+x^2)$, $y = x^2/2$. (*Ответ:* $\pi/2 - 1/3$.)

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$. (*Ответ:* 4/3.)

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $y=a(1-\cos t)$, $x=a(t-\sin t)$ и осью Ox. (*Ответ:* $3\pi a^2$.)

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии $x=3t^2$, $y=3t-t^3$. (*Ответ:* $72\sqrt{3}/5$.)

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой. (*Ответ:* 2.)

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$. (*Ответ:* $3\pi a^2/2$.)

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $y=x$, $y=-x/\sqrt{3}$. (*Ответ:* $25\pi/24$.)

Самостоятельная работа

✓ **1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y^2=x+5$, $y^2=-x+4$; б) $\rho=a\cos 2\varphi$.

(*Ответ:* а) $9\sqrt{2}$; б) $\pi a^2/2$.)

2. Вычислить площадь фигуры:

а) ограниченной линиями $y=(x-4)^2$, $y=16-x^2$;

б) заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ $(a>0)$.

(*Ответ:* а) $64/3$; б) $8\pi^3a^3$.)

✓**3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $4y=8x-x^2$, $4y=x+6$;

б) $y=4t^2-6t$, $x=2t$ и осью Ox.

$\left(\textit{Ответ: } \text{а) } \frac{49}{24}\approx 2{,}04; \text{ б) } 9/2.\right)$

АЗ-9.4

1. Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=1$. (*Ответ:* $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\approx 2{,}29$.)

2. Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. (*Ответ:* $6a$.)

3. Вычислить длину кардиоиды $\rho=a(1-\cos\varphi)$. (*Ответ:* $8a$.)

4. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1=1$ до точки с абсциссой $x_2=9$. (*Ответ:* $56/3$.)

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$, $z=1$. (*Ответ:* $\pi\sqrt{2}$.)

6. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=x^2$, $x=y^2$. (*Ответ:* $3\pi/10$.)

7. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox. (*Ответ:* $5a^2\pi^2$.)

8. Вычислить площадь поверхности вращения, полученной при вращении дуги кривой $y=\frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ от точки $x_1=1$ до точки $x_2=9$. (*Ответ:* $104\pi/3$.)

9. Вычислить площадь катеноида — поверхности, образованной вращением цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ вокруг оси Ox от точки $x_1=0$ до точки $x_2=a$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi a^2}{4}(e^2-\right.$ $\left.-e^{-2}+4).\right)$

Самостоятельная работа

1. 1. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ между точками M_1 и M_2 с абсциссами $x_1=2$ и $x_2=8$. (*Ответ:* $56/3$.)

2. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении отрезка прямой $y=3x$, заключенного между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=2$, вокруг оси Ox. (*Ответ:* $12\sqrt{10}\pi$.)

2. 1. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{4}{3}x$, заключенной между точками с абсциссами $x_1=2$ и $x_2=5$. (*Ответ:* 5.)

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}$, $y=1$. (*Ответ* π.)

3. 1. Найти длину дуги кривой $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{8}$. $\left(\textit{Ответ: } 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\approx\right.$ $\left.\approx 1{,}2.\right)$

2. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=2x-x^2$ и $y=0$. $\left(\textit{Ответ:}\right.$ $\left.\frac{16}{15}\pi.\right)$

9.4. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вычисление пройденного пути по скорости. Если $v = f(t)$ — скорость движения материальной точки по некоторой прямой, то путь S, пройденный ею за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \tag{9.16}$$

Пример 1. Материальная точка M движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0;\ 3]$.

▶ Согласно формуле (9.16), имеем

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 2t + 1)\,dt = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^3 = 39 \text{ м.} \blacktriangleleft$$

Вычисление работы переменной силы. Пусть под действием силы $F(s)$ материальная точка M движется по прямой Os. Работа этой силы на участке пути $[a;\ b]$ определяется по формуле

$$A = \int_a^b F(s)\,ds.$$

Пример 2. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удлинения ее на 1 см необходимо приложить силу в 1 кН.

▶ Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину, пропорциональна ее растяжению, т. е. $F = kx$, где x — растяжение пружины (в метрах), k — коэффициент пропорциональности.

Так как по условию при $x = 0{,}01$ м сила $F = 1$ кН, то из равенства $1 = 0{,}01k$ получаем: $k = 100$ и $F = 100x$. Следовательно, искомая работа

$$A = \int_0^{0,1} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0,1} = 0{,}5 \text{ кДж.} \blacktriangleleft$$

Пример 3. Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ высотой $H = 4$ м, заполнен жидкостью плотностью $\delta = 0{,}8$ т/м³. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.

▶ Выделим на высоте z_i элементарный слой жидкости толщиной Δz_i (рис. 9.18), объем которого $\Delta V_i = \pi \cdot 2\sqrt{z_i} \cdot 3\sqrt{z_i}\Delta z_i$, а масса $\Delta m_i \approx 6\pi\delta z_i \Delta z_i$, так как в горизонтальном сечении получается эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{z_i}$, $b = 3\sqrt{z_i}$. Работа, затраченная на перекачивание жидкости,

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 6\pi g \delta z_i (H - z_i)\Delta z_i =$$

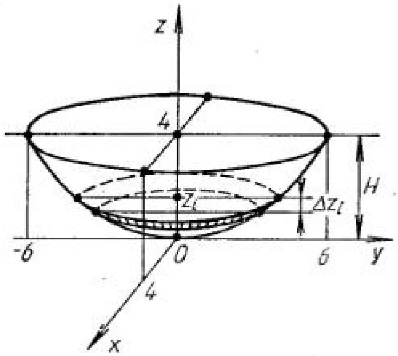


Рис. 9.18

$$= \int_0^H 6\pi g\delta z(H-z)dz = 6\pi g\delta\left(H\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^H =$$

$$= \pi\delta g H^3 = 64 g\pi\delta \approx 1575{,}53 \text{ кДж.} ◀$$

Вычисление силы давления жидкости на пластинку. Метод решения данной задачи покажем на конкретном примере.

Пример 4. Треугольная пластинка с основанием $a = 3$ м и высотой $H = 2$ м погружена вертикально вершиной вниз в жидкость так, что основание параллельно поверхности жидкости и находится на расстоянии $d = 1$ м от поверхности. Плотность жидкости $\delta = 0{,}9$ т/м^3. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки.

▶ Для определения силы давления жидкости воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление Δp жидкости на площадку ΔS, погруженную на глубину h:

$$\Delta p = \delta g h \Delta S,$$

где δ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Прямыми, параллельными поверхности жидкости, разобьем треугольник на элементарные полоски шириной dy (рис. 9.19), отстоя-

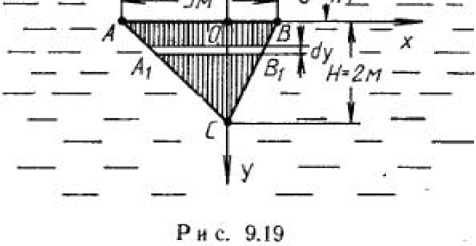


Рис. 9.19

ще от поверхности жидкости на расстоянии $y + d$. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеем:

$$\frac{|A_1B_1|}{a} = \frac{H - y}{H}, \quad |A_1B_1| = \frac{a}{H}(H - y),$$

т. е. площадь вырезанной полоски

$$dS = \frac{a}{H}(H - y)\,dy,$$

а давление на каждую из сторон полоски треугольной пластины

$$dp = \frac{a}{H}\delta g(d + y)(H - y)\,dy.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$P = \int\limits_0^H \frac{a}{H}\,\delta g(d + y)(H - y)\,dy = \frac{3}{2}\,\delta g \int\limits_0^2 (2 + y - y^2)\,dy =$$

$$= \frac{3}{2}\delta g\left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 5\delta g \approx 44{,}1\ \text{кН}. \ ◀$$

Вычисление моментов инерции. С помощью определенного интеграла также можно вычислять моменты инерции плоских фигур.

Пример 5. Вычислить момент инерции однородного круга массой M и радиусом R относительно его центра.

▶ Момент инерции материальной точки массой m относительно точки O равен произведению массы этой точки на квадрат ее расстояния до точки O. Момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерции всех точек этой системы.

Концентрическими окружностями с центром в точке O разобъем круг на n колец ширной dr, площадь каждого из которых $dS = 2\pi r\,dr$, а масса $dm = 2\pi r\,dr\,\delta$, где плотность $\delta = M/(\pi R^2)$ (рис. 9.20).

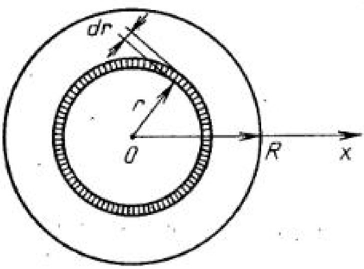


Рис. 9.20

Элементарные моменты инерции выделенных колец $dI_0 = 2\pi\delta r^3 dr$. Суммируя (интегрируя) элементарные моменты инерции, получаем

$$I = \int\limits_0^R 2\pi\delta r^3 dr = 2\pi\delta \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{1}{2}\pi R^4 \frac{M}{\pi R^2} = \frac{1}{2} MR^2. \ ◀$$

Вычисление координат центра масс плоской фигуры. Рассмотрим следующие случаи.

1. Координаты центра масс $C(x_C, y_C)$ плоской материальной дуги AB графика функции $y=f(x)$, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x)$, определяются по формулам (см. рис. 9.12):

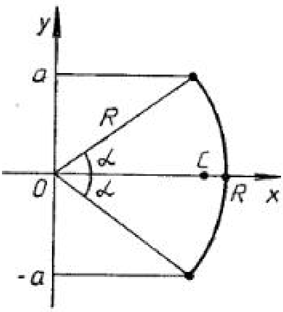
$$x_C=\frac{\int_a^b x\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx},\quad y_C=\frac{\int_a^b y\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

2. Если фигура ограничена снизу линией $y=f_1(x)$, а сверху — $y=f_2(x)$, т. е. $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (см. рис. 9.6), поверхностная плотность фигуры $\delta=\delta(x)$, то вычисление ее центра масс $C(x_C, y_C)$ выполняется по формулам:

$$x_C=\frac{\int_a^b x\delta(x)(f_2(x)-f_1(x))\,dx}{\int_a^b \delta(x)(f_2(x)-f_1(x))\,dx},\quad y_C=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)(f_2^2(x)-f_1^2(x))\,dx}{\int_a^b \delta x(f_2(x)-f_1(x))\,dx}\qquad(9.17)$$

Пример 6. Найти координаты масс однородной дуги окружности радиусом R с центральным углом 2α.

▶ Выберем систему координат так, как показано на рис. 9.21. Тогда, вследствие однородности и симметричности расположения дуги, имеем $y_C=0$. Находим x_C по формуле



$$x_C=\frac{\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+x'^2}\,dy}{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+x'^2}\,dy},$$

так как $\delta=\mathrm{const}$.

Рис. 9.21

Воспользуемся параметрическими уравнениями окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Тогда

$$x_C=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\cos t\,dt}{\int_{-\alpha}^{\alpha}R\,dt}=R\frac{\sin t\,|_{-\alpha}^{\alpha}}{t\,|_{-\alpha}^{\alpha}}=R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad◀$$

Пример 7. Вычислить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=6-x^2$, $y=2$.

▶ Из однородности и симметричности данной фигуры следует, что $x_C=0$ (рис. 9.22) Для определения y_C воспользуемся формулами

(9.17). Имеем

$$y_C=\frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}((6-x^2)^2-2^2)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx}=\frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}(32-12x^2+x^4)dx}{2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(32x-4x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2}{(4x-x^3/3)\Big|_0^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{192/5}{16/3}=3{,}6. \blacktriangleleft$$

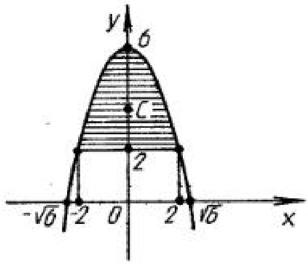


Рис. 9.22

АЗ-9.5

1. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v=te^{-0{,}01t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. (*Ответ:* 10^4 м.)

2. Найти момент инерции однородного стержня длиной l и весом P относительно его конца. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2.\right)$

3. Вычислить работу, которую необходимо затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=2$ м, а высота $H=3$ м, из однородного строительного материала плотностью $\delta=2{,}5\text{т/м}^3$. (*Ответ:* $\frac{8}{15}\pi g\delta H^2R^2=48\pi g\approx 1477{,}8$ кДж.)

4. Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание равно 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 м. Плотность воды $\delta=1$ т/м^3. (*Ответ:* $656g\approx 6428{,}8$ кН.)

5. Найти координаты центра масс однородной дуги цепной линии $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ от точки $x=-a$ до точки $x=a$. $\left(\textit{Ответ: } x_C=0,\ y_C=\frac{a}{4}\frac{2+\mathrm{sh}\,2}{\mathrm{sh}\,1}.\right)$

6. Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. (*Ответ:* $x_C=\pi a$, $y_C=4a/3$.)

7. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2-2x$. (*Ответ:* (3/2, 3/5).)

Самостоятельная работа

1. 1. Вычислить силу давления воды на пластину, имеющую форму параллелограмма с основанием $a=2$ м и высота $H=3$ м, опущенную вертикально вниз на глубину 4 м, если основание параллельно поверхности воды. Плотность воды 1 т/м^3. (*Ответ:* $16g\approx 156{,}8$ кН.)

2. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиусом R с центром в начале координат, расположенной в первом квадранте. (*Ответ:* $(2R/\pi, 2R/\pi)$.)

2. 1. Скорость движения материальной точки $v=4te^{-t^2}$ м/с. Какой путь пройдет точка от начала движения до полной остановки? (*Ответ:* 2м.)

2. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$. (*Ответ:* $(\pi/2, \pi/8)$.)

3. 1. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м, если плотность воды $\delta=1$ т/м^3. (*Ответ:* $2{,}5g10^3\pi\approx 76969$ кДж.)

2. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=20x$, $x^2=20y$. (*Ответ:* (9,9).)

9.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 9

ИДЗ-9.1

Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

1

1.1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. (*Ответ:* 1,78.)

1.2. $\int\limits_{0}^{\sqrt[12]{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$. (*Ответ:* 2,60.)

1.3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{x^2+1}$. (*Ответ:* 0,21.)

1.4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$. (*Ответ:* 0,33.)

1.5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$. (*Ответ:* 0,57.)

1.6. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$ (*Ответ:* 0,41.)

1.7. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. (*Ответ:* $-0{,}67$.

1.8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$. (*Ответ:* 1,24.)

1.9. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$. (*Ответ:* 1,50.)

1.10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1} dz$. (*Ответ:* 0,20.)

1.11. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$. (*Ответ:* 0,50.)

1.12. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

1.13. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}dx$. (*Ответ:* 0,63.)

1.14. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$. (*Ответ:* 3,14.)

1.15. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$. (*Ответ:* 1,07.)

1.16. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (*Ответ:* 0,13.)

1.17. $\int\limits_{0}^{1} 3(x^2 + x^2 e^{x^3})\,dx$. (*Ответ:* 2,72.)

1.18. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$. (*Ответ:* 1,73.)

1.19. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. (*Ответ:* 0,20.)

1.20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x}\, dx$. (*Ответ:* 0,46.)

1.21. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. (*Ответ:* 0,52.)

1.22. $\int\limits_{3}^{8} \sqrt{x+1}\, dx$. (*Ответ:* 12,67.)

1.23. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cos^3\alpha\, d\alpha$. (*Ответ:* 0,14.)

1.24. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x\,dx$. (*Ответ:* 2,77.)

1.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$. (*Ответ:* 0,67.)

1.26. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. (*Ответ:* 0,32.)

1.27. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx$. (*Ответ:* 0,33.)

1.28. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2 - 9}$. (*Ответ:* $-0{,}13$.)

1.29. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \alpha \sin^3 \alpha d\alpha$. (*Ответ:* 0,23.)

1.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi/4}} \frac{xdx}{\cos^2 (x^2)}$. (*Ответ:* 0,50.)

2

2.1. $\int\limits_{2}^{3} y \ln (y - 1) dy$. (*Ответ:* 1,02.)

2.2. $\int\limits_{-2}^{0} x^2 e^{-x/2} dx$. (*Ответ:* 5,76.)

2.3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \cos x dx$. (*Ответ:* 0,57.)

2.4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx$. (*Ответ:* 5,86.)

2.5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$. (*Ответ:* 3,14.)

2.6. $\int\limits_{1}^{2} (y - 1) \ln y dy$. (*Ответ:* 0,25.)

2.7. $\int\limits_{-1/2}^{0} x e^{-2x} dx$. (*Ответ:* $-0{,}25$.)

2.8. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$. (*Ответ:* 1,57.)

2.9. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$. (*Ответ:* 0,82.)

2.10. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$. (*Ответ:* 0,16.)

2.11. $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$. (*Ответ:* 18,33.)

2.12. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$. (*Ответ:* 0,57.)

2.13. $\int\limits_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$. (*Ответ:* 6,28.)

2.14. $\int\limits_0^{\pi/8} x^2\sin 4x dx$. (*Ответ:* 0,17.)

2.15. $\int\limits_1^2 y^2\ln y dy$. (*Ответ:* 1,07.)

2.16. $\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$. (*Ответ:* 0,15.)

2.17. $\int\limits_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3)dx$. (*Ответ:* 0,21.)

2.18. $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$. (*Ответ:* 4,00.)

2.19. $\int\limits_1^e x\ln^2 x dx$. (*Ответ:* 1,60.)

2.20. $\int\limits_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$. (*Ответ:* $-19{,}32$.)

2.21. $\int\limits_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$. (*Ответ:* 0,12.)

2.22. $\int\limits_{1/2}^1 \arcsin(1-x)dx$. (*Ответ:* 0,13.)

2.23. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$. (*Ответ:* 1,37.)

2.24. $\int\limits_{-1}^{0} x \ln(1-x)dx$. (*Ответ:* $-0{,}25$.)

2.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}dx$. (*Ответ:* 2,32.)

2.26. $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)dx$. (*Ответ:* 1,87.)

2.27. $\int\limits_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$. (*Ответ:* 282,40.)

2.28. $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$. (*Ответ:* 1,10.)

2.29. $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2\,x dx$. (*Ответ:* 0,13.)

2.30. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$. (*Ответ:* 0,29.)

3

3.1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$. (*Ответ:* 1,79.)

3.2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$. (*Ответ:* 9,67.)

3.3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$. (*Ответ:* 0,53.)

3.4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}$. (*Ответ:* 0,12.)

3.5 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}$ (*Ответ:* $-0{,}09$.)

3.6. $\int_{2}^{3}\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$. (*Ответ:* 1,62.)

3.7. $\int_{1/3}^{1/2}\frac{x\,dx}{(x-1)^3}$. (*Ответ:* $-1{,}25$.)

3.8. $\int_{4}^{5}\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$. (*Ответ:* 0,04.)

3.9. $\int_{3}^{4}\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. (*Ответ:* 0,16.)

3.10. $\int_{0}^{1}\frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}$. (*Ответ:* $-1{,}63$.)

3.11. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$. (*Ответ:* 0,15.)

3.12. $\int_{3}^{5}\frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$. (*Ответ:* 0,50.)

3.13. $\int_{0}^{1}\frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$. (*Ответ:* $-0{,}20$.)

3.14. $\int_{-1}^{0}\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$. (*Ответ:* 9,38.)

3.15. $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. (*Ответ:* 0,12.)

3.16. $\int_{8}^{10}\frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$. (*Ответ:* 0,29.)

3.17. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^4+x^2}$. (*Ответ:* 0,16.)

3.18. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^7 dx}{1 - x^4}$. (*Ответ:* $-15{,}34$.)

3.19. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^4 - 1}$. (*Ответ:* 0,02.)

3.20. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x dx}{x^3 - 1}$. (*Ответ:* 0,37.)

3.21. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x + 1}$. (*Ответ:* 0,88.)

3.22. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x - 1)}$. (*Ответ:* 0,02.)

3.23. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 4)}$. (*Ответ:* 0,23.)

3.24. $\int\limits_{7}^{9} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$. (*Ответ:* 0,04.)

3.25. $\int\limits_{4}^{6} \frac{x dx}{x^3 - 6x^2 + 16 - 6}$. (*Ответ:* 0,51.)

3.26. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3 + 1}$. (*Ответ:* 0,25.)

3.27. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4} dx$. (*Ответ:* 1,44.)

3.28. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx$. (*Ответ:* $-0{,}12$.)

3.29. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2} dx$. (*Ответ:* 0,35.)

3.30. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$. (*Ответ:* $-0{,}08$.)

4

4.1. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 3,14.)

4.2. $\int\limits_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. (*Ответ:* $-0{,}47$.)

4.3. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$. (*Ответ:* 0,02.)

4.4. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 1,91.)

4.5. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$. (*Ответ:* 1,02.)

4.6. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 2,36.)

4.7. $\int\limits_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 31,79.)

4.8. $\int\limits_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$. (*Ответ:* 0,53.)

4.9. $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$. (*Ответ:* 0,59.)

4.10. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. (*Ответ:* $-0{,}62$.)

4.11. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. (*Ответ:* 0,68.)

4.12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{3/2}}$ (*Ответ:* 0,27.)

4.13. $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 1,29.)

4.14. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$. (*Ответ:* 0,14.)

4.15. $\int\limits_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. (*Ответ:* 0,04.)

4.16. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. (*Ответ:* 0,59.)

4.17. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$. (*Ответ:* 0,26.)

4.18. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$. (*Ответ:* 0,08.)

4.19. $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. (*Ответ:* 0,68.)

4.20. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. (*Ответ:* 1,16.)

4.21. $\int\limits_0^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{(5-x^2)^3}$. (*Ответ:* 0,20.)

4.22. $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. (*Ответ:* $-0,20$.)

4.23. $\int\limits_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$. (*Ответ:* 0,05.)

4.24. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$. (*Ответ:* 0,11.)

4.25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}dx$. (*Ответ:* $-502{,}09$.)

4.26. $\int\limits_{4\sqrt{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$. (*Ответ:* 0,01.)

4.27. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. (*Ответ:* 0,29.)

4.28. $\int\limits_{0}^{3} x^4\sqrt{9-x^2}\, dx$. (*Ответ:* 71,53.)

4.29. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^2}}$. (*Ответ:* 5,31.)

4.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\, dx$. (*Ответ:* 4,71.)

5

5.1. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$. (*Ответ:* 0,26.)

5.2. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. (*Ответ:* 0,60.)

5.3. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^3 2x dx$. (*Ответ:* 0,33.)

5.4. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\, dx$. (*Ответ:* 1,18.)

5.5. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$. (*Ответ:* 0,39.)

5.6. $\int\limits_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$. (*Ответ:* 0,68.)

5.7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$. (*Ответ:* 0,38.)

5.8. $\int\limits_0^{\pi/4} 2\cos x \sin 3x dx$. (*Ответ:* 1,00.)

5.9. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$. (*Ответ:* 1,80.)

5.10. $\int\limits_0^{\pi/32} (32\cos^2 4x - 16) dx$. (*Ответ:* 1,41.)

5.11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}$. (*Ответ:* 3,14.)

5.12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 \varphi d\varphi$. (*Ответ:* 0,93.)

5.13. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx$. (*Ответ:* 0.)

5.14. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$. (*Ответ:* $-0{,}25$.)

5.15. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. (*Ответ:* 1,33.)

5.16. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$. (*Ответ:* 0,55.)

5.17. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx$. (*Ответ:* 0,81.)

5.18. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \cos 5x dx$. (*Ответ:* 0,16.)

5.19. $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx$. (*Ответ:* 0,20.)

5.20. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^6 x dx$. (*Ответ:* 0,49.)

5.21. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$. (*Ответ:* 2.)

5.22. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$ (*Ответ:* 0,38.)

5.23. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$. (*Ответ:* 1,69.)

5.24. $\int\limits_{0}^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx$. (*Ответ:* 0,05.)

5.25. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$. (*Ответ:* $-0,21$.)

5.26. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$. (*Ответ:* 0,55.)

5.27. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x dx$. (*Ответ:* 0,53.)

5.28. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$. (*Ответ:* 0,10.)

5.29. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$. (*Ответ:* 0,60.)

5.30. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$. (*Ответ:* 1,18.)

6

6.1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$. (*Ответ:* 0,06.)

6.2. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. (*Ответ:* 1,10.)

6.3. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$. (*Ответ:* $-0,14$.)

6.4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{x^2dx}{13-6x^3+x^6}$. (*Ответ:* 0,26.)

6.5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$. (*Ответ:* 0,29.)

6.6. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. (*Ответ:* 0,20.)

6.7. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. (*Ответ:* 0,52.)

6.8. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t^2+5t+4}$. (*Ответ:* 0,07.)

6.9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$. (*Ответ:* 0,28.)

6.10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-5}{x^2-2x+2}$. (*Ответ:* $-2,79$.)

6.11. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. (*Ответ:* 0,39.)

6.12. $\int\limits_{6}^{8} \frac{dx}{x^2+2x}$. (*Ответ:* 0,03.)

6.13. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

6.14. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$. (*Ответ:* 3,99.)

6.15. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. (*Ответ:* 1,11.)

6.16. $\int\limits_{1/6}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}$. (*Ответ:* 0,77.)

6.17. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$. (*Ответ:* 9,35.)

6.18. $\int\limits_{3,5}^{5} \frac{xdx}{x^2-7x+13}$. (*Ответ:* 4,94.)

6.19. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}$. (*Ответ:* 3,19.)

6.20. $\int\limits_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}$. (*Ответ:* 2,41.)

6.21. $\int\limits_{4}^{5} \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$. (*Ответ:* 0,02.)

6.22. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$. (*Ответ:* 0,08.)

6.23. $\int\limits_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$. (*Ответ:* 38,67.)

6.24. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$. (*Ответ:* 51,81.)

6.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. (*Ответ:* 0,14.)

6.26. $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$. (*Ответ:* 0,21.)

6.27. $\int\limits_{4}^{7}\frac{dx}{x^2+3x-10}$. (*Ответ:* 0,09.)

6.28. $\int\limits_{1/3}^{4/3}\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. (*Ответ:* 0,52.)

6.29. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

6.30. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+3}$. (*Ответ:* 0,61.)

7

7.1. $\int\limits_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. (*Ответ:* 16,16.)

7.2. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$. (*Ответ:* 0,13.)

7.3. $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. (*Ответ:* 0,94.)

7.4. $\int\limits_{3}^{8}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$. (*Ответ:* 11,77.)

7.5. $\int\limits_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$. (*Ответ:* 10,67.)

7.6. $\int\limits_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. (*Ответ:* 0,86.)

7.7. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}$. (*Ответ:* 0,41.)

7.8. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$. (*Ответ:* 0,43.)

7.9. $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$. (*Ответ:* 4,67.)

7.10. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. (*Ответ:* 1,31.)

7.11. $\int\limits_{2/3}^{7/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x}}$. (*Ответ:* 0,96.)

7.12. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ (*Ответ:* 0,20.)

7.13. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x)^4}$. (*Ответ:* 0,04.)

7.14. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. (*Ответ:* 0,58.)

7.15. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x\,dx}{e^x + e^{-x}}$. (*Ответ:* 0,20.)

7.16. $\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{9+z^3}}$. (*Ответ:* 0,67.)

7.17. $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$. (*Ответ:* 4,00.)

7.18. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. (*Ответ:* 0,52.)

7.19. $\int\limits_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$. (*Ответ:* 0,29.)

7.20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos y\,dy}{4+\sqrt{\sin y}}$. (*Ответ:* 0,22.)

7.21. $\int\limits_{2}^{5}\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$. (*Ответ:* 8,44.)

7.22. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$. (*Ответ:* 1,05.)

7.23. $\int\limits_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. (*Ответ:* 2,00.)

7.24. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln x}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. (*Ответ:* 0,41.)

7.25. $\int\limits_{e^2}^{e^3}\frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$. (*Ответ:* $-0{,}49$.)

7.26. $\int\limits_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$. (*Ответ:* 8,39.)

7.27. $\int\limits_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}}\frac{x^3dx}{(x^2+1)^{2/3}}$. (*Ответ:* 22,88.)

7.28. $\int\limits_{0}^{13}\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$. (*Ответ:* 38,06.)

7.29. $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12}\frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$. (*Ответ:* 0,26.)

7.30. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$. (*Ответ:* 0,17.)

8. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

8.1. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$, б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

8.2. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4 - 1}$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$.

8.3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$; б) $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

8.4. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

8.5. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$.

8.6. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$; б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$.

8.7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$; б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\ln 2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

8.8. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$; б) $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx$.

8.9. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1 - x^4}$.

8.10. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 4x + 5}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$.

8.11. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

8.12. а) $\int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)}$; б) $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

8.13. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{4x^2 + 4x + 5}$; б) $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

8.14. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx$.

8.15. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx$.

8.16. а) $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

8.17. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

8.18. а) $\int\limits_0^{\infty} x \sin x dx$; б) $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

8.19. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$.

8.20. а) $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$; б) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

8.21. а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

8.22. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3}$; б) $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt[3]{9x}dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

8.23. а) $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x} x dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

8.24. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

8.25. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

8.26. а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\int\limits_1^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$.

8.27. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; б) $\int\limits_1^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

8.28. а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$; б) $\int\limits_0^{4}\frac{10x\,dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

8.29. а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

8.30. а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Решение типового варианта

Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

1. $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

► Используя формулу Ньютона — Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, вычисляем интеграл от дробно-рациональной функции:

$$\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\limits_1^{2}\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 1=A(1+x^2)+(Bx+C)x, \\ \begin{array}{c|l} x=0 & 1=A, \\ x^2 & 0=A+B, \\ x & 0=C, \end{array}\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}\begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=0 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x}-\int\limits_1^{2}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\ln|x|\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2=$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 0{,}69 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}61 = 0{,}24. \blacktriangleleft$$

2. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx.$

▶ Дважды применив метод интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \ du = 2\ln x \frac{1}{x}\, dx, \\ dv = dx, \ v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \,|_1^e -$$

$$- 2\int\limits_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \ du = \frac{1}{x}\, dx, \\ dv = dx, \ v = x \end{array} \right| =$$

$$= e \ln^2 e - 2(x \ln x - x)\,|_1^e = e - 2e + 2e - 2 = 0{,}72. \blacktriangleleft$$

3. $\int\limits_3^4 \frac{9x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx.$

▶ Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь.

Разложив знаменатель на простые множители, а затем полученную дробь — на простые дроби, имеем

$$\int\limits_3^4 \frac{9x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx = \int\limits_3^4 \frac{9x^2 - 14x + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)}\, dx =$$

$$= \int\limits_3^4 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 9x^2 - 14x + 1 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)\times \\ \times(x-2) + C(x+1)(x-1), \\ \begin{array}{r|l} x = -1 & \left.\begin{array}{rl} 24 = & 6A, \\ -4 = & -2B, \\ 9 = & 3C, \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = 4, \\ B = 2, \\ C = 3 \end{array}\right\} \\ x = 1 & \\ x = 2 & \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_3^4 \left(\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = (4 \ln|x+1| +$$

$$+ 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2|)\,|_3^4 = 4\ln 5 + 2\ln 3 +$$

$$+3\ln 2-4\ln 4-2\ln 2=\ln(5^4\cdot 3^2\cdot 2)-\ln 4^4=$$
$$=\ln\frac{5^4\cdot 3^2\cdot 2}{4^4}=\ln\frac{11\,250}{256}=3{,}78. \blacktriangleleft$$

4. $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\blacktriangleright \int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sqrt{x^2+1}=t,\ x^2+1=t^2,\ xdx=tdt,\\ t=1 \text{ при } x=0,\ t=\sqrt{2} \text{ при } x=1\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)t}{t}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=0{,}20. \blacktriangleleft$$

5. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

$\blacktriangleright$ Подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$ (рационально зависит от $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$), поэтому применим подстановку $t=\operatorname{tg} x$ (см. формулы (8.14)):

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\operatorname{tg} x,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ t=0 \text{ при } x=0,\ t=1 \text{ при } x=\pi/4\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left(4-\frac{3}{1+t^2}+\frac{5t^2}{1+t^2}\right)}=\int\limits_0^1 \frac{dt}{9t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3t\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 0)=0{,}42. \blacktriangleleft$$

6. $\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

▶ Разобьем данный интеграл на два интеграла таким образом, чтобы получить в числителе первого производную от квадратного трехчлена, стоящего под знаком радикала в знаменателе, и проведем необходимые преобразования. В результате имеем

$$\int_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = -4\int_0^1 \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx -$$

$$-19\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -8\sqrt{3-2x-x^2}\Big|_0^1 -$$

$$-19\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^1 = 8\sqrt{3} - \frac{19}{2}\pi + \frac{19}{6}\pi \approx -6{,}05. \blacktriangleleft$$

7. $\displaystyle\int_{2/3}^{10/3} \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

▶ Данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\sqrt{3x-1}=t$. Имеем

$$\int_{2/3}^{10/3} \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{3x-1}=t,\ 3x-1=t^2,\ x=\frac{1}{3}(t^2+1),\ dx=\frac{2}{3}t\,dt, \\ t=1 \text{ при } x=2/3,\ t=3 \text{ при } x=10/3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}t\,dt}{t^2 t} = \frac{2}{9}\int_1^3 \frac{t^3+t}{t^3}\,dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^3 \approx 0{,}59. \blacktriangleleft$$

8. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

▶ а) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{0}^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) +$$

$$+ \lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\pi}{2} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

б) $$\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\beta \to 0-} \int_{-1}^{\beta} (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx + \lim_{\alpha \to 0+} \int_{\alpha}^{1} (3x^{4/3} + 2x^{-2/3}) dx =$$

$$= \lim_{\beta \to 0-} \left(\frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Big|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{9}{7} x^{7/3} + 6x^{1/3} \right) \Big|_{\alpha}^{1} =$$

$$\lim_{\beta \to 0-} \left(\frac{9}{7} \beta^{7/3} + 6\beta^{1/3} + \frac{9}{7} + 6 \right) +$$

$$+ \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7} \alpha^{7/3} - 6\alpha^{1/3} \right) = 14\frac{4}{7}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-9.2

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1.1. $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$. (*Ответ:* 9,00.)

1.2. $y = x^2$, $y = 3 - x$. (*Ответ:* 10,67.)

1.3. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$. (*Ответ:* 0,42.)

1.4. $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$. (*Ответ:* 57,70.)

1.5. $\rho = 4\cos 3\varphi$. (*Ответ:* 12,56.)

1.6. $\rho = 3\cos 2\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)

1.7. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* 18,84.)

1.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$. (*Ответ:* 1,00.)

1.9. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$. (*Ответ:* 150,72.)

1.10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$. (*Ответ:* 18,84.)

1.11. $\rho = 2\sin 3\varphi$. (*Ответ:* 3,14.)

1.12. $\rho = 2 + \cos\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)

1.13. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = x^2/2$. (*Ответ:* 1,23.)

1.14. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$. (*Ответ:* 29,87.)

1.15. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* 6,05.)

1.16. $\rho = 4\sin^2\varphi$. (*Ответ:* 18,84.)

1.17. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$. (*Ответ:* 18,84.)

1.18. $y^2 = 9x$, $y = 3x$. (*Ответ:* 0,50.)

1.19. $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. (*Ответ:* 29,25.)

1.20. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$. (*Ответ:* 5,33.)

1.21. $y^2 = x^3$, $x = 2$. (*Ответ:* 4,51.)

1.22. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. (*Ответ:* 2,67.)

1.23. $y^2 = (4 - x^3)$, $x = 0$. (*Ответ:* 25,60.)

1.24. $\rho = 3\sin 4\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)

1.25. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$. (*Ответ:* 0,75.)

1.26. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. (*Ответ:* 6,76.)

1.27. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$. (*Ответ:* 3,02.)

1.28. $x^2 = 4y$, $y = 8/(x^2 + 4)$. (*Ответ:* 4,95.)

1.29. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$. (*Ответ:* 1,50.)

1.30. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. (*Ответ:* 4,71.)

2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии.

2.1. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. (*Ответ:* 12,00.)

2.2. $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. (*Ответ:* 9,86.)

2.3. $\rho = \sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,14.)

2.4. $\rho = 2\sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,27.)

2.5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$. (*Ответ:* 18,00.)

2.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$. (*Ответ:* 24,00.)

2.7. $y^2 = (x + 1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$. (*Ответ* 24,81.)

2.8. $y = 1 - \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/6)$. (*Ответ:* 0,55.)

2.9. $\rho = 6\cos^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 8,60.)

2.10. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^4 t$. (*Ответ:* 24,00.)

2.11. $y^2 = (x - 1)^3$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(6, \sqrt{125})$ (*Ответ:* 8,27.)

2.12. $y^2 = x^5$, отсеченной прямой $x = 5$. (*Ответ:* 24,81.)

2.13. $\rho = 3\cos\varphi$. (*Ответ:* 9,42.)

2.14. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* 24,00.)

2.15. $\rho = 2\cos^3(\varphi/3)$. (*Ответ:* 9,42.)

2.16. $x=5\cos^2 t,\quad y=5\sin^2 t\quad (0\leqslant t\leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 7,05.)

2.17. $9y^2=4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy. (*Ответ:* 9,33.)

2.18. $\rho=3\sin\varphi$. (*Ответ:* 9,42.)

2.19. $y=\ln\sin x$ $(\pi/3\leqslant x\leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,55.)

2.20. $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. (*Ответ:* 72,00.)

2.21. $\rho=2(1-\cos\varphi)$. (*Ответ:* 16,00.)

2.22. $y^2=(x-1)^3$ от точки $A(2,-1)$ до точки $B(5,-8)$. (*Ответ:* 7,63.)

2.23. $x=7(t-\sin t),\quad y=7(1-\cos t)\quad (2\pi\leqslant t\leqslant 4\pi)$. (*Ответ:* 56,00.)

2.24. $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. (*Ответ:* 2,35.)

2.25. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$. (*Ответ:* 24,00.)

2.26. $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$ (петля). (*Ответ:* 4,00.)

2.27. $\rho=5\sin\varphi$. (*Ответ:* 15,70.)

2.28. $\rho=4\cos\varphi$. (*Ответ:* 12,56.)

2.29. $\rho=5(1+\cos\varphi$.) (*Ответ:* 40,00.)

2.30. $y^2=x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8)$. (*Ответ:* 9,07.)

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат.

3.1. Ф: $y^2=4-x$, $x=0$, Oy. (*Ответ:* 107,17.)

3.2. Ф: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 1,68.)

3.3. Ф: $x^2/9+y^2/4=1$, Oy. (*Ответ:* 150,72.)

3.4. Ф: $y^3=x^2$, $y=1$, Ox. (*Ответ:* 3,59.)

3.5. Ф: $x=6(t-\sin t)$, $y=6(1-\cos t)$, Ox. (*Ответ:* 1064,88.)

3.6. Ф: $x=3\cos^2 t,\quad y=4\sin^2 t\quad (0\leqslant t\leqslant \pi/2)$, Oy. (*Ответ:* 37,68.)

3.7. Ф: $y^2=x$, $x^2=y$, Ox. (*Ответ:* 0,94.)

3.8. Ф: $y^2=(x-1)^3$, $x=2$, Ox. (*Ответ:* 0,78.)

3.9. Ф: $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{\frac{3}{2}}x$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 1,24.)

3.10. Ф: $y=\sin x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$, Ox. (*Ответ:* 4,93.)

3.11. Ф: $y^2=4x$, $x^2=4y$, Ox. (*Ответ:* 60,29.)

3.12. Ф: $x=2\cos t$, $y=5\sin t$, Oy. (*Ответ:* 83,73.)

3.13. Ф: $y=x^2$, $8x=y^2$, Oy. (*Ответ:* 15,07.)

3.14. Ф: $y=e^x$, $x=0$, $y=0$, $x=1$, Ox. (*Ответ:* 10,05.)

3.15. Ф: $y^2=4x/3$, $x=3$, Ox. (*Ответ:* 90,43.)

3.16. Ф: $y=2x-x^2$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 3,35.)

3.17. Ф: $\rho=2(1+\cos\varphi)$, полярная ось. (*Ответ:* 66,99.)

3.18. Ф: $x=7\cos^3 t$, $y=7\sin^3 t$, Oy. (*Ответ:* 328,23.)

3.19. Ф: $x^2/16+y^2/1=1$, Ox. (*Ответ:* 16,75.)

3.20. Ф: $x^3=(y-1)^2$, $x=0$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 6,44.)

3.21. Ф: $xy=4$, $2x+y-6=0$, Ox. (*Ответ:* 4,19.)

3.22. Ф: $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sin t$, Oy. (*Ответ:* 25,12.)

3.23. Ф: $y=2-x^2$, $y=x^2$, Ox. (*Ответ:* 16,75.)

3.24. Ф: $y=-x^2+8$, $y=x^2$, Ox. (*Ответ:* 535,89.)

3.25. Ф: $y^2=(x+4)^3$, $x=0$, Ox. (*Ответ:* 200,96.)

3.26. Ф: $y=x^3$, $x=0$, $y=8$, Oy. (*Ответ:* 60,29.)

3.27. Ф: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 0,96.)

3.28. Ф: $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$, Ox. (*Ответ:* 57,10.)

3.29. Ф: $y=x-x^2$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 0,10.)

3.30. Ф: $y=2-x^2/2$, $x+y=2$, Oy. (*Ответ:* 4,17.)

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

4.1. L: $y=x^3/3$ $(-1/2\leqslant x\leqslant 1/2)$, Ox. (*Ответ:* 4,25.)

4.2. L: $\rho=2\cos\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 12,57.)

4.3. L: $x=10(t-\sin t)$, $y=10(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 6698,67.)

4.4. L: $y=x^2/2$, отсеченная прямой $y=3/2$, Oy. (*Ответ:* 14,65.)

4.5. L: $3y=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$, Ox. (*Ответ:* 24,09.)

4.6. L: $y=\sqrt{x}$, отсеченная прямой $y=x$, Ox. (*Ответ:* 5,34.)

4.7. L: $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 267,95.)

4.8. L: $x=\cos t$, $y=3+\sin t$, Ox. (*Ответ:* 118,32.)

4.9. L: $3x=y^3$ $(0\leqslant y\leqslant 2)$, Oy. (*Ответ:* 24,09.)

4.10. L: $y=x^3/3$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, Ox. (*Ответ:* 1,27.)

4.11. L: $x=\cos t$, $y=1+\sin t$, Ox. (*Ответ:* 32,28.)

4.12. L: $x^2=4+y$, отсекаемая прямой $y=2$, Oy. (*Ответ:* 259,57.)

4.13. L: $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 602,88.)

4.14. L: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 7,54.)

4.15. L: $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$, полярная ось. (*Ответ:* 14,82.)

4.16. L: $y^2=4+x$, отсекаемая прямой $x=2$, Ox. (*Ответ:* 64,89.)

4.17. L: $y^2=2x$, отсекаемая прямой $2x=3$, Ox. (*Ответ:* 14,65.)

4.18. L: $3y = x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, Ox. (*Ответ:* 0,63.)

4.19. L: $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 14,80.)

4.20. L: $\rho = 6\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 354,96.)

4.21. L: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 66,99.)

4.22. L: $\rho = 2\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 39,44.)

4.23. L: $\rho = \frac{2}{3}\cos\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 7,07.)

4.24. L: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 67,82.)

4.25. L: $x = 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, Ox. (*Ответ:* 236,64.)

4.26. L: $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 16,38.)

4.27. L: $y = x^3$ между прямыми $x = \pm 2/3$, Ox. (*Ответ:* 0,84.)

4.28. L: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 30,14.)

4.29. L: $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, Ox. (*Ответ:* 78,88.)

4.30. L: $\rho = 4\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 157,76.)

Решение типового варианта

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ (рис. 9.23.)

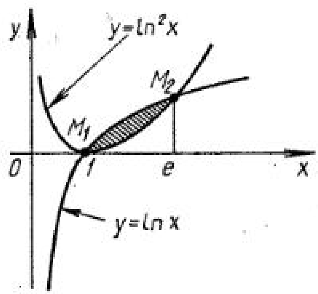


Рис. 9.23

▶ Найдем точки пересечения данных кривых: $M_1(1, 0)$, $M_2(e, 1)$. Теперь воспользуемся формулой (9.7). Имеем:

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx,$$

$$\int \ln^2 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x,\ du = 2\ln x \frac{1}{x}\,dx, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx,$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + C.$$

Тогда

$$S = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \ln^2 x dx = (x \ln x - x)\Big|_1^e - (x \ln^2 x -$$
$$- 2x \ln x + 2x)\Big|_1^e = e \ln e - e + 1 - (e \ln^2 e - 2e \ln e +$$
$$+ 2e) + 2 = 3 - e \approx 0{,}28. ◀$$

2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги линии $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

▶ Воспользуемся формулой (9.11):

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Находим подынтегральную функцию:

$$\frac{dx}{dt} = 2t \sin t + (t^2 - 2) \cos t + 2 \cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2t \cos t - (2 - t^2) \sin t + 2 \sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} = t^2.$$

Окончательно имеем

$$l = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \approx 10{,}32. ◀$$

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной параболами $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.

▶ Находим точки пересечения парабол: $M_1(-1, 2)$, $M_2(1, 2)$.

Объем V данного тела получаем как разность объемов $V_2 - V_1$, где, согласно формуле (9.14),

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{1} (3 - x^2)^2 dx, \quad V_1 = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 dx.$$

Таким образом,

$$V=V_2-V\ =\pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}((3-x^2)^2-(x^2+1)^2)dx=\pi\int_{-1}^{1}(8-8x^2)dx=$$

$$=8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\approx 33{,}50. \blacktriangleleft$$

На рис. 9.24 изображены плоская фигура в плоскости Oxy и тело (из него вырезана четвертая часть), полученное вращением данной фигуры вокруг оси Ox.

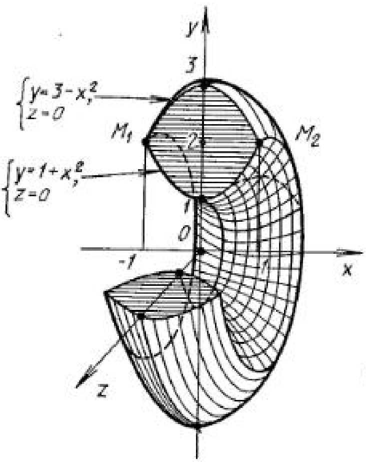


Рис. 9.24

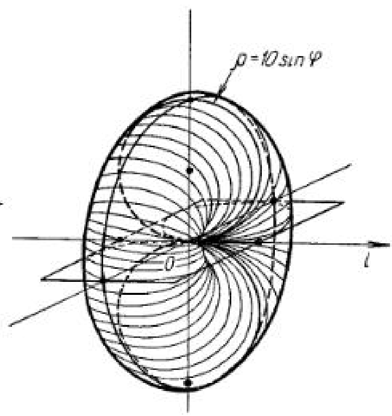


Рис. 9.25

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, полученной вращением окружности $\rho=10\sin\varphi$ вокруг полярной оси Ol (рис. 9.25.)

▶ Воспользуемся формулами (9.15) (записанной в полярной системе координат) и (9.12):

$$S=2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}y\sqrt{\rho_\varphi'^2+\rho^2}\,d\varphi,$$

где $y=\rho\sin\varphi$. Далее находим: $\rho'_\varphi=10\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi=$ $=10\sin^2\varphi$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$,

$$S=2\pi\int_0^\pi 10\sin^2\varphi\sqrt{100\cos^2\varphi+100\sin^2\varphi}d\varphi=$$

$$=200\pi\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi=200\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=100\pi\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^\pi\approx 985{,}96. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-9.3

1. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара P. Удельный вес воды принять равным 9,81 кН/м^3, $\pi=3{,}14$. (Результат округлить до целого числа.)

1.1. P: правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 5 м. (*Ответ:* 245 кДж.)

1.2. P: правильная четырехугольная пирамида, обращенная вершиной вниз. Сторона основания пирамиды равна 2 м, высота — 6 м. (*Ответ:* 118 кДж.)

1.3. P: котел, имеющий форму сферического сегмента, высота которого 1,5 м и радиус 1 м. (*Ответ:* 22 кДж.)

1.4. P: полуцилиндр, радиус основания которого 1 м, длина 5 м. (*Ответ:* 33 кДж.)

1.5. P: усеченный конус, у которого радиус верхнего основания равен 1 м, нижнего — 2 м, высота — 3 м. (*Ответ:* 393 кДж.)

1.6. P: желоб, перпендикулярное сечение которого является параболой. Длина желоба 5 м, ширина 4 м, глубина 4 м. (*Ответ:* 837 кДж.)

1.7. P: цилиндрическая цистерна, радиус основания которой 1 м, длина 5 м. (*Ответ:* 154 кДж.)

1.8. P: правильная треугольная пирамида с основанием 2 м и высотой 5 м. (*Ответ:* 106 кДж.)

1.9. P: правильная треугольная пирамида, обращенная вершиной вниз, сторона основания которой 4 м, высота 6 м. (*Ответ:* 204 кДж.)

1.10. P: конус, обращенный вершиной вниз, радиус основания которого 3 м, высота 5 м. (*Ответ:* 578 кДж.)

1.11. P: усеченный конус, у которого радиус верхнего основания равен 3 м, нижнего — 1 м, высота — 3 м. (*Ответ:* 416 кДж.)

1.12. P: конус с радиусом основания 2 м и высотой 5 м. (*Ответ:* 770 кДж.)

1.13. P: правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой сторона верхнего основания 8 м, нижнего — 4 м, высота — 2 м. (*Ответ:* 576 кДж.)

1.14. P: параболоид вращения, радиус основания которого 2 м, глубина 4 м. (*Ответ:* 329 кДж.)

1.15. P: половина эллипсоида вращения, радиус основания которого 1 м, глубина 2 м. (*Ответ:* 31 кДж.)

1.16. P: усеченная четырехугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего — 4 м, высота — 1 м. (*Ответ:* 56 кДж.)

· **1.17.** P: правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м. (*Ответ:* 26 кДж.)

1.18. P: правильная шестиугольная пирамида с вершиной, обращенной вниз, сторона основания которой 2 м, высота 6 м. (*Ответ:* 306 кДж.)

1.19. P: цилиндр с радиусом основания 1 м и высотой 3 м. (*Ответ:* 139 кДж.)

1.20. P: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 1 м, нижнего — 2 м, высота — 2 м. (*Ответ:* 144 кДж.)

1.21. P: желоб, в перпендикулярном сечении которого лежит полуокружность радиусом 1 м, длина желоба 10 м. (*Ответ:* 65 кДж.)

1.22. P: правильная усеченная шестиугольная пирамида, у которой сторона верхнего основания равна 2 м, нижнего — 1 м, высота — 2 м. (*Ответ:* 93 кДж.)

1.23. P: полусфера радиусом 2 м. (*Ответ:* 123 кДж.)

Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении сооружения Q из некоторого материала, удельный вес которого γ. (Результат округлить до целого числа.)

1.24. Q: правильная усеченная четырехугольная пирамида, сторона верхнего основания которой равна 2 м, нижнего — 4 м, высота 2 м; $\gamma = 24$ кН/м^3. (*Ответ:* 352 кДж.)

1.25. Q: правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 1 м и высотой 2 м; $\gamma = 24$ кН/м^3. (*Ответ:* 21 кДж.)

1.26. Q: правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 м и высотой 4 м; $\gamma = 24$ кН/м^3. (*Ответ:* 128 кДж.)

1.27. Q: правильная шестиугольная усеченная пирамида, сторона верхнего основания которой равна 1 м, нижнего — 2 м, высота — 2 м; $\gamma = 24$ кН/м^3. (*Ответ:* 229 кДж.)

1.28. Q: правильная треугольная пирамида со стороной основания 3 м и высотой 6 м; $\gamma = 20$ кН/м^3. (*Ответ:* 234 кДж.)

1.29. Q: конус, радиус основания которого 2 м, высота 3 м; $\gamma = 20$ кН/м^3. (*Ответ:* 188 кДж.)

1.30. Q: усеченный конус, радиус верхнего основания которого равен 1 м, нижнего — 2 м, высота — 2 м; $\gamma = 21$ кН/м^3. (*Ответ:* 88 кДж.)

2. Вычислить силу давления воды на пластину, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9,81 кН/м^3. (Результат округлить до целого числа.) Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке.

2.1. Рис. 9.26. (*Ответ:* 98 кН.)
2.2. Рис. 9.27. (*Ответ:* 85 кН.)
2.3. Рис. 9.28. (*Ответ:* 248 кН.)
2.4. Рис. 9.29. (*Ответ:* 105 кН.)
2.5. Рис. 9.30. (*Ответ:* 167 кН.)
2.6. Рис. 9.31. (*Ответ:* 26 кН.)
2.7. Рис. 9.32. (*Ответ:* 131 кН.)
2.8. Рис. 9.33. (*Ответ:* 23 кН.)
2.9. Рис. 9.34. (*Ответ:* 523 кН.)
2.10. Рис. 9.35. (*Ответ:* 33 кН.)
2.11. Рис. 9.36. (*Ответ:* 31 кН.)
2.12. Рис. 9.37. (*Ответ:* 62 кН.)
2.13. Рис. 9.38. (*Ответ:* 24 кН.)
2.14. Рис. 9.39. (*Ответ:* 22 кН.)
2.15. Рис. 9.40. (*Ответ:* 239 кН.)
2.16. Рис. 9.41. (*Ответ:* 123 кН.)
2.17. Рис. 9.42. (*Ответ:* 78 кН.)
2.18. Рис. 9.43. (*Ответ:* 13 кН.)
2.19. Рис. 9.44. (*Ответ:* 52 кН.)
2.20. Рис. 9.45. (*Ответ:* 3 кН.)
2.21. Рис. 9.46. (*Ответ:* 23 кН.)
2.22. Рис. 9.47. (*Ответ:* 16 кН.)
2.23. Рис. 9.48. (*Ответ:* 251 кН.)
2.24. Рис. 9.49. (*Ответ:* 31 кН.)
2.25. Рис. 9.50. (*Ответ:* 13 кН.)
2.26. Рис. 9.51. (*Ответ:* 6 кН.)
2.27. Рис. 9.52. (*Ответ:* 6 кН.)
2.28. Рис. 9.53. (*Ответ:* 39 кН.)
2.29. Рис. 9.54. (*Ответ:* 20 кН.)
2.30. Рис. 9.55. (*Ответ:* 272 кН.)

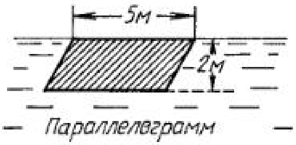


Рис. 9.26

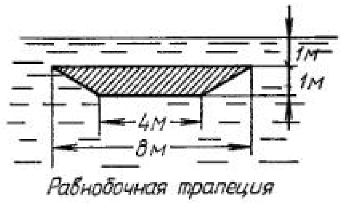


Рис. 9.27

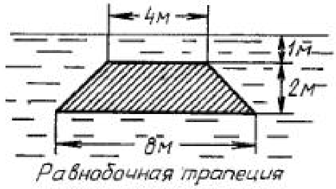


Рис. 9.28

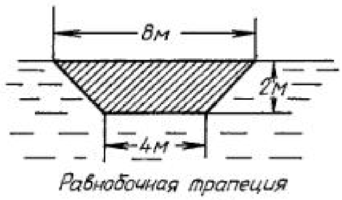


Рис. 9.29

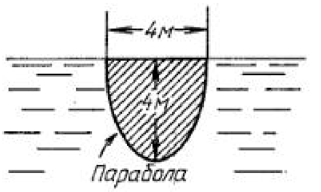


Рис. 9.30

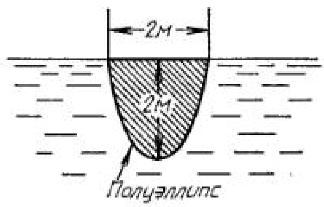


Рис. 9.31

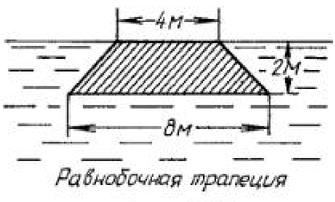


Рис. 9.32

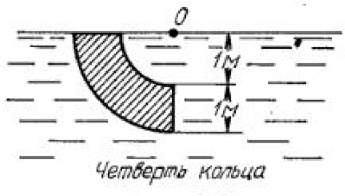


Рис. 9.33

Рис. 9.34

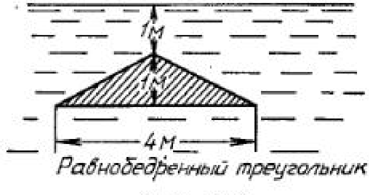


Рис. 9.35

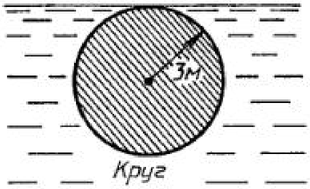


Рис. 9.36

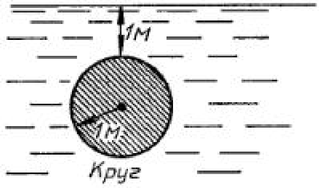


Рис. 9.37

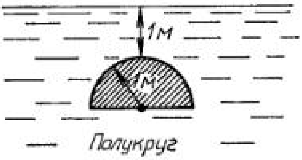


Рис. 9.38

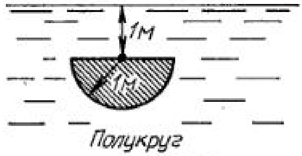


Рис. 9.39

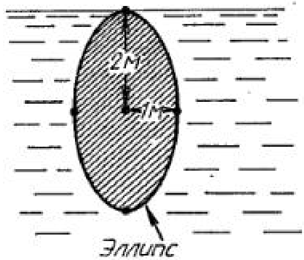


Рис. 9.41

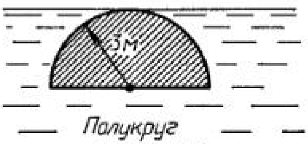


Рис. 9.40

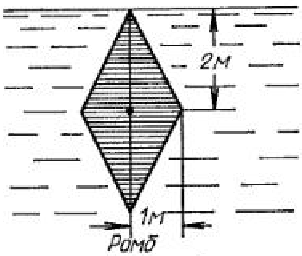


Рис. 9.42

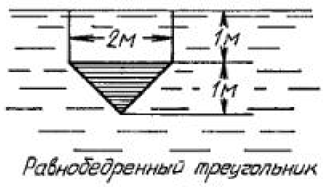


Рис. 9.43

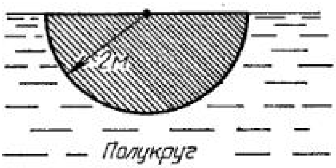


Рис. 9.44

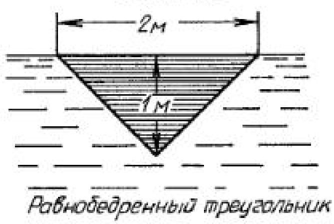


Рис. 9.45

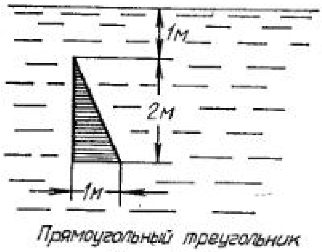


Рис. 9.46

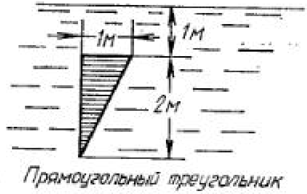


Рис. 9.47

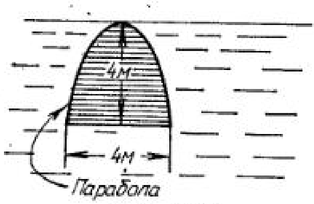


Рис. 9.48

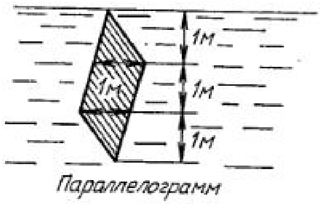


Рис. 9.49

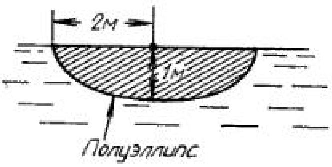


Рис. 9.50

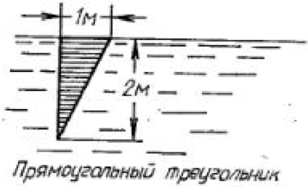


Рис. 9.51

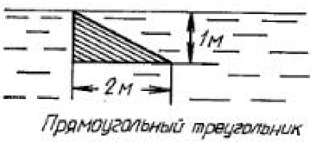


Рис. 9.52

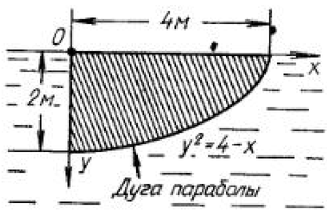


Рис. 9.53

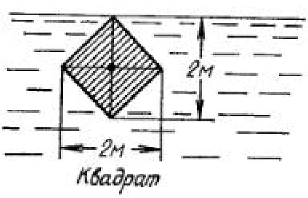


Рис. 9.54

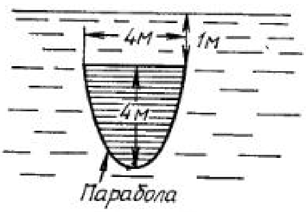


Рис. 9.55

3. Найти координаты центра масс однородной плоской кривой L.

3.1. L: полуокружность $x^2+y^2=R^2$, расположенная над осью Ox. (*Ответ:* $x_C=0$, $y_C=2R/\pi$.)

3.2. L: первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. $\left(\textit{Ответ:}\ x_C=\pi a,\ y_C=\frac{4}{3}a.\right)$

3.3. L: дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, расположенная в третьем квадранте. (*Ответ:* $x_C=y_C=-0{,}4a$.)

3.4. L: дуга окружности радиусом R, стягивающая центральный угол α. (*Ответ:* центр масс находится на биссектрисе центрального угла, стягивающего дугу, на расстоянии $2R\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}$ от центра окружности.)

3.5. L: дуга цепной линии $y=a\operatorname{ch}(x-a)$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$. $\left(\textit{Ответ:}\ x_C=0,\ y_C=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}.\right)$

3.6. L: дуга кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$. (*Ответ:* $x_C=y_C=4/5a$.)

3.7. L: дуга логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$ $(\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi)$. $\left(\textit{Ответ:}\ x_C=-\frac{a}{5}\ \frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}},\ y_C=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}.\right)$

3.8. L: одна арка циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$. (*Ответ:* $x_C=3\pi$, $y_C=4$.)

3.9. L: дуга астроиды $x=2\cos^3(t/4)$, $y=2\sin^3(t/4)$, расположенная в первом квадранте. (*Ответ:* $x_C=y_C=4/5$.)

3.10. L: дуга кривой $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$ $(0\leqslant t=\pi/2)$. $\left(\textit{Ответ:}\ x_C=\frac{2e^{\pi}+1}{5(e^{\pi/2}-1)},\ y_C=\frac{e^{\pi}-2}{5(e^{\pi/2}-1)}.\right)$

3.11. L: кардиоида $\rho=2(1+\cos\varphi)$. (*Ответ:* $x_C=1{,}6$, $y_C=0$.)

3.12. L: кривая $\rho=2\sin\varphi$ от точки $(0,\ 0)$ до точки $(\sqrt{2},\ \pi/4)$. (*Ответ:* $x_C=2/\pi$, $y_C=(\pi-2)/\pi$.)

3.13 L: дуга развертки окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$. (*Ответ:* $x_C=2(\pi^2+4)/(a\pi^2)$, $y_C=6a/\pi$.)

3.14. L: кривая $\rho=2\sqrt{3}\cos\varphi$, заключенная между лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/4$. (*Ответ:* $x_C=\sqrt{3}(\pi+2)/\pi$, $y_C=2\sqrt{3}/\pi$.)

3.15. L: кривая $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. (*Ответ:* $x_C=7\sqrt{3}/15$, $y_C=1/4$.)

Найти координаты центра масс плоской однородной фигуры Ф, ограниченной данными линиями.

3.16. Ф — треугольник, стороны которого лежат на прямых $x+y=a$, $x=0$ и $y=0$. (*Ответ:* $x_C=y_C=$ $=a/3$.)

3.17. Ф ограничена эллипсом $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ и осями координат $(x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0)$. (*Ответ:* $x_C=4a/(3\pi)$, $y_C=$ $=4b/(3\pi)$.)

3.18. Ф ограничена первой аркой циклоиды $x=$ $=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox. (*Ответ:* $x_C=\pi a$, $y_C=5a/6$.)

3.19. Ф ограничена кривыми $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$. (*Ответ:* $x_C=y_C=9/20$.)

3.20. Ф ограничена дугой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком оси Ox $(0\leqslant x\leqslant \pi)$. (*Ответ:* $x_C=\pi/2$, $y_C=\pi/8$.)

3.21. Ф ограничена полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и осью Ox. (*Ответ:* $x_C=0$, $y_C=4R/(3\pi)$.)

3.22. Ф ограничена дугой параболы $y=b\sqrt{x/a}$ $(a>0,$ $b>0)$, осью Ox и прямой $x=b$. (*Ответ:* $x_C=3a/5$, $y_C=$ $=3b/8$.)

3.23. Ф ограничена дугой параболы $y=b\sqrt{x/a}$ $(a>0,$ $b>0)$, осью Oy и прямой $y=b$. (*Ответ:* $x_C=3a/10$, $y_C=3b/4$.)

3.24. Ф ограничена замкнутой линией $y^2=ax^3-x^4$. (*Ответ:* $x_C=5a/8$, $y_C=0$.)

3.25. Ф ограничена осями координат и дугой астроиды, расположенной в первом квадранте. (*Ответ:* $x_C=y_C=$ $=256a/(315\pi)$.)

3.26. Ф — сектор круга радиусом R с центральным углом, равным 2α. $\Big($*Ответ:* центр масс лежит на оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ от центра круга. Если центр круга находится в начале координат, а ось симметрии сектора — на оси Oy, то $x_C=0$, $y_C=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.$\Big)$

3.27. Ф ограничена кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$. (*Ответ:* $x_C=5a/6$, $y_C=0$.)

3.28. Ф ограничена первой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. (*Ответ:* $x_C=\sqrt{2}\pi a/8$, $y_C=0$.)

3.29. Ф ограничена осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. (*Ответ:* $x_C = y_C = a/5$.)

3.30. Ф ограничена полукубической параболой $ay^2 = x^3$ и прямой $x = a$ $(a > 0)$. (*Ответ:* $x_C = 5a/7$, $y_C = 0$.)

Решение типового варианта

1. Определить работу A, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, представляющего собой лежащий на боку круговой цилиндр длиной L и радиусом основания R, через находящееся вверху отверстие (рис. 9.56). Удельный вес воды $\gamma = 9{,}81$ кН/м^3. Вычислить работу A в случае, когда $L = 5$ м, $R = 1$ м. (Результат округлить до целого числа.)

▶ На высоте z выделим слой воды dz (см. рис. 9.56). Его объем

$$dV = 2\,|O_1B|\,L\,dz = 2L\sqrt{R^2 - (R-z)^2}\,dz = 2L\sqrt{z(2R-z)}\,dz.$$

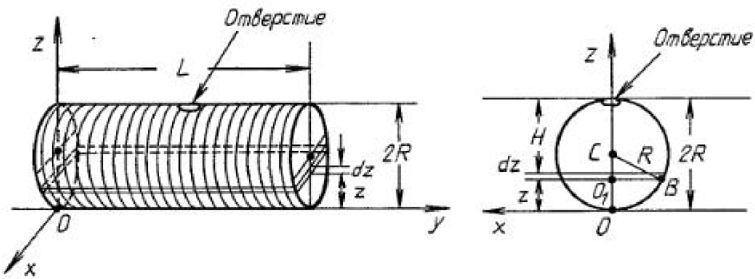


Рис. 9.56

Этот слой нужно поднять на высоту $H = 2R - z$. Элементарная работа dA, затраченная на выкачивание слоя dz, определяется формулой

$$dA = H\gamma\,dV = 2\gamma L(2R-z)\sqrt{z(2R-z)}\,dz.$$

Работа A по выкачиванию всей воды равна сумме всех элементарных работ:

$$A = \int_0^{2R} dA = \int_0^{2R} 2\gamma L(2R-z)\sqrt{z(2R-z)}\,dz =$$

$$= 2\gamma L\int_0^{2R} z^{1/2}(2R-z)^{3/2}\,dz. \qquad (1)$$

Теперь вычислим интеграл (1), который представляет собой интеграл от дифференциального бинома при $m = 1/2$, $n = 1$, $p = 3/2$. Так как $(m+1)/n + p = 3 \in \mathbf{Z}$, то для вычисления интеграла (1) воспользуемся подстановкой $a + bx^n = u^s x^n$ (см. § 8.7). Имеем

$$A = 2\gamma L \int_0^{2R} z^{1/2}(2R-z)^{3/2}\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2R - z = u^2 z,\ dz = -4Ru(u^2+1)^{-2}\,du, \\ z = 2R/(u^2+1),\ \text{если } z = 0,\ \text{то } u = = \infty, \\ \text{если } z = 2R,\ \text{то } u = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 32\gamma L R^3 \int_0^{\infty} \frac{u^4\,du}{(u^2+1)^4}.$$

Подынтегральная функция в последнем несобственном интеграле является правильной рациональной дробью, которую, согласно формуле (8.10), можно разложить в сумму простейших дробей четвертого типа (см. § 8.6). Интегралы от этих дробей легко находятся с помощью рекуррентной формулы (8.4). Последовательно получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{u^4\,du}{(u^2+1)^4} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(u^2+1)^2} - \frac{2}{(u^2+1)^3} + \frac{1}{(u^2+1)^4} \right) du =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4}\frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}.$$

Таким образом,

$$A = 32\gamma L R^3 \pi/32 = \pi\gamma L R^3.$$

Если $L = 5$ м, $R = 1$ м, то

$$A = 3{,}14 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 1 \approx 154 \text{ кДж.} ◀$$

2. Вычислить силу давления воды иа пластину, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9,81 кН/м^3. Форма, размеры и расположение пластины указаны на рис. 9.57.

▶ Выбираем систему координат относительно пластины так, как показано на рис. 9.57. Тогда простейшее уравнение параболы имеет вид $x^2 = -2py$. Так как парабола проходит через точку $A(1/2, -1)$, то $p = 1/8$ и $x^2 = -y/4$.

Выделим на глубине x горизонтальную полоску шириной dx и площадью $ds = (1 - |y|\,dx$. Давление воды на эту полоску

$$\Delta P = \gamma x(1 - |y|)dx = \gamma x(1 - 4x^2)dx.$$

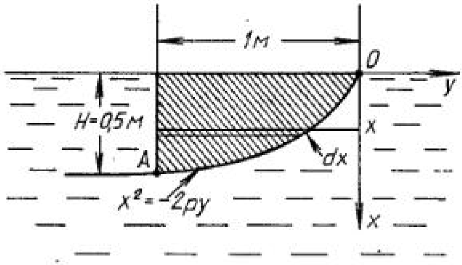


Рис. 9.57

Тогда давление воды на всю пластину будет

$$P = \gamma \int_0^H x(1 - 4x^2)dx = \gamma\left(\frac{x^2}{2} - x^4\right)\Big|_0^H = \gamma\left(\frac{H^2}{2} - H^4\right).$$

При $H = 1/2$ м и $\gamma = 9{,}81$ кН/м^3 получим

$$P = 9{,}81\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = \frac{9{,}81}{16} \approx 0{,}61 \text{ кН}. \blacktriangleleft$$

3. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

▶ Координаты центра масс данной фигуры (рис. 9.58) вычисляются по формулам (9.17), где $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

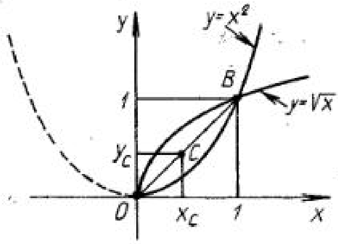


Рис. 9.58

Так как точки пересечения кривых $O(0, 0)$ и $B(1, 1)$, то $a = 0$, $b = 1$. Тогда имеем:

$$\int_0^1 (y_2 - y_1)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (y_2+y_1)(y_2-y_1)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^4)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{20},$$

откуда $x_C=y_C=9/20$. ◀

9.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 9

1. Решить уравнения:

а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$.

(*Ответ:* а) $x=2$; б) $x=\ln 4$.)

2. Доказать справедливость равенства

$$\int\limits_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_1^{1/x}\frac{dt}{1+t^2}\quad (x>0).$$

3. Пусть $I_n=\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx$ $(n>1,\ n$ — целое$)$. Доказать, что $I_n+I_{n-2}=1/(n-1)$.

4. Вычислить площадь криволинейной трапеции или фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y=x^2/\sqrt{(x-3)(5-x)}$, $x\in(3;\ 5)$;

б) $y=(\arcsin\sqrt{x})/\sqrt{1-x}$, $x\in[0;\ 1)$;

в) $\rho=\operatorname{tg}\varphi$, $\rho=\frac{1}{\cos\varphi}$, $\varphi\in[0;\ \pi/2)$;

г) $y=xe^{-x^2/2}$, $x\in[0;\ \infty)$;

д) $y=\sqrt{x}/(x+1)^2$, $x\in[1;\ \infty)$;

е) $xy^2=8-4x$ и ее асимптотой;

ж) $(x+1)y^2=x^2$ $(x<0)$ и ее асимптотой.

(*Ответ:* а) $33\pi/2$; б) 2; в) $\pi/4$; г) 1; д) $\pi/4+1/2$; е) 4π; ж) $8/3$.)

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением указанных линий:

а) $y=e^{-x^2}$ и $y=0$ вокруг оси Oy;

б) $(4-x)y^2-x^3=0$ вокруг ее асимптоты;

в) $y=1/(1+x^2)$ вокруг ее асимптоты;

г) $y=e^{-x}\sin\pi x$ и $x\geqslant 0$ вокруг оси Ox.

(*Ответ:* а) π; б) $16\pi^2$; в) $\pi^2/2$; г) $\pi^3/(4(1+\pi^2))$.)

6. В цилиндрическом баке, наполненном водой и расположенном вертикально, имеется малое отверстие в дне. Половина воды из бака вытекла за t мин. За какое время вытечет вся вода? (Считать $\mu = 1$ и $v = \mu\sqrt{2gh}$, где v — скорость истечения жидкости из отверстия. (*Ответ:* $(2+\sqrt{2})t$ мин.)

7. На резистор с постоянным сопротивлением R подано переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Какое постоянное напряжение следует подать на резистор R, чтобы выделяющееся в нем за время $T = 2\pi/\omega$ количество теплоты было равно количеству теплоты, выделяющемуся за тот же период при подаче переменного напряжения? (*Ответ:* $U_0/\sqrt{2}$.)

8. Электрическая цепь имеет в начальный момент времени сопротивление R Ом, которое в дальнейшем равномерно возрастает со скоростью v Ом/с. В цепь подано постоянное напряжение U В. Найти заряд, прошедший через цепь за t с. $\left(\textit{Ответ: } \frac{U}{a} \ln \frac{R+at}{R}.\right)$

9. Вычислить массу земной атмосферы, полагая, что ее плотность ρ меняется с увеличением высоты по закону $\rho = \rho_0 e^{-ah}$, где h — расстояние от поверхности Земли до рассматриваемой точки. (Земля считается шаром радиусом R). (*Ответ:* $(4\pi\rho_0(a^2R^2 + 2aR + 2))/a^3$.)

10. Тело окружено средой с постоянной температурой $T = 20$ °C. За 20 мин температура тела в результате охлаждения понизилась от 100 до 60 °C. За какое время с начала охлаждения тела его температура снизится до 30 °C? (*Ответ:* 1 ч.)

11. Материальная точка массой m расположена на расстоянии l от однородного бесконечного стержня линейной плотностью ρ. С какой силой стержень притягивает точку? (*Ответ:* $\pi\gamma\rho m/l$, γ — гравитационная постоянная.)

12. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_1 до v_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, найти время движения пули внутри доски. $\left(\textit{Ответ: } h(v_1 - v_2)/\left(v_1 v_2 \ln \frac{v_1}{v_2}\right).\right)$

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует определенное число $z \in E \subset \mathbf{R}$. Тогда z называется *функцией двух переменных* x и y, x, y — *независимыми переменными* или *аргументами*, D — *областью определения* или *существования функции*, а множество E всех значений функции — *областью ее значений*. Символически функция двух переменных записывается в виде равенства $z = f(x, y)$, в котором f обозначает закон соответствия. Этот закон может быть задан аналитически (формулой), с помощью таблицы или графика. Так как всякое уравнение $z = f(x, y)$ определяет, вообще говоря, в пространстве, в котором введена декартова система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под *графиком функции двух переменных* будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$ (рис. 10.1).

Геометрически область определения функции D обычно представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$, во втором — *открытой*.

Пример 1. Найти область определения D и область значений E функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

▶ Данная функция определена в тех точках плоскости Oxy, в которых $y - x^2 + 2x > 0$, или $y > x^2 - 2x$. Точки плоскости, для которых $y = x^2 - 2x$, образуют границу области D. Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу (рис. 10.2; поскольку парабола не принадлежит области D, то она изображена штриховой линией). Далее, легко проверить непосредственно, что точки, для которых $y > x^2 - 2x$, расположены выше параболы. Область D является открытой (на рис. 10.2 она заштрихована) и ее можно задать с помощью системы неравенств:

$$D: \{-\infty < x < +\infty,\ x^2 - 2x < y < +\infty\}.$$

Так как выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции

$$E: \{-\infty < z < +\infty\}. ◀$$

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и большего числа переменных. Величина y называется *функцией переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определенное значение y, что символически записывается в виде $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как совокупность значений независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяет точку n-мерного

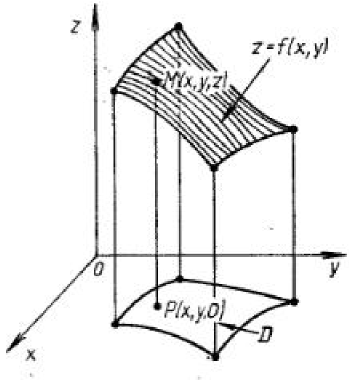


Рис. 10.1

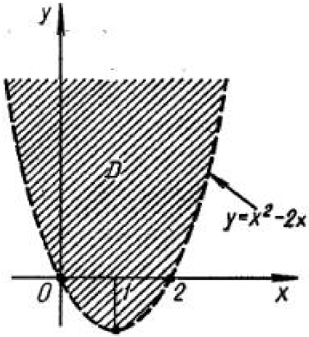


Рис. 10.2

пространства $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных обычно рассматривают как функцию точек M пространства соответствующей размерности: $y = f(M)$.

Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех x, y, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Если A — предел функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{M \to M_0} f(x, y).$$

Пример 2. Вычислить предел

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

► Преобразовав выражение под знаком предела, получим

$$A = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2. \blacktriangleleft$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Например, функция $z = 1/(2x^2 + y^2)$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки $M(0, 0)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области D, называется *непрерывной в данной области*.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, а y оставить постоянной, то функция $z=f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции z по переменной x*:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y

$$\Delta_y z = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y).$$

Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,\ y),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,\ y),$$

они называются *частными производными функции $z=f(x, y)$ по переменным x и y* соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные — постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример 3. Найти частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

▶ Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\,\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \ ◀$$

Пример 4. Найти частные производные функции $w=\ln^2(x^2+y^2+z^2)$.

▶ Находим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z. \ ◀$$

Дифференциал функции $z=f(x,\ y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется *частным дифференциалом*, т. е. по определению

$$d_x z = f'_x(x,\ y)dx,\ d_y z = f'_y(x,\ y)dy,$$

где $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами. Это справедливо и для функции трех переменных $w=f(x,\ y,\ z)$.

Пример 5. Найти частные дифференциалы функции $w=(xy^2)^{z^3}$.

▶ Имеем:

$$d_x w = z^3(xy^2)^{z^3-1}y^2dx,\quad d_y w = z^3(xy^2)^{z^3-1}2xydy,$$

$$d_z w = (xy^2)^{z^3}\ln(xy^2)\cdot 3z^2dz.\ ◀$$

Пример 6. Вычислить значения частных производных функции

$$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3-xyz$$

в точке $M(2,\ -2,\ 1)$.

▶ Находим частные производные:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-yz,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-xz,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-xy.$$

В полученные выражения подставляем координаты данной точки:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3},\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_0}=-\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3},$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_0}=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}.\ ◀$$

АЗ-10.1

1. Найти области определения следующих функций:

а) $z=\sqrt{y^2-2x+4}$; б) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}$;

в) $z=\ln x+\ln\cos y$; г) $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$.

2. Найти частные производные указанных функций:

а) $z=(x^3+y^3-xy^2)^3$; б) $z=\arcsin\frac{y}{x}$;

в) $z=x\sqrt{y}+y/\sqrt{x}$; г) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

д) $z=\ln(xy+\ln xy)$; е) $u=\operatorname{arctg}(xy/z)$;

ж) $u=\ln\sqrt{(x^2+y^2)/(x^2+z^2}$; з) $u=(xy)^{z^2}$.

3 Вычислить $u'_x+u'_y+u'_z$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$, если $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. (*Ответ:* 3/2.)

4. Вычислить значения частных производных функции $z=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3,\ 4)$. (*Ответ:* 2/5, 1/5.)

5. Найти частные дифференциалы следующих функций:

а) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; б) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

в) $u=x^{yz}$; г) $u=\frac{x^2+y^2-z^2}{z^2-x^2-y^2}$.

Самостоятельная работа

1. Найти:

а) области определения и значений функции

$$z = \ln(4 - x^2 + y^2);$$

б) частные производные функции

$$z = \sin^2(x \cos^2 y + y \sin^2 x);$$

в) частные дифференциалы функции

$$u = \ln \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}.$$

2. Найти:

а) области определения и значений функции

$$z = \sqrt{4 - x^2 + y};$$

б) частные производные функции

$$u = \arcsin \sqrt{xy^2z^3};$$

в) частные дифференциалы функции

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)/(x^2 - y^2)}.$$

3. Найти:

а) области определения и значений функции

$$z = \sqrt{xy} + \sqrt{x - y};$$

б) частные производные функции

$$u = \operatorname{tg}^2 (x - y^2 + z^3);$$

в) частные дифференциалы функции

$$z = \sqrt[3]{(x^2 - y^3)^2}.$$

10.2. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется *полным дифференциалом функции* и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \tag{10.1}$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Для функции n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n. \tag{10.2}$$

Пример 1. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$.

▶ По определению

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - \\ &- x^2 + xy - y^2 = 2x\Delta x - x\Delta y + 2y\Delta y - y\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \\ &+ \Delta y^2 = (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2.\end{aligned}$$

Выражение $(2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, есть дифференциал dz, а величина $\alpha = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Таким образом, $\Delta z = dz + \alpha$. ◀

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

▶ Вначале находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2)\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot (-2z).$$

Согласно формуле (10.2), получаем

$$du = 4\ln(x^2 + y^2 - z^2)\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}(x\,dx + y\,dy - z\,dz). \quad ◀$$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции, так как $\Delta z \approx dz$, т. е.

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + dz(x_0,\ y_0).$$

Пример 3. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$.

▶ Рассмотрим функцию $z = z^y$. При $x_0 = 1$ и $y_0 = 3$ имеем $z_0 = 1^3 = 1$, $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$, $\Delta y = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$. Находим полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\Delta y.$$

Вычисляем его значение в точке $M(1,\ 3)$ при данных приращениях $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = 0{,}01$:

$$dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

Тогда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$. ◀

Функция $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, называется *сложной функцией переменных x и y*. Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (10.3)$$

В случае, когда $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, вторая из формул (10.3) исчезает (т. е. превращается в тождественный нуль), а первая преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (10.4)$$

Если же $u = x$, $v = y = \psi(x)$, то формула (10.4) имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (10.5)$$

В последней формуле $\frac{dz}{dx}$ называется *полной производной функции* $\left(\text{в отличие от частной производной } \frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Пример 4. Найти частные производные функции $z = \sin(uv)$, где $u = 2x + 3y$; $v = xy$.

▶ Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\cos(uv)\cdot 2 + u\cos(uv)y = \cos(2x^2y + 3xy^2)\cdot(4xy + 3y^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = v\cos(uv)\cdot 3 + u\cos(uv)x = \cos(2x^2y + 3xy^2)\cdot(6xy + 2x^2). \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти полную производную функции $u = x + y^2 + z^3$, где $y = \sin x$; $z = \cos x$.

▶ Имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 1 + 2y\cos + 3z^2(-\sin x) =$$
$$= 1 + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x\sin x. \blacktriangleleft$$

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в неявном виде и $F'_y(x, y) \neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \qquad (10.6)$$

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x, y, z) = 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \qquad (10.7)$$

Пример 6. Найти производную функции y, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 - e^{xy} - 5 = 0$.

▶ Согласно формуле (10.6), имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - e^{xy}y}{3y^2 - e^{xy}x}. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$.

▶ Воспользуемся формулами (10.7). Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2}. \blacktriangleleft$$

АЗ-10.2

1. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = x^3 + xy^2 + x^2y$; б) $z = e^{x^3 - y^3}$;

в) $u = \sin^2 (xy^2z^3)$.

2. Вычислить приближенно данные выражения, заменив приращения соответствующих функций их полными дифференциалами:

а) $(1{,}02)^3 (0{,}97)^3$; б) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

(*Ответ:* а) 0,97; б) 4,998.)

3. Найти частные производные функции $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, если $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

4. Найти частные производные функции $w = \ln (u^3 + v^3 - t^3)$, если $u = xy$, $v = x/y$, $t = e^{xy}$.

5. Найти производную функции $z = \operatorname{tg}^2 (x^2 - y^2)$, если $y = \sin \sqrt{x}$.

6. Найти производную функции y, заданной неявно уравнением $\sin xy - x^2 - y^2 = 5$.

7. Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz - \sin^2 xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 7$.

8. Вычислить значения частных производных функции z, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2$, в точке $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* -1, -1.)

Самостоятельная работа

1. Найти:

а) полный дифференциал функции $u = z \operatorname{arctg} (x/y)$;

б) производную функции y, заданной уравнением $\sin^3 xy^2 + \cos^3 yx^2 = 1$.

2. Найти:

а) полный дифференциал функции $z = \operatorname{ctg}^3(xy^2 - y^3 + x^2y)$;

б) производную функции $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$, если $y = e^{-x^3}$.

3. Найти:

а) полный дифференциал функции $z = e^{\cos^3(x^2 - y^2)}$;

б) частные производные функции z, заданной уравнением $x^2y^2z^2 + 7y^4 - 8xz^3 + z^4 = 10$.

10.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ означает, что функция z k раз продифференцирована по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными*. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2y^2}$.

▶ Вначале найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 2xy^2, \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 2x^2y.$$

Продифференцировав их еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} \cdot 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} \cdot 2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. ◀

Пример 2. Доказать, что функция $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

▶ Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0. \blacktriangleleft$$

Полный дифференциал второго порядка d^2z функции $z = f(x, y)$ выражается формулой

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$.

▶ Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Следовательно,

$$d^2z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + (6y + 2x^2)dy^2. \blacktriangleleft$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{10.8}$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{10.9}$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$, и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{10.10}$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \blacktriangleleft \tag{10.11}$$

Пример 4. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1, 2, -1)$.

▶ Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1, 2, -1)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = (3x^2 + yz)\Big|_{M_0} = 1,$$
$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = (3y^2 + xz)\Big|_{M_0} = 11,$$
$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = (3z^2 + yx)\Big|_{M_0} = 5.$$

Подставляя их в уравнения (10.10) и (10.11), получаем соответственно уравнение касательной плоскости

$$(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0$$

и канонические уравнения нормали

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}. ◄$$

АЗ-10.3

1. Найти частные производные второго порядка указанных функций и проверить, равны ли их смешанные частные производных:

а) $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; б) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

в) $z=e^x(\sin y+\cos x)$; г) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2. Доказать, что функция $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

3. Доказать, что функция $z=e^{-\cos(x+3y)}$ удовлетворяет уравнению $9\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $xyz^2+2y^2+3yz+4=0$ в точке $M_0(0,\ 2,\ -2)$.

5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(3,\ 1,\ 4)$. (*Ответ:* $3x-y-z=4$, $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}\frac{z-4}{-1}$.)

6. Для эллипсоида $x^2+2y^2+z^2=1$ записать уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x-y+2z=0$. (*Ответ:* $x-y+2z=\pm\sqrt{11/2}$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Найти частные производные второго порядка функции $z=\ln(x^2+y^2)$.

2. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке $M_0(1,\ -1,\ 1)$.

2. 1. Найти частные производные второго порядка функции $z=e^{xy^2}$.

2. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=1+x^2+y^2$ в точке $M_0(1,\ 1,\ z_0)$.

3. 1. Найти частные производные второго порядка функции $z=(x+y)/(x-y)$.

2. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2z-xyz+y^2-x-3=0$ в точке $M_0(-2,\ 3,\ z_0)$.

10.4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0,\ y_0)$ называется *точкой локального максимума (минимума) функции* $z=f(x,\ y)$, если для всех точек $M(x,\ y)$, отличных от $M_0(x_0,\ y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство

$$f(x_0,\ y_0)\geqslant f(x,\ y)\ (f(x_0,\ y_0)\leqslant f(x,\ y)).$$

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется *точкой экстремума функции*.

***Теорема 1* (необходимые условия экстремума).** *Если точка $M_0(x_0,\ y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x,\ y)$, то $f'_x(x_0,\ y_0)=f'_y(x_0,\ y_0)=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.*

Точки, для которых эти условия выполнены, называются *стационарными* или *критическими*. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться *достаточные условия экстремума*.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A=f''_{xx}(x_0,\ y_0,\ B=f''_{xy}(x_0,\ y_0),\ C=f''_{yy}(x_0,\ y_0),\ \Delta=AC-B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z=f(x,\ y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0,\ y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta>0$, то точка $M_0(x_0,\ y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A<0$ $(C<0)$ и точкой минимума при $A>0$ $(C>0)$;

2) если $\Delta<0$, то в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta=0$, то экстремум может быть, а может и не быть.

Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

► Так как в данном случае $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ всегда существуют, то для нахождения стационарных (критических) точек получаем систему уравнений (см. теорему 1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}x^2-y=0,\\ y^2-x=0,\end{array}\right\}$$

откуда $x_1=0,\ x_2=1,\ y_1=0,\ y_2=1$. Таким образом, получили две стационарные точки: $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ 1)$.

Находим:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Тогда $\Delta=AC-B^2=36xy-9$.

В точке $M_1(0,\ 0)$ величина $\Delta=-9<0$, т. е. в этой точке экстремума нет. В точке $M_2(1,\ 1)$ величина $\Delta=27>0$ и $A=6>0$; следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{\min}=-1$. ◀

Экстремум функции $z=f(x,\ y)$, найденный при условии $\varphi(x,\ y)=0$, называется *условным*. Уравнение $\varphi(x,\ y)=0$ называется *уравнением связи*. Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремальных точек кривой, по которой поверхность $z=f(x,\ y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x,\ y)=0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x,\ y)=0$ найти $y=y(x)$ и подставить в функцию $z=f(x,\ y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z=f(x,\ y(x))$.

Пример 2. Найти экстремум функции $z=x^2-y^2$ при условии, что $y=2x-6$.

▶ Подставив $y=2x-6$ в данную функцию, получим функцию одной переменной x:

$$z=x^2-(2x-6)^2,\ z=-3x^2+24x-36.$$

Находим $z'=-6x+24$; $z'=0$, откуда $x=4$.

Так как $z''=-6<0$, то в точке $M_1(4,\ 2)$ данная функция достигает условного максимума: $z_{\max}=12$. ◀

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$ достигает своего *наибольшего (наименьшего) значения* либо в стационарной точке, лежащей внутри области $\bar{D}$, либо на границе этой области. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области $\bar{D}$ необходимо найти все критические точки, лежащие внутри данной области и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, а затем путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=-3$.

▶ Находим стационарную точку M_1 из следующей системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x-y+1=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=2y-x+1=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда $x=-1$, $y=-1$. Получили точку $M_1(-1,\ -1)$ в которой $z_1=z(-1,\ -1)=-1$.

Исследуем данную функцию на границе области. На прямой OB (рис. 10.3), где $x=0$, имеем $z=y^2+y$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке $[-3;\ 0]$. Находим $z'_y=2y+1=0$, $y=-1/2$, $z''_{yy}=2$. Получили точку условного локального минимума $M_2(0,\ -1/2)$, в которой $z_2=z(0,\ -1/2)=-1/4$.

На концах отрезка OB $z_3=z(0,\ -3)=6$, $z_4=z(0,\ 0)=0$.

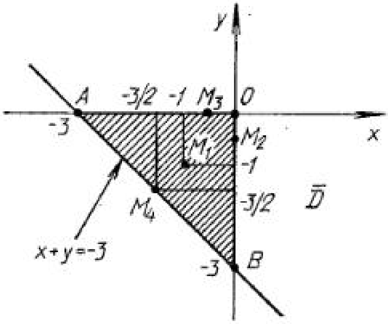


Рис. 10.3

Аналогично на прямой OA, где $y=0$, имеем: $z=x^2+x$, $z'_x=2x+1=0$, $x=-1/2$, $z''_{xx}=2$, т. е. $M_3(-1/2,\ 0)$ — точка локального минимума, в которой $z_5=z(-1/2,\ 0)=-1/4$. В точке A $z_6=z(-3,\ 0)=6$.

На отрезке AB прямой $x+y=-3$ имеем, исключив y из z в соответствии с уравнением $y=-x-3$: $z=3x^2+9x+6$, $z'_x=6x+9=0$, $x=-3/2$, отсюда находим стационарную точку $M_4(-3/2,\ -3/2)$, в которой $z_7=z(-3/2,\ -3/2)=-3/4$. На концах отрезка AB значения функции уже найдены.

Сравнивая все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{наиб}=6$ достигается в точках $A(-3,\ 0)$ и $B(0,\ -3)$, а $z_{наим}=-1$ — в стационарной точке $M_1(-1,\ -1)$. ◀

Пример 4. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, полная поверхность которого имеет данную площадь S.

▶ Объем прямоугольного параллелепипеда $V=xyz$, где x, y, z — измерения параллелепипеда, а площадь его поверхности $S=2(xy+xz+yz)$, откуда

$$z=\frac{S-2xy}{2(x+y)},\quad V=\frac{Sxy-2x^2y^2}{2(x+y)}=V(x,\ y).$$

Найдем экстремум функции $V=V(x,\ y)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=\frac{y^2(S-2x^2-4xy)}{2(x+y)^2}=0,\\ \frac{\partial V}{\partial x}&=\frac{x^2(S-2y^2-4xy)}{2(x+y)^2}=0,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}S-2x^2-4xy=0,\\ S-2y^2-4xy=0.\end{aligned}\right\}$$

Так как $x>0$, $y>0$, то из последней системы следует, что $x=y=\sqrt{S/6}$. Получили единственную стационарную точку $M_0(\sqrt{S/6},\ \sqrt{S/6})$, которая является точкой максимума функции $V=V(x,\ y)$ (т. е. задача имеет решение!), поэтому проверять выполнение достаточных условий максимума нет необходимости. Далее находим

$$z=\frac{S-S/3}{4\sqrt{S/6}}=\frac{2S/3}{4\sqrt{S/6}}=\sqrt{S/6}.$$

Таким образом, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\sqrt{S/6}$. ◄

АЗ-10.4

1. Исследовать данные функции на локальный экстремум:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

в) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$.

(*Ответ:* а) $z_{\min} = z(2, 1) = -28$, $z_{\max} = z(-2, -1) = 28$; б) $z_{\min} = z(1, 0) = -1$; в) точек экстремума нет.)

2. Найти экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$. (*Ответ:* $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$; $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$.)

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. (*Ответ:* $z_{\text{наим}} = z(3, 0) = -9$, $z_{\text{наиб}} = z(0, 0) = 5$.)

4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$. (*Ответ:* $z_{\text{наим}} = z(4, 2) = -64$, $z_{\text{наиб}} = z(2, 1) = 4$.)

5. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего поверхность наименьшей площади. (*Ответ:* куб с ребром, равным $\sqrt[3]{V}$.)

Самостоятельная работа

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$. (*Ответ:* $z_{\min} = z(1, -1) = -3$.)

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. (*Ответ:* $z_{\max} = z(4, 4) = 15$.)

3. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$. (*Ответ:* $z_{\min} = z(0, -2/3) = -4/3$.)

10.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 10

ИДЗ-10.1

1. Найти область определения указанных функций.

1.1. $z = 3xy/(2x - 5y)$. **1.2.** $z = \arcsin(x - y)$.

1.3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. **1.4.** $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = 2/(6 - x^2 - y^2)$. **1.6.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.

1.7. $z=\arccos(x+y)$. **1.8.** $z=3x+y/(2-x+y)$.
1.9. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. **1.10.** $z=\ln(x^2+y^2-3)$.
1.11. $z=\sqrt{2x^2-y^2}$. **1.12.** $z=4xy/(x-3y+1)$.
1.13. $z=\sqrt{xy}/(x^2+y^2)$. **1.14.** $z=\arcsin(x/y)$.
1.15. $z=\ln(y^2-x^2)$. **1.16.** $z=x^3y/(3+x-y)$.
1.17. $z=\arccos(x+2y)$. **1.18.** $z=\arcsin(2x-y)$.
1.19. $z=\ln(9-x^2-y^2)$. **1.20.** $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$.
1.21. $z=1/\sqrt{x^2+y^2-5}$. **1.22.** $z=4x+y/(2x-5y)$.
1.23. $z=\sqrt{3x-2y}/(x^2+y^2+4)$.
1.24. $z=5/(4-x^2-y^2)$.
1.25. $z=\ln(2x-y)$. **1.26.** $z=7x^3y/(x-4y)$.
1.27. $z=\sqrt{1-x-y}$. **1.28.** $z=e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
1.29. $z=1/(x^2+y^2-6)$. **1.30.** $z=4xy/(x^2-y^2)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций.

2.1. $z=\ln(y^2-e^{-x})$. **2.2.** $z=\arcsin\sqrt{xy}$.
2.3. $z=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$. **2.4.** $z=\cos(x^3-2xy)$.
2.5. $z=\sin\sqrt{y/x^3}$. **2.6.** $z=\operatorname{tg}(x^3+y^2)$.
2.7. $z=\operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$. **2.8.** $z=e^{-x^2+y^2}$.
2.9. $z=\ln(3x^2-y^4)$. **2.10.** $z=\arccos(y/x)$.
2.11. $z=\operatorname{arcctg}(xy^2)$. **2.12.** $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$.
2.13. $z=\sin\sqrt{x-y^3}$. **2.14.** $z=\operatorname{tg}(x^3y^4)$.
2.15. $z=\operatorname{ctg}(3x-2y)$. **2.16.** $z=e^{2x^2-y^2}$.
2.17. $z=\ln(\sqrt{xy}-1)$. **2.18.** $z=\arcsin(2x^3y)$.
2.19. $z=\operatorname{arctg}(x^2/y^3)$. **2.20.** $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$.
2.21. $z=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$. **2.22.** $z=\operatorname{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$.
2.23. $z=\operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$. **2.24.** $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
2.25. $z=\ln(3x^2-y^2)$. **2.26.** $z=\arccos(x-y^2)$.
2.27. $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$. **2.28.** $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.
2.29. $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$. **2.30.** $z=e^{-(x^3+y^3)}$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x, y, z)$ в точке

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

3.1. $f(x, y, z)=z/\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(0, -1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(0, -1, 1)=0$, $f'_y(0, -1, 1)=1$, $f'_z(0, -1, 1)=1$.)

3.2. $f(x, y, z)=\ln\left(x+\frac{y}{2z}\right)$, $M_0(1, 2, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 2, 1)=0{,}5$, $f'_y(1, 2, 1)=0{,}25$, $f'_z(1, 2, 1)=-0{,}5$.)

3.3. $f(x, y, z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)$. $\left(\textit{Ответ: } f'_x\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)=0{,}87,\ f'_y\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)=-0{,}35,\ f'_z\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)=-0{,}17.\right)$

3.4. $f(x, y, z)=\ln(x^3+2y^3-z^3)$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 0)=1{,}2$, $f'_y(2, 1, 0)=0{,}6$, $f'_z(2, 1, 0)=0$.)

3.5. $f(x, y, z)=x/\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(1, 0, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 0, 1)=1$, $f'_y(1, 0, 1)=0$, $f'_z(1, 0, 1)=-1$.)

3.6. $f(x, y, z)=\ln\cos(x^2y^2+z)$, $M_0\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$. $\left(\textit{Ответ: } f'_x\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)=0,\ f'_y\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)=0,\ f'_z\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)=-1.\right)$

3.7. $f(x, y, z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$, $M_0(3, 4, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(3, 4, 2)=1$, $f'_y(3, 4, 2)=8$, $f'_z(3, 4, 2)=12$.)

3.8. $f(x, y, z)=\operatorname{arctg}(xy^2+z)$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 0)=0{,}2$, $f'_y(2, 1, 0)=0{,}8$, $f'_z(2, 1, 0)=0{,}2$.)

3.9. $f(x, y, z)=\arcsin(x^2/y-z)$, $M_0(2, 5, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 5, 0)=1{,}33$, $f'_y(2, 5, 0)=-0{,}27$, $f'_z(2, 5, 0)=-1{,}67$.)

3.10. $f(x, y, z)=\sqrt{z}\sin(y/x)$, $M_0(2, 0, 4)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 0, 4)=0$, $f'_y(2, 0, 4)=1$, $f'_z(2, 0, 4)=0$.)

3.11. $f(x, y, z)=y/\sqrt{x^2+z^2}$, $M_0(-1, 1, 0)$. (*Ответ:* $f'_x(-1, 1, 0)=1$, $f'_y(-1, 1, 0)=1$, $f'_z(-1, 1, 0)=0$.)

3.12. $f(x, y, z)=\operatorname{arctg}(xz/y^2)$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $f'_x(2, 1, 1)=0{,}2$, $f'_y(2, 1, 1)=-0{,}8$, $f'_z(2, 1, 1)=0{,}4$.)

3.13. $f(x, y, z)=\ln\sin(x-2y+z/4)$. $M_0(1, 1/2, \pi)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 1/2, \pi)=1$, $f'_y(1, 1/2, \pi)=-2$, $f'_z(1, 1/2, \pi)==0{,}25$.)

3.14. $f(x, y, z)=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$, $M_0(1, 1, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 1, 2)=-1{,}5$, $f'_y(1, 1, 2)=-1$, $f'_z(1, 1, 2)=1{,}25$.)

3.15. $f(x, y, z)=1/\sqrt{x^2+y^2-z^2}$, $M_0(1, 2, 2)$. (*Ответ:* $f'_x(1, 2, 2)=-1$, $f'_y(1, 2, 2)=-2$, $f'_z(1, 2, 2)=2$.)

3.16. $f(x, y, z)=\ln(x+y^2)-\sqrt{x^2z^2}$, $M_0(5, 2, 3)$.

(*Ответ*: $f'_x(5, 2, 3) = -1{,}14$, $f'_y(5, 2, 3) = 0{,}44$, $f'_z(5, 2, 3) = 0{,}75$.)

3.17. $f(x, y, z) = \sqrt{z}x^y$, $M_0(1, 2, 4)$. (*Ответ*: $f'_x(1, 2, 4) = 4$, $f'_y(1, 2, 4) = 0$, $f'_z(1, 2, 4) = 0{,}25$.)

3.18. $f(x, y, z) = -z/\sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. (*Ответ*: $f'_x(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0{,}25$, $f'_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0{,}25$, $f'_z(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = -0{,}5$.)

3.19. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$, $M_0(2, 1, 8)$. (*Ответ*: $f'_x(2, 1, 8) = 12$, $f'_y(2, 1, 8) = 0{,}33$, $f'_z(2, 1, 8) = -1$.)

3.20. $f(x, y, z) = z/(x^4 + y^2)$, $M_0(2, 3, 25)$. (*Ответ*: $f'_x(2, 3, 25) = -1{,}28$, $f'_y(2, 3, 25) = -0{,}24$, $f'_z(2, 3, 25) = 0{,}04$.)

3.21. $f(x, y, z) = 8\sqrt[5]{x^3 + y^2 + z}$, $M_0(3, 2, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(3, 2, 1) = 2{,}7$, $f'_y(3, 2, 1) = 0{,}4$, $f'_z(3, 2, 1) = 0{,}1$.)

3.22. $f(x, y, z) = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(1, 1, 1) = 0{,}2$, $f'_y(1, 1, 1) = 0{,}25$, $f'_z(1, 1, 1) = -1$.)

3.23. $f(x, y, z) = -2x/\sqrt{y^2 + z^2}$, $M_0(3, 0, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(3, 0, 1) = -2$, $f'_y(3, 0, 1) = 0$, $f'_z(3, 0, 1) = 6$.)

3.24. $f(x, y, z) = ze^{-(x^2 + y^2)/2}$, $M_0(0, 0, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(0, 0, 1) = 0$, $f'_y(0, 0, 1) = 0$, $f'_z(0, 0, 1) = 1$.)

3.25. $f(x, y, z) = \dfrac{\sin(x - y)}{z}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$. $\Big($*Ответ*: $f'_x\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = 0{,}5$, $f'_y\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = -0{,}5$, $f'_z\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right) = -0{,}17$.$\Big)$

3.26. $f(x, y, z) = \sqrt{z}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $M_0(4, 1, 4)$. (*Ответ*: $f'_x(4, 1, 4) = 0{,}17$, $f'_y(4, 1, 4) = 0{,}33$, $f'_z(4, 1, 4) = 0{,}27$.)

3.27. $f(x, y, z) = xz/(x - y)$, $M_0(3, 1, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(3, 1, 1) = -0{,}25$, $f'_y(3, 1, 1) = 0{,}75$, $f'_z(3, 1, 1) = 1{,}5$.)

3.28. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$, $M_0\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\Big($*Ответ*: $f'_x\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}6$, $f'_y\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}8$, $f'_z\left(3, 4, \dfrac{\pi}{2}\right) = 2{,}4$.$\Big)$

3.29. $f(x, y, z) = ze^{-xy}$, $M_0(0, 1, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(0, 1, 1) = -1$, $f'_y(0, 0, 1) = 0$, $f'_z(0, 1, 1) = 1$.)

3.30. $f(x, y, z) = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2$, $M_0(0, 4, 1)$. (*Ответ*: $f'_x(0, 4, 1) = 2$, $f'_y(0, 4, 1) = -1$, $f'_z(0, 4, 1) = -8$.)

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.1. $z=2x^3y-4xy^5$.

4.2. $z=x^2y\sin x-3y$.

4.3. $z=\operatorname{arctg} x+\sqrt{y}$.

4.4. $z=\arcsin(xy)-3xy^2$.

4.5. $z=5xy^4+2x^2y^7$.

4.6. $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$.

4.7. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.

4.8. $z=5xy^2-3x^3y^4$.

4.9. $z=\arcsin(x+y)$.

4.10. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

4.11. $z=7x^3y-\sqrt{xy}$.

4.12. $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$.

4.13. $z=e^{x+y-4}$.

4.14. $z=\cos(3x+y)-x^2$.

4.15. $z=\operatorname{tg}((x+y)/(x-y))$.

4.16. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$.

4.17. $z=xy^4-3x^2y+1$.

4.18. $z=\ln(x+xy-y^2)$.

4.19. $z=2x^2y^2+x^3-y^3$.

4.20. $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$.

4.21. $z=\arcsin((x+y)/x)$.

4.22. $z=\operatorname{arcctg}(x-y)$.

4.23. $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$.

4.24. $z=y^2-3xy-x^4$.

4.25. $z=\arccos(x+y)$.

4.26. $z=\ln(y^2-x^2+3)$.

4.27. $z=2-x^3-y^3+5x$.

4.28. $z=7x-x^3y^2+y^4$.

4.29. $z=e^{y-x}$.

4.30. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.1. $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$. (*Ответ:* 1.)

5.2. $u=\ln(e^x+e^{-y})$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$. (*Ответ:* $-2{,}5$.)

5.3. $u=y^x$, $x=\ln(t-1)$, $y=e^{t/2}$, $t_0=2$. (*Ответ:* 1.)

5.4. $u=e^{y-2x+2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* -1.)

5.5. $u=x^2e^y$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* -1.)

5.6. $u=\ln(e^x+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=1$. (*Ответ:* 2,5.)

5.7. $u=x^y$, $x=e^t$, $y=\ln t$, $t_0=1$. (*Ответ:* 1.)

5.8. $u=e^{y-2x}$, $x=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$. (*Ответ:* -2.)

5.9. $u=x^2e^{-y}$, $x=\sin t$, $y=\sin^2 t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* 0.)

5.10. $u=\ln(e^{-x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$. (*Ответ:* 2,5.)

5.11. $u=e^{y-2x-1}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi/2$. (*Ответ:* 2.)

5.12. $u=\arcsin(x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* 1.)

5.13. $u=\arccos(2x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$. (*Ответ:* -2.)

5.14. $u=x^2/(y+1)$, $x=1-2t$, $y=\operatorname{arctg} t$, $t_0=0$. (*Ответ:* -5.)

5.15. $u = x/y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 3.)

5.16. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$ (*Ответ:* -2.)

5.17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 1,25.)

5.18. $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 0.)

5.19. $u = y^2/x$, $x = 1 - 2t$, $y = 1 + \operatorname{arctg} t$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 4.)

5.20. $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. (*Ответ:* -4.)

5.21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0,5.)

5.22. $u = \arcsin\frac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 0,5.)

5.23. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $x = \sin 2t$, $y = \operatorname{tg}^2 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. (*Ответ:* -8.)

5.24. $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0,75.)

5.25. $u = y/x$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* -2.)

5.26. $u = \arcsin(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$. (*Ответ:* 2.)

5.27. $u = \ln(e^{2x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^4$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 4.)

5.28. $u = \operatorname{arctg}(x + y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 0.)

5.29. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^3$, $t_0 = 1$. (*Ответ:* 1,5.)

5.30. $u = \operatorname{arctg}(xy)$, $x = t + 3$, $y = e^t$, $t_0 = 0$. (*Ответ:* 0,4.)

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 1) = 3$, $z'_y(2, 1, 1) = -1$.)

6.2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1, 0, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(-1, 0, 1) = -1$, $z'_y(-1, 0, 1) = 0{,}5$.)

6.3. $3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, -1) = 4$, $z'_y(2, 1, -1) = -2$.)

6.4. $e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1, 1, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 0) = -0,5$, $z'_y(1, 1, 0) = -1$.)

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, $M_0(1, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, -1) = 0,67$, $z'_y(1, 1, -1) = 0,67$.)

6.6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7$, $M_0 = (1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = -0,5$, $z'_y(1, 1, 1) = -0,5$.)

6.7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. (*Ответ:* $z'_x(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4) = -1$, $z'_y(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4) = 1$.)

6.8. $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, $M_0(0, \pi/2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, \pi/2, 1) = 0$, $z'_y(0, \pi/2, 1) = -1$.)

6.9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1, 2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 2, 1) = 2$, $z'_y(1, 2, 1) = -2$.)

6.10. $xy = z^2 - 1$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = -0,5$, $z'_y(0, 1, -1) = 0$.)

6.11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = -0,4$, $z'_y(1, 1, 1) = 0,8$.)

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $M_0(0, 2, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 2, 1) = -1$, $z'_y(0, 2, 1) = -2$.)

6.13. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$, $M_0(0, \pi/2, \pi)$. (*Ответ:* $z'_x(0, \pi/2, \pi) = 0$, $z'_y(0, \pi/2, \pi) = 1$.)

6.14. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$, $M_0(2, 1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 2) = 7$, $z'_y(2, 1, 2) = -16$.)

6.15. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M_0(1, 1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 1, 1) = 0,5$, $z'_y(1, 1, 1) = 1$.)

6.16. $x + y + z + 2 = xyz$, $M_0(2, -1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(2, -1, -1) = 0$, $z'_y(2, -1, -1) = -1$.)

6.17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = 1$, $z'_y(0, 1, -1) = 1$.)

6.18. $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2, 1, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(2, 1, 0) = -1$, $z'_y(2, 1, 0) = 0$.)

6.19. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $M_0(1, -1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(1, -1, 2) = -0,6$, $z'_y(1, -1, 2) = 0,13$.)

6.20. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M_0(0, -2, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(0, -2, 2) = 2,5$, $z'_y(0, -2, 2) = 2,5$.)

6.21. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $M_0(1, 2, 0)$. (*Ответ:* $z'_x(1, 2, 0) = -2$, $z'_y(1, 2, 0) = -3$.)

6.22. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0$, $M_0(1, -1, 1)$. (*Ответ:* $z'_x(1, -1, 1) = 2$, $z'_y(1, -1, 1) = 2$.)

6.23. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $M_0(0, 1, -1)$. (*Ответ:* $z'_x(0, 1, -1) = -0,25$, $z'_y(0, 1, -1) = 0,75$.)

6.24. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3$, $M_0(4,\ 3,\ 1)$. (*Ответ:* $z'_x(4,\ 3,\ 1)=0{,}8$, $z'_y(4,\ 3,\ 1)=0{,}6$.)

6.25. $x^2+2y^2+3z^2=59$, $M_0(3, 1, 4)$. (*Ответ:* $z'_x(3, 1, 4=$ $=-0{,}25$, $z'_y(3,\ 1,\ 4)=-0{,}17$.)

6.26. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17$, $M_0(-2,$ $-1, 2)$. (*Ответ:* $z'_x(-2,\ -1,\ 2)=0{,}6$, $z'_y(-2,\ -1,\ 2)=0{,}2$.)

6.27. $x^3+3xyz-z^3=27$, $M_0(3,\ 1,\ 3)$. (*Ответ:* $z'_x(3,\ 1,\ 3)=2$, $z'_y(3,\ 1,\ 3)=1{,}5$.)

6.28. $\ln z=x+2y-z+\ln 3$, $M_0(1,\ 1,\ 3)$. (*Ответ:* $z'_x(1,\ 1,\ 3)=3/4$, $z'_y(1,\ 1,\ 3)=3/2$.)

6.29. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0$, $M_0(2,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2,\ 1,\ 1)=0$, $z'_y(2,\ 1,\ 1)=0{,}27$.)

6.30. $z^2=xy-z+x^2-4$, $M_0(2,\ 1,\ 1)$. (*Ответ:* $z'_x(2,\ 1,\ 1)\approx 1{,}67$, $z'_y(2,\ 1,\ 1)\approx 0{,}67$.)

Решение типового варианта

1. Найти область определения функции $z=\ln(x^2-$ $-3y+6)$.

▶ Логарифмическая функция определена только при положительном значении аргумента, поэтому x^2-3y+ $+6>0$, или $3y<x^2+6$. Значит, границей области будет линия $x^2-3y+6=0$, или $x^2=3y-6$, т. е. парабола. Область определения данной функции состоит из внешних точек параболы (рис. 10.4). ◀

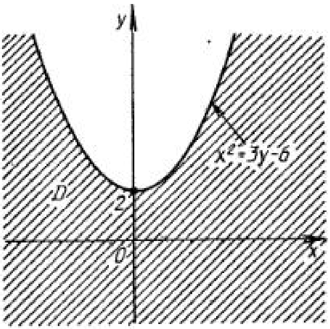


Рис. 10.4

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

▶ Вначале найдем частные производные функции, использовав формулу дифференцирования сложной функции одной переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-2/3}\cdot 2x\right)=$$

$$= -\frac{2x}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{-2/3} \cdot 10y \right) =$$

$$= -\frac{10y}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Теперь находим частные дифференциалы:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -\frac{2x}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}} \, dx,$$

$$d_y z = \frac{dz}{dy} dy = -\frac{10y}{3} e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}} \, dy. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,\ y,\ z) = \sqrt{xy}\cos z$ в точке $M_0(1,\ 1,\ \pi/3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0(1,\ 1,\ \pi/3)$:

$$f'_y(x, y, z) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \cos z,\quad f'_x(1,\ 1,\ \pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_y(x,\ y,\ z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \cos z,\quad f'_y(1,\ 1,\ \pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_z(x,\ y,\ z) = -\sqrt{xy} \sin z,\quad f'_z(1,\ 1,\ \pi/3) = -0{,}86. \blacktriangleleft$$

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x/y}$.

▶ Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x/y} \frac{1}{2\sqrt{x/y}} \frac{1}{y} = \frac{y}{x+y} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x/y} \frac{1}{2\sqrt{x/y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{y}{x+y} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)}.$$

Согласно формуле (10.1), имеем

$$dz = \frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)} dx - \frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)} dy. \blacktriangleleft$$

5. Вычислить значение производной сложной функции $z=\arccos\frac{x^2}{y}$, где $x=1+\ln t$, $y=-2e^{-t^2+1}$, при $t_0=1$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ На основании формулы (10.4) имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\frac{2x}{y}\frac{1}{t}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)(-2e^{-t^2+1})(-2t).$$

При $t_0=1$ получаем, что $x=1$, $y=-2$,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=\frac{4}{\sqrt{3}}.\ ◀$$

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\ y)$, заданной неявно уравнением $4x^3-3y^3+2xyz-4xz=3-z^2$, в точке $M_0(0,\ 1,\ -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ В данном случае $F(x,\ y,\ z)=4x^3-3y^3+2xyz-4xz+z^2-3$, поэтому

$$F'_x=12x^2+2yz-4z,\ F'_y=-9y^2+2xz,$$
$$F'_z=2xy-4x+2z.$$

Следовательно, по формулам (10.7):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{12x^2+2yz-4z}{2xy-4x+2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-9y^2+2xz}{2xy-4x+2z}.$$

Вычисляем значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(0,\ 1,\ -1)$:

$$\frac{\partial z(0,\ 1,\ -1)}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z(0,\ 1,-1)}{\partial y}=-4{,}5.\ ◀$$

ИДЗ-10.2

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1.1. S: $x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
1.2. S: $x^2+z^2-4y^2=-2xy$, $M_0(-2,\ 1,\ 2)$.
1.3. S: $x^2+y^2+z^2-xy+3z=7$, $M_0(1,\ 2,\ 1)$.
1.4. S: $x^2+y^2+z^2+6y+4x=8$, $M_0(-1,\ 1,\ 2)$.
1.5. S: $2x^2-y^2+z^2-4z+y=13$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
1.6. S: $x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
1.7. S: $x^2+z^2-5yz+3y=46$, $M_0(1,\ 2,\ -3)$.

1.8. S: $x^2+y^2-xz-yz=0$, $M_0(0, 2, 2)$.
1.9. S: $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2$, $M_0(1, 1, 1)$.
1.10. S: $y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z$, $M_0(1, 1, 1)$.
1.11. S: $z=x^2+y^2-2xy+2x-y$, $M_0(-1, -1, -1)$.
1.12. S: $z=y^2-x^2+2xy-3y$, $M_0(1, -1, 1)$.
1.13. S: $z=x^2-y^2-2xy-x-2y$, $M_0(-1, 1, 1)$.
1.14. S: $x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$, $M_0(3, 1, 2)$.
1.15. S: $4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9$, $M_0(1, -2, 1)$.
1.16. S: $z=x^2+y^2-3xy-x+y+2$, $M_0(2, 1, 0)$.
1.17. S: $2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3$, $M_0(1, 2, 1)$.
1.18. S: $x^2-y^2+z^2-4x+2y=14$, $M_0(3, 1, 4)$.
1.19. S: $x^2+y^2-z^2+xz+4y=4$, $M_0(1, 1, 2)$.
1.20. S: $x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5$, $M_0(-2, 1, 0)$.
1.21. S: $x^2+y^2-xz+yz-3x=11$, $M_0(1, 4, -1)$.
1.22. S: $x^2+2y^2+z^2-4xz=8$, $M_0(0, 2, 0)$.
1.23. S: $x^2-y^2-2z^2-2y=0$, $M_0(-1, -1, 1)$.
1.24. S: $x^2+y^2-3z^2+xy=-2z$, $M_0(1, 0, 1)$.
1.25. S: $2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$, $M_0(1, -1, 1)$.
1.26. S: $x^2+y^2-z^2+6xy-z=8$, $M_0(1, 1, 0)$.
1.27. S: $z=2x^2-3y^2+4x-2y+10$, $M_0(-1, 1, 3)$.
1.28. S: $z=x^2+y^2-4xy+3x-15$, $M_0(-1, 3, 4)$.
1.29. S: $z=x^2+2y^2+4xy-5y-10$, $M_0(-7, 1, 8)$.
1.30. S: $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$, $M_0(1, -1, 2)$.

2. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

2.1. $z=e^{x^2-y^2}$. 2.2. $z=\operatorname{ctg}(x+y)$.
2.3. $z=\operatorname{tg}(x/y)$. 2.4. $z=\cos(xy^2)$.
2.5. $z=\sin(x^2-y)$. 2.6. $z=\operatorname{arctg}(x+y)$.
2.7. $z=\arcsin(x-y)$. 2.8. $z=\arccos(2x+y)$.
2.9. $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)$. 2.10. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.
2.11. $z=e^{2x^2+y^2}$. 2.12. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$.
2.13. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$. 2.14. $z=\cos(x^2y^2-5)$.
2.15. $z=\sin\sqrt{x^3y}$. 2.16. $z=\arcsin(x-2y)$.
2.17. $z=\arccos(4x-y)$. 2.18. $z=\operatorname{arctg}(5x+2y)$.
2.19. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$. 2.20. $z=\ln(4x^2-5y^3)$.
2.21. $z=e^{\sqrt{x+y}}$. 2.22. $z=\arcsin(4x+y)$.
2.23. $z=\arccos(x-5y)$. 2.24. $z=\sin\sqrt{xy}$.
2.25. $z=\cos(3x^2-y^3)$. 2.26. $z=\operatorname{arctg}(3x+2y)$.
2.27. $z=\ln(5x^2-3y^4)$. 2.28. $z=\operatorname{arcctg}(x-4y)$.
2.29. $z=\ln(3xy-4)$. 2.30. $z=\operatorname{tg}(xy^2)$.

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x}.$

3.2. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3),\ u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3.$

3.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+(y+1)^2).$

3.4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x},\ u=x^y.$

3.5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=\frac{xy}{x+y}.$

3.6. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=e^{xy}.$

3.7. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=\sin^2(x-ay).$

3.8. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$

3.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3.10. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=e^{-\cos(x+ay)}.$

3.11. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=(x-y)(y-z)(z-x).$

3.12. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\ u=x\ln\frac{y}{x}.$

3.13. $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\ln(x^2+y^2).$

3.14. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,\ u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy).$

3.15. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy,\ u=0,\ u=e^{xy}$

3.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$

3.17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+y^2+2x+1).$

3.18. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

3.19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,\ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

3.20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$

3.21. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y).$

3.22. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=xe^{y/x}.$

3.23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

3.24. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$

3.25. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ u=\ln(x+e^{-y}).$

3.26. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\arcsin\frac{x}{x+y}.$

3.27. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2},\ u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}.$

3.28. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y},\ u=\frac{x^2+y^2}{x-y}.$

3.29. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u},\ u=\sqrt{2xy+y^2}.$

3.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2-y^2).$

4. Исследовать на экстремум следующие функции.

4.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$. (*Ответ:* $z_{\max}(4,\ 4)=28.$)

4.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$. (*Ответ:* $z_{\min}(1;\ 0{,}5)=4.$)

4.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(-4,\ -1)=-97.$)

4.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(4,\ -2)=13.$)

4.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$. (*Ответ:* $z_{\min}(5,\ 6)=-86.$)

4.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$. (*Ответ:* $z_{\min}(1,\ 1)=3.$)

4.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$. (*Ответ:* $z_{\min}(1,\ 1)=7.$)

4.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$. (*Ответ:* $z_{\min}(-1,\ 1)=0.$)

4.9. $z=4(x-y)-x^2-y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(2,\ -2)=8.$)

4.10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(1,\ -1)=6.$)

4.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 4) = -21$.)

4.12. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$. (*Ответ:* $z_{\min}(2, 0) = -10$.)

4.13. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$. (*Ответ:* $z_{\min}(5, 0) = 1$.)

4.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 1) = -1$.)

4.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 0$.)

4.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 15$.)

4.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 2$.)

4.18. $z = xy(12 - x - y)$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 64$.)

4.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 9$.)

4.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 10$.)

4.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. (*Ответ:* $z_{\min}(1; 0{,}5) = 0$.)

4.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. (*Ответ:* $z_{\max}(4, 4) = 12$.)

4.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. (*Ответ:* $z_{\min}(-4, 1) = -1$.)

4.24. $z = xy(6 - x - y)$. (*Ответ:* $z_{\max}(2, 2) = 8$.)

4.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$. (*Ответ:* $z_{\min}(-1, -1) = -1$.)

4.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 0) = -1$.)

4.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$. (*Ответ:* $z_{\min}(1, 0) = 0$.)

4.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(0, 0) = 0$.)

4.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$. (*Ответ:* $z_{\min}(0, -2) = 0$.)

4.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$. (*Ответ:* $z_{\max}(1, 1) = 2$.)

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области $\bar{D}$, ограниченной заданными линиями.

5.1. $z = 3x + y - xy$, $\bar{D}$: $y = x$, $y = 4$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2, 2) = 4$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = z(4, 4) = 0$.)

5.2. $z = xy - x - 2y$, $\bar{D}$: $x = 3$, $y = x$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = z(3, 3) = 0$, $z_{\text{наим}}(3, 0) = -3$.)

5.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1, 2) = 17$, $z_{\text{наим}}(1, 0) = -3$.)

5.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1, 0) = 5$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = 0$.)

5.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D}$: $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3, 3) = 6$, $z_{\text{наим}}(2, 0) = -4$.)

5.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\bar{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 0) = 8$, $z_{\text{наим}}(0{,}5; 0{,}5) = 6{,}5$.)

5.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\bar{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0, 6) = 36$, $z_{\text{наим}}(0, 0) = 0$.)

5.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1,\ 1) = 6$, $z_{\text{наим}}(0,\ 0) = 0$.)

5.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\overline{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 3 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = -1$, $z_{\text{наим}}(0,\ 3) = -19$.)

5.10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\overline{D}$: $y = 0$, $y = x^2 - 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{5}\right) = -\frac{62}{27}$, $z_{\text{наим}}(1,\ -3) = -15$.)

5.11. $z = xy - 2x - y$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3,\ 4) = 2$, $z_{\text{наим}}(3,\ 0) = -6$.)

5.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $\overline{D}$: $y = 8$, $y = 2x^2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-2,\ 8) = 18$, $z_{\text{наим}}(2,\ 8) = -14$.)

5.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\overline{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 1) = z(1,\ 0) = 3$, $z_{\text{наим}}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.)

5.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $\overline{D}$: $y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 3) = 28$, $z_{\text{наим}}(0,\ 0) = 1$.)

5.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $\overline{D}$: $x = -3$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-3,\ 2) = 6$, $z_{\text{наим}}(-2,\ 0) = -3$.)

5.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $\overline{D}$: $x = 5$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(5,\ 4) = 115$, $z_{\text{наим}}(1,\ 0) = 3$.)

5.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $\overline{D}$: $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = z(1,\ 2) = 0$, $z_{\text{наим}}(0,\ 2) = -2$.)

5.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 2) = 10$, $z_{\text{наим}}\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right) = -1{,}67$.)

5.19. $z = xy - 3x - 2y$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0) = 0$, $z_{\text{наим}}(4,\ 0) = -12$.)

5.20. $z = x^2 + xy - 2$, $\overline{D}$: $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(-\frac{2}{3},\ -2{,}22\right) = -0{,}07$, $z_{\text{наим}}(0{,}5,\ -3) = -3{,}25$.)

5.21. $z = x^2y(4 - x - y)$, $\overline{D}$: $x = 0$, $y = 0$, $y = 6 - x$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2,\ 1) = 4$, $z_{\text{наим}}(4,\ 2) = -64$.)

5.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\overline{D}$: $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2,\ -1) = 13$, $z_{\text{наим}}(0,\ -1) = -1$.)

5.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $\overline{D}$: $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right) = \frac{36}{5}$, $z_{\text{наим}}(0,\ 2) = -12$.)

5.24. $z=x^2+2xy-y^2-4x$, $\bar{D}$: $x=3$, $y=0$, $y=x+1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(3,\ 3)=6$, $z_{\text{наим}}(2,\ 0)=-4$.)

5.25. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$, $\bar{D}$: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$. $\left(\textit{Ответ:}\ z_{\text{наиб}}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3},\ z_{\text{наим}}(0{,}2)=-28.\right)$

5.26. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$, $\bar{D}$: $y=x+2$, $y=0$, $x=2$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(2,\ 3)=9$, $z_{\text{наим}}(1,\ 0)=-1$.)

5.27. $z=4-2x^2-y^2$, $\bar{D}$: $y=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0)=4$, $z_{\text{наим}}(-1,\ 0)=z(1,\ 0)=2$.)

5.28. $z=5x^2-3xy+y^2+4$, $\bar{D}$: $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(-1,\ 1)=z(1,\ -1)=13$, $z_{\text{наим}}(0,\ 0)=4$.)

5.29. $z=x^2+2xy+4x-y^2$, $\bar{D}$: $x+y+2=0$, $x=0$, $y=0$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(0,\ 0)=0$, $z_{\text{наим}}(-2,\ 0)=z(0,\ -4)=$ $=-4$.)

5.30. $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2$, $\bar{D}$: $x=0$, $y=0$, $x+y=6$. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}(1,\ 0{,}5)=0{,}25$, $z_{\text{наим}}(4,\ 2)=-128$.)

Решение типового варианта

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S: $z=x^2-y^2+3xy-4x+2y-4$ в точке $M_0(-1,\ 0,\ 1)$.

▶ Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y-4,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y+3x+2.$$

Подставляя в полученные выражения координаты точки $M_0(-1,\ 0,\ 1)$, вычисляем, согласно формуле (10.8), координаты вектора **n**, перпендикулярного к поверхности S в данной точке:

$$A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-6,\ B=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-1,\ C=-1.$$

Следовательно, касательная плоскость имеет уравнение

$$-6(x+1)-y-(z-1)=0 \text{ или } 6x+y+z+5=0,$$

а уравнение нормали на основании формулы (10.9) запишется в виде

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}. \blacktriangleleft$$

2. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos\sqrt{x/y}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

▶ Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x/y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\,\frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}},$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-x/y}}\,\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y-x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{2x(y-x)} = \frac{y-x-x}{4x\sqrt{x}\sqrt{y-x}(y-x)} =$$

$$= \frac{y-2x}{4x\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)(y-x)^{-3/2} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{yy} = \frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x} + y/(2\sqrt{y-x})}{y^2(y-x)}\right) = -\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)},$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2y}\;\frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{y-x+x}{4y(y-x)\sqrt{x}\sqrt{y-x}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}}.$$

Как видно, смешанные частные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны. ◀

3. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2+y^2}\quad\frac{\partial u}{\partial x}$$

функция $u = \ln(x^2+y^2)$.

▶ Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть исходного уравнения:

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Тогда в первой части уравнения имеем

$$\frac{4y^2}{x^2+y^2}\ \frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что данная функция не удовлетворяет исходному уравнению. ◀

4. Исследовать на локальный экстремум функцию $z=xy(x+y-2)$.

▶ Находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x=2xy+y^2-2y,\ z'_y=x^2+2xy-2x.$$

Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(2x+y-2)=0,\\ x(x+2y-2)=0,\end{aligned}\right\}$$

из которой определяем стационарные точки данной функции: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(2,\ 0)$, $M_3(0,\ 2)$, $M_4(2/3,\ 2/3)$. С помощью теоремы 2 из § 10.4 выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Для этого вначале найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx}=2y,\ z''_{xy}=2x+2y-2,\ z''_{yy}=2x.$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума (см. § 10.4), имеем: для точки M_1 $\Delta=-4<0$, т. е. экстремума нет, для точки M_2 $\Delta=-4<<0$, т. е. экстремума нет, для точки M_3 $\Delta=-4<0$, т. е. экстремума нет, для точки M_4 $\Delta=12/9>0$, $A=4/3>0$, т. е. имеем точку локального минимума функции, в которой $z_{\min}=z(2/3,\ 2/3)=-8/27$. ◀

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-y^2+3x+4y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$ (рис. 10.5).

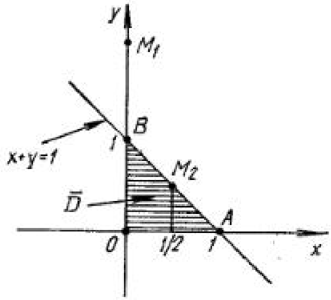


Рис. 10.5

► Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области $\overline{D}$, т. е. внутри треугольника OAB. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= y+3=0, \\ z'_y &= x-2y+4=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку $M(-10,\ -3)$. Она лежит вне области $\overline{D}$, следовательно, при решении задачи мы ее не учитываем. Исследуем значения функции на границе области $\overline{D}$. На стороне OA ($y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1$) треугольника OAB функция z имеет вид $z=3x$. Стационарных точек на отрезке OA нет, так как $z'=3$. В точках O и A соответственно $z(0,\ 0)=0,\ z(1,\ 0)=3$. На стороне $OB (x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ треугольника функция $z=-y^2+4y,\ z'=-2y+4$. Находим стационарную точку из уравнения $-2y+4=0$; получаем, что $y=2$. Таким образом, точка $M_1(0,\ 2)$ не принадлежит области $\overline{D}$. Значение функции в точке B $z(0,\ 1)=3$. Находим наибольшее и наименьшее значения на стороне AB: $x+y=1$. Здесь $y=1-x,\ z=-2x^2+2x+3$, тогда $z'=-4x+2$ и из $z'=0$ следует $x=1/2$, т. е. стационарная точка $M_2(1/2,\ 1/2)$ принадлежит границе области $\overline{D}$. Значение функции в ней $z(1/2,\ 1/2)=3{,}5$. Сравнивая все полученные значения функции, видим, что

$$z_{\text{наиб}}=z(1/2,\ 1/2)=3{,}5,\quad z_{\text{наим}}=z(0{,}0)=0. \blacktriangleleft$$

10.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 10

1. Найти область определения функции $u=\sqrt{z(2-z)}+\ln(4-x^2)-3y$. (*Ответ:* $|x|<2,\ 0\leqslant z\leqslant 2$.)

2. Доказать, что функция

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{если } x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

разрывна при $x=y=0$, но имеет частные производные в точке $O(0,\ 0)$.

3. Доказать, что для функции

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

выполняется неравенство $f''_{xy}(0,\ 0)\neq f''_{yx}(0,\ 0)$.

4. Доказать, что функция $z=x^yy^x$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y+\ln z)z.$$

5. Найти наибольшие и наименьшие значения функции $z=|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}$ в области ее непрерывности. (*Ответ:* $z_{\text{наиб}}=\sqrt{2}$, $z_{\text{наим}}=-1$.)

6. Через точку $A(4,\ 1,\ 5)$ пространства проведена плоскость параллельно плоскости $2x+6y+3z-12=0$. Описать системой неравенств область, отсекаемую этой плоскостью от параболоида вращения $z=x^2+y^2$. (*Ответ:* $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x+6y+3z-29$.)

7. Записать уравнение $yz''_{yy}+2z'_y=z/x$ в новых переменных $u=x/y$ и $v=x-y$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{u^2(u-1)}{v}z''_{uu}+\right.$ $\left.+2uz''_{uv}+\dfrac{v}{u-1}z''_{vv}-\dfrac{2u(u-1)}{v}z'_u-2z'_v=\dfrac{2(u-1)}{uv}.\right)$

8. Записать в полярных координатах выражение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+$ $+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}.\right)$

9. Найти уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, отсекающей на осях координат равные отрезки. (*Ответ:* $\pm x\pm y\pm z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.)

10. Доказать, что касательная плоскость к поверхности $xyz=a^3$ в любой ее точке образует с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема. Вычислить этот объем. $\left(\textit{Ответ: } V=\dfrac{9}{2}a^3.\right)$

11. Найти стороны треугольника данного периметра $2p$, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема. (*Ответ:* $a=b=3p/4$, $c=p/2$.)

12. На эллипсе $x^2+4y^2=4$ даны две точки $A(-\sqrt{3}, 1/2)$ и $B(1, \sqrt{3}/2)$. Найти на этом эллипсе третью точку C, такую, чтобы треугольник ABC имел наибольшую площадь. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right).\right)$

13. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-9xy+27$. (*Ответ:* $z_{\min}(3, 3)=0$.)

14. Доказать, что $\frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial y \partial z}=\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z \partial x}$, если $u=xz+e^{yz}+y$.

15. Найти условный экстремум функции $u=x+y+z$ при условиях $xyz=8$, $xy/z=8$. (*Ответ:* $x=y=2\sqrt[4]{6}$, $z=\sqrt{2/3}$.)

16. Найти второй дифференциал d^2z в точке $(2, 1, 2)$ для функции, заданной неявно уравнением $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z-4=0$. (*Ответ:* $-31{,}5dx^2+206dxdy-306dy^2$.)

17. Квадратная доска состоит из 2 белых и 2 черных клеток, расположенных в шахматном порядке. Сторона каждой клетки равна единице длины. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски, один из углов которого совпадает с черным углом доски. Площадь S черной части этого прямоугольника является функцией длин его сторон x и y. Записать эту функцию аналитически. (*Ответ:* $S(x, y)=$

$$=\begin{cases} xy, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 1\leqslant y\leqslant 2, \\ y, & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 1+(x-1)(y-1), & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2,\ 1\leqslant y\leqslant 2. \end{cases}\Bigg)$$

18. Касательная плоскость к поверхности $x^2/3+y^2-z^2=-1$ проходит через точки $A(1, 0, 0)$ и $B(1, 1, 0)$. Записать уравнение этой плоскости. (*Ответ:* $x+2z-1=0$ или $x-2z-1=0$.)

11. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ИЗОКЛИН

Уравнение называется *дифференциальным* относительно некоторой искомой функции, если оно содержит хотя бы одну производную этой функции. *Порядок дифференциального уравнения* совпадает (по определению) с порядком наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция y является функцией одного аргумента x, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если же искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*. Например, уравнение $2xy' - 3y = 0$, где $y = y(x)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а $u'_x - u'_y + xy + 1 = 0$, где $u = u(x, y)$,— дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. (В этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому в дальнейшем для краткости слово «обыкновенные» будем опускать.)

В общем случае *дифференциальное уравнение n-го порядка* может быть записано в виде

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \qquad (11.1)$$

Если уравнение (11.1) удается разрешить относительно наивысшей производной, то получаем *уравнение в нормальной форме:*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (11.2)$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения.*

Решением (или *интегралом*) *дифференциального уравнения (11.1)* (или *(11.2)*) называется любая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $(a; b)$ и вместе со своими производными обращающая данное дифференциальное уравнение в тождество. (При этом производные функции $y = y(x)$ предполагаются существующими.)

Пример 1. Доказать, что функция $y = xe^{2x}$, определенная на всей числовой оси, является решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

▶ Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производные $y' = e^{2x}(1 + 2x)$, $y'' = 4e^{2x}(1 + x)$, получим тождество:

$$4e^{2x}(1 + x) - 4e^{2x}(1 + 2x) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1 + x - 1 - 2x + x) \equiv 0. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде: $F(x, y) \equiv \ln \frac{y}{x} - 5 + xy = 0$, обращает дифференциальное уравнение $(x + x^2y)y' = y - xy^2$ в тождество, т. е. является его решением.

▶ Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$ (см. формулу (10.6)), имеем

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\left(y - \frac{1}{x}\right)\Big/\left(x + \frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x}\,\frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{1 - xy^2}{x + x^2y}.$$

Подставив найденную производную y' в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество. ◀

Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде: $F(x, y) = 0$, то $F(x, y) = 0$ называется **интегралом** (**а не решением**) данного дифференциального уравнения. Так, в примерах 1 и 2 имеем соответственно решение и интеграл заданных дифференциальных уравнений.

График решения (или интеграла) дифференциального уравнения (11.1) (или (11.2)) на плоскости Oxy называется *интегральной линией*. Следовательно, каждому решению или интегралу соответствует интегральная линия.

Вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (11.2) разрешает

Теорема 1 (Коши). *Если правая часть уравнения (11.2) является непрерывной функцией в окрестности значений*

$$x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}, \tag{11.3}$$

то уравнение (11.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале $(a;\ b)$, содержащем x_0, такое, что

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{11.4}$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам y, y', ..., $y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ — единственное.

Числа из совокупности (11.3) называются *начальными данными*, а равенства (11.4) — *начальными условиями*.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (11.1) или (11.2), удовлетворяющее начальным данным (11.3), т. е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (11.4).

Любое дифференциальное уравнение (11.2) в области, удовлетворяющей теореме Коши, имеет бесчисленное множество решений. Вообще говоря, это справедливо и для дифференциального уравнения (11.1). Для описания этих множеств решений вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (11.1) или (11.2) называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где $C_i (i = \overline{1, n})$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (11.1) или (11.2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$, такие, что будут выполнены начальные условия $\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_{i0}) = y_0'$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}$.

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_i) = 0$, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно *частным решением* или *частным интегралом дифференциального уравнения*.

Замечание. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i. Такое решение (интеграл) может оказаться *особым* в том смысле, что в любой его точке нарушаются какие-либо условия теоремы Коши. Например, дифференциальное уравнение $y'' = 3\sqrt[3]{(y'-1)^2}$ имеет общее решение $y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Функция $y = x + C$, где C — произвольная постоянная, также является решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2. Кроме того, $y' = 1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы Коши, ибо частная производная правой части данного уравнения по y' при $y' = 1$ разрывна. Следовательно, решение $y = x + C$ является особым. В дальнейшем особые решения, как правило, рассматриваться не будут.

Отметим, что теория неопределенного интеграла по существу является теорией класса простейших дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$, общее решение которых

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$; C — произвольная постоянная.

В общем случае *дифференциальное уравнение первого порядка* может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.5}$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y' = f(x, y). \tag{11.6}$$

Справедлива

Теорема 2 (Коши). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в ее окрестности, то существует решение $y = y(x)$ уравнения (11.6), такое, что $y(x_0) = y_0$. Если непрерывна также частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ данной функции, то это решение единственно.*

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно записывать в так называемой *дифференциальной форме:*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{11.7}$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y = \varphi(x)$ (интеграл $\Phi(x, y) = 0$) дифференциального уравнения (11.5) или (11.6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$ $(\Phi(x_0, y_0) = 0)$. С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения (11.6) состоит в том, что оно в каждой точке $M(x, y)$, принадлежащей области D, в которой выполняются все условия теоремы 2 (Коши), задает направление $y' = \operatorname{tg}\alpha = k$ касательной к единственной интегральной линии уравнения (11.6), проходящей через точку $M(x, y)$, т. е. *поле направлений* в области D (рис. 11.1).

В области D для уравнения (11.6) можно выделить однопараметрическое семейство линий $f(x, y) = k = \text{const}$, каждая из которых называется *изоклиной*. Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, т. е. $y' = k = \text{const}$.

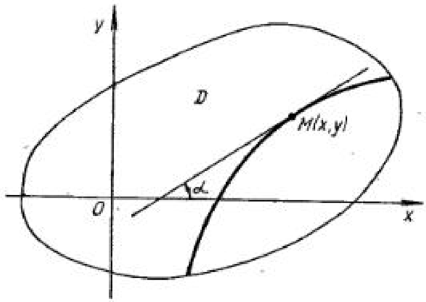


Рис. 11.1

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т. е. графически проинтегрировать это уравнение.

Пример 3. Методом изоклин приближенно построить интегральные линии дифференциального уравнения $y' = -2y/x$.

► Полагая $-2y/x = k$ ($k = \text{const}$), находим изоклины $y = -\frac{k}{2}x$ данного уравнения. Они представляют собой проходящие через начало координат прямые линии, вдоль которых поле направлений определяется равенством $y' = k = \operatorname{tg}\alpha$. Придавая k различные значения, находим соответствующие изоклины, вдоль которых направление поля характеризуется углом α наклона к оси Ox касательной к интегральной линии. Необходимые вычисления запишем в виде таблицы (см. табл. 1).

Таблица 1

k	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 2	± 3	$\pm\infty$
α	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\approx \pm 60°$	$\pm 64°$	$\approx \pm 72°$	$\pm 90°$
$y = -\frac{k}{2}x$	$y = 0$	$y = \pm\frac{x}{2\sqrt{3}}$	$y = \mp\frac{1}{2}x$	$y = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$y = \mp x$	$y = \mp\frac{3}{2}x$	$x = 0$

По данным этой таблицы строим поле направлений (рис. 11.2) и затем приближенно вычерчиваем интегральные линии. Положительное или отрицательное значение угла α указывает на то, что он отсчитывается от оси Ox против хода или по ходу часовой стрелки соответственно. ◄

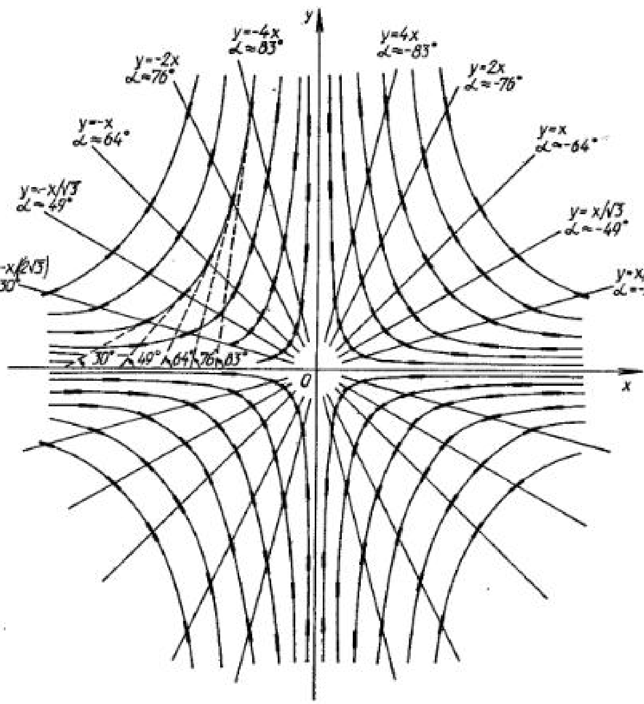


Рис. 11.2

11.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \tag{11.8*}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. Его общим интегралом будет

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C, \tag{11.8}$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \tag{11.9}$$

или

$$y'=\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y), \tag{11.10}$$

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнениям (11.9) или (11.10), называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Разделение переменных в уравнениях (11.9), (11.10) выполняется следующим образом. Предположим, что $N_1(y) \neq 0$, $M_2(x) \neq 0$ и разделим обе части уравнения (11.9) на $N_1(y)M_2(x)$. Обе части уравнения (11.10) умножим на dx и разделим на $f_2(y) \neq 0$. В результате получим уравнения с разделенными переменными (т. е. уравнения вида (11.8*)):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \ f_1(x)dx - \frac{dy}{f_2(y)} = 0,$$

которые интегрируются, согласно формуле (11.10):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \ \int f_1(x)dx - \int \frac{dy}{f_2(y)} = C.$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0. \tag{1}$$

▶ Предположив, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и разделив обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя его, согласно формуле (11.8), последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln |C|$):

$$\int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \ln |C|,$$

$$x + \ln |x| + y + \ln |y| = \ln |C|,$$

$$\ln |xy| + \ln e^{x+y} = \ln |C|, \ xye^{x+y} = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом уравнения (1). При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$. Однако функции $x = 0$ и $y = 0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется; с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C = 0$. Следовательно, $x = 0$, $y = 0$ — частные решения уравнения (1). ◀

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$(1 + e^{2x})y^2y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

▶ Запишем данное уравнение в дифференциальной форме (см. формулу (11.7)):

$$(1 + e^{2x})y^2dy - e^xdx = 0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2dy - \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy - \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx = \frac{C}{3}, \ \frac{y^3}{3} - \operatorname{arctg} e^x = \frac{C}{3},$$

$$y = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Использовав начальное условие, определим значение произвольной постоянной:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi},\ C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}\pi+3\operatorname{arctg} e^x}. \blacktriangleleft$$

Функция $f(x,\ y)$ называется *однородной функцией измерения* α относительно аргументов x и y, если равенство $f(tx,\ ty)=t^\alpha f(x,\ y)$ справедливо для любого $t\in\mathbf{R}$, при котором функция $f(tx,\ ty)$ определена, $\alpha=\text{const}$. Например, функция $f(x,\ y)=3x^4-x^2y^2+5y^4$ является однородной четвертого измерения ($\alpha=4$), так как

$$f(tx,\ ty)=3\cdot(tx)^4-(tx)^2(ty)^2+5\cdot(ty)^4=t^4(3x^4-x^2y^2+5y^4)=t^4f(x,\ y).$$

Функция $f(x,\ y)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^2}$ является однородной измерения $\alpha=2/3$, поскольку

$$f(tx,\ ty)=\sqrt[3]{(tx)^2}-2\sqrt[3]{(tx)(ty)}+4\sqrt[3]{(ty)^2}=\sqrt[3]{t^2}\,(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+$$
$$+4\sqrt[3]{y^2})=t^{2/3}f(x,\ y).$$

Если $\alpha=0$, то функция будет однородной нулевого измерения. Например, $f(x,\ y)=\dfrac{x-y}{x+y}\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)$ — однородная функция нулевого измерения, так как

$$f(tx,\ ty)=\frac{tx-ty}{tx+ty}\ln\left(\frac{(tx)^2}{(ty)^2}+1\right)=$$
$$=\frac{t(x-y)}{t(x+y)}\ln\left(\frac{t^2x^2}{t^2y^2}+1\right)=\frac{x-y}{x+y}\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=f(x,\ y),$$

где $t\neq 0$.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{11.11}$$

называется *однородным* относительно переменных x и y, если $f(x,\ y)$ — однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т. е.

$$f(tx,\ ty)=t^0f(x,\ y)=f(x,\ y). \tag{11.12}$$

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ — однородные функции одного и того же измерения α, т. е. $P(tx,\ ty)=$ $=t^\alpha P(x,\ y)$, $Q(tx,\ ty)=t^\alpha Q(t,\ y)$. Действительно, переписав его в нормальной форме:

$$y'=-\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}=f(x,\ y),$$

легко заключаем, что $f(x,\ y)$ — однородная функция нулевого измерения, поскольку

$$f(tx,\ ty) = -\frac{P(tx,\ ty)}{Q(tx,\ ty)} = -\frac{t^n P(x,\ y)}{t^n Q(x,\ y)} = f(x,\ y).$$

Так как однородное дифференциальное уравнение (11.11) в нормальной форме всегда можно записать в виде $y' = f(x,\ y) = f(tx,\ ty)$, то, положив $t = 1/x$, получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1,\ \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Следовательно, уравнение (11.11) с помощью замены $y = xu$ ($u = y/x$, $y' = u + xu'$) сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $u(x)$:

$$u + xu' = \varphi(u),\ x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

▶ Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ — однородные второго измерения, то данное уравнение — однородное. Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2,\ 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2,\ 2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int\frac{dx}{2x},\ \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C,\ 1 = (1 - u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

В последнее выражение вместо u подставим значение y/x. Получим общий интеграл

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right),\ x = (x - y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Использовав начальное условие $y(1) = 0$, определим значение C:

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C},\ \ln C = 1,\ C = e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = x - \frac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}.\ ◀$$

АЗ-11.1

1. Является ли функция $y(x, C)$, где C — произвольная постоянная, решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

а) $y = x^2(1 + Ce^{1/x})$, $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$;

б) $y = Ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;

в) $x^2 + y^4 = Cy^2$, $xydx = (x^2 - y^4)dy$?

(*Ответ:* а) да; б) нет; в) да.)

2. Методом изоклин построить поле направлений и приближенно начертить интегральные линии каждого дифференциального уравнения:

а) $y' = x + y$; б) $2xy' = y^2/x$; в) $xy' = 1 - y$.

3. Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения:

а) $xy' = y^2 + 1$;

б) $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0$, $y(1) = 1$;

в) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9$;

г) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 0$.

$\Big($*Ответ:* а) $\operatorname{arctg} y = \ln|Cx|$; б) $y - x + \ln|xy| = 0$; в) $y = x - 3x/(C + \ln|x|)$; г) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.$\Big)$

Самостоятельная работа

1. 1. Является ли функция $y = Cx + 1/C$ решением дифференциального уравнения $xy' - y + 1/y = 0$? (*Ответ:* нет.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}\,dx = 0$. $\Big($*Ответ:* $y = \pm\frac{1}{16}(C - \operatorname{arctg} x)^2 - 5$.$\Big)$

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$, $y(2) = \pi$. (*Ответ:* $y = 2x\operatorname{arctg}(x/2)$.)

2. 1. Является ли функция $y = y(x)$, заданная неявно уравнением $e^{y/x} = Cy$, интегралом дифференциального уравнения $xyy' - y^2 = x^2y'$? (*Ответ:* да.)

2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$. (*Ответ:* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln C\sqrt{y}$ $(C > 0)$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0$, $y(1) = 1$. (*Ответ:* $2 - \ln|y| = 2\sqrt{y/x}$.)

3. 1. Является ли функция $y = \frac{2 + Cx}{1 + 2x}$ решением дифференциального уравнения $2(1 + x^2y') = y - xy'$? (*Ответ:* да.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + e^x)y' = ye^x$. (*Ответ:* $y = C(1 + e^x)$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$, $y(1) = e^2$. (*Ответ:* $y = xe^{2x}$.)

11.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{11.13}$$

линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' (а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к виду (11.13)), называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Функции $P(x) \not\equiv 0$ и $Q(x) \not\equiv 0$ должны быть непрерывными в некоторой области, например на отрезке $[a; b]$, для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши существования и единственности решения (см. теорему 2 из § 11.1). Общее решение уравнения (11.13) всегда можно записать в виде

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right), \tag{11.14}$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, общее решение уравнения (11.13) всегда представимо в квадратурах, т. е. выражается через интегралы от известных функций $P(x)$, $Q(x)$. Отметим, что при нахождении интегралов из уравнения (11.14) произвольные постоянные можно считать равными нулю или, что то же самое, считать их включенными в произвольную постоянную C.

Если в уравнении (11.13) $Q(x) \equiv 0$ или $P(x) \equiv 0$, то получим дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, общее решение которых определяется из уравнения (11.14) при $Q(x) \equiv 0$ или $P(x) \equiv 0$ соответственно. В случае, когда $Q(x) \equiv 0$, уравнение (11.13) называют *однородным линейным дифференциальным уравнением*.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$.
Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2) = 2$.

▶ Приведем данное уравнение к виду (11.13), разделив обе его части на $x^2 - x \neq 0$. Получим

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x - 1)}{x^2 - x}.$$

Здесь

$$P(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)},\ Q(x)=\frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}=\frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Общее решение исходного уравнения в соответствии с формулой (11.14) имеет вид

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx+C\right). \tag{11.15}$$

Найдем входящие в это решение интегралы. Имеем:

$$\int\frac{dx}{x(x-1)}=\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\ A=-1,\ B=1\right|=\int\left(-\frac{1}{x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$
$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\pm\int(2x-1)dx=$$
$$=\pm(x^2-x),$$

где знаки «+» и «—» появляются в силу равенства $\left|\frac{x-1}{x}\right|=\pm\frac{x-1}{x}$. Подставляя найденные интегралы в решение (11.15), окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$$y=e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2-x)+C)=\left|\frac{x}{x-1}\right|(\pm(x^2-x)+C)=$$
$$=\pm\frac{x}{x-1}(\pm x(x-1)+C)=x^2+\frac{Cx}{x-1}.$$

Из него выделяем частное решение, соответствующее начальному условию $y(-2)=2$:

$$2=4-\frac{2C}{-2-1},\ C=-3,\ y=x^2-\frac{3x}{x-1}.\ ◀$$

Полезно иметь в виду, что иногда дифференциальное уравнение является линейным относительно x как функции y, т. е. может быть приведено к виду

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y). \tag{11.16}$$

Его общее решение находится по формуле

$$x=e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+C\right). \tag{11.17}$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(2x-y^2)y'=2y$, $y'=\frac{dy}{dx}$.

▶ Данное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$. Действительно,

$$(2x-y^2)\frac{dy}{dx}=2y,\ 2x-y^2=2y\frac{dx}{dy},\ \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{y}{2},$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-\frac{y}{2},\ p(y)=-\frac{1}{y},\ q(y)=-\frac{y}{2},$$

т. е. получили уравнение вида (11.16). Согласно формуле (11.17), общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x=e^{\int\frac{dy}{y}}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\int\frac{dy}{y}}dy+C\right)=e^{\ln|y|}\left(-\int\frac{y}{2}e^{-\ln|y|}dy+C\right)=$$

$$=|y|\left(-\frac{1}{2}\int\frac{y}{|y|}dy+C\right)=-\frac{y}{2}\int dy+Cy=Cy-\frac{1}{2}y^2. \blacktriangleleft$$

Отметим, что линейное дифференциальное уравнение (11.13) можно также проинтегрировать *методом Бернулли*, суть которого заключается в следующем. Введем две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ по формуле $y=u(x)v(x)$ *(подстановка Бернулли)*. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставив выражения для y и y' в уравнение (11.13), получим уравнение $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$, которое преобразуем к виду

$$(v'+P(x)v)u+u'v=Q(x). \tag{11.18}$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций, например v, может быть выбрана достаточно произвольно (поскольку только произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению (11.13)), выбираем в качестве v любое частное решение $v=v(x)$ уравнения $v'+P(x)v=0$, обращающее в нуль коэффициент перед u в уравнении (11.18)). После этого уравнение (11.18) превращается в уравнение $u'v=Q(x)$. Найдя общее решение $u=u(x,\ C)$ последнего уравнения, придем к общему решению уравнения (11.13): $y=u(x,\ C)v(x)$. Таким образом, интегрирование уравнения (11.13) сводится к интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y'+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$$

методом Бернулли и решить задачу Коши при начальном условии $y(\pi)=1$.

▶ Сделав подстановку Бернулли $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, получим:

$$u'v+uv'+uv\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x},\ (v'+v\operatorname{tg}x)u+u'v=\frac{1}{\cos x}.$$

Находим частное решение уравнения $v'+v\operatorname{tg}x=0$:

$$dv+v\operatorname{tg}x\,dx=0,\ \frac{dv}{v}+\operatorname{tg}x\,dx=0,$$

$$\int\frac{dv}{v}+\int\operatorname{tg}x\,dx=0,\ \ln|v|-\ln|\cos x|=\ln C_1.$$

Полагая $C_1=1$, выбираем частное решение $v=\cos x$. Далее ищем общее решение уравнения $u'v=1/\cos x$, где $v=\cos x$. Имеем:

$$u'=\frac{1}{\cos^2 x},\ u=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C=\operatorname{tg}x+C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y=uv=(\operatorname{tg}x+C)\cos x.$$

Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi)=1$: $1=(0+C)(-1)$, откуда $C=-1$. Подставляя значение $C=-1$ в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y=(\operatorname{tg} x-1)\cos x=\sin x-\cos x. \blacktriangleleft$$

Дифференциальное уравнение

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}, \qquad (11.19)$$

где $\alpha=\text{const}\in\mathbf{R}$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к уравнению (11.19), называется *уравнением Бернулли*.

Путем введения новой функции $z(x)$ по формуле $z=y^{1-\alpha}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению относительно этой функции:

$$z'+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x). \qquad (11.20)$$

Решив уравнение (11.20) одним из описанных выше методов, найдем $z=z(x, C)$, а затем и $y=z^{1/(1-\alpha)}$.

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение (11.13), можно решить с помощью подстановки Бернулли $y=u(x)v(x)$ (см. пример 3).

Пример 4. Найти общее решение уравнения Бернулли $y'+2e^xy=2e^x\sqrt{y}$.

▶ Так как для данного уравнения $\alpha=1/2$, можно сделать замену $z=y^{1-\alpha}=\sqrt{y}$. Согласно уравнению (11.20), получим уравнение $z'+e^xz=e^x$, общее решение которого в соответствии с формулой (11.14) имеет вид

$$\begin{aligned} z&=e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x e^{\int e^x dx}dx+C\right)=\\ &=e^{-e^x}\left(\int e^xe^{e^x}dx+C\right)=e^{-e^x}\left(\int e^{e^x}de^x+C\right)=\\ &=e^{-e^x}(e^{e^x}+C)=1+Ce^{-e^x}. \end{aligned}$$

Общее решение исходного уравнения

$$y=z^2=(1+Ce^{-e^x})^2. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $xy'+y=xy^2\ln x$.

▶ Разделив обе части данного уравнения на $x\neq 0$, получим уравнение Бернулли с $\alpha=2$. Решим его методом подстановки Бернулли ($y=uv$, $y'=u'v+uv'$):

$$x(u'v+uv')+uv=x(uv)^2\ln x.$$

Легко получаем частное решение $v=x^{-1}$ уравнения $xv'+v=0$. Теперь необходимо найти общее решение уравнения $xvu'=xu^2v^2\ln x$, где $v=x^{-1}$, т. е. уравнения $u'=u^2\dfrac{\ln x}{x}$. Разделяем переменные в последнем уравнении и интегрируем его:

$$\frac{du}{u^2}=\ln x\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{u^2}=\int\ln x\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}=\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{C}{2}, \quad u=-\frac{2}{C+\ln^2 x}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = uv = -\frac{2}{x(C+\ln^2 x)}. \blacktriangleleft$$

АЗ-11.2

1. Указать типы дифференциальных уравнений и методы их решения:

а) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$; б) $y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$;

в) $y' = \frac{y}{2x\ln y + y - x}$; г) $(1+e^{2x})y^2dy - e^x dx = 0$;

д) $y' = e^{2x} - e^x y$; е) $xy' + y - y^2 = 0$;

ж) $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$;

з) $y^2 + x^2y' = xyy'$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y' + \frac{y}{x} = 1 + 2\ln x$; б) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

(*Ответ:* а) $y = x\ln x + C/x$; б) $y = \pm e^{-x^2}(C + x^2/2)$.)

3. Решить задачу Коши:

а) $2xydx + (y - x^2)dy = 0$, $y(-2) = 4$;

б) $y' = 2y - x + e^x$, $y(0) = -1$.

$\left(\right.$*Ответ:* а) $x^2 - y\ln(4e/y)$; б) $y = \frac{1}{2}x - e^x + \frac{1}{4}(1 - e^{2x})$.$\left.\right)$

Самостоятельная работа

Решить задачу Коши.

1. а) $y' + 3y = e^{2x}y^2$, $y(0) = 1$;

б) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 1/\cos x$, $y(\pi) = 5$.

(*Ответ:* а) $y = e^{-2x}$; б) $y = -5\cos x + \sin x$.)

2. а) $y^2dx = (x + ye^{-1/y})dy$, $y(0) = -3$;

б) $y' - 7y = e^{3x}y^2$, $y(0) = 2$.

(*Ответ:* а) $x = e^{-1/y}(3 + y)$; б) $y = 10e^{7x}/(e^{10x} - 6)$.)

3. а) $xdy = (e^{-x} - y)dx$, $y(1) = 1$;

б) $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}$, $y(1) = -2$.

$\left(\right.$*Ответ:* а) $y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^x}\right)$; б) $y = \frac{x-3}{2-x}$.$\left.\right)$

11.4. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (11.21)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если в области D определения функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и существования решений уравнения (11.21) выполняется равенство

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{11.22}$$

Общий интеграл уравнения (11.21) определяется одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C, \tag{11.23}$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C, \tag{11.24}$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$.

▶ Введем обозначения $P = x^2 + y - 4$, $Q = x + y + e^y$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, т. е. условие (11.22) выполнено, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл можно найти по формуле (11.23) или (11.24), положив для простоты $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Выбор этих значений x_0, y_0 допустим, так как функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные определены, т. е. точка $M_0(0, 0) \in D$. По формуле (11.23) имеем

$$\int_0^x (x^2 + 0 - 4)dx + \int_0^y (x + y + e^y)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C.$$

По формуле (11.24) получаем общий интеграл:

$$\int_0^x (x^2 + y - 4)dx + \int_0^y (0 + y + e^y)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

который совпадает с уже найденным. ◀

АЗ-11.3

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

а) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$;

б) $(2x + e^{x/y})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0$;

в) $y' = (y - 3x^2)/(4y - x)$.

(*Ответ:* а) $e^x + e^y + xy + x\sin y = C$; б) $x^2 + ye^{x/y} = C$; в) $x^3 - xy + 2y^2 = C$.)

2. Решить задачу Коши:

а) $e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0,\ y(-3) = 0;$

б) $xdx + ydy = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2),\ y(1) = 1;$

в) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0,\ y(0) = 4.$

$\left(\textit{Ответ:}\right.$ а) $xe^{-y} + y^2 + 3 = 0$; б) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = 1 + \frac{\pi}{4}$; в) $\left. x^2 + y^2 + 2ye^x = 24.\right)$

3. Найти уравнение линии, проходящей через точку $A(2,\ 4)$, зная, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке M в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку M с началом координат. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2}x^3.\right)$

4. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100 до 60 °С за 20 мин. Температура воздуха 25 °С. Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до 30 °С? (*Ответ:* 71 мин.)

Самостоятельная работа

1. 1. Решить задачу Коши: $(2x + y + 3x^2 \sin y)dx + (x + x^3 \cos y + 2y)dy = 0$; $y(0) = 2$. $\left(\textit{Ответ: } x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x^3 \sin y = 2.\right)$

2. С высоты падает тело массой m с начальной скоростью $v(0) = 0$. Найти скорость тела $v = v(t)$ в любой момент времени t, если на него, кроме силы тяжести $P = mg$, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости $v(t)$, с коэффициентом пропорциональности, равным 3/2. $\left(\textit{Ответ: } v = \frac{2}{3}mg\left(1 - e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{m}}\right).\right)$

2. 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$. (*Ответ:* $x^3y - \cos x - \sin y = C$.)

2. Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Вычислить, через сколько

лет от 1 кг радия останется 650 г, если известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества. (*Ответ:* через 1000 лет.)

3. 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $\left(2x\ln y+\frac{y^2}{\cos^2 x}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+\operatorname{tg}x+e^y\right)dy=$ $=0$, $y(0)=1$. $\left(\textit{Ответ: } x^2\ln y+y\operatorname{tg}x+e^y=e.\right)$

2. Записать уравнение линии, проходящей через точку $A(1,\ 0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси Oy, равен расстоянию от точки касания до начала координат. $\left(\textit{Ответ: } y=\frac{1}{2}(1-x^2).\right)$

11.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

I. Общее решение уравнения вида

$$y^{(n)}=f(x) \tag{11.25}$$

находим методом n-кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n-1)}=\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx=\varphi_1(x)+\tilde{C}_1. \tag{11.26}$$

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению $(n-2)$-го порядка:

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx=\int(\varphi_1(x)+\tilde{C}_1)dx=\int\varphi_1(x)dx+\int\tilde{C}_1dx=$$
$$=\varphi_2(x)+\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2. \tag{11.27}$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения (11.25):

$$y=\varphi_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n, \tag{11.28}$$

где $C_i(i=\overline{1,\ n})$ — произвольные постоянные, связанные определенным образом с произвольными постоянными $\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2,\ \ldots,\ \tilde{C}_n$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}=8/(x-3)^5.$$

▶ Согласно формуле (11.26) и правилам интегрирования, имеем

$$y'''=\int y^{IV}dx=\int\frac{8dx}{(x-3)^5}=-\frac{2}{(x-3)^4}+\tilde{C}_1.$$

Далее в соответствии с решением (11.27) находим

$$y''=\int y'''dx=\int\left(-\frac{2}{(x-3)^4}+\tilde{C}_1\right)dx=\frac{2}{3(x-3)^3}+\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2.$$

Проинтегрировав последнее равенство еще два раза, получим общее решение исходного уравнения (1):

$$y' = \int y''dx = \int\left(\frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2\right)dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + $$
$$+ \frac{1}{2}\tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2x + \tilde{C}_3,$$

$$y = \int y'dx = \int\left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2}\tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2x + \tilde{C}_3\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{6}\tilde{C}_1x^3 + \frac{1}{2}\tilde{C}_2x^2 + \tilde{C}_3x + \tilde{C}_4 = \frac{1}{3(x-3)} +$$
$$+ C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4. \blacktriangleleft$$

II. Пусть дифференциальное уравнение n-го порядка не содержит искомой функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно $(1 \leqslant k \leqslant n)$:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (11.29)$$

Вводя новую неизвестную функцию $z(x)$ по формуле $z = y^{(k)}$ и учитывая, что $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, приходим к уравнению $(n-k)$-го порядка относительно функции $z(x)$:

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0, \quad (11.30)$$

т. е. понижаем порядок уравнения (11.29) на k. Если удастся отыскать общее решение уравнения (11.30) в виде $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, получим дифференциальное уравнение

$$z = y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

вида (11.25), решение которого находят k-кратным интегрированием. В частности, если $n = 2$, $k = 1$, то уравнение (11.30) — первого порядка.

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}, \ y(1) = e, \ y'(1) = e^2.$$

▶ Данное уравнение является уравнением II типа ($n = 2$, $k = 1$), т. е. не содержит y. Понизим порядок этого уравнения на 1, положив $z = y'$. Тогда $y'' = z'$, и исходное уравнение превращается в однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомой функции z:

$$xz' = z \ln(z/x). \quad (1)$$

Решаем его известным образом. Делаем подстановку $z = xu(x)$. Тогда $z' = u + xu'$, и уравнение (1) принимает вид

$$u + xu' = u \ln u. \quad (2)$$

Разделяя переменные в уравнении (2) и интегрируя, последовательно находим:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \ \ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1,$$
$$\ln u - 1 = C_1x, \ u = e^{1+C_1x}, \ z = xe^{1+C_1x}.$$

Так как $z=y'$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, которое решается однократным интегрированием:

$$y'=xe^{1+C_1x},\ y=\int xe^{1+C_1x}dx=\frac{1}{C_1}\int xd(e^{1+C_1x})=$$
$$=\frac{1}{C_1}\left(xe^{1+C_1x}-\int e^{1+C_1x}dx\right)=\frac{C_1x-1}{C_1^2}e^{1+C_1x}+C_2.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Определяем значения произвольных постоянных C_1 и C_2, используя начальные условия $y(1)=e$, $y'(1)=e^2$. Получаем систему уравнений

$$e=\frac{C_1-1}{C_1^2}e^{1+C_1}+C_2,\ e^2=e^{1+C_1},$$

из которой легко находим, что $C_1=1$, $C_2=e$.

Следовательно, частное решение исходного уравнения определяется формулой

$$y=(x-1)e^{1+x}+e. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'''\operatorname{ctg}x+y''=2$.

▶ Данное уравнение является уравнением II типа, где $n=3$, $k=2$. Вводим новую функцию $z=y''$ и получаем из исходного уравнения линейное уравнение $z'\operatorname{ctg}x+z=2$, которое записываем в виде

$$z'+z\operatorname{tg}x=2\operatorname{tg}x.$$

Его общее решение (см. § 11.2)

$$z=e^{-\int\operatorname{tg}x\,dx}\left(\int 2\operatorname{tg}xe^{\int\operatorname{tg}x\,dx}dx+C_1\right)=e^{\ln|\cos x|}\times$$
$$\times\left(2\int\operatorname{tg}xe^{-\ln|\cos x|}dx+C_1\right)=|\cos x|\left(2\int\frac{\operatorname{tg}x}{|\cos x|}dx+C_1\right)=$$
$$=2\cos x\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx+C_1\cos x=2\cos x\frac{1}{\cos x}+C_1\cos x=$$
$$=2+C_1\cos x.$$

Так как $z=y''$, то приходим к дифференциальному уравнению I типа, которое легко решается:

$$y''=2+C_1\cos x,\ y'=\int(2+C_1\cos x)dx=2x+C_1\sin x+C_2,$$
$$y=\int(2x+C_1\sin x+C_2)dx=x^2-C_1\cos x+C_2x+C_3. \blacktriangleleft$$

III. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка, не содержащее явно аргумент x:

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \qquad (11.31)$$

В этом случае порядок уравнения всегда можно понизить на единицу, введя новую функцию $p(y)=y'$, где y рассматривается как ее аргумент. Для этого y', y'', ..., $y^{(n)}$ нужно выразить через производные новой функции по аргументу y. Использовав правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'=\frac{dy}{dx}=p,\ y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}, \qquad (11.32)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + $$
$$+ p\frac{d^2p}{dxdy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

и т. д. Из проведенных вычислений ясно, что $y^{(k)}$ выражается через производные функции p и y, порядок которых не превышает $k-1$. В итоге вместо уравнения (11.31) получаем уравнение вида

$$\Phi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \frac{d^2p}{dy^2},\ \ldots,\ \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{n-1}}\right) = 0. \tag{11.33}$$

Если уравнение (11.33) имеет общее решение

$$p = \varphi(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}),$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, то для нахождения общего интеграла уравнения (11.31) остается разделить переменные в последнем уравнении и решить его:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1})} = \int dx,\ \Psi(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}) = x + C_n.$$

Если в уравнении (11.31) $n = 2$, то уравнение (11.33) — первого порядка.

Пример 4. Решить задачу Коши $y^3y'y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt[3]{3/2}$.

▶ Данное уравнение является уравнением III типа, так как не содержит явно аргумент x и $n = 2$. Поэтому, согласно формулам (11.32), путем замены $p(y) = y'$ его можно понизить на единицу и получить уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое легко решается. Имеем:

$$y^3p^2\frac{dp}{dy} + 1 = 0,\ p^2dp = -y^{-3}dy,\ \int p^2dp = -\int y^{-3}dy,$$

$$\frac{p^3}{3} = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + C_1,\ p = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{1}{y^2} + 3C_1}.$$

С учетом того, что $p = y' = \frac{dy}{dx}$, последнее уравнение перепишем в виде

$$y' = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{1}{y^2} + 3C_1}. \tag{1}$$

Прежде чем решить его, определим значение произвольной постоянной C_1, воспользовавшись начальными условиями. Подставив их в уравнение (1), получим:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + 3C_1},\ C_1 = 0.$$

Итак, пришли к уравнению $y' = \left(\frac{3}{2}y^2\right)^{1/3}$, которое легко решается путем разделения переменных:

$$dy=\left(\frac{3}{2}y^2\right)^{1/3}dx,\quad \frac{dy}{\left(\frac{3}{2}y^2\right)^{1/3}}=dx,$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\int y^{-2/3}dy=\int dx,$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot 3y^{1/3}=x+C_2,\quad y=\frac{(x+C_2)^3}{18}.$$

Из начального условия $y(1)=1$ находим C_2:

$$1=(1+C_2)^3/18,\quad C_2=\sqrt[3]{18}-1.$$

Следовательно, искомое частное решение определяется формулой

$$y=\frac{1}{18}(x+\sqrt[3]{18}-1)^3. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Решить задачу Коши $y'''-(y'')^2/y'=6(y')^2y$, $y(2)=0$, $y'(2)=1$, $y'''(2)=0$.

▶ Имеем уравнение вида (11.31), где $n=3$. Вводя новую функцию $p(y)$ в соответствии с равенствами (11.32), последовательно находим:

$$p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2-\left(p\frac{dp}{dy}\right)^2\Big/p=6p^2y,$$

$$p^2\left(\frac{d^2p}{dy^2}-6y\right)=0\ (p\neq 0),$$

откуда $\frac{d^2p}{dy^2}=6y$. Это уравнение I типа, оно легко решается двукратным интегрированием:

$$\frac{dp}{dy}=\int 6y\,dy=3y^2+C_1,\quad p=\int(3y^2+C_1)dy=y^3+C_1y+C_2.$$

Получили уравнение $y'=y^3+C_1y+C_2$, для которого с учетом начальных условий и связей $y'(2)=p(0)=1$, $y''(2)=p(0)\frac{dp(0)}{dy}=0$ находим: $C_1=0$, $C_2=1$.

Теперь проинтегрируем уравнение $y'=y^3+1$:

$$\frac{dy}{dx}=y^3+1,\quad \frac{dy}{y^3+1}=dx,\quad \int\frac{dy}{y^3+1}=\int dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\frac{|y+1|}{\sqrt{y^2-y+1}}=x+C_3.$$

Используя начальное условие $y(2)=0$, получаем, что $C_3=-2-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Следовательно, искомое частное решение

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\frac{|y+1|}{\sqrt{y^2-y+1}}+2+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

АЗ-11.4

1. Проинтегрировать следующие уравнения:
а) $y''' = x^2 - \sin x$; б) $y^{V} = y'''/x$;
в) $yy'' = y'^2$.

2. Решить задачу Коши:

а) $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$;

б) $xy''' - y'' = x^2 + 1$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$, $y''(-1) = 0$;

в) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. Автомобиль движется по горизонтальному участку пути со скоростью $v = 90$ км/ч. В некоторый момент времени он начинает тормозить. Сила торможения равна 0,3 от веса автомобиля. В течение какого промежутка времени он будет двигаться от начала торможения до остановки и какой путь пройдет за это время (какова длина тормозного пути)? (*Ответ:* 8,5 с; 106,3 м.)

Самостоятельная работа

1. 1. Проинтегрировать уравнение $x^2y''' = y''^2$.

2. Решить задачу Коши $2y'^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. 1. Проинтегрировать уравнение $xy'' - y' = x^2e^x$.

2. Решить задачу Коши $y^3y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

3. 1. Проинтегрировать уравнение $xy'' + y' = y'^2$.

2. Решить задачу Коши $2y'' = 3y^2$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

11.6. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Общий случай. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (11.34)$$

где $a_i(x)\ (i = \overline{1, n})$, $f(x)$ — заданные в некоторой области D функции, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка*. Если правая часть уравнения (11.34) $f(x) = 0$ в области D, то получаем уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (11.35)$$

называемое *линейным однородным дифференциальным уравнением*, соответствующим уравнению (11.34).

Если $a_i(x)$, $f(x)$ непрерывны в области D, которая представляет собой интервал $(a; b)$, то верна теорема Коши существования и единственности решения любых уравнений вида (11.34), (11.35) (см. теорему 1 из § 11.1) для начальных условий

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ x_0\in(a;\ b),$$

где $y_0,\ y'_0,\ \dots,\ y_0^{(n-1)}$ — любые числа.

При отыскании общего и частного решений уравнений (11.34) и (11.35) важную роль играет понятие линейной зависимости и линейной независимости функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$.

Функции $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ называются *линейно зависимыми* в интервале $(a;\ b)$, если существуют постоянные числа $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_n$, не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i y_i(x)=0$ для любых $x\in(a;\ b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда все $\mu_i=0$, то функции $y_i(x)$ называются *линейно независимыми* в интервале $(a;\ b)$.

Определителем Вронского (или *вронскианом*) называется определитель вида

$$W(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (11.36)$$

Критерий линейной зависимости и линейной независимости функций. *Если функции $y_i(x)\,(i=\overline{1,\ n})$ класса $C^{(n-1)}$ в интервале $(a;\ b)$ (т. е. функции, имеющие в $(\alpha,\ b)$ непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно) линейно зависимы, то $W\equiv 0$ в $(a;\ b)$. Если $W\not\equiv 0$, то функции $y_i(x)$ линейно независимы.*

Например, для функций $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1}$ $W\neq 0$, поэтому они линейно независимы.

Совокупность n линейно независимых решений $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$ уравнения (11.35) называется *фундаментальной системой решений*. С ее помощью строится общее решение однородного уравнения (11.35). Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ — любая фундаментальная система решений уравнения (11.35), то функция*

$$\tilde{y}=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x), \qquad (11.37)$$

где C_i — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (11.35).

Пример 1. Показать, что система функций $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$ является фундаментальной для уравнения $y'''-2y''-y'+2y=0$, и записать его общее решение.

▶ Подстановка функций $y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ y_3=e^{2x}$ и их производных в исходное уравнение показывает, что они являются его решениями. Их вронскиан имеет вид (11.36):

$$W(e^x,\ e^{-x},\ e^{2x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}=e^xe^{-x}e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-6e^{2x}\neq 0.$$

Следовательно, $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений исходного уравнения. Его общее решение, согласно формуле (11.37), имеет вид

$$\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.\ ◀$$

Теорема 2 (о структуре общего решения уравнения 11.34). *Общее решение линейного неоднородного уравнения (11.34) имеет вид* $y = \tilde{y} + y^*$, *где* $\tilde{y}$ *— общее решение (вида (11.37)) соответствующего ему однородного уравнения (11.35), а* y^* *— одно из частных решений уравнения (11.34).*

Пример 2. Записать общее решение уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$, если одним из его частных решений является функция $y^* = x + 1$.

▶ Так как общее решение $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения найдено в примере 1, то общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + x + 1. \blacktriangleleft$$

Если известна фундаментальная система решений уравнения (11.35), то частное решение y^* уравнения (11.34) в любом случае можно найти *методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа)*, согласно которому y^* всегда представимо в виде

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \tag{11.38}$$

где $y_i(x)$ образуют фундаментальную систему уравнения (11.35), а неизвестные функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\left.\begin{array}{l} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = 0, \end{array}\right\} \tag{11.39}$$

которая является линейной системой алгебраических уравнений относительно n неизвестных C_i'. Определитель системы является определителем Вронского (см. формулу (11.36)), который в случае фундаментальной системы решений $y_i(x)$ отличен от нуля. Поэтому система (11.39) имеет единственное решение $C_i' = \varphi_i(x)$. Интегрируя последние равенства, являющиеся дифференциальными уравнениями первого порядка, находим $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$.

Следовательно, частное решение y^* уравнения (11.34) имеет вид

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(x)dx. \tag{11.40}$$

Замечание 1. При нахождении интегралов в формуле (11..40) появляются n произвольных постоянных. Их можно считать равными нулю.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}. \tag{1}$$

▶ Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), известно:

$$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$$

(см. пример 1). Чтобы получить общее решение уравнения (1), найдем его частное решение y^* методом Лагранжа. Согласно формуле (11.38),

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}$$

Система (11.39) в нашем случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'e^{2x} &= 0, \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'e^{2x} &= 0, \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 4C_3'e^{2x} &= e/(e^x+1). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ее определитель $W = -6e^{2x} \neq 0$ (см. пример 1). Решая систему (2) по формулам Крамера, находим:

$$C_1' = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^x+1}, \quad C_2' = \frac{1}{6}\frac{e^{3x}}{e^x+1}, \quad C_3' = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x+1}. \qquad (3)$$

Интегрируя выражения (3), получаем (см. замечание 1):

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x+1),$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int\frac{e^{3x}dx}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\frac{e^{2x}d(e^x)}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)de^x =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}(x - \ln(e^x+1)).$$

Записываем частное решение уравнения (1):

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x\ln(e^x+1) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(e^x+1)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}e^{2x}(x - \ln(e^x+1)) = \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} +$$

$$+ \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln(e^x+1).$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{12}(4xe^{2x} + e^x - 2) +$$

$$+ \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x})\ln(e^x+1). ◀$$

Замечание 2. Метода для нахождения фундаментальной системы решений уравнения (11.35) не существует. Поэтому в общем случае невозможно найти частное решение y^* уравнения (11.34) и, следовательно, его общее решение. Других методов решения уравнения (11.34) также не существует. Только в частном случае, когда в уравнении (11.34) все коэффициенты $a_i(x)$ являются постоянными числами, существует метод нахождения фундаментальной системы решений и общего решения уравнения (11.34).

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Положим в уравнениях (11.34) и (11.35) $a_i(x) = p_i = \text{const}$, $p_i \in \mathbf{R}$. Тогда соответственно имеем:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x), \qquad (11.41)$$

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = 0. \qquad (11.42)$$

Фундаментальную систему решений уравнения (11.42) можно найти, используя только алгебраические методы, следующим образом. Исходя из уравнения (11.42), составляем алгебраическое уравнение

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0, \tag{11.43}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (11.42). Оно имеет n корней, среди которых могут быть действительные простые и кратные корни, а также пары комплексно-сопряженных корней (простых и кратных).

Если все корни λ_i характеристического уравнения (11.43) — простые и действительные, то получаем следующую фундаментальную систему решений уравнения (11.42):

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x}. \tag{11.44}$$

Известно, что каждому действительному корню λ кратности k характеристического уравнения (11.43) соответствует ровно k линейно независимых решений уравнения (11.42) вида

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}. \tag{11.45}$$

Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm \beta_i$ кратности m характеристического уравнения (11.43) соответствует ровно $2m$ линейно независимых решений уравнения (11.42) вида

$$\begin{array}{ll} \tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, & \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ \tilde{y}_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \tilde{y}_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\ \tilde{y}_5 = x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, & \tilde{y}_6 = x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{y}_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, & \tilde{y}_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array} \tag{11.46}$$

Обобщая проведенные рассуждения, получаем, что n корням характеристического уравнения (11.43) соответствует ровно n линейно независимых решений однородного уравнения (11.42), образующих фундаментальную систему решений, линейная комбинация которых с произвольными коэффициентами дает общее решение уравнения (11.42) в соответствии с формулой (11.37).

Пример 4. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{IV} - 16y = 0.$$

▶ Составляем характеристическое уравнение для данного уравнения и находим его корни: $\lambda^4 - 16 = 0$, $(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$, $\lambda^2 = 4$, $\lambda_{1,2} = \pm 2$, $\lambda^2 = -4$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Получили четыре простых корня: два действительных и два комплексно-сопряженных ($\alpha = 0$, $\beta = 2$). С учетом частных решений (11.44) — (11.46) получаем фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x,\ y_4 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x.$$

На основании формулы (11.37) общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$$ ◀

Если в уравнении (11.42) $n = 2$, то получаем *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0. \tag{11.47}$$

Корни его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p^2 = 0 \qquad (11.48)$$

могут быть:

1) действительными и различными: $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) действительными и равными: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;

3) комплексно-сопряженными: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Им соответствуют следующие фундаментальные системы решений и общие решения уравнения (11.47):

1) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, $\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2) $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$; $\bar{y} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$;

3) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$; $\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Пример 5. Найти общие решения следующих уравнений:

а) $y'' - 15y' + 26y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

▶ Для каждого случая составляем характеристическое уравнение, находим его корни, фундаментальную систему решений и общее решение:

а) $\lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 13$;

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{13x};$$

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x};$$

б) $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$;

$$y_1 = e^{-3x},\ y_2 = xe^{-3x};$$

$$\bar{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x);$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$;

$$y_1 = e^x\cos 3x,\ y_2 = e^x\sin 3x;$$

$$\bar{y} = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \ ◀$$

Таким образом, для того чтобы решить линейное уравнение с постоянными коэффициентами, необходимо:

1) найти его фундаментальную систему решений;

2) составить общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения (11.42);

3) по методу Лагранжа найти частное решение y^* уравнения (11.41);

4) по формуле $y = \bar{y} + y^*$ получить общее решение y уравнения (11.41).

В различных инженерных приложениях правая часть $f(x)$ уравнения (11.41) во многих случаях имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{ax}(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx), \qquad (11.49)$$

где $P_r(x)$, $Q_s(x)$ — многочлены степени r и s соответственно; a, b - некоторые постоянные числа. Частными случаями функции $f(x)$ являются:

$$f(x) = P_r(x)e^{ax}\ (b = 0); \qquad (11.50)$$

$$f(x) = P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx\ (a = 0); \qquad (11.51)$$

$$f(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)\ (A = \text{const},\ B = \text{const}); \qquad (11.52)$$

$$f(x) = A\cos bx + B\sin bx\ (a = 0,\ P_r(x) = A,\ Q_s(x) = B); \qquad (11.53)$$

$$f(x) = P_r(x)\ (a = 0,\ b = 0). \qquad (11.54)$$

Доказано, что во всех этих случаях, а также в общем случае (см. формулу (11.49)), частное решение y^* уравнения (11.41) имеет аналогичную этим правым частям структуру. Для общего случая функции $f(x)$

$$y^* = x^k e^{ax}(\tilde{P}_m(x)\cos bx + \tilde{Q}_m(x)\sin bx), \tag{11.55}$$

где $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_m(x)$ — многочлены степени $m = \max\{r, s\}$; k равно числу корней характеристического уравнения (11.43), совпадающему с числом $z = a + bi$. Таким образом, $k = 0$, если среди корней $\lambda_l (l = \overline{1, n})$ нет числа z; $k = 1$, если существует один корень, совпадающий с z; $k = 2$, если существует двукратный корень, совпадающий с z, и т. д. Следовательно, согласно формуле (11.55), сразу можно определить структуру частного решения y^*, в котором неизвестными являются только коэффициенты многочленов $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$. Подставляя решение y^* и его производные в уравнение (11.41) и приравнивая коэффициенты подобных членов слева и справа, получаем необходимое количество линейных алгебраических уравнений для вычисления этих неизвестных коэффициентов. Такой способ нахождения коэффициентов и, тем самым, y^* называется *методом неопределенных коэффициентов*. Следовательно, зная структуру y^* (см. формулу (11.55)), можно найти частное решение с помощью элементарных операций, таких, как дифференцирование и решение систем линейных алгебраических уравнений, не применяя операцию интегрирования, возникающую при решении уравнения методом Лагранжа.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - 3y'' = 9x^2. \tag{1}$$

▶ Составляем характеристическое уравнение, находим его корни, фундаментальную систему решений и общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения:

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 = 0,\ \lambda^2(\lambda^2 - 3) = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3};$$
$$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = xe^{0x} = x,\ y_3 = e^{\sqrt{3}x},\ y_4 = e^{-\sqrt{3}x};$$
$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x}.$$

В уравнении (1) правая часть — специальная, относящаяся к частному случаю (11.54), поэтому $z = 0$. Двукратный корень характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ совпадает с $z = 0$, откуда следует, что $k = 2$. Частное решение y^*, согласно формуле (11.55), имеет вид

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C),$$

так как правая часть уравнения (1) является многочленом второй степени. Подставляя $y^{*''}$ и y^{*IV} в уравнение (1), мы получим тождество (y^* — решение уравнения (1)). Здесь и далее для удобства вычислений будем выписывать выражения для y^*, $y^{*'}$, $y^{*''}$, $y^{*'''}$, y^{*IV}, ... в отдельные строки и слева за вертикальной чертой помещать коэффициенты, стоящие перед ними в уравнении. Умножая эти выражения на коэффициенты, складывая и приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{array}{r|l} 0 & y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \\ 0 & y^{*\prime} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ -3 & y^{*\prime\prime} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ 0 & y^{*\prime\prime\prime} = 24Ax + 6B, \\ 1 & y^{*IV} = 24A, \end{array}$$

$$y^{*IV} - 3y^{*\prime\prime} = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A \equiv 9x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, получаем систему алгебраических уравнений для определения A, B, C:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & -36A = 9, \\ x^1 & -18B = 0, \\ x^0 & -6C + 24A = 0, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1/4$, $B = 0$, $C = -1$. Следовательно,

$$y^* = x^2\left(-\frac{1}{4}x^2 - 1\right).$$

Общим решением уравнения (1) является функция

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - x^2. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Решить задачу Коши

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3. \qquad (1)$$

▶ Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, то общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ является функция

$$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}.$$

Правая часть уравнения (1) — специальная, вида (11.50), где $a = 1$; $b = 0$; $P_1(x) = x - 2$; $z = 1$. Так как z является корнем характеристического уравнения, то $k = 1$ и частное решение уравнения (1 определяется формулой

$$y^* = xe^x(Ax + B).$$

Далее, как и в примере 6, находим:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y^* = e^x(Ax^2 + Bx), \\ -7 & y^{*\prime} = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B), \\ 1 & y^{*\prime\prime} = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + B) + e^x(2Ax + 2A + B), \end{array}$$

$$y^{*\prime\prime} - 7y^{*\prime} + 6y^* = e^x((6A - 7A + A)x^2 + (6B - 7B - 14A + 2A + B + \\ + 2A)x - 7B + 2A + 2B) \equiv e^x(x-2).$$

Сокращая обе части последнего тождества на $e^x \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, имеем:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0 = 0 \\ x^1 & -10A = 1 \\ x^0 & 2A - 5B = -2, \end{array}$$

откуда $A = -1/10$, $B = 9/25$;

$$y^* = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Общим решением уравнения (1) является функция

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Для того чтобы решить задачу Коши, находим y':

$$y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right) + e^x\left(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right).$$

Используя начальные условия, получаем линейную систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1,\ y'(0) = C_1 + 6C_2 + 9/25 = 3,$$

откуда находим: $C_1 = 84/125$, $C_2 = 41/125$.

Следовательно, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right). \blacktriangleleft$$

Для линейных дифференциальных уравнений вида (11.41) справедлив так называемый *принцип суперпозиции решений*, суть которого заключается в следующем. Если в уравнении (11.41) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ — решения двух уравнений вида (11.41) с правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = f_1(x), \tag{11.56}$$

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = f_2(x), \tag{11.57}$$

то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ является решением уравнения (11.41) с правой частью $f(x)$.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут быть специальными (вида (11.49), но разных типов (11.50) — (11.54)). Тогда следует воспользоваться структурой частного решения (11.55) применительно к каждому типу и методом неопределенных коэффициентов найти частные решения y_1^* и y_2^* уравнений (11.56), (11.57). Кроме того, может оказаться, что $f_1(x)$ — специального вида, а $f_2(x)$ — нет. В этом случае частное решение y^* уравнения (11.41) можно найти сразу методом Лагранжа или, что рациональнее, разделить на два этапа: для решения уравнения (11.56) использовать структуру (11.55), а для решения уравнения (11.57) применить метод Лагранжа.

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x\sin x + \cos 2x. \tag{1}$$

$\blacktriangleright$ Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, то общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ определяется функцией

$$\tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой сумму двух функций специального типа (11.51) и (11.53): $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$. Поэтому, используя структуру (11.55), методом неопределенных коэффициентов находим частное решение y_1^* уравнения

$$y'' + y = x\sin x \tag{2}$$

и частное решение y_2^* уравнения

$$y'' + y = \cos 2x. \tag{3}$$

Для уравнения (2) $a = 0$, $b = 1$, $z = i = \lambda_1$, поэтому $k = 1$ и

$$y_1^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Вычислим неопределенные коэффициенты A, B, C, D по схеме, приведенной в примере 6, и найдем y_1^*. Имеем:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_1^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x, \\
0 & y_1^{*\prime} = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + \\
 & \quad + Dx)\cos x = (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\cos x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + \\
 & \quad + D)\sin x, \\
1 & y_1^{*\prime\prime} = (2Cx + 2A + D)\cos x - (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\sin x + (-2Ax - \\
 & \quad - B + 2C)\sin x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x, \\
\hline
\end{array}$$

$$y_1^{*\prime\prime} + y_1^* = (Ax^2 + Bx + 2Cx + 2A + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x + \\ + (Cx^2 + Dx - Cx^2 - 2Ax - Dx - B - 2Ax - B + 2C)\sin x \equiv x\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях последнего тождества, находим A, B, C, D и y_1^*:

$$\left.\begin{array}{r|l}
x\cos x & 4C = 0, \\
\cos x & 2A + 2D = 0, \\
x\sin x & -4A = 1, \\
\sin x & -2B + 2C = 0,
\end{array}\right\}$$

откуда $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/4$.

Следовательно,

$$y_1^* = x\left(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right) = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x).$$

Для уравнения (3) $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$, поэтому $k = 0$ и

$$y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x.$$

Далее находим:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x, \\
0 & y_2^{*\prime} = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x, \\
1 & y_2^{*\prime\prime} = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x, \\
\hline
\end{array}$$

$$y_2^{*\prime\prime} + y_2^* = -3M\cos 2x - 3N\sin 2x \equiv \cos 2x.$$

Очевидно, что $-3M = 1$, $-3N = 0$, поэтому

$$y_2^* = -\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Окончательно получаем, что

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$$

и общее решение исходного уравнения (1) определяется функцией

$$y = \bar{y} + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x\,\mathrm{tg}\,2x,\ y(0) = 3/4,\ y'(0) = 2. \tag{1}$$

▶ Сначала найдем общее решение данного уравнения. Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$ определяется функцией

$$\tilde{y} = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой сумму двух функций. Первая из них $f_1(x) = 3e^x$ относится к специальному типу (11.50), для которого $P_r(x) = 3$, $a = 1$, $b = 0$, $z = 1 \neq \lambda_{1,2}$. Поэтому частное решение y_1^* уравнения $y'' - 2y' + 5y = 3e^x$ имеет вид $y_1^* = Ae^x$, где A определяется из тождества $(A - 2A + 5A)e^x \equiv 3e^x$: $A = \dfrac{3}{4}$, $y_1^* = \dfrac{3}{4}e^x$. Вторая функция $f_2(x) = e^x \operatorname{tg} 2x$ не является специальной, и частное решение y_2^* уравнения $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{tg} 2x$ необходимо искать методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Согласно формуле (11.38), имеем

$$y_2^* = e^x (C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x).$$

В нашем случае система вида (11.39) состоит из двух уравнений ($y_1 = e^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$):

$$\left.\begin{aligned} &C_1' e^x \cos 2x + C_2' e^x \sin 2x = 0, \\ &C_1' e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x) + C_2' e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) = e^x \operatorname{tg} 2x. \end{aligned}\right\}$$

Сократив уравнение этой системы на e^x, получим:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ &C_1' (\cos 2x - 2 \sin 2x) + C_2' (\sin 2x + 2 \cos 2x) = \operatorname{tg} 2x. \end{aligned}\right\}$$

Определитель (вронскиан) последней системы

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2 \sin 2x & \sin 2x + 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2.$$

По формулам Крамера находим:

$$C_1' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \operatorname{tg} 2x & \sin 2x + 2 \cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \sin 2x \operatorname{tg} x,$$

$$C_2' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2 \sin 2x & \operatorname{tg} 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Теперь проинтегрируем полученные равенства:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos 2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos 2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right| + \frac{1}{4} \sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x.$$

Следовательно,

$$y_2^* = e^x \left(\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right| \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cos 2x - \right.$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x\Big)=\frac{1}{4}e^x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения (1) имеет вид

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x=$$

$$=\frac{1}{4}e^x\left(3+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x\right),$$

а его общее решение определяется функцией

$$y=\tilde{y}+y^*=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+$$

$$+\frac{1}{4}e^x\left(3+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x\right). \qquad (2)$$

Чтобы решить задачу Коши, вычислим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 в общем решении (2), используя начальные условия $y(0)=3/4$, $y'(0)=2$. Находим y':

$$y'=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^x(-2C_1\sin 2x+$$

$$+2C_2\cos 2x)+\frac{1}{4}e^x\left(3+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x\right)+$$

$$+\frac{1}{4}e^x\Bigg(-\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}-$$

$$-2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\sin 2x\Bigg).$$

Подставляя значение $x=0$ в выражения для y и y', с учетом начальных условий получаем:

$$y(0)=3/4=C_1+3/4,$$
$$y'(0)=2=2C_2+3/4-1/2,$$

откуда $C_1=0$, $C_2=7/4$.

Следовательно, искомое частное решение

$$y=\frac{1}{4}e^x(3+7\sin 2x+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x). \blacktriangleleft$$

АЗ-11.5

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

а) $y''-2y'-4y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$;

в) $y''-6y'+18y=0$.

(*Ответ:* а) $y_1=e^{(1+\sqrt{5})x}$, $y_2=e^{(1-\sqrt{5})x}$; $\tilde{y}=C_1e^{(1+\sqrt{5})x}+C_2e^{(1-\sqrt{5})x}$; б) $y_1=e^{-3x}$, $y_2=xe^{-3x}$; $\tilde{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$; в) $y_1=e^{3x}\cos 3x$, $y_2=e^{3x}\sin 3x$; $\tilde{y}=e^{3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.)

2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков:

а) $y''' - 5y'' + 16y' - 12y = 0$; б) $y^{IV} - 8y'' + 7y = 0$;

в) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$; г) $y^{VI} - 3y^{V} + 3y^{IV} = 0$.

(*Ответ:* а) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}\cos 2\sqrt{2}x$, $y_3 = e^{2x}\sin 2\sqrt{2}x$; $\tilde{y} = C_1e^x + e^{2x}(C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x)$; б) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{\sqrt{7}x}$, $y_4 = e^{-\sqrt{7}x}$; $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{\sqrt{7}x} + C_4e^{-\sqrt{7}x}$; в) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{3x}$, $y_5 = xe^{3x}$; $\tilde{y} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)e^{3x}$; г) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$, $y_5 = e^{3x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y_6 = e^{3x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$;

$\tilde{y} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{3x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.)

Самостоятельная работа

Найти фундаментальные системы решений и общее решение данных однородных линейных дифференциальных уравнений.

1. а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; б) $y''' + 9y' = 0$. (*Ответ:* а) $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x/3}$; б) $\tilde{y} = C_1 + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x$.)

2. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. (*Ответ:* а) $\tilde{y} = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; б) $\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$.)

3. а) $4y''' - 8y' + 5y = 0$; б) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. (*Ответ:* а) $\tilde{y} = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$; б) $\tilde{y} = e^x(C_1 + C_2x + C_3x)^2$.)

АЗ-11.6

Найти частные решения следующих неоднородных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям (решить задачу Коши).

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$, $y(0) = 1$, $y(0) = -2$. (*Ответ:* $y = 4(e^x - e^{2x}) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$.)

2. $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 2$. (*Ответ:* $y = e^x - e^{-x} + x^2$.)

3. $y^{IV} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$. (*Ответ:* $y = 2xe^x - 3e^x + e^{-x} + \cos x + 2\sin x$.)

4. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$. (*Ответ:* $y = e^x((2x - \pi - 1)\sin x - \pi \cos x)$.)

5. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$. $\Big($*Ответ:* $y = 3\pi \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$.$\Big)$

Самостоятельная работа

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

1. $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$. (*Ответ:* $y = e^{2x-1} - 2e^x + e + 1$.)

2. $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \pi/2$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{1}{4}x + \cos 2x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\right)\sin 2x$.$\Big)$

3. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$, $y(0) = -0{,}6$, $y'(0) = 0{,}8$. (*Ответ:* $y = 0{,}8 \sin x - 0{,}6 \cos x$.)

АЗ-11.7

Для каждого из данных неоднородных линейных дифференциальных уравнений определить и записать структуру его частного решения. (Числовых значений неопределенных коэффициентов не находить.)

1. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$. 2. $y'' - 3y' = e^{3x} - 28x$.
3. $y'' + 16y = x \sin 4x$. 4. $y''' + y'' = 2x + e^{-x}$.
5. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.
6. $y^{IV} - y = 3xe^x + \sin x$.
7. $y'' - 7y' = (x-1)^2$. 8. $y^{IV} + y'' = x^2 + 2x$.
9. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2 \cos 3x + \sin 3x)$.
10. $y^{V} - y^{IV} = 2xe^x - 4$.

Найти общие решения данных линейных уравнений.

11. $y'' + 4y = \cos^2 x$.
12. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.
13. $4y'' - y = x^3 - 24x$. 14. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.
15. $y'' + 4y = 1/\sin^2 x$. 16. $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

Самостоятельная работа

Найти общие решения данных уравнений.

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$. $\Big($*Ответ:* $y = \Big(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2\Big)e^{-2x}$.$\Big)$

2. $y'' + y + \mathrm{ctg}^2 x = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\quad y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|.\right)$

3. $y'' - 2y' + y = e^x/(x^2+1)$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = e^x(C_1 + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x).\right)$

11.7. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система вида

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ y_2' = f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{array}\right\} \tag{11.58}$$

где функции $f_i(i = \overline{1,\ n})$ определены в некоторой $(n+1)$-мерной области D переменных $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, называется ***нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка*** с неизвестными функциями $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$.

Число уравнений, входящих в систему (11.58), называется ее *порядком.*

Решением системы (11.58) в интервале $(a;\ b)$ называется совокупность функций $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых в $(a;\ b)$ и обращающих вместе со своими производными каждое уравнение системы (11.58) в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$ системы (11.58), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{11.59}$$

где $y_{10},\ y_{20},\ \ldots,\ y_{n0}$ — заданные числа; $x_0 \in (a;\ b)$.

Имеет место

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Если функции $f_i(i = \overline{1,\ n})$ непрерывны в окрестности точки $(x_0,\ y_{10},\ y_{20},\ \ldots,\ y_{n0}) \in D$ и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(j = \overline{1,\ n})$, то всегда найдется некоторый интеграл с центром x_0, в котором существует единственное решение системы (11.58), удовлетворяющее начальным условиям (11.59).*

Общим решением системы (11.58) называется совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)$ $(i = \overline{1,\ n})$, зависящих от n произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции φ_i определены в некоторой области изменения переменных $x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$;

2) совокупность φ_i является решением системы (11.58) при любых значениях C_i;

3) для любых начальных условий (11.59) из области D, где выполняются условия теоремы Коши, всегда найдутся такие значения произвольных постоянных $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$, что будут справедливы равенства $y_{i0} = \varphi_i(x_0, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$.

Частным решением системы (11.58) называется решение, полученное из общего при некоторых частных значениях произвольных постоянных.

Одним из методов решения системы (11.58) является сведение ее к решению одного или нескольких дифференциальных уравнений высших порядков *(метод исключения)*.

Все сказанное выше верно и для частного случая системы (11.58) — *системы линейных дифференциальных уравнений*, которая имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{array}\right\} \qquad (11.60)$$

где функции $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ $(i,\ y = \overline{1,\ n})$ обычно предполагаются непрерывными в некотором интервале $(a;\ b)$. Если все $f_i(x) \equiv 0$, то система (11.60) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Если $a_{ij}(x) = \text{const}$, то система называется *линейной с постоянными коэффициентами*. Существуют методы, позволяющие проинтегрировать такую систему. Рассмотрим два из них.

I. Составляем характеристическое уравнение

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{nn} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{array}\right| = 0, \qquad (11.61)$$

где $a_{ij} = \text{const}$. Раскрывая определитель, приходим к алгебраическому уравнению степени n относительно λ с действительными постоянными коэффициентами, которое имеет n корней (с учетом их кратности). При этом возможны следующие случаи.

1. Корни характеристического уравнения (11.61) — действительные и различные. Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Известно, что каждому корню $\lambda_i (i = \overline{1,\ n})$ соответствует частное решение вида

$$y_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{\lambda_i x},\ y_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ y_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{\lambda_i x}, \qquad (11.62)$$

где коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_1)a_1^{(i)} + a_{12}\alpha_2^{(i)} + \ldots + a_{1n}\alpha_n^{(i)} = 0, \\ a_{21}\alpha_1^{(i)} + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2^{(i)} + \ldots + a_{2n}\alpha_n^{(i)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1^{(i)} + a_{n2}\alpha_2^{(i)} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n^{(i)} = 0. \end{array}\right\} \qquad (11.63)$$

Все частные решения вида (11.62) образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение однородной системы с постоянными коэффициентами, получаемой из системы (11.60) при $a_{ij} = \text{const}$, $f_i(x) \equiv 0$, представляет собой следующую совокупность функций, являющихся линейной комбинацией решений (11.62):

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{i=1}^{n} C_i y_1^{(i)} = C_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n x},\\
y_2 &= \sum_{i=1}^{n} C_i y_2^{(i)} = C_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \sum_{i=1}^{n} C_i y_n^{(i)} = C_1\alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n x},
\end{aligned}\right\} \qquad (11.64)$$

где C_i — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение однородной системы

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3,\\
y_2' &= -y_1 + 5y_2 - y_3,\\
y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3.
\end{aligned}\right\}$$

▶ Характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

имеет различные действительные корни: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Для каждого из них составляем систему вида (11.63):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} &= 0,\\
-\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} - \alpha_3^{(1)} &= 0,\\
\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} &= 0,
\end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned}
-\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} &= 0,\\
-\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(2)} &= 0,\\
\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} &= 0,
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
-3\alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} &= 0,\\
-\alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} - \alpha_3^{(3)} &= 0,\\
\alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} - 3\alpha_3^{(3)} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как определители этих систем, согласно формуле (1), равны нулю, то каждая из них имеет бесчисленное множество решений. В данном случае можно выбрать те решения, для которых $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(3)} = 1$. Тогда получим следующие решения систем (2): если $\alpha_1 = 2$, то $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_2^{(1)} = 0$, $\alpha_3^{(1)} = -1$; если $\lambda_2 = 3$, то $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$, $\alpha_3^{(2)} = 1$; если $\lambda_3 = 6$, то $\lambda_1^{(3)} = 1$, $\alpha_2^{(3)} = -2$, $\alpha_3^{(3)} = 1$. Это приводит к следующей фундаментальной системе решений:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(1)} = e^{2x}, && y_2^{(1)} = 0, && y_3^{(1)} = -e^{2x};\\
&y_1^{(2)} = e^{3x}, && y_2^{(2)} = e^{3x}, && y_3^{(2)} = e^{3x};\\
&y_1^{(3)} = e^{6x}, && y_2^{(3)} = -2e^{6x}, && y_3^{(3)} = e^{6x}.
\end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с учетом совокупности функций (11.64) дает общее решение исходной системы:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x},\\
y_2 &= C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x},\\
y_3 &= -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}.
\end{aligned}\right\} \blacktriangleleft$$

2. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (11.61) — различные, но среди них имеются комплексные. Известно, что в этом случае каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\beta$ характеристического уравнения (11.61) соответствует пара частных решений:

$$y_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)x}, \tag{11.65}$$
$$y_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)x}, \tag{11.66}$$

где $j=\overline{1,\ n}$; коэффициенты $\alpha_j^{(1)}$, $\alpha_j^{(2)}$ определяются из системы (11.63) соответственно для $\lambda=\lambda_1=\lambda+i\beta$ и $\lambda=\lambda_2=\alpha-i\beta$. Коэффициенты $\alpha_j^{(1)}$, $\alpha_j^{(2)}$ оказываются, как правило, комплексными числами, а соответствующие им функции $y_j^{(1)}$, $y_j^{(2)}$ — комплексными функциями. Выделяя мнимую и действительную части функций $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ и пользуясь тем, что для линейных уравнений с действительными коэффициентами и мнимая, и действительная части решения также являются решениями, получаем пару частных действительных решений однородной системы.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2,\\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

► Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

системы (1) имеет корни $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Согласно формулам (11.63), получаем:

$$\left.\begin{aligned} (-7-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 &= 0,\\ -2\alpha_1 + (-5-\lambda)\alpha_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Корню $\lambda_1 = -6+i$ соответствует система для вычисления $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned} (-7-\lambda_1)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} &= 0,\\ -2\alpha_1^{(1)} + (-5-\lambda_1)\alpha_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} (-1-i)\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} &= 0,\\ -2\alpha_1^{(1)} + (1-i)\alpha_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 1,\\ \alpha_2^{(1)} &= 1+i. \end{aligned}\right.$$

Согласно формуле (11.65), получаем частное решение:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= \alpha_1^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{(-6+i)x} = e^{-6x}(\cos x + i\sin x),\\ y_2^{(1)} &= \alpha_2^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)x} = (1+i)e^{(-6+i)x} = e^{-6x}(\cos x - \sin x + \\ &\quad + i(\cos x + \sin x)). \end{aligned} \tag{2}$$

(Здесь мы воспользовались формулой Эйлера: $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$.) Взяв в отдельности действительные и мнимые части в решении (2), получим два решения в действительной форме, образующих фундаментальную систему решений системы (1):

$$\begin{aligned} \overline{y}_1^{(1)} &= e^{-6x}\cos x, & \overline{y}_2^{(1)} &= e^{-6x}(\cos x - \sin x),\\ \overline{\overline{y}}_1^{(1)} &= e^{-6x}\sin x, & \overline{\overline{y}}_2^{(1)} &= e^{-6x}(\cos x + \sin x). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1\overline{y}_1^{(1)} + C_2\overline{\overline{y}}_1^{(1)} = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x),\\ y_2 &= C_1\overline{y}_2^{(1)} + C_2\overline{\overline{y}}_2^{(1)} = e^{-6x}(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Заметим, что использование второго корня $\lambda_2 = -6 - i$ излишне, так как получим те же решения (1)—(4). Этот факт верен для люых систем однородных линейных дифференциальных уравнений. ◀

3. Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (11.61) имеются кратные. В этом случае поступаем следующим образом. Пусть λ — корень кратности k характеристического уравнения (11.61). Тогда решение системы (11.60) (для которой $a_{ij} = \text{const}$, $f_i(x) \equiv 0$ $(i, j = \overline{1, n})$), соответствующее этому k-кратному корню, ищем в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= (\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x + \ldots + \alpha_{1\,k-1}x^{k-1})e^{\lambda x}, \\ y_2 &= (\alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{22}x^2 + \ldots + \alpha_{2\,k-1}x^{k-1})e^{\lambda x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= (\alpha_{n0} + \alpha_{n1}x + \alpha_{n2}x^2 + \ldots + \alpha_{n\,k-1}x^{k-1})e^{\lambda x}. \end{aligned} \tag{11.67}$$

Числа α_{il} $(i = \overline{1, n},\ l = \overline{0, k-1})$ находим так: подставляем функции y_i из (11.67) и их производные y_i' в исходную систему (11.60) при указанных ограничениях на a_{ij} и $f_i(x)$, а затем (после сокращения на $e^{\lambda x} \neq 0$) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левых и правых частях полученных равенств. В результате проведенной процедуры из всех чисел λ_{il} k всегда остаются в качестве свободных параметров, которые принимаются за произвольные постоянные.

Решения из фундаментальной системы, соответствующие простым (некратным) корням характеристического уравнения (11.61), определяются так, как было показано в случаях 1 и 2.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \phantom{y_1 +{}} y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' &= \phantom{y_1 +{}} y_2 + y_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

▶ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2\lambda = 0 \tag{2}$$

системы (1) имеет двукратный $\lambda_{1,2} = 1$ и однократный $\lambda_3 = 0$ корни. Согласно формуле (11.67), двукратному корню $\lambda_{1,2} = 1$ соответствует решение вида

$$\begin{gathered} y_1^{(1,2)} = (\alpha_{10} + \alpha_{11}x)e^x,\ y_2^{(1,2)} = (\alpha_{20} + \alpha_{21}x)e^x, \\ y_3^{(1,2)} = (\alpha_{30} + \alpha_{31}x)e^x. \end{gathered} \tag{3}$$

Коэффициенты α_{il} $(i = \overline{1, 3},\ l = \overline{0, 1})$ определяются из системы, полученной подстановкой выражений для $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ в исходную систему (1). После сокращения на $e^x \neq 0$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{10} + \alpha_{11}x &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{30} + \alpha_{31}x, \\ \alpha_{21} + \alpha_{20} + \alpha_{21}x &= \alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{20} + \alpha_{21}x - \alpha_{30} - \alpha_{31}x, \\ \alpha_{31} + \alpha_{30} + \alpha_{31}x &= \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{30} + \alpha_{31}x. \end{aligned}\right\}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{10} &= \alpha_{20} + \alpha_{30}, \\ \alpha_{11} &= \alpha_{21} + \alpha_{31}, \\ \alpha_{21} + \alpha_{20} &= \alpha_{10} + \alpha_{20} - \alpha_{30}, \\ \alpha_{21} &= \alpha_{11} + \alpha_{21} - \alpha_{31}, \\ \alpha_{31} &= \alpha_{21} + \alpha_{31}, \\ \alpha_{31} + \alpha_{30} &= \alpha_{20} + \alpha_{30}, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим, что $\alpha_{20}=\alpha_{31}=\alpha_{11}$, $\alpha_{30}=\alpha_{10}$, $\alpha_{21}=0$. Числа α_{10} и α_{11} можно считать произвольными параметрами. Обозначим их через C_1 и C_2 соответственно. Тогда решение (3) запишется в виде

$$y_1^{(1,2)}=(C_1+C_2x)e^x,\ y_2^{(1,2)}=C_1e^x,\ y_3^{(1,2)}=(C_1+C_2x)e^x. \qquad (4)$$

Корню $\lambda_3=0$, согласно формуле (11.62), соответствует решение

$$y_1^{(3)}=\alpha_1^{(3)}e^{0x}=\alpha_1^{(3)},\ y_2^{(3)}=\alpha_2^{(3)}e^{0x}=\alpha_2^{(3)},\ y_3^{(3)}=\alpha_3^{(3)}e^{0x}=\alpha_3^{(3)}, \qquad (5)$$

где числа $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ определяются из системы (см. систему (11.63)):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^{(3)}+\alpha_3^{(3)}&=0,\\ \alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(3)}-\alpha_3^{(3)}&=0,\\ \alpha_2^{(3)}+\alpha_3^{(3)}&=0.\end{aligned}\right\}$$

Ее решение: $\alpha_1^{(3)}=2C_3$, $\alpha_2^{(3)}=-C_3$, $\alpha_3^{(3)}=C_3$. Следовательно, соответствующее корню $\lambda_3=0$ решение вида (5) исходной системы (1) имеет вид

$$y_1^{(3)}=2C_3,\ y_2^{(3)}=-C_3,\ y_3^{(3)}=C_3,$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Общее решение исходной системы записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1&=y_1^{(1,2)}+y_1^{(3)}=(C_1+C_2x)e^x+2C_3,\\ y_2&=y_2^{(1,2)}+y_2^{(3)}=C_1e^x-C_3,\\ y_3&=y_3^{(1,2)}+y_3^{(3)}=(C_1+C_2x)e^x+C_3.\end{aligned}\right\}◄$$

Если система — неоднородная, то, зная общее решение вида (11.64) соответствующей однородной системы, можно найти общее решение исходной неоднородной системы методом вариации произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n в решении (11.64). Рассмотрим этот вопрос подробнее. Доказано, что общее решение неоднородной системы всегда можно записать в виде (11.64), заменив произвольные постоянные C_1, C_2, ..., C_n соответственно функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ (включающими в себя аддитивно произвольные постоянные C_1, C_2, ..., C_n). Эти функции определяются с помощью данной неоднородной системы: в нее подставляют y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', получают линейную систему n алгебраических уравнений относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$, решение которой всегда существует и представимо в виде

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\ C_2'(x)=\varphi_2(x),\ ...,\ C_n'(x)=\varphi_n(x),$$

где $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1,\ n})$ — известные функции. Интегрируя эти равенства, находим

$$C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx+C_i,$$

где C_i — произвольные постоянные. Подставляя в решение (11.64) вместо $C_i=\text{const}$ найденные значения $C_i(x)$, получаем общее решение неоднородной системы уравнений. ◄

Пример 4. Решить задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} y_1'&=4y_1-5y_2+4x+1,\\ y_2'&=y_1-2y_2+x,\end{aligned}\quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=2.\right\} \qquad (1)$$

► Прежде всего найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\left.\begin{aligned} y_1'&=4y_1-5y_2,\\ y_2'&=\ \ y_1-2y_2.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Корни ее характеристического уравнения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, а общее решение ищем в виде (см. случай 1):

$$y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x}, \quad y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}. \tag{3}$$

Считаем, что в решении (3) C_1 и C_2 являются неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$ (в этом суть метода вариации произвольных постоянных!). Потребуем, чтобы y_1 и y_2 были решением исходной системы (1). Находим:

$$y_1' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} + 15C_2(x)e^{3x},$$
$$y_2' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} + 3C_2(x)e^{3x}.$$

Подставляем выражения для y_1, y_2, y_1', y_2' в систему (1). Приводя подобные члены, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} &= 4x+1, \\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} &= x, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1'(x) = \frac{1}{4}(x-1)e^{x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{4}(3x+1)e^{-3x}.$$

Проинтегрировав последние равенства, имеем:

$$C_1(x) = \frac{1}{4}(x-2)e^{x} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{12}(3x+2)e^{-3x} + C_2.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенства (3) вместо C_1 и C_2, получаем общее решение исходной неоднородной системы (1):

$$y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2),$$

$$y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2).$$

Используя начальные условия, получаем систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + 5C_2 - 1/2 - 5/6, \\ 2 &= C_1 + C_2 - 1/2 - 1/6, \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1 = 11/4$, $C_2 = -1/12$.

Таким образом, решением задачи Коши будет следующее частное решение:

$$y_1 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{5}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2),$$

$$y_2 = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2). \blacktriangleleft$$

II. Второй метод интегрирования системы (11.60) *(метод исключения)* состоит в следующем. При выполнении некоторых условий всегда можно исключить все неизвестные функции, кроме одной, например y_1, и получить для $y_1(x)$ одно линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (если в системе (11.60) $a_{ij} = \text{const}$) порядка n. Решив его, найдем все остальные неизвестные функции $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$ с помощью операции дифференцирования. Делается это следующим образом. Дифференцируем по ем обе части первого уравнения системы (11.60) (считая $a_{ij} = \text{const}$), затем вместо $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ подставляем их значения из системы (11.60). Получаем

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \ldots + a_{1n}y_n' + f_1'(x) = \\ = L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_2(x), \qquad (11.68)$$

где $L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ обозначает известную линейную комбинацию с постоянными коэффициентами функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а $F_2(x)$ — линейную комбинацию функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ и $f_1'(x)$. Дифференцируя обе части уравнения (11.68) по x, опять получаем линейное неоднородное уравнение

$$y_1''' = L_3(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_3(x).$$

Продолжая этот процесс, находим

$$y_1^{(n)} = L_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_n(x).$$

В результате получаем систему n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_1'' &= L_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} &= L_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_{n-1}(x), \\ y_1^{(n)} &= L_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) + F_n(x). \end{aligned}\right\} \qquad (11.69)$$

Первые $n-1$ уравнений системы (11.69) разрешаем относительно функций $y_2, y_3, \ldots, y_n$ (это, как правило, возможно). Очевидно, что эти функции выражаются через $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \qquad (11.70)$$

Подставляя выражения для $y_2, y_3, \ldots, y_n$ из системы (11.70) в последнее уравнение системы (11.69), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}),$$

общее решение которого определяется с помощью известных методов (см. § 11.5):

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (11.71)$$

Дифференцируя последнее выражение $n-1$ раз по x, находим производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$, подставляем их в систему (11.70) и получаем вместе с функцией (11.71) общее решение исходной системы:

$$\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_3 &= \psi_3(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned} \qquad (11.72)$$

Для решения задачи Коши с учетом системы (11.71) — (11.72) и заданных начальных условий находим значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и подставляем их в систему (11.71) — (11.72).

Пример 5. Методом исключения найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 + x, \\ y_3' &= 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(0) = 0{,}34,\ y_2(0) = -0{,}16,\ y_3(0) = 0{,}27. \qquad (2)$$

▶ Дифференцируем по x первое уравнение системы (1) и подставляем вместо y_1', y_2', y_3' их выражения из этой системы. В результате имеем

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' + e^x = 3(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - (y_1 + y_2 + y_3 - x) + \\ + 4y_1 - y_2 + 4y_3 + e^x = 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x.$$

Дифференцируем y_1'' по x и опять заменяем y_1', y_2', y_3' их выражениями из системы (1):

$$y_1''' = 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' + 4e^x + 1 = 12(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - 5(y_1 + \\ + y_2 + y_3 - x) + 6(4y_1 - y_2 + 4y_3) + 4e^x + x = 55y_1 - \\ - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x.$$

Следовательно, для данного случая система (11.69) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x, \\ y_1'' &= 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x, \\ y_1''' &= 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из первых двух уравнений находим y_2 и y_3:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x, \\ y_3 &= y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x. \end{aligned} \qquad (4)$$

Выражения для y_2 и y_3 подставляем в третье уравнение системы (3):

$$y_1''' = 55y_1 - 23(y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x) + 31(y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + \\ + e^x - x) + 16e^x + 6x = 8y_1'' - 17y_1' + 10y_1 + e^x - 2x.$$

Получили неоднородное линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = e^x - 2x. \qquad (5)$$

Решаем его известным методом (см. § 11.5). Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0, \qquad (6)$$

корни которого: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Общее решение $\bar{y}_1$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (5), имеет вид

$$\bar{y}_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x}.$$

Правая часть уравнения (5) есть сумма двух специальных функций вида (11.50) и (11.54): $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = -2x$. Для $f_1(x) = e^x$ число $z = 1$, т. е. совпадает с корнем $\lambda_1 = 1$, поэтому

$k=1$. Для $f_2(x)=-2x$ число $z=0$ и его нет среди корней характеристического уравнения (6), поэтому $k=0$.

Итак, частное решение y_1^* уравнения (5) следует искать в виде

$$y_1^*=Axe^x+Bx+C,$$

где неизвестные числа A, B, C находят с помощью метода неопределенных коэффициентов. Определяем $y_1^{*\prime}$, $y_1^{*\prime\prime}$, $y_1^{*\prime\prime\prime}$ и вместе с y_1^* подставляем их в уравнение (5). Имеем:

$$y_1^{*\prime}=Ae^x+Axe^x+B,\ y_1^{*\prime\prime}=2Ae^x+Axe^x,$$
$$y_1^{*\prime\prime\prime}=3Ae^x+Axe^x,$$
$$3Ae^x+Axe^x-8(2Ae^x+Axe^x)+17(Ae^x+Axe^x+B)-10(Axe^x+$$
$$+Bx+C)=e^x-2x,$$
$$4Ae^x+17B-10Bx-10C=e^x-2x,$$
$$4A=1,\ -10B=-2,\ 17B-10C=0,$$

откуда $A=1/4$, $B=1/5$, $C=17/50$.

Таким образом,

$$y_1^*=\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}x+\frac{17}{50}.$$

Общее решение уравнения (5) определяется формулой

$$y_1=\tilde{y}_1+y_1^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}x+\frac{17}{50}.$$

Найдем производные y_1', y_1'' и подставим их в равенство (4):

$$y_1'=C_1e^x+2C_2e^{2x}+5C_3e^{5x}+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5},$$

$$y_1''=C_1e^x+4C_2e^{2x}+25C_3e^{5x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}xe^x,$$

$$y_2=C_1e^x+4C_2e^{2x}+25C_3e^{5x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}xe^x-6(C_1e^x+2C_2e^{2x}+$$
$$+5C_3e^{5x}+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}\Big)+6\Big(C_1e^x+$$
$$+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}x+\frac{17}{50}\Big)+2e^x-x=C_1e^x-2C_2e^{2x}+$$
$$+C_3e^{5x}-e^x+\frac{1}{4}xe^x+\frac{6}{5}x+\frac{21}{25}.$$

$$y_3=C_1e^x+4C_2e^{2x}+25C_3e^{5x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}xe^x-$$
$$-5\Big(C_1e^x+2C_2e^{2x}+5C_3e^{5x}+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}\Big)+3\Big(C_1e^x+$$
$$+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}+\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{5}x+\frac{17}{50}\Big)+e^x-x=-C_1e^x-$$
$$-3C_2e^{2x}+3C_3e^{5x}+\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{4}xe^x-\frac{2}{5}x+\frac{1}{50}.$$

Следовательно, общее решение системы (1) найдено:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}, \\ y_2 &= C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x} - e^x + \frac{1}{4}xe^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25}, \\ y_3 &= -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}xe^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}. \end{aligned}\right\}$$

Для решения задачи Коши воспользуемся начальными условиями. Получим систему для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned} \frac{17}{50} &= C_1 + C_2 + C_3 + \frac{17}{50}, \\ -\frac{4}{25} &= C_1 - 2C_2 + C_3 - 1 + \frac{21}{25}, \\ \frac{27}{100} &= -C_1 - 3C_2 + 3C_3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{50}, \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$.

Искомое частное решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{5}x + \frac{17}{50}, \\ y_2 &= \frac{1}{4}xe^x - e^x + \frac{6}{5}x + \frac{21}{25}, \\ y_3 &= -\frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}e^x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{50}. \end{aligned}\right\} \blacktriangleleft$$

АЗ-11.8

1. Найти общие решения данных однородных систем уравнений, не пользуясь методом исключения:

а) $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

(*Ответ:* а) $y_1 = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $y_2 = e^{-6x}((C_1 + C_2) \cos x - (C_1 - C_2) \sin x)$; б) $y_1 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, $y_2 = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)$; в) $y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$, $y_2 = C_1e^x - 3C_3e^{-x}$, $y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} - 5C_3e^{-x}$.)

2. Методом исключения найти общее решение каждой из следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + 6y_2 + e^{-2x}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + x, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 - 3y_3, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 - 4y_3, \\ y_3' = 6y_1 + 4y_2 - 4y_3. \end{cases}$

(*Ответ:* а) $y_1 = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x}$, $y_2 = \frac{1}{2}C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x} + \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x}$; б) $y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18}$, $y_2 = C_1e^{2x} + 3C_2e^{-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$; в) $y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $y_2 = C_1e^x + 2C_3e^{3x}$, $y_3 = 2C_1e^x + C_2e^{2x} + 2C_3e^{3x}$.)

3. Решить задачу Коши для следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_1, \end{cases}$ $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1;$

б) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2, \end{cases}$ $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 0.$

(*Ответ:* а) $y_1 = y_2 = y_3 = e^x$; б) $y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0$.)

Самостоятельная работа

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x. \end{cases}$

(*Ответ:* $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x$, $y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2$.)

2. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^x. \end{cases}$

(*Ответ:* $y_1 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1)e^x$, $y_2 = (C_1 \sin x - C_2 \cos x)e^x$.)

3. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos x, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin x + \cos x. \end{cases}$

(*Ответ:* $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x$, $y_2 = (C_2 - C_1) \cos x - (C_1 + C_2) \sin x + x(\cos x + \sin x)$.)

ИДЗ-11.1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx$. (*Ответ:* $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.2. $y' \sin x = y \ln y$. (*Ответ:* $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)

1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (*Ответ:* $\ln|\cos y| = x - x^2 + C$.)

1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$. (*Ответ:* $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)

1.5. $(1 + e^x) y dy - e^y dx = 0$. (*Ответ:* $-e^{-y}(y+1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.)

1.6. $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$. (*Ответ:* $\ln(y^2 + 3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.7. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$. (*Ответ:* $C = \cos x / \cos y$.)

1.8. $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$. (*Ответ:* $\sqrt{2y+1} = C/\cos x$.)

1.9. $(\sin(x + y) + \sin(x - y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$ (*Ответ:* $\operatorname{tg} y = C + 2\cos x$.)

1.10. $(1 + e^x) y y' = e^x$. (*Ответ:* $y^2 = 2 \ln C(e^x + 1)$.)

1.11. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$. (*Ответ:* $\ln|\sin y| = C + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$.)

1.12. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$. (*Ответ:* $\sin y = C(e^x - 1)^3$.)

1.13. $y' = e^{2x}/\ln y$. (*Ответ:* $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.)

1.14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$. (*Ответ:* $3^y = \frac{1}{2}3^{-x^2} + C \ln 3$.)

1.15. $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x$. (*Ответ:* $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C$.)

1.16. $y' = e^{x^2}x(1 + y^2)$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2}e^{x^2}$.)

1.17. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$. (*Ответ:* $\operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C$.)

1.18. $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2\cos x$. (*Ответ:* $y = C \sin x - 2$.)

1.19. $1+(1+y')e^{y}=0$. (*Ответ:* $C(e^{y}-1)=e^{-x}$.)
1.20. $y'\operatorname{ctg} x+y=2$. (*Ответ:* $y=C\cos x+2$.)
1.21. $\frac{e^{-x^2}dy}{x}+\frac{dx}{\cos^2 y}=0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y=\right.$
$\left.=C-\frac{1}{2}e^{x^2}.\right)$

1.22. $e^{x}\sin y dx+\operatorname{tg} y dy=0$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\right.\right.\right.$
$\left.\left.\left.+\frac{y}{2}\right)\right|=C-e^{x}.\right)$

1.23. $(1+e^{3y})xdx=e^{3y}dy$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{2}=\frac{1}{3}\ln(1+\right.$
$\left.+e^{3y})+C.\right)$

1.24. $(\sin(2x+y)-\sin(2x-y))dx=\frac{dy}{\sin y}$. (*Ответ:*
$\operatorname{ctg} y=C-\sin 2x$.)
1.25. $\cos y dx=2\sqrt{1+x^2}dy+\cos y\sqrt{1+x^2}dy$. (*Ответ:*
$2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right|+y=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$.)
1.26. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} y=\arcsin x+$
$+C$.)
1.27. $e^{x}\operatorname{tg} y dx=(1-e^{x})\sec^2 y dy$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} y=$
$=C/(e^{x}-1)$.)
1.28. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=\right.$
$\left.=C-2\sin x.\right)$

1.29. $\cos^3 y\cdot y'-\cos(2x+y)=\cos(2x-y)$. (*Ответ:*
$\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y=\sin 2x+C$.)
1.30. $3^{y^2-x^2}=yy'/x$. (*Ответ:* $3^{-y^2}=3^{-x^2}-2C\ln 3$.)

2

2.1. $(xy+x^3y)y'=1+y^2$. (*Ответ:* $Cx=\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2.2. $y'/7^{y-x}=3$. (*Ответ:* $7^{-y}=3\cdot 7^{-x}+C\ln 7$.)
2.3. $y-xy'=2(1+x^2y')$. (*Ответ:* $y=Cx/\sqrt{1+2x^2}+$
$+2$.)
2.4. $y-xy'=1+x^2y'$. (*Ответ:* $y=Cx/(x+1)+1$.)

2.5. $(x+4)dy - xydx = 0$. (*Ответ:* $y = Ce^x/(x+4)^4$.)

2.6. $y' + y + y^2 = 0$. (*Ответ:* $y/(y+1) = C - x$.)

2.7. $y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{y} + \ln y = C + \frac{1}{2}\ln^2 x.\right)$

2.8. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y + \ln\frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x.\right)$

2.9. $y' + 2y - y^2 = 0$. (*Ответ:* $\sqrt{(y-2)/y} = Ce^x$.)

2.10. $(x^2 + x)ydx + (y^2+1)dy = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{y^2}{2} + \ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.\right)$

2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$. (*Ответ:* $\sqrt[3]{y^3+1} = C/\sqrt{x^2-1}$.)

2.12. $(1+y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = C + \operatorname{arctg} x.\right)$

2.13. $y' = 2xy + x$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\ln|2y+1| = x^2/2 + C.\right)$

2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y')$. (*Ответ:* $y = C\sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{x+3} + 3$.)

2.15. $2xyy' = 1 - x^2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y^2 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.\right)$

2.16. $(x^2-1)y' - xy = 0$. (*Ответ:* $y = C\sqrt{x^2-1}$.)

2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0$. (*Ответ:* $y^3 = 3(C - x + \ln|x+1|)$.)

2.18. $(1+x^3)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}.\right)$

2.19. $xy' - y = y^2$. (*Ответ:* $y/(y+1) = Cx$.)

2.20. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$. (*Ответ:* $\sqrt{y^2+1} = \ln Cx$.)

2.21. $y' - xy^2 = 2xy$. (*Ответ:* $\ln|y/(y+2)| = C + x^2$.)

2.22. $2x^2yy' + y^2 = 2$. (*Ответ:* $\ln|2-y^2| = C + 1/x$.)

2.23. $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg} y = C + \operatorname{arctg} x$.)

2.24. $y'\sqrt{1 + y^2} = x^2/y$. (*Ответ:* $\sqrt{(1 + y^2)^3} = C + x^3$.)

2.25. $(y + 1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$. (*Ответ:* $y + \ln y = \arcsin x + x^2/2 + C$.)

2.26. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \dfrac{C\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}.\right)$

2.27. $xyy' = \dfrac{1 + x^2}{1 - y^2}$. (*Ответ:* $2y^2 - y^4 = 4 \ln |x| + 2x^2 + C$.)

2.28. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \dfrac{y^2}{2} - 2y + \ln |y| = \ln |x| + \dfrac{1}{x} + C.\right)$

2.29. $(x^2y - y)^2 y' = x^2y - y + x^2 - 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \dfrac{y^2}{2} - y + \ln |y + 1| = \dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| + C.\right)$

2.30. $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$. (*Ответ:* $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$.)

3

3.1. $y - xy' = x \sec \dfrac{y}{x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \sin \dfrac{y}{x} = \ln \dfrac{C}{|x|}.\right)$

3.2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$. (*Ответ:* $(y^2 - x^2)^2 Cx^2y^3$.)

3.3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$. (*Ответ:* $y = Cx^2 - x$.)

3.4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{y^2 + x^2}{x^2} = \ln \dfrac{C}{x}.\right)$

3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. (*Ответ:* $y/(x - y) = Cx$.)

3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$. (*Ответ:* $e^{y/x} = Cy$.)

3.7. $xy' - y = x \operatorname{tg} (y/x)$. (*Ответ:* $\sin (y/x) = Cx$.)

3.8. $xy' = y - xe^{y/x}$. (*Ответ:* $e^{-y/x} = \ln Cx$.)

3.9. $xy' - y = (x + y) \ln ((x + y)/x)$. (*Ответ:* $\ln |1 + y/x| = Cx$.)

3.10. $xy' = y\cos\ln(y/x)$. $\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) = \right.$
$\left. = \ln Cx.\right)$

3.11. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \frac{x}{4}\ln^2 Cx.\right)$

3.12. $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$. (*Ответ:* $\arcsin(y/x) = \ln Cx$.)

3.13. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$. (*Ответ:* $-e^{-y/x} = \ln Cx$.)

3.14. $y' = y/x - 1$. (*Ответ:* $y = x\ln(C/x)$.)

3.15. $y'x + x + y = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.\right)$

3.16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \right.$
$\left. = \ln Cx.\right)$

3.17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$. (*Ответ:* $y + \sqrt{x^2+y^2} =$
$= Cx^2$.)

3.18. $(4x^2+3xy+y^2)dx + (4y^2+3xy+x^2)dy = 0$. $\Bigl($*От-*
вет: $\frac{2}{5}\ln\left(\frac{y+x}{x}\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{y^2+4x^2}{x^2}\right) - \frac{3}{10}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}.\Bigr)$

3.19. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$. (*Ответ:* $y = x/\ln Cx$.)

3.20. $xy + y^2 = (2x^2+xy)y'$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{y}{x} + 2\ln\frac{y}{x} = \right.$
$\left. = \ln\frac{C}{x}.\right)$

3.21. $(x^2-2xy)y' = xy - y^2$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{y} + 2\ln\frac{y}{x} = \right.$
$\left. = -\ln Cx.\right)$

3.22. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$. (*Ответ:* $y = x\ln^2|Cx|$.)

3.23. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$. (*Ответ:* $y = xe^{C/x}$.)

3.24. $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$. (*Ответ:* $y^2 = C^3/3^x - x^2/3$.)

3.25. $(y^2-2xy)dx - x^2dy = 0$. (*Ответ:* $(y-3x)/y =$
$= \ln^3(Cx)$.)

3.26. $(x+2y)dx + xdy = 0$. (*Ответ:* $y = C^3/(3x^2) - x/3$.)

3.27. $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$.
$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln Cx.\right)$

3.28. $2x^3y' = y(2x^2-y^2)$. (*Ответ:* $y^2 = x^2/\ln(Cx)^4$.)

3.29. $x^2y' = y(x + y)$. (*Ответ:* $y = -x/\ln(Cx)$.)

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. (*Ответ:* $y^2 = x^2 \ln(Cx)^2$.)

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

4.1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = (x^3 + 3x)/(x^2 + 1)^2$.)

4.2. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \sin x$.)

4.3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = e^{-x} \ln \frac{1}{1 - x}.\right)$

4.4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = x^4 - x^2$.)

4.5. $y' = 2x(x^2 + y)$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = x^2 + 1 - e^{x^2}$.)

4.6. $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $y = (x + 1)e^x$.)

4.7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{e^{-x^2}}{2x}.\right)$

4.8. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy$, $y(0) = \pi/4$. $\left(\textit{Ответ: } x = \left(\sin^2 y - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos y}.\right)$

4.9. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = -(\ln x)/x$.)

4.10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$. (*Ответ:* $x = y^3 + y^2$.)

4.11. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = 2 \ln y + 1 - y$.)

4.12. $y' = y/(3x - y^2)$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = y^2 - y^3$.)

4.13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x(y - 1)^2 = (y - \ln y - 1)$.)

4.14. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = e^x \ln x$.)

4.15. $y = x(y' - x \cos x)$, $y(\pi/2) = 0$. (*Ответ:* $y = (\sin x - 1)x$.)

4.16. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$. (*Ответ:* $y = (\ln^5 x - \ln^2 x)/3$.)

4.17. $(2e^y - x)y' = 1$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $x = e^y - e^{-y}$.)

4.18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = (x^2 - 1/x)e^{-x}$.)

4.19. $(x + y^2)dy = ydx$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = y^2 - y$.)

4.20. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y(0) = \pi/2$. (*Ответ:* $x = -\sin y \cos y$.)

4.21. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{3x^4 + 4x^3}{12(x + 1)}.\right)$

4.22. $(xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = -x^2 \ln x$.)

4.23. $xy' + y = \sin x$, $y(\pi/2) = 2/\pi$. (*Ответ:* $y = (1 - \cos x)/x$.)

4.24. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 1$. (*Ответ:* $y = x^2 - 1$.)

4.25. $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.)

4.26. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$, $y(0) = 0$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{6\sin x - 2\sin^3 x}{3\cos x}.\right)$

4.27. $x^2y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$. (*Ответ:* $y = -1/x$.)

4.28. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = 0{,}5x^2e^{-x^2}$.)

4.29. $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0$, $y(0) = 0$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{3}x^3e^{x^3}.\right)$

4.30. $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = \ln x$.)

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.1. $y' + y = x\sqrt{y}$. (*Ответ:* $y = (xe^{x/2} - 2e^{x/2} + C)^2e^{-x}$.)

5.2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 y dy$. (*Ответ:* $x = (y \operatorname{tg} y + \ln|\cos y| + C)^2/y^2$.)

5.3. $y' + 2y = y^2e^x$. (*Ответ:* $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$.)

5.4. $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$. (*Ответ:* $y = 1/(\cos x\sqrt[3]{C - \operatorname{tg} x})$.)

5.5. $xydy = (y^2 + x)dx$. (*Ответ:* $y = x\sqrt{2(C - 1/x)}$.)

5.6. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$. (*Ответ:* $y = 1/(x^2\sqrt{2(e^x + C)})$.)

5.7. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$. (*Ответ:* $x = \sqrt{y/(C - \cos y)}$.)

5.8. $(2x^2y\ln y - x)y' = y$. (*Ответ:* $x = 1/(y(C - \ln^2 y))$.)

5.9. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$. $\left(\text{Ответ: } y = \sqrt{C - \sqrt{x^2 - 1}}\sqrt[4]{x^2 - 1}.\right)$

5.10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{x^4}{4}(C + \ln x)^2.\right)$

5.11. $xy^2y' = x^2 + y^3$. (*Ответ:* $y = x\sqrt[3]{3(C - 1/x)}$.)

5.12. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$. (*Ответ:* $y = 1/((x + 1)(C + \ln|x + 1|))$.)

5.13. $y'x + y = -xy^2$. (*Ответ:* $y = 1/(x(C + \ln x))$.)

5.14. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$. (*Ответ:* $y = e^{x^2/2}/\sqrt{2(C + x)}$.)

5.15. $xy' - 2\sqrt{x^3y} = y$. (*Ответ:* $y = x(x^2/2 + C)^2$.)

5.16. $y' + xy = x^3y^3$. (Ответ: $y = e^{-x^2/2}/\sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}$.)

5.17. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$. (Ответ: $y = e^x\sqrt{x^2 + C}$.)

5.18. $yx' + x = -yx^2$. (Ответ: $x = 1/(y(C + \ln y))$.)

5.19. $x(x-1)y' + y^3 = xy$. (Ответ: $y = (x-1)/\sqrt{2(x - \ln x + C)}$.)

5.20. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$. (Ответ: $y = \sqrt{C - x}/x^{3/2}$.)

5.21. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy$. (Ответ: $x = y/(y^2 + C)$.)

5.22. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$. $\left(\text{Ответ: } y = e^{3x}\left(\frac{x}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-2x} + C\right)^{3/2}.\right)$

5.23. $xy' + y = y^2 \ln x$. (Ответ: $y = 1/(\ln x + 1 + Cx)$.)

5.24. $xdx = (x^2/y - y^3)dy$. (Ответ: $x = y\sqrt{C - y^2}$.)

5.25. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. (Ответ: $y = 2e^{-x^2}/\sqrt{2x^2e^{-2x^2} + e^{-2x^2} + 4C}$.)

5.26. $y' + y = x/y^2$. $\left(\text{Ответ: } y = e^{-x}\sqrt[3]{xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C}.\right)$

5.27. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$. (Ответ: $y = 1/((x + C)\cos x)$.)

5.28. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. $\left(\text{Ответ: } y = \left(\frac{x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C}{x}\right)^2.\right)$

5.29. $y' - y + y^2 \cos x = 0$. (Ответ: $y = 2e^x/(e^x(\cos x + \sin x) + C)$.)

5.30. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$. $\left(\text{Ответ: } y = \left(\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/4} + C\right)^2\sqrt{x^2 - 1}.\right)$

Решение типового варианта

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

▶ Преобразуем данное уравнение:

$$y(1-x^2)dy = -x(y^2+1)dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln C,$$
$$y^2+1 = C|x^2-1|, \quad y^2 = C|x^2-1|-1.$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является

$$y = \pm\sqrt{C|x^2-1|-1}. \quad ◀$$

2. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0.$

▶ Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{\sec^2 y dy}{\operatorname{tg} y} = -\frac{\sec^2 x dx}{\operatorname{tg} x}, \quad \int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = -\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x},$$
$$\ln|\operatorname{tg} y| = -\ln|\operatorname{tg} x| + \ln|C|, \quad \operatorname{tg} y = C/\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x = C,$$

т. е. получили общий интеграл дифференциального уравнения. ◀

3. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}.$

▶ Из данного уравнения находим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = xu(x)$. Далее находим:

$$y' = u'x + u, \quad u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}, \quad u'x + u = \frac{u-1}{1+u},$$
$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{-u^2-1}{u+1}, \quad x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Решаем его:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dx}{x},\ \int\frac{u+1}{u^2+1}du=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1}+\int\frac{du}{u^2+1}=-\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\operatorname{arctg}u=\ln|C/x|,\ \operatorname{arctg}u=\ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

т. е. нашли общий интеграл исходного уравнения. ◀

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy-e^{-x}dx+ydx-xdy=xydx$, $y(0)=\ln 5$.

▶ Преобразуем уравнение, выделив производную:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+e^{-x}-y}{1-x},\ \frac{dy}{dx}+\frac{1-x}{1-x}y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Уравнение $\frac{dy}{dx}+y=\frac{e^{-x}}{1-x}$ — линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$. Имеем:

$$y'=u'v+uv',\ u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v+u\left(\frac{dv}{dx}+v\right)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (1)$$

Находим функцию $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx}+v=0$:

$$\frac{dv}{dx}=-v,\ \frac{dv}{v}=-dx,\ \int\frac{dv}{v}=-\int dx,$$

$$\ln|v|=-x,\ v=e^{-x}.$$

Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (1):

$$\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x},\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-x},$$

$$du=\frac{dx}{1-x},\ \int du=\int\frac{dx}{1-x},\ u=-\ln|1-x|+\ln C,$$

$$u=\ln\frac{C}{|1-x|}.$$

Тогда

$$y = uv = e^{-x} \ln \frac{C}{|1-x|}$$

является общим решением исходного уравнения. Находим C, используя начальное условие: $y(0) = \ln C = \ln 5$, $C = 5$.

Окончательно получаем, что частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}. \quad ◀$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2.$$

▶ Преобразуем уравнение для того, чтобы определить его тип. Получим

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2}y^2.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$y' = u'v + v'u, \ u'v + v'u - \frac{x}{1+x^2}uv = \frac{x^2}{1+x^2}u^2v^2,$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{xv}{1+x^2}\right) = \frac{x^2u^2v^2}{1+x^2}. \qquad (1)$$

Находим $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx} - \frac{xv}{1+x^2} = 0$, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{xv}{1+x^2}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{xdx}{1+x^2}. \ \ln|v| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \ v = \sqrt{1+x^2}.$$

Полученное выражение для $v(x)$ подставляем в уравнение (1):

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{x^2u^2(1+x^2)}{1+x^2}, \ \frac{du}{u^2} = \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}, \ \int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} u_1(x)=x, \quad du_1=dx, \\ dv_1=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \ v_1=\sqrt{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Из последнего равенства получаем:

$$2\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \ln|x+\sqrt{1+x^2}| - 2C,$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - C.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - C,$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C,$$

$$u = \left(\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C\right)^{-1}.$$

Окончательно находим, что общее решение исходного уравнения определяется формулой

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-11.2

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

1.1. $y'''=\sin x$, $x_0=\pi/2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$. (*Ответ:* 1,23.)

1.2. $y'''=1/x$, $x_0=2$, $y(1)=1/4$, $y'(1)=y''(1)=0$. (*Ответ:* 0,38.)

1.3. $y''=1/\cos^2 x$, $x_0=\pi/3$, $y(0)=1$, $y'(0)=3/5$. (*Ответ:* 2,69.)

1.4. $y'''=6/x^3$, $x_0=2$, $y(1)=0$, $y'(1)=5$, $y''(1)=1$. (*Ответ:* 6,07.)

1.5. $y''=4\cos 2x$, $x_0=\pi/4$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$. (*Ответ:* 4,36.)

1.6. $y''=1/(1+x^2)$, $x_0=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$. (*Ответ:* 0,44.)

1.7. $xy'''=2$, $x_0=2$, $y(1)=1/2$, $y'(1)=y''(1)=0$. (*Ответ:* 0,77.)

1.8. $y'''=e^{2x}, x_0=\frac{1}{2}, y(0)=\frac{9}{8}, y'(0)=\frac{1}{4}, y''(0)=-\frac{1}{2}$. (*Ответ:* 1,22.)

1.9. $y'''=\cos^2 x$, $x_0=\pi$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1/8$, $y''(0)=0$. (*Ответ:* 3,58.)

1.10. $y''=1/\sqrt{1-x^2}, x_0=1, y(0)=2, y'(0)=3$. (*Ответ:* 5,57.)

1.11. $y''=\frac{1}{\sin^2 2x}$, $x_0=\frac{5}{4}\pi$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. (*Ответ:* 3,93.)

1.12. $y''=x+\sin x$, $x_0=5$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$. (*Ответ:* 5,31.)

1.13. $y''=\operatorname{arctg} x, x_0=1, y(0)=y'(0)=0$. (*Ответ:* 0,15.)

1.14. $y''=\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, $x_0=\pi/4$, $y(0)=1/2$, $y'(0)=0$. (*Ответ:* $-0{,}39$.)

1.15. $y'''=e^{x/2}+1, x_0=2, y(0)=8, y'(0)=5, y''(0)=2$. (*Ответ:* 25,08.)

1.16. $y''=x/e^{2x}, x_0=-1/2, y_0(0)=1/4, y'(0)=-1/4$. (*Ответ:* 0,34.)

1.17. $y''=\sin^2 3x$, $x_0=\pi/12$, $y(0)=-\pi^2/16$, $y'(0)=0$. (*Ответ:* $-0{,}01$.)

1.18. $y'''=x\sin x, x_0=\pi/2, y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=0$. (*Ответ:* 0,14.)

1.19. $y'''\sin^4 x=\sin 2x$, $x_0=5\pi/2$, $y(\pi/2)=\pi/2$, $y'(\pi/2)=1$, $y''(\pi/2)=-1$. (*Ответ:* 7,85.)

1.20. $y''=\cos x+e^{-x}$, $x_0=\pi$, $y(0)=-e^{-\pi}$, $y'(0)=1$. (*Ответ:* 1,00.)

1.21. $y''=\sin^3 x, x_0=2{,}5\pi, y(\pi/2)=-7/9, y'(\pi/2)=0$. (*Ответ:* $-0{,}78$.)

1.22. $y'''=\sqrt{x}-\sin 2x$, $x_0=1$, $y(0)=-1/8$, $y'(0)=\frac{1}{8}\cos 2$, $y''(0)=\frac{1}{2}$. (*Ответ:* 0,08.)

1.23. $y''=\frac{1}{\cos^2(x/2)}$, $x_0=4\pi$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. (*Ответ:* 12,56.)

1.24. $y'' = 2\sin x\cos^2 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = -5/9$, $y'(0) = -2/3$. (*Ответ:* $-1,00$.)

1.25. $y'' = 2\sin^2 x\cos x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1/9$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 4,14.)

1.26. $y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 1,90.)

1.27. $y'' = 2\cos x\sin^2 x - \cos^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* 3,47.)

1.28. $y'' = x - \ln x$, $x_0 = 2$, $y(1) = -5/12$, $y'(1) = 3/2$. (*Ответ:* 1,62.)

1.29. $y'' = 1/x^2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$. (*Ответ:* 4,31.)

1.30. $y''' = \cos 4x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 15/16$, $y''(0) = 0$. (*Ответ:* 5,14.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2.1. $(1 - x^2)y'' - xy = 2$. (*Ответ:* $y = \arcsin^2 x + C_1\arcsin x + C_2$.)

2.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. (*Ответ:* $9C_2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C$.)

2.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$. (*Ответ:* $y = C_1\ln x + 1/x + C_2$.)

2.4. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$. (*Ответ:* $y = C_1\sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$.)

2.5. $y''x\ln x = y'$. (*Ответ:* $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.)

2.6. $xy'' - y' = x^2e^x$. (*Ответ:* $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$.)

2.7. $y''x\ln x = 2y'$. (*Ответ:* $y = C_1(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C_2$.)

2.8. $x^2y'' + xy' = 1$. (*Ответ:* $y = (\ln^2 x)/2 + C_1\ln x + C_2$.)

2.9. $y'' = -x/y$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \frac{C_1^2}{2}\arcsin\frac{x}{C_1} + \frac{x}{2}\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2.\right)$

2.10. $xy'' = y'$. (*Ответ:* $y = C_1x^2/2 + C_2$.)

2.11. $y'' = y' + x$. (*Ответ:* $y = -x^2/2 - x + C_1e^x + C_2$.)

2.12. $xy'' = y' + x^2$. (*Ответ:* $y = x^3/3 + C_1x^2/2 + C_2$.)

2.13. $xy'' = y'\ln(y'/x)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \frac{x}{C_1}e^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2.\right)$

2.14. $xy'' + y' = \ln x$. (*Ответ:* $y = (x + C_1)\ln x - 2x + C_2$.)

2.15. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$. (*Ответ:* $y = -C_1\cos x - x + C_2$.)

2.16. $y'' + 2xy'^2 = 0$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{x - C_1}{x + C_1} + C_2.\right)$

2.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{2}{3C_1}(C_1x - 1)^{3/2} + \right.$
$\left. + C_2.\right)$

2.18. $y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$. (*Ответ:* $y = x^4/8 - x^3/6 +$
$+ C_1x^2/2 - C_1x + C_2$.)

2.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$. (*Ответ:* $y = -\sin x -$
$- C_1 \cos x + C_2x + C_3$.)

2.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$. (*Ответ:* $y = -\sin^3 x/3 +$
$+ C_1x/2 - C_1 \sin 2x/4 + C_2$.)

2.21. $y'' + 4y' = 2x^2$. (*Ответ:* $y = x^3/6 - x^2/8 + x/16 -$
$- C_1e^{-4x}/4 + C_2$.)

2.22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$. (*Ответ:* $y = 2e^x(x - 1) +$
$+ C_1x^2/2 + C_2$.)

2.23. $x(y'' + 1) + y' = 0$. (*Ответ:* $y = -x^2/4 + C_1 \ln x +$
$+ C_2$.)

2.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{1}{10} \sin 2x - \right.$
$\left. - \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{C_1}{4} e^{-4x} + C_2.\right)$

2.25. $y'' + y' = \sin x$. $\left(\text{Ответ: } y = -\frac{1}{2} \cos x - \right.$
$\left. - \frac{1}{2} \sin x - C_1e^{-x} + C_2.\right)$

2.26. $x^2y'' = y'^2$. (*Ответ:* $y = C_1x - C_1^2 \ln(x + C_1) + C_2$.)

2.27. $2xy''y' = y'^2 - 4$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{2}{3C_1}(C_1x + 4)^{3/2} + \right.$
$\left. + C_2.\right)$

2.28. $y'''x \ln x = y''$. $\left(\text{Ответ: } y = \frac{C_1x^2}{4}(2 \ln x - 3) + \right.$
$\left. + C_2x + C_3.\right)$

2.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$. (*Ответ:* $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$.)

2.30. $(1 + x^2)y'' = 2xy$. (*Ответ:* $y = C_1x^3/3 + C_1x + C_2$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

3.1. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = -\ln|1 -$
$- x|$, $y = 0$.)

3.2. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y =$
$= (1 \pm 3x/2)^{2/3}$, $y = 1$.)

3.3. $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = \sqrt{2x+1}$, $y = 1$.)

3.4. $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$. (*Ответ:* $x = y^3/3 - y - 2/3$, $y = 2$.)

3.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$. (*Ответ:* $y = \operatorname{arctg}(2 - 2x)$, $y = \pi/2$.)

3.6. $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2, y = 1.\right)$

3.7. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } x = \pm \ln(1 + \sqrt{2}) \pm \ln \frac{y}{1 + \sqrt{y^2 + 1}}.\right)$

3.8. $y'' = -1/(2y^3)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = \sqrt{2}$. (*Ответ:* $y = \sqrt{x\sqrt{2} + 1/4}$.)

3.9. $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $x = \pm \ln |e^y + \sqrt{e^y - 1}|$.)

3.10. $y''^2 = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = (x+2)^3/12$, $y = 2/3$.)

3.11. $2yy'' - y'^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1.\right)$

3.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 2 \sin x + 2$.)

3.13. $y'' = 1/y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $x = \sqrt{y^2 + 1}$.)

3.14. $yy'' - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = \frac{1}{1 - 2x}$, $y = 1$.)

3.15. $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } x = \ln \frac{2e^y - 1}{e^y}, y = 0.\right)$

3.16. $y'' + \frac{2}{1 - y} y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 - \frac{1}{x+1}, y = 0.\right)$

3.17. $y''(1 + y) = 5y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+y)^4}, y = 0.\right)$

3.18. $y''(2y+3)-2y'^2=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3.$ $\left(\textit{Ответ:}\ y=\frac{3}{2}(e^x-1),\ y=0.\right)$

3.19. $4y''^2=1+y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$ $\left(\textit{Ответ:}\ x=2\ln\frac{1}{2}|y+1+\sqrt{(y+1)^2-4}|.\right)$

3.20. $2y'^2=(y-1)y'',\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$ $\left(\textit{Ответ:}\ y=1+\frac{1}{1-2x},\ y=2.\right)$

3.21. $1+y'^2=yy',\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$ (*Ответ:* $x=\ln|y+\sqrt{y^2-1}|.$)

3.22. $y''+yy'^3=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=\sqrt[3]{6x+1},\ y=1.$)

3.23. $yy''-y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=e^{2x},\ y=1.$)

3.24. $yy''-y'^2=y^2\ln y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ (*Ответ:* $x=\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}|.$)

3.25. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ $\left(\textit{Ответ:}\ x=\frac{1}{1-\ln y}-1,\ y=1.\right)$

3.26. $y''(1+y)=y'^2+y',\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=2e^x,\ y=2.$)

3.27. $y''=y'/\sqrt{y},\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=(x+1)^2,\ y=1.$)

3.28. $y''=1(1+y'^2),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$ $\left(\textit{Ответ:}\ x=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y-1}.\right)$

3.29. $yy''-2yy'\ln y=y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ (*Ответ:* $y=e^{\operatorname{tg}x},\ y=1.$)

3.30. $y''=1/\sqrt{y},\ y(0)=y'(0)=0.$ $\left(\textit{Ответ:}\ x=\frac{2}{3}y^{3/4}.\right)$

4. Проинтегрировать следующие уравнения.

4.1. $\frac{1}{x}dy-\frac{y}{x^2}dx=0.$ (*Ответ:* $y/x=C.$)

4.2. $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$ (*Ответ:* $\operatorname{arctg}(x/y)=C.$)

4.3. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy.$ (*Ответ:* $x^2+y^2-xy+x-y=C.$)

4.4. $xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2 + y^2}{2} + \right.$
$\left. + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C.\right)$

4.5. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right) dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$. (Ответ:
$\sqrt{x^2 - y^2} - x = C$.)

4.6. $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C.\right)$

4.7. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.\right)$

4.8. $(1 - e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0$. (Ответ: $x + ye^{x/y} = C$.)

4.9. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$. (Ответ: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$.)

4.10. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$. (Ответ: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.)

4.11. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$. (Ответ: $\sqrt{x^2 + y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = C$.)

4.12. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0$.
$\left(\text{Ответ: } x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C.\right)$

4.13. $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$. $\left(\text{Ответ: } x^2 + \frac{x}{y} - \right.$
$\left. - \frac{y}{x} = C.\right)$

4.14. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$. $\left(\text{Ответ: }\right.$
$\left. \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} = C.\right)$

4.15. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$. (Ответ: $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$.)

4.16. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$. $\left(\text{Ответ: } \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 + y^2} = \right.$
$\left. = C.\right)$

4.17. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$. (*Ответ:* $xy(x^2+y^2)=C$.)

4.18. $y(x^2+y^2+a^2)dy+x(x^2-y^2-a^2)dx=0$. (*Ответ:* $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=C$.)

4.19. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$.)

4.20. $\frac{y+\sin x\cos^2 yx}{\cos^2 yx}dy+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}-\sin y\right)dy=0$.

(*Ответ:* $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$.)

4.21. $(3x^2-y\cos xy+y)dx+(x-x\cos xy)dy=0$.

(*Ответ:* $x^3-\sin xy+xy=C$.)

4.22. $\left(12x^3-e^{x/y}\frac{1}{y}\right)dx+\left(16y+\frac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy=0$.

(*Ответ:* $3x^4+8y^2-e^{x/y}=C$.)

4.23. $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}+2xy\sin x^2y+4\right)dx+\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+x^2\sin x^2y\right)dy=0$. (*Ответ:* $\sqrt{xy}-\cos x^2y+4x=C$.)

4.24. $y\cdot 3^{xy}\ln 3dx+(x\cdot 3^{xy}\ln 3-3)dy=0$. (*Ответ:* $3^{xy}-3y=C$.)

4.25. $\left(\frac{1}{x-y}+3x^2y^7\right)dx+\left(7x^3y^6-\frac{1}{x-y}\right)dy=0$. (*Ответ:* $\ln|x-y|+x^3y^7=C$.)

4.26. $\left(\frac{2y}{x^3}+y\cos xy\right)dx+\left(\frac{1}{x^2}+x\cos xy\right)dy=0$. (*Ответ:* $\sin xy-\frac{y}{x^2}=C$.)

4.27. $\left(\frac{y}{\sqrt{-x^2y^2}}-2x\right)dx+\frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=0$. (*Ответ:* $\arcsin xy-x^2=C$.)

4.28. $(5x^4y^4+28x^6)dx+(4x^5y^3-3y^2)dy=0$. (*Ответ:* $x^5y^4-y^3+4x^7=C$.)

4.29. $(2xe^{x^2+y^2}+2)dx+(2ye^{x^2+y^2}-3)dy=0$. (*Ответ:* $e^{x^2+y^2}+2x-3y=C$.)

4.30. $(3y^3\cos 3x+7)dx+(3y^2\sin 3x-2y)dy=0$. (*Ответ:* $y^3\sin 3x-y^2+7x+C$.)

5. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз.

5.1. $A(0,\ 2)$, $k=3$. (*Ответ:* $y=-2e^{3x}$.)

5.2. $A(0,\ 5)$, $k=7$. (*Ответ:* $y=5e^{7x}$.)

5.3. $A(-1,\ 3)$, $k=2$. (*Ответ:* $y=3e^{2x+2}$.)

5.4. $A(-2,\ 4)$, $k=6$. (*Ответ:* $y=4e^{6x+12}$.)

5.5. $A(-2,\ 1)$, $k=5$. (*Ответ:* $y=-e^{5x+10}$.)

5.6. $A(3,\ -2)$, $k=4$. (*Ответ:* $y=-2e^{4x-12}$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,\ y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

5.7. $A(2,\ 5)$, $n=8$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y=\dfrac{5}{256}x^8.\right)$

5.8. $A(3,\ -1)$, $n=3/2$. (*Ответ:* $y=-x\sqrt{x}/(3\sqrt{3})$.)

5.9. $A(-6,\ 4)$, $n=9$. (*Ответ:* $y=-x^9/11664$.)

5.10. $A(-8,\ -2)$, $n=3$. (*Ответ:* $y=x^3/256$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,\ y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

5.11. $A(0,\ 4)$, $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y=-\dfrac{1}{16}x^2+4.\right)$

5.12. $A(0,\ -8)$. (*Ответ:* $y=x^2/32-8$.)

5.13. $A(0,\ 1)$. (*Ответ:* $y=-x^2/4+1$.)

5.14. $A(0,\ -3)$. (*Ответ:* $y=x^2/12-3$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,\ y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания.

5.15. $A(2,\ 3)$. (*Ответ:* $(x-13/4)^2+y^2=169/16$.)

5.16. $A(-4,\ 1)$. (*Ответ:* $(x+17/8)^2+y^2=289/64$.)

5.17. $A(1,\ -2)$. (*Ответ:* $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$.)

5.18. $A(-2,\ -2)$. (*Ответ:* $(x+2)^2+y^2=4$.)

5.19. $A(4,\ -3)$. (*Ответ:* $(x-25/8)^2+y^2=625/64$.)

5.20. $A(5,\ 0)$. (*Ответ:* $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,\ y_0)$ и обладающей следующим свойством: отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

5.21. $A(4,\ 1)$. (*Ответ:* $y=17x/4-x^2$.)

5.22. $A(-2,\ 5)$. (*Ответ:* $y=-9x/2-x^2$.)

5.23. $A(3,\ -2)$. (*Ответ:* $y=7x/3-x^2$.)
5.24. $A(-2,\ -4)$. (*Ответ:* $y=4x-x^2$.)
5.25. $A(3,\ 0)$. (*Ответ:* $y=3x-x^2$.)
5.26. $A(2,\ 8)$. (*Ответ:* $y=6x-x^2$.)

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,\ y_0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной к кривой на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

5.27. $A(9,\ -4)$. $\left(\textit{Ответ: } y=\frac{5}{3}\sqrt{x}-x.\right)$

5.28. $A(4,\ 10)$. (*Ответ:* $y=7\sqrt{x}-x$.)

5.29. $A(18,\ -2)$. (*Ответ:* $y=4\sqrt{x}-x$.)

5.30. $A(1,\ -7)$. (*Ответ:* $y=-6\sqrt{x}-x$.)

Решение типового варианта

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''(x+2)^5=1,\ y(-1)=1/12,\ y'(-1)=-1/4$$

и вычислить значение полученной функции при $x=-3$ с точностью до двух знаков после запятой.

▶ Найдем общее решение данного уравнения (см. § 11.5, уравнение I типа):

$$y''=\frac{1}{(x+2)^5},\ y'=\int\frac{dx}{(x+2)^5}=-\frac{1}{4(x+2)^4}+C_1,$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4}+C_1\right)dx=\frac{1}{12(x+2)^3}+C_1x+C_2.$$

Воспользовавшись начальными условиями, определим значения C_1 и C_2:

$$y(-1)=1/12-C_1+C_2=1/12,\ C_2-C_1=0,$$
$$y'(-1)=-1/4+C_1=-1/4,\ C_1=0,\ C_2=0.$$

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y=1/(12(x+2)^3).$$

Вычислим значение функции $y(x)$ при $x=-3$:

$$y(-3)=\frac{1}{12(-3+2)^3}=-\frac{1}{12}=-0{,}08.\ ◀$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''(e^x+1)+y'=0$, допускающего понижение порядка.

▶ Данное уравнение является уравнением II типа (см. § 11.5 и пример 2). Поэтому сделаем подстановку $y'=z(x)$. Тогда $y''=\frac{dz}{dx}$ и

$$\frac{dz}{dx}(e^x+1)+z=0, \quad \frac{dz}{dx}(e^x+1)=-z,$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{e^x+1}, \quad \int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{e^x+1}.$$

Путем замены переменной $e^x+1=t$ находим:

$$\ln|z|=\ln(e^x+1)-\ln e^x+\ln C_1.$$

Потенцируя последнее выражение, получаем:

$$z=C_1\frac{e^x+1}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx}=C_1\frac{e^x+1}{e^x},$$

$$y=C_1\int\frac{e^x+1}{e^x}dx=C_1(x-e^{-x})+C_2,$$

т. е. нашли общее решение исходного уравнения. ◀

3. Найти решение дифференциального уравнения $y^3y''=-1$, допускающего понижение порядка, которое удовлетворяет заданным условиям: $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

▶ Данное уравнение относится к III типу (см. § 11.5 и пример 4). Поэтому понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$. Далее,

$$y^3p\frac{dp}{dy}=-1, \; pdp=-\frac{dy}{y^3},$$

$$\int pdp=-\int\frac{dy}{y^3}, \quad \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1,$$

$$p^2=\frac{1}{y^2}+2C_1, \quad p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1+2C_1y^2}}{y}, \quad dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}},$$

$$x=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}+C_2=\frac{\pm1}{4C_1}\int(1+2C_1y^2)^{-1/2}d(1+2C_1y^2),$$

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+C_1y^2}+C_2,$$

т. е. получили общее решение исходного уравнения. Определим значения C_1 и C_2, использовав начальные данные. При $x=1$, $y=1$ и $y'=0$ имеем:

$$1=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2,$$
$$0=\pm\sqrt{1+2C_1},$$

откуда $\quad 1+2C_1=0,\ C_1=-1/2,\ C_2=1.$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x=\mp\sqrt{1-y^2}+1.$$

Геометрически оно представляет собой левую или правую половину окружности $(x-1)^2+y^2=1$. ◀

4. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{1}{x}-y^3+4\right)dx+\left(-\frac{1}{y}-3xy^2\right)dy=0.$$

▶ Введем обозначения: $P(x,\ y)=1/x-y^3+4$, $Q(x,\ y)=-1/y-3xy^2$ (см. уравнение (11.26)). Тогда:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2.$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл находится по формуле (11.24):

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x}-y^3+4\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y}-3x_0y^2\right)dy=C_0.$$

Имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}-\int\limits_{x_0}^{x}y^3dx+4\int\limits_{x_0}^{x}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}-3x_0\int\limits_{y_0}^{y}y^2dy=C_0,$$

$$\ln|x|\Big|_{x_0}^{x}-y^3x\Big|_{x_0}^{x}+4x\Big|_{x_0}^{x}-\ln|y|\Big|_{y_0}^{y}-3x_0\frac{y^3}{3}\Big|_{y_0}^{y}=C_0,$$

$$\ln|x|-\ln|x_0|-xy^3+x_0y^3+4x-4x_0-\ln|y|+$$
$$+\ln|y_0|-x_0y^3+x_0y_0^3=C_0,$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-xy^3+4x=C,$$

где $C=C_0+\ln\left|\dfrac{x_0}{y_0}\right|+4x_0-x_0y_0^3$. ◀

5. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 2)$, если известно, что площадь трапеции (рис. 11.3), ограниченной осями координат, любой касательной к кривой и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная 3.

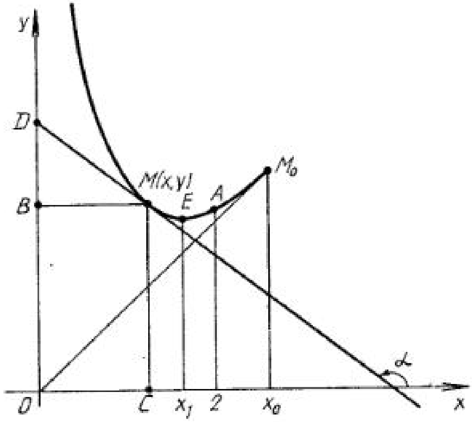


Рис. 11.3

▶ Имеем:

$$S_{DMCO}=\frac{|MC|+|DO|}{2}\cdot|OC|,$$

$$|MC|=y,\quad |DO|=\pm|DB|+|BO|=\pm|DB|+|MC|=\pm|DB|+y,$$

$$|OC|=x,\quad \pm|DB|=-|BM|\operatorname{tg}\alpha=-|BM|y'=-xy',$$

где перед $|DB|$ ставится знак «+», если $y'=\operatorname{tg}\alpha<0$ ($x<x_1$, см. рис. 11.3), и знак «—», если $y'=\operatorname{tg}\alpha>0$ ($x>x_1$). Поэтому в обоих случаях $|DO|=-xy'+y$. Далее находим:

$$S_{DMCO}=\frac{y-xy'+y}{2}x=3,\ -\frac{1}{2}x^2y'+xy=3,$$

$$-x^2y'+2xy=6,\ y'-\frac{2}{x}y=-\frac{6}{x^2},\ x\neq0.$$

Получили линейное уравнение первого порядка. Решаем его:

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',\ u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=-\frac{6}{x^2},$$

$$u'v+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2v}{x}\right)=-\frac{6}{x^2}. \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2v}{x}=0,\ \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=2\ln|x|,\ v=x^2.$$

Подставим найденное выражение для $v=x^2$ в уравнение (1): $u'x^2=-6/x^2$. Отсюда находим u:

$$u'=-\frac{6}{x^4},\ u=-6\int\frac{dx}{x^4}=\frac{2}{x^3}+C.$$

Тогда

$$y=uv=\left(\frac{2}{x^3}+C\right)x^2=\frac{2}{x}+Cx^2.$$

Так как кривая проходит через точку $A(2, 2)$, то $2=$ $=2/2+4C$, $C=1/4$. Искомая кривая имеет уравнение $y=\frac{2}{x}+\frac{x^2}{4}$, $0<x\leqslant x_0=\sqrt[3]{16}$. Она изображена на рис. 11.3. При $x_1=\sqrt[3]{4}$ имеем точку минимума. ◀

ИДЗ-11.3

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1

1.1. а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''+3y'+2y=0$.

1.2. а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''+9y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$.

1.3. а) $y''-4y'=0$; б) $y''-4y'+13y=0$; в) $y''-3y'+2y=0$.

1.4. а) $y''-5y'+6y=0$; б) $y''+3y'=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

1.5. а) $y''-2y'+10y=0$; б) $y''+y'-2y=0$; в) $y''-2y'=0$.

1.6. а) $y''-4y=0$; б) $y''+2y'+17y=0$; в) $y''-y'-12y=0$.

1.7. а) $y''+y'-6y=0$; б) $y''+9y'=0$; в) $y''-4y'+20y=0$.

1.8. а) $y''-49y=0$; б) $y''-4y'+5y=0$; в) $y''+2y'-3y=0$.

1.9. а) $y''+7y'=0$; б) $y''-5y'+4y=0$; в) $y''+16y=0$.

1.10. а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+4y'+5y=0$;

в) $y'' + 5y' = 0$.

1.11. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

1.12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y = 0$.

1.13. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$;

1.14. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

1.15. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$.

1.16. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.

1.17. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1.18. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

1.19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$.

1.20. а) $y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

1.21. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1.22. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$.

1.23. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$.

1.24. а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

1.25. а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.

1.26. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

1.27. а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

1.28. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

1.29. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$.

1.30. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

2

2.1. $y'' + y' = 2x - 1$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$.)

2.2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$. (*Ответ:* $y =$

$= e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} \cos 2x.)$

2.3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + 3 \cos 2x$.)

2.4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}$.)

2.5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{x} + Ce^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$.)

2.6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$.)

2.7. $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x$. (*Ответ:* $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 + 2x) \cos x$.)

2.8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$. (*Ответ:* $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{3x}$.)

2.9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 6 \cos x + \sin x$.)

2.10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^{x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + (3x - 1)e^{x}$.)

2.11. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 3e^{2x}$.)

2.12. $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x} + \cos x - 2 \sin x$.)

2.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x} + 3x^4 - x^2$.)

2.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$. (*Ответ:* $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{5} e^{5x}$.)

2.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} + 3e^{-2x}$.)

2.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$. (*Ответ:* $y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1$.)

2.17. $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$. (*Ответ:* $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\cos x - 2 \sin x)$.)

2.18. $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x$.)

2.19. $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$. (*Ответ:* $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4 \cos 2x - 3 \sin 2x$.)

2.20. $y'' + 5y' = 39 \cos 3x - 105 \sin 3x$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 4 \cos 3x + 5 \sin 3x$.)

2.21. $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$. (*Ответ:* $y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 5 \cos 5x + \sin 5x$.)

2.22. $y'' - 4y' + 5y = (24 \sin x + 8 \cos x)e^{-2x}$. (*Ответ:* $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(\cos x + \sin x)$.)

2.23. $y'' + 16y = 8 \cos 4x$. (*Ответ:* $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x \sin 4x$.)

2.24. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$. (*Ответ:* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x^4 - 3$.)

2.25. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$. (*Ответ:* $y = e^{6x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{2} e^{6x}$.)

2.26. $y'' + 4y' = e^x(24 \cos 2x + 2 \sin 2x)$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 2e^x \sin 2x$.)

2.27. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}$.)

2.28. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$. (*Ответ:* $y = e^{-x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x) + x^2 - x + 2$.)

2.29. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/3} + e^{2x}$.)

2.30. $2y'' + 7y' + 3y = 222 \sin 3x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x/2} + 7 \cos 3x + 5 \sin 3x$.)

3

3.1. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$. (*Ответ:* $y = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{2x}$.)

3.2. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + (x - 1)e^{3x}$.)

3.3. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}$.)

3.4. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{2x} + 4x^3 + 3x^2 + 3x$.)

3.5. $y'' - 6y' + 34y = 18 \cos 5x + 60 \sin 5x$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 2 \cos 5x$.)

3.6. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{2x} + (x^2 + x)e^{2x}$.)

3.7. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4x^3 - 2x$.)

3.8. $y'' - 4y' = 8 - 16x$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x$.)

3.9. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x$.)

3.10. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$. (*Ответ:* $y = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \sin 2x$.)

3.11. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x} \sin 2x$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2e^{-3x} \cos 2x$.)

3.12. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + (x^3 - x)e^x$.)

3.13. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}$.)

3.14. $y'' + 3y' = 10 - 6x$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - x^2 + 4x$.)

3.15. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$. (*Ответ:* $y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} - 8x^3 + 4x$.)

3.16. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 3\cos 4x - \sin 4x$.)

3.17. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2 - 8x + 7$.)

3.18. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + (2x^3 - 5x^2)e^{-x}$.)

3.19. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - (3x^2 + x)e^{2x}$.)

3.20. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + 2e^{3x}$.)

3.21. $y'' + 16y = 80e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + 4e^{2x}$.)

3.22. $y'' + 4y' = 15e^x$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2e^{-4x} + 3e^x$.)

3.23. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + 3\sin x - 2\cos x$.)

3.24. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + (3x^3 + 4x^2)e^{-x}$.)

3.25. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{7x} + C_2xe^{7x} + 2\cos 7x$.)

3.26. $y'' + 9y = 10e^{3x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + e^{3x}$.)

3.27. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + 3\cos x + 4\sin x$.)

3.28. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x/3} + C_2e^{2x} + \cos 2x - 2\sin 2x$.)

3.29. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + e^{-x}$.)

3.30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{x/4} + C_2e^{-x} + 2\sin x - \cos x$.)

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

4.1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = -2e^x - 4xe^x + 3\sin 2x$.)

4.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5$.)

4.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. (*Ответ:* $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x$.)

4.4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(2\cos 4x - 3\sin 4x) + \sin 4x$.)

4.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$. (*Ответ:* $y = 3e^{7x}\sin 2x + x^3 + x$.)

4.6. $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$. (*Ответ:* $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x\cos 4x$.)

4.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = e^{2x}(\cos 4x - 1/4\sin 4x) + xe^{2x}$.)

4.8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. (*Ответ:* $y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos 2x$.)

4.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* $y = 4\cos x + 2\sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2$.)

4.10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. (*Ответ:* $y = e^x - e^{-x} + (4x^2 - 3x)e^{-x}$.)

4.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = -2e^{-4x} - 6xe^{-4x} + x^2 - 2x + 5$.)

4.12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$. $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^{-5x}(\cos 3x + 2\sin 3x) - e^{-5x}$.)

4.13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x\cos 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(4\cos 4x - 3\sin 4x) + 2x\sin 3x$.)

4.14. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. (*Ответ:* $y = 2\cos 5x - \sin 5x + e^x\cos 5x$.)

4.15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^{-x}(2\cos 2x + 3\sin 2x) + 2xe^{-x}\cos 2x$.)

4.16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = 3e^{5x} - 2xe^{5x} + x^2e^{5x}$.)

4.17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. (*Ответ:* $y = e^{3x} + e^{-4x} + (2x + 1)e^{4x}$.)

4.18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = e^x(2\cos 2x - \sin 2x) + x^2 + 2x - 2$.)

4.19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* $y = 4xe^{-4x} + x^3 - x + 1$.)

4.20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^x\sin 6x + 3xe^x\sin 6x$.)

4.21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 14$. (*Ответ:* $y = 2e^{8x} - 3 + 4x^4 - 2x$.)

4.22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \cos 6x + 8\sin 6x + 2x^3 - 2x$.)

4.23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 4e^{-3x} - 7 + (4x + 3)e^{2x}$.)

4.24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x$.)

4.25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 3 + 2e^{-8x} - x^4 + 3x^3$.)

4.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. (*Ответ:* $y = e^x + 2e^{2x} - \cos x + 2\sin x$.)

4.27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2$.)

4.28. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$.)

4.29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

(*Ответ:* $y=2e^{-2x}+e^{-3x}-5\cos 2x+\sin 2x$.)

4.30. $y''-4y=8e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-8$. (*Ответ:* $y=3e^{-2x}-2e^{2x}+2xe^{2x}$.)

5. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$.

5.1. $2y''-7y'+3y=f(x)$; а) $f(x)=(2x+1)e^{3x}$; б) $f(x)=\cos 3x$.

5.2. $3y''-7y'+2y=f(x)$; а) $f(x)=3xe^{2x}$; б) $f(x)=\sin 2x-3\cos 2x$.

5.3. $2y''+y'-y=f(x)$; а) $f(x)=(x^2-5)e^{-x}$; б) $f(x)=x\sin x$.

5.4. $2y''-9y'+4y=f(x)$; а) $f(x)=-2e^{4x}$; б) $f(x)=e^x\cos 4x$.

5.5. $y''+49y=f(x)$; а) $f(x)=x^3+4x$; б) $f(x)=3\sin 7x$.

5.6. $3y''+10y'+3y=f(x)$; а) $f(x)=e^{-3x}$; б) $f(x)=2\cos 3x-\sin 3x$.

5.7. $y''-3y'+2y=f(x)$; а) $f(x)=x+2e^x$; б) $f(x)=3\cos 4x$.

5.8. $y''-4y'+4y=f(x)$; а) $f(x)=\sin 2x+2e^x$; б) $f(x)=x^2-4$.

5.9. $y''-y'+y=f(x)$; а) $f(x)=e^x\cos x$; б) $f(x)=7x+2$.

5.10. $y''-3y'=f(x)$; а) $f(x)=2x^2-5x$; б) $f(x)=e^{-x}\sin 2x$.

5.11. $y''+3y'-4y=f(x)$; а) $f(x)=3xe^{-4x}$; б) $f(x)=x\sin x$.

5.12. $y''+36y=f(x)$; а) $f(x)=4xe^{-x}$; б) $f(x)=2\sin 6x$.

5.13. $y''-6y'+9y=f(x)$; а) $f(x)=(x-2)e^{3x}$; б) $f(x)=4\cos x$.

5.14. $4y''-5y'+y=f(x)$; а) $f(x)=(4x+2)e^x$; б) $f(x)=e^x\sin 3x$.

5.15. $4y''+7y'-2y=f(x)$; а) $f(x)=3e^{-2x}$; б) $f(x)=(x-1)\cos 2x$.

5.16. $y''-y'-6y=f(x)$; а) $f(x)=2xe^{3x}$; б) $f(x)=9\cos x-\sin x$.

5.17. $y''-16y=f(x)$; а) $f(x)=-3e^{4x}$; б) $f(x)=\cos x-4\sin x$.

5.18. $y''-4y'=f(x)$; а) $f(x)=(x-2)e^{4x}$; б) $f(x)=3\cos 4x$.

5.19. $y''-2y'+2y=f(x)$; а) $f(x)=(2x-3)e^{4x}$; б) $f(x)=e^x\sin x$.

5.20. $5y''-6y'+y=f(x)$; а) $f(x)=x^2e^x$; б) $f(x)=\cos x-\sin x$.

5.21. $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 - 2x$; б) $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$.

5.22. $y'' - 2y' - 15y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 5x$.

5.23. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^3 - 4x$; б) $f(x) = 2e^{3x}\cos x$.

5.24. $y'' - 7y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{3x} + 2e^x$; б) $f(x) = 3x\sin 2x$.

5.25. $y'' + 9y' = f(x)$; а) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; б) $f(x) = xe^{2x}\sin x$.

5.26. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = -2xe^x$; б) $f(x) = x\cos 2x - \sin 2x$.

5.27. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (3x - 7)e^{-x}$; б) $f(x) = \cos x - 3\sin x$.

5.28. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{4x}$; б) $f(x) = \cos 4x + 2\sin 4x$.

5.29. $y'' + y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$. б) $f(x) = 3x\cos 2x$.

5.30. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2\sin 2x$.

Решение типового варианта

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. а) $4y'' - 11y' + 6y = 0$; б) $4y'' - 4y' + y = 0$; в) $y'' - 2y' + 37y = 0$.

▶ Для каждого из данных уравнений составляем характеристическое уравнение и решаем его. По виду полученных корней характеристического уравнения (см. формулу (11.48) и пример 5 из § 11.6) записываем общее решение дифференциального уравнения:

а) $4\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, корни $\lambda_1 = 3/4$, $\lambda_2 = 2$ — действительные различные, поэтому общее решение уравнения

$$y = C_1e^{3x/4} + C_2e^{2x};$$

б) $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ — действительные равные, следовательно, общее решение уравнения

$$y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2};$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$, корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$ — комплексно-сопряженные, поэтому общее решение уравнения

$$y = e^x(C_1\cos 6x + C_2\sin 6x). \blacktriangleleft$$

2. $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

▶ Характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda-4=0$ имеет корни $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$\tilde{y}=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}.$$

По функции $f(x)=6xe^{-x}$, стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения (см. формулу (11.50)):

$$y^*=(Ax+B)e^{-x}x=(Ax^2+Bx)e^{-x}.$$

Выражение $(Ax+B)e^{-x}$ домножили на x, так как $z=a+ib=-1$ является корнем характеристического уравнения. Коэффициенты A и B определяем методом неопределенных коэффициентов. Для этого находим:

$$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^{-x}-(Ax^2+Bx)e^{-x},$$
$$y^{*\prime\prime}=2Ae^{-x}+(Ax^2+Bx)e^{-x}-2(2Ax+B)e^{-x}.$$

Подставим найденные выражения для $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и, разделив обе его части на e^{-x}, приравняем коэффициенты при x^2, x и x^0. Получим систему, из которой найдем A и B. Таким образом, в соответствии с изложенным, имеем:

$$2A+Ax^2+Bx-4Ax-2B-6Ax-3B+3Ax^2+$$
$$+3Bx-4Ax^2-4Bx=6x,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+3A-4A=0, \\ x & B-4A-6A+3B-4B=6, \\ x^0 & 2A-2B-3B=0, \end{array}\Bigg\}$$

откуда $A=-3/5$, $B=-6/25$. Тогда

$$y^*=-\left(\frac{3}{5}x^2+\frac{6}{25}x\right)e^{-x}$$

и общее решение данного неоднородного уравнения определяется формулой

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}-\left(\frac{3}{5}x^2+\frac{6}{25}x\right)e^{-x}. \blacktriangleleft$$

3. $y''+y'=5x+\cos 2x$.

▶ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2+\lambda=0$: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}=C_1+C_2e^{-x}.$$

Функция $f(x)=5x+\cos 2x$, стоящая в правой части уравнения, представляет собой сумму функций $f_1(x) = 5x$ и $f_2(x) = \cos 2x$. Им соответствуют два частных решения:

$$y_1^* = Ax^2 + Bx,$$
$$y_2^* = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x,$$

т. е. $y^* = y_1^* + y_2^*$. Находим:

$$y^{*\prime} = 2Ax + B - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x,$$
$$y^{*\prime\prime} = 2A - 4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x.$$

Подставляем выражения для $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты A, B, A_1, B_1:

$$2A - 4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x + 2Ax + B - 2A_1 \sin 2x + \\ + 2B_1 \cos 2x = 5x + \cos 2x,$$

$$\begin{array}{r|l} x & \left.\begin{array}{l} 2A = 5, \\ 2A + B = 0, \end{array}\right\} \\ x^0 & \\ \cos 2x & \left.\begin{array}{l} -4A_1 + 2B_1 = 1 \\ -2A_1 - 4B_1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} 10B_1 = 1, \\ A_1 = -2B_1, \end{array}\right\} \\ \sin 2x & \end{array}$$

откуда $A = 5/2$, $B = -5$, $A_1 = -1/5$, $B_1 = 1/10$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

а его общее решение —

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \\ + \frac{1}{10}\sin 2x. \blacktriangleleft$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям: $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$.

▶ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 16 = 0$ имеет мнимые корни: $\lambda_{1,2} = \pm 4i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения определяется формулой

$$\tilde{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x,$$

а частное его решение имеет вид

$$y^* = (Ax + B)e^{-x}.$$

Находим:

$$y^{*\prime} = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}, \quad y^{*\prime\prime} = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}.$$

Подставим выражения $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и из полученного тождества

$$-2A + Ax + B + 16Ax + 16B = 34x + 13$$

найдем $A = 2$, $B = 1$. Тогда

$$y^* = (2x+1)e^{-x}$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

Используя начальные условия $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$, составляем систему для вычисления значений C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= -1 = C_1 + 1, \\ y'(0) &= 5 = 4C_2 + 2 - 1, \end{aligned}\right\}$$

решение которой: $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Подставив значения C_1 и C_2 в общее решение, найдем частное решение исходного уравнения:

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x+1)e^{-x}. \blacktriangleleft$$

5. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 9y = f(x)$ по виду функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = (5 - x)e^{3x}$; б) $f(x) = x \sin 2x$.

▶ Находим корни характеристического уравнения: $\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$.

а) Так как $f(x) = (5 - x)e^{3x}$, то частное решение имеет вид

$$y^* = (Ax + B)e^{3x}x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

Здесь множитель x появляется потому, что $z = a + ib = 3$ и $k = 1$;

б) Поскольку $f(x) = x \sin 2x$, то

$$y^* = (A_1x + B_1)\cos 2x + (A_2x + B_2)\sin 2x. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-11.4

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

1.1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 30$. (*Ответ:* $y = 5 - 6e^x + e^{6x}$.)

1.2. $y^{\mathrm{V}} - 9y''' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{\mathrm{IV}}(0) = 0$. (*Ответ:* $y = 1 - x$.)

1.3. $y''' - y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$. (*Ответ:* $y = 1 + x - e^x$.)

1.4. $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (*Ответ*: $y = e^{2x} - 1$.)

1.5. $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$. (*Ответ*: $y = 1 - \cos x - \sin x$.)

1.6. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (*Ответ*: $y = -4 + e^{-x} + 3e^{x}$.)

1.7. $y^{\text{IV}} + 2y''' - 2y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 8$. (*Ответ*: $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^{x}$.)

1.8. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -14$. (*Ответ*: $y = e^{x} - 3xe^{x} - e^{-3x}$.)

1.9. $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$. (*Ответ*: $y = 1 - e^{-x}$.)

1.10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}.\right)$

1.11. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$. (*Ответ*: $1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$.)

1.12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. (*Ответ*: $y = -e^{-x}(1 + x)$.)

1.13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$, $y(0) = -2{,}5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y = -\frac{45}{26}e^{2x} - \frac{10}{13}\cos 2x + \frac{15}{13}\sin 2x.\right)$

1.14. $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = -18$. (*Ответ*: $y = -2 + 2\cos 3x + 3\sin 3x$.)

1.15. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 133$. (*Ответ*: $y = 10 - 11e^{x} + e^{12x}$.)

1.16. $y^{\text{IV}} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } y = -e^{x} - \frac{7}{3}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}.\right)$

1.17. $y^{\text{IV}} - 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 24$. (*Ответ*: $y = -2e^{x} + e^{-x} + e^{3x}$.)

1.18. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$. (*Ответ*: $y = \sin x$.)

1.19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$. (*Ответ*: $y = 2x^2e^{x}$.)

1.20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$. (*Ответ*: $y = -2e^{x} + \cos 2x + \sin 2x$.)

1.21. $y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 2$. (*Ответ*: $y = 1 - e^{x} + xe^{x}$.)

1.22. $y^{\text{IV}} - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -4$. (*Ответ*: $y = e^{-x} - e^{x} + 2\sin x$.)

1.23. $y^{\text{IV}} - 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$,

$y'''(0) = -8$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x.\right)$

1.24. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 12$. (*Ответ:* $y = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-x}$.)

1.25. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = -9$. (*Ответ:* $y = \cos 3x - \sin 3x$.)

1.26. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 27$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - e^{3x} + xe^{3x}.\right)$

1.27. $y''' + 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -3$. (*Ответ:* $y = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$.)

1.28. $y''' - y'' - y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. (*Ответ:* $y = -4e^x + 7xe^x + 3e^{-x}$.)

1.29. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = -16$. (*Ответ:* $y = 2\sin 2x + \cos x$.)

1.30. $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -9$, $y'''(0) = -27$. (*Ответ:* $y = \cos 3x + \sin 3x$.)

2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

2.1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^t, \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^t. \end{cases}\right)$

2.2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{t}, \\ y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}. \end{cases}\right)$

2.3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}, \\ y = \frac{1}{2}C_1e^{3t} - \frac{1}{4}C_2e^{-3t}. \end{cases}\right)$

2.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^{-3t} + C_2e^t, \\ y = \frac{1}{3}C_1e^{-3t} - C_2e^t. \end{cases}\right)$

2.5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2e^{5t}. \end{cases}\right)$

2.6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = 3C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{cases}\right)$

2.7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t}, \\ y = 3C_1e^{-t} + C_2e^{5t}. \end{cases}\right)$

2.8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t}, \\ y = -2C_1 - 3C_2e^{-t}. \end{cases}\right)$

2.9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases} \right)$

2.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - \frac{3}{2} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$

2.11. $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^t + C_2. \end{cases} \right)$

2.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t}. \end{cases} \right)$

2.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t} \end{cases} \right)$

2.14. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases} \right)$

2.15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + \frac{5}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

2.16. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

2.17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$

2.18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

2.19. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

2.20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

2.21. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

2.22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{8t}. \end{cases} \right)$

2.23. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ $\left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

2.24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t}, \\ y = -\frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{6t}. \end{cases} \right)$

2.25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -\frac{3}{4} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$

2.26. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

2.27. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$

2.28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t}. \end{cases} \right)$

2.29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ u' = -8x - 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

2.30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Ответ:} \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}. \end{cases} \right)$

3. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

3.1. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \left(-\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + e_1 \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + e_2 \right) e^x. \right)$

3.2. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \left(\frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + C_2 \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x + C_2 \right) \sin 2x. \right)$

3.3. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$. $(\textit{Ответ:}\ y = (\ln|\cos x| + C_1) e^{2x} \cos x + (x + C_2) e^{2x} \sin x.)$

3.4. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln|\cos x| + C_2) \cos x + (x - \operatorname{tg} x + C_3) \sin x. \right)$

3.5. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ y = \left(-\frac{1}{3} x + C_1 \right) \cos 3x + \left(\frac{1}{9} \ln|\sin 3x| + C_2 \right) \sin 3x. \right)$

3.6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$. $\Big($*Ответ:* $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x}{4}e^x - \frac{1}{4}e^x - xe^{-x} + xe^{-x}\ln x.\Big)$

3.7. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$. (*Ответ:* $y = (\ln|\cos x| + C_1)e^{-x}\cos x + (x + C_2)e^{-x}\sin x.$)

3.8. $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$. $\Big($*Ответ:* $y = \Big(\ln\Big(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\Big) + C_1\Big)e^x\cos x + \Big(\frac{1}{\sin x} + C_2\Big)e^x\sin x.\Big)$

3.9. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctg} x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + e^{-x}\sin x \cdot \ln|\operatorname{tg}(x/2)|.$)

3.10. $y'' - 2y' + 2y = e^x/\sin x$. (*Ответ:* $y = (-x + C_1)e^x\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)e^x\sin x.$)

3.11. $y'' - 2y' + y = e^x/x^2$. (*Ответ:* $y = (-\ln x + C_1)e^x + (-1/x + C_2)xe^x.$)

3.12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. (*Ответ:* $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x \cdot \ln|\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)|.$)

3.13. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$. $\Big($*Ответ:* $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln|\operatorname{tg} x|.\Big)$

3.14. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$. (*Ответ:* $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg}(x/2)|.$)

3.15. $y'' - 2y' + y = e^x/x$. (*Ответ:* $y = (-x + C_1)e^x + (\ln x + C_2)xe^x.$)

3.16. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$. (*Ответ:* $y = (-x + C_1)e^{-x} + (\ln x + C_2)xe^{-x}.$)

3.17. $y'' + y = 1/\cos x$. (*Ответ:* $y = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.$)

3.18. $y'' + y = 1/\sin x$. (*Ответ:* $y = (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x.$)

3.19. $y'' + 4y = 1/\sin 2x$. $\Big($*Ответ:* $y = \Big(-\frac{x}{2} + C_1\Big)\cos 2x + \Big(\frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2\Big)\sin 2x.\Big)$

3.20. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$. $\Big($*Ответ:* $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big)\Big|\cos 2x.\Big)$

3.21. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^3$. (*Ответ:* $y = (C_1 + C_2x + 1/(2x))e^{-2x}.$)

3.22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x^3$. (*Ответ:* $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{2x}/2x.$)

3.23. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$. $\Big($*Ответ:* $y=$
$=\left(-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}+2\sqrt{(x+1)^3}+C_1\right)e^{-x}+(2\sqrt{(x+1)^3}+$
$+C_2)xe^{-x}.\Big)$

3.24. $y''+y=-\mathrm{ctg}^2\,x$. (*Ответ:* $y=C_1\cos x+$
$+C_2\sin x+\cos x\cdot\ln|\mathrm{tg}(x/2)|+2.$)

3.25. $y''-y'=e^{2x}\cdot\cos(e^x)$. (*Ответ:* $y=C_1+C_2e^x-$
$-\cos(e^x)$.)

3.26. $y''-y'=e^{2x}\sin(e^x)$. (*Ответ:* $y=C_1+C_2e^x-$
$-\sin(e^x)$.)

3.27. $y''+y=\mathrm{tg}^2\,x$. $\Big($*Ответ:* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$
$+\sin x\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-2.\Big)$

3.28. $y''+y=2/\sin^2 x$. (*Ответ:* $y=C_1\cos x+$
$+C_2\sin x+2\cos x\ln|\mathrm{ctg}(x/2)|-2.$)

3.29. $y''+2y'+5y=\frac{e^{-x}}{\sin 2x}$. $\Big($*Ответ:* $y=\Big(-\frac{x}{2}+$
$+C_1\Big)e^{-x}\cos 2x+\left(\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C_2\right)e^{-x}\sin 2x.\Big)$

3.30. $y''+9y=\frac{1}{\cos 3x}$. $\Big($*Ответ:* $y=\Big(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+$
$+C_1\Big)\cos 3x+\left(\frac{x}{3}+C_2\right)\sin 3x.\Big)$

4. Решить следующие задачи.

4.1. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равна b^2. (*Ответ:* $y=2b^2/(C\pm x)$.)

4.2. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. (*Ответ:* $y=C(x^2+y^2)$.)

4.3. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной к кривой и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3a^2$. (*Ответ:* $y=Cx^2+2a^2/x$.)

4.4. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2. (*Ответ:* $x = a^2/y + Cy$.)

4.5. Записать уравнение кривой, если известно, что расстояние от любой касательной до начала координат равно абсциссе точки касания. (*Ответ:* $Cx = x^2 + y^2$.)

4.6. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания. (*Ответ:* $y = Cx^2$.)

4.7. Записать уравнения кривых, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a. (*Ответ:* $\pm x = C + a \ln y - y$ $(0 < y < a)$.)

4.8. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную 2/3 абсциссы точки касания. (*Ответ:* $y = Cx^3$.)

4.9. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равна $2l$. (*Ответ:* $x = C + l \ln(l \pm \pm \sqrt{l^2 - y^2}) \mp \sqrt{l^2 - y^2}$.)

4.10. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2,\ 4)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания. (*Ответ:* $y = 2\sqrt{3}x/\sqrt{x^2 - 1}$.)

4.11. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,\ 5)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания. (*Ответ:* $y = 3x \ln x + 5x$.)

4.12. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,\ 2)$ и обладающей следующим свойством: отношение ординаты любой ее точки к абсциссе этой точки пропорционально угловому коэффициенту касательной к искомой кривой, проведенной в той же точке. Коэффициент пропорциональности равен 3. (*Ответ:* $y^3 = 8x$.)

4.13. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2,\ -1)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания. Коэффициент пропорциональности равен 6. (*Ответ:* $y = e^{6x-12}$.)

4.14. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$, если известно, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. (*Ответ:* $y = 2(y - x)^2$.)

4.15. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0, -2)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен утроенной ординате этой точки. (*Ответ:* $y = -2e^{3x}$.)

4.16. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания. (*Ответ:* $y^2 = Cx - x^2$.)

4.17. Записать уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат. (*Ответ:* $y = Cx^n$.)

4.18. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. (*Ответ:* $xy = C$.)

4.19. Записать уравнение кривой, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в какой-либо точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right).\right)$

4.20. Записать уравнение кривой, для которой произведение абсциссы какой-либо ее точки и длины отрезка, отсекаемого нормалью в этой точке на оси Oy, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат. (*Ответ:* $x^2 + y^2 = Cx^4$.)

4.21. Записать уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью Oy, касательной и радиусом-вектором точки касания, является равнобедренным. (*Ответ:* $x^2 + y^2 = Cy$, $y^2 = C^2 - 2Cx$, $xy = C$.)

4.22. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 0)$ и обладающую следующим свойством: отрезок касательной между точкой касания и осью Oy имеет постоянную длину, равную 2. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \pm y = \sqrt{4 - x^2} + \ln\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 + \sqrt{x - x^2}}.\right)$

4.23. Записать уравнение кривой, все касательные к которой проходят через начало координат. (*Ответ:* $y = Cx$.)

4.24. Записать уравнение кривой, каждая касательная к которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. (*Ответ:* $y = C/x + 1$.)

4.25. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: если через любую ее точку провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой на две части, причем площадь одной из них вдвое больше площади другой. (*Ответ:* $y = Cx^2$.)

4.26. Записать уравнение кривой, если касательная к ней отсекает на оси Oy отрезок, равный по длине $\frac{1}{n}$-й сумме координат точки касания. (*Ответ:* $y = Cx^{(n-1)/n} - x$.)

4.27. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Ox, равна y^2/x. (*Ответ:* $y = x\sqrt{2\ln(C/x)}$.)

4.28. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy, равна квадрату абсциссы точки касания. (*Ответ:* $y = Cx - x^2$.)

4.29. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Oy равна x^2/y. (*Ответ:* $C = x^2/(2y^2) + \ln y$.)

4.30. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси Oy под углом 45°. Любая ее касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный по длине квадрату ординаты точки касания. Записать уравнение данной кривой. (*Ответ:* $x = (5 - y)y$.)

Решение типового варианта

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = y'''(0) = 0.$$

▶ Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda^4 - 1 = 0,\ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Находим

$$y' = -C_1e^{-x} + C_2e^x - C_3\sin x + C_4\cos x,$$
$$y'' = C_1e^{-x} + C_2e^x - C_3\cos x - C_4\sin x,$$
$$y''' = -C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\sin x - C_4\cos x.$$

Используя начальные условия, составляем систему для определения значений C_1, C_2, C_3, C_4 и решаем ее:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 5,\\ -C_1 + C_2 + C_4 &= 3,\\ C_1 + C_2 - C_3 &= 0,\\ -C_1 + C_2 - C_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2C_1 + 2C_2 &= 5,\\ -2C_1 + 2C_2 &= 3,\end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1 = 1/2$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5/2$, $C_4 = 3/2$.

Частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} + 2e^x + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x. \blacktriangleleft$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x' &= -7x + y, & x &= x(t), & x' &= dx/dt,\\ y' &= -2x - 5y, & y &= y(t), & y' &= dy/dt \end{aligned}\right\}$$

двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

▶ а) Дифференцируем первое уравнение данной системы. Получаем: $x'' = -7x' + y'$. Затем заменяем в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения данной системы: $x'' = -7x' - 2x - 5y$. В последнем уравнении y заменяем выражением $y = x' + 7x$, найденным из первого уравнения системы. В итоге приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x),\ x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Решаем последнее уравнение известным методом (см. § 11.7):

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,\ \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36-37} = -6 \pm i,$$
$$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t).$$

Отсюда находим

$$x'' = -6e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-6t}(-C_1\sin t + {}$$
$${} + C_2\cos t.)$$

Подставляя полученные выражения для x и x' в $y=x'+$ $+7x$, имеем

$$y=-6e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+e^{-6t}(-C_1\sin t+$$
$$+C_2\cos t)+7e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t).$$

Следовательно, искомым решением являются функции:

$$x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t),$$
$$y=e^{-6t}(C_1(\cos t-\sin t)+C_2(\cos t+\sin t));$$

б) Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\begin{vmatrix}-7-\lambda & 1\\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad (7+\lambda)(5+\lambda)+2=0,$$

$$\lambda^2+12\lambda+37=0,\qquad \lambda_{1,2}=-6\pm i.$$

Для $\lambda_1=-6+i$ получаем систему (ср. с примером 2 из § 11.7):

$$\left.\begin{aligned}(-7+6-i)\alpha+\qquad\qquad &\beta=0,\\ -2\alpha\quad(-5+6-i)&\beta=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}-(1+i)\alpha\qquad+\qquad &\beta=0,\\ -2\alpha+(1-i)\qquad &\beta=0.\end{aligned}\right\}$$

Полагая $\alpha=1$, $\beta=1+i$, находим первое частное решение исходного уравнения:

$$x_1=e^{(-6+i)t},\ y_1=(1+i)e^{(-6+i)t}.$$

Для $\lambda_2=-6-i$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned}(-7+6+i)\alpha+\qquad\qquad &\beta=0,\\ -2\alpha+(-5+6+i)&\beta=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}(-1+i)\alpha+\qquad\qquad &\beta=0,\\ -2\alpha+\qquad (1+i)&\beta=0.\end{aligned}\right\}$$

Полагая $\alpha=1$ и $\beta=1-i$, получаем второе частное решение исходного уравнения:

$$x_2=e^{(-6-i)t},\ y_2=(1-i)e^{(-6-i)t}.$$

Переходим к новой фундаментальной системе решений по формулам:

$$\bar{x}_1=(x_1+x_2)/2,\quad \bar{x}_2=(x_1-x_2)/(2i),$$
$$\bar{y}_1=(y_1+y_2)/2,\quad \bar{y}_2=(y_1-y_2)/(2i).$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{(\alpha\pm\beta i)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t\pm i\sin\beta t),$$

находим:

$$\bar{x}_1 = e^{-6t}\cos t, \quad \bar{x}_2 = e^{-6t}\sin t,$$
$$\bar{y}_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t), \quad \bar{y}_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$x = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2, \; y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2,$$

т. е.

$$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t),$$
$$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)). \blacktriangleleft$$

3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

методом вариации произвольных постоянных.

▶ Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - y = 0, \; \lambda^2 - 1 = 0, \; \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1.$$

Общим решением однородного уравнения будет

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Считаем, что C_1 и C_2 — функции от x, т. е.

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x.$$

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы (см. систему (11.39))

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x), \end{aligned}\right\}$$

которая для данного уравнения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^x &= 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^x &= 2e^x/(e^x - 1). \end{aligned}\right\}$$

Находим из нее $C_2'(x)$, $C_1'(x)$, а затем и $C_2(x)$, $C_1(x)$:

$$2C_2'(x)e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{e^x - 1},$$

$$C_2(x) = \int\frac{dx}{e^x - 1} = \left|\begin{aligned} t = e^x, \quad x = \ln t, \\ dx = dt/t \end{aligned}\right| = \int\frac{dt}{t(t-1)} =$$

$$= \int\frac{dt}{t-1} - \int\frac{dt}{t} = \ln|t - 1| - \ln|t| + C_2 = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| +$$

$$+ C_2 = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2,$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = -e^{2x}/(e^x - 1),$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \ dt = e^x dx, \\ x = \ln t \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{tdt}{t-1} = -\int \frac{t-1+1}{t-1} dt = -t - \ln|t-1| + C_1 =$$

$$= -e^x - \ln|e^x - 1| + C_1.$$

Следовательно, согласно формуле (11.38), общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (-e^{-x} - \ln|e^x - 1| + C_1)e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2\right)e^x =$$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^x \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| - e^{-x}\ln|e^x - 1| - 1. \blacktriangleleft$$

4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $P(1, 2)$ и обладающей следующим свойством: площадь треугольника, образованного радиусом-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2.

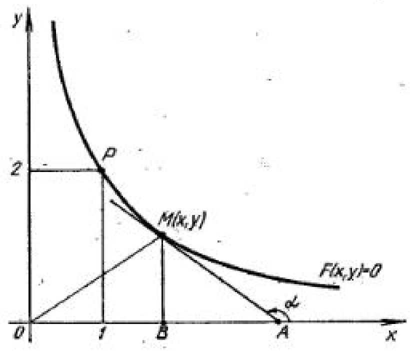


Рис. 11.4

$\blacktriangleright$ Как видно из рис. 11.4, $|OA| = |OB| + |AB| = x + |AB|$. Из треугольника BMA получаем:

$$\frac{|BA|}{y} = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad |BA| = -y \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$|BA| = -\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = -y\frac{dx}{dy}, \quad |OA| = |OB| + |BA| =$$

$$= x - y\frac{dx}{dy},$$

$$S_{OMA} = 0{,}5\,|OA|\,|MB| = 2.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для $|OA|$ и $|MB|$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)y = 2, \quad xy - y^2\frac{dx}{dy} = 4, \quad y^2\frac{dx}{dy} = xy - 4,$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2},$$

т. е. получили уравнение первого порядка, линейное относительно функции $x = x(y)$. Решаем его с помощью подстановки $x = uv$. Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{4}{y^2}, \quad u'v + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y}\right) = -\frac{4}{y^2},$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0, \ \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}, \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y}, \ \ln|v| = \ln|y|,$$

$$v = y, \quad \frac{du}{dy}y = -\frac{4}{y^2}, \quad du = -\frac{4dy}{y^3}, \quad u = \frac{2}{y^2} + C,$$

$$x = \left(\frac{2}{y^2} + C\right)y = Cy + \frac{2}{y}.$$

Искомая кривая проходит через точку $P(1, 2)$, поэтому $1 = 2C + 1$, $C = 0$. Следовательно, ее уравнение $x = 2/y$ или $xy = 2$, т. е. данная кривая — гипербола. ◀

11.9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 11

1. Ускорение локомотива прямо пропорционально силе тяги F и обратно пропорционально массе поезда m. Начальная скорость локомотива v_0, сила тяги $F = b - kv$, где v — скорость; b, k — постоянные величины. Найти силу тяги локомотива по истечении времени t, если в начальный момент времени при $t = 0$ $F = F_0 = b - kv_0$. (*Ответ:* $F = F_0e^{-kt/m}$.)

2. Стальная проволока длиной l и площадью поперечного сечения S растягивается с силой, значение которой постоянно возрастает до P. Найти работу силы растяжения, если удлинение проволоки определяется по формуле $\Delta l = k\frac{P}{F}l_0$, где k — коэффициент удлинения; l_0 — первоначальная длина проволоки. $\left(\textit{Ответ: } A = \frac{kl_0}{2F}P^2.\right)$

3. Моторная лодка движется по озеру со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. Через 40 с после выключения ее мотора скорость лодки уменьшается до $v_1=8$ км/ч. Определить скорость лодки через 2 мин после выключения мотора. (Сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости.) (*Ответ:* 1,28 км/ч.)

4. Наполненный водой цилиндрический сосуд высотой H и площадью дна S_1 имеет в дне отверстие площадью S_2. Определить время полного истечения воды через отверстие. (Скорость истечения определяется по формуле $v=\sqrt{2gh}$, где h — высота слоя воды в данный момент; g — ускорение свободного падения.) $\left(\textit{Ответ:}\ T=\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.\right)$

5. Концы каната цепного моста находятся на высоте $H=5$ м, а его середина — на высоте $h=4$ м от проезжей части моста. Длина моста $2l=20$ m. Найти кривую провисания каната. (*Ответ:* $y-4=x^2/100$.)

6. В куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Определить возраст горной породы, если известно, что период полураспада урана составляет $4{,}5\cdot10^9$ лет и при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. (Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных продуктов распада урана и свинца, который распадается гораздо быстрее.) (*Ответ:* $975\cdot10^6$ лет.)

7. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива — m, скорость истечения продуктов горения из ракеты — c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой ее тяжести и сопротивлением воздуха. (*Ответ:* $c\ln(M/m)$.)

8. С высоты 18 м над уровнем Земли брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 м/с. Найти высоту, на которой тело находится в момент времени t, как функцию времени. Определить наибольшую высоту подъема тела. $\left(\textit{Ответ:}\ S=h=-\frac{1}{2}gt^2+30t+18,\ h_{\text{наиб}}=63{,}9\ \text{м.}\right)$

9. Известно, что скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Температура тела в течение 20 мин снижается от 100 до 60 °С. Температура воздуха равна 20 °С. Определить время, за которое температура тела понизится до 25 °С. (*Ответ:* 1 ч 20 мин.)

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Контрольная работа «Неопределенные интегралы» (2 часа)

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx.$

1.2. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{7 + 2\cos x}}.$

1.3. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx.$

1.4. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx.$

1.5. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx.$

1.6. $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx.$

1.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}.$

1.8. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

1.9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}}.$

1.10. $\int \frac{x - 1}{x^3 + x} dx.$

1.11. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

1.12. $\int \frac{3x - 1}{4x^2 - 4x + 17} dx.$

1.13. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}.$

1.14. $\int \frac{x - 8}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx.$

1.15. $\int x^2 \cdot 2^x dx.$

1.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$

1.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}.$

1.18. $\int \frac{2^{\ln x}}{x\sqrt{1 + 4^{\ln x}}} dx.$

1.19. $\int \sin 5x \cos x dx.$

1.20. $\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$

1.21. $\int \frac{\sin 5x}{1 + \cos^2 5x} dx.$

1.22. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$

1.23. $\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx.$

1.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x - 7)}.$

1.25. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)(\operatorname{arctg} x - 3)}.$

1.26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)^3}.$

1.27. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-5}$.

1.28. $\int (x^2+3)e^{-2x}dx$.

1.29. $\int (x+2)\ln x dx$.

1.30. $\int \frac{81^x-3^x}{9^x}dx$.

2

2.1. $\int \arcsin x dx$.

2.2. $\int x\ln(x^2+1)dx$.

2.3. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

2.4. $\int \frac{5x+3}{3x^2+2x+1}dx$.

2.5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

2.6. $\int x^2e^{-x/2}dx$.

2.7. $\int x^2\cos 3x dx$.

2.8. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

2.9. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

2.10. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

2.11. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}dx$.

2.12. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$.

2.13. $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x+4}$.

2.14. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

2.15. $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2}dx$.

2.16. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

2.17. $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

2.18. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$.

2.19. $\int (1-x)\sin x dx$.

2.20. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

2.21. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$.

2.22. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$.

2.23. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

2.24. $\int (x^2+3)\cos x dx$.

2.25. $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+12}dx$.

2.26. $\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$.

2.27. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

2.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$.

2.29. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx$.

2.30. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+6x-3x^2}}dx$.

3

3.1. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx.$

3.2. $\int \frac{3x-13}{x^2-4x+8}dx.$

3.3. $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}.$

3.4. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

3.5. $\int x^3e^{x^4}dx.$

3.6. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+6x+1}}dx.$

3.7. $\int \frac{x+1}{4x^2-12x+3}dx.$

3.8. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

3.9. $\int \frac{dx}{4x^3-x}.$

3.10. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$

3.11. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

3.12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}.$

3.13. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx.$

3.14. $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx.$

3.15. $\int e^{-2x}\sin(e^{-2x})\,dx.$

3.16. $\int \frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}dx.$

3.17. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx.$

3.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3x^2-1}}.$

3.19. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

3.20. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2}dx.$

3.21. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx.$

3.22. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

3.23. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

3.24. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx.$

3.25. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx.$

3.26. $\int e^{2x}\sin 2x dx.$

3.27. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{4x+5-x^2}}dx.$

3.28. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}.$

3.29. $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}dx.$

3.30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

4

4.1. $\int \frac{x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$

4.2. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

4.3. $\int \frac{x^2dx}{9-x^4}$.

4.4. $\int \frac{dx}{x^3+4x-x^2-4}$.

4.5. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$.

4.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

4.7. $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2+2x+2}dx$.

4.8. $\int \frac{2x^2+1}{x^3+2x^2+2x}dx$.

4.9. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

4.10. $\int x^2 \cos 6x dx$.

4.11. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$.

4.12. $\int \frac{x-1}{x^3+8}dx$.

4.13. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

4.14. $\int \frac{x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$.

4.15. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

4.16. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+x+2)}$.

4.17. $\int \frac{dx}{5-4\sin x}$.

4.18. $\int x^2 \cdot 5^{x/2}dx$.

4.19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

4.20. $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x dx$.

4.21. $\int \frac{dx}{x^4-16}$.

4.22. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

4.23. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

4.24. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$.

4.25. $\int \frac{2-x}{(7-x)^3}dx$.

4.26. $\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$.

4.27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

4.28. $\int \frac{dx}{x^4-6x^3+9x^2}$.

4.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

4.30. $\int \sin(\ln x)dx$.

5

5.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

5.2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

5.3. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$.

5.4. $\int \cos 3x \cos x dx$.

5.5. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

5.6. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

5.7. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx.$

5.8. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$

5.9. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}.$

5.10. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

5.11. $\int \ln^2 x dx.$

5.12. $\int \cos 2x \cos^2 x dx.$

5.13. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx.$

5.14. $\int x^2e^{3x}dx.$

5.15. $\int x^2 \sin x dx.$

5.16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

5.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

5.18. $\int \sin x \sin 3x dx.$

5.19. $\int (1-\sin 2x)^2\,dx.$

5.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+1}}.$

5.21. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

5.22. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$

5.23. $\int \frac{xdx}{2x^4+5}.$

5.24. $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx.$

5.25. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x}\,dx.$

5.26. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

5.27. $\int \ln(x^2+1)dx.$

5.28. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx.$

5.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}.$

5.30. $\int \frac{x^2-3}{x^4-5x^2+4}dx.$

6

6.1. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{7+2\cos x}}.$

6.2. $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1}dx.$

6.3. $\int (x^2+1)\cdot 3^x dx.$

6.4. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

6.5. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}}dx.$

6.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

6.7. $\int \cos 2x \sin^2 x dx.$

6.8. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

6.9. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx.$

6.10. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cos^2 3x}.$

6.11. $\int \sin 2x \cos 5x dx.$

6.12. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx.$

6.13. $\int x \cdot 5^x dx.$

6.14. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$

6.15. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$

6.16. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}.$

6.17. $\int \frac{5x^3-8}{x^3-4x} dx.$

6.18. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2}.$

6.19. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$

6.20. $\int \sin 5x \cos 3x dx.$

6.21. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx.$

6.22. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx.$

6.23. $\int (x+1)e^x dx.$

6.24. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

6.25. $\int (1+\sin^4 x) dx.$

6.26. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$

6.27. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}.$

6.28. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx.$

6.29. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 3x}.$

6.30. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}.$

2. Контрольная работа «Дифференциальные уравнения» (2 часа)

Решить данные дифференциальные уравнения.

1

1.1. $y' - y/x - 1/(\sin(y/x)) = 0.$

1.2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx.$

1.3. $x^2y' = xy + y^2.$ 1.4. $xdy = (x^4 - 2y)dx.$

1.5. $y' + 3y/x - 2/x^3 = 0.$

1.6. $x^2dy + y^2dx = 3(x^2 - y^2)dx.$

1.7. $y' = 4 + y/x + (y/x)^2.$

1.8. $(x^2+y^2)dx - xydy = 0.$

1.9. $xy' - y = x^2 \cos x.$

1.10. $y' - \frac{3}{x}y = x.$

1.11. $y' + 2xy = 2xy^3.$

1.12. $x^3y' + x^2y + x + 1 = 0.$

1.13. $y' + 2y/x = e^{-x^2}/x.$

1.14. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

1.15. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

1.16. $xy' + y = \sin x.$

1.17. $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x).$

1.18. $y' - y/x = e^{y/x}.$

1.19. $y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x.$

1.20. $y' \cos x - y \sin x = \sin x.$

1.21. $xy' = y + xe^{y/x}.$

1.22. $y' + xy = x^3.$

1.23. $x \ln(x/y)dy - ydx = 0.$

1.24. $(xye^{x/y} + y^2)dx = x^2e^{x/y}dy.$

1.25. $x^2y' = 2xy + 3.$

1.26. $dy = (y + x^2)dx.$

1.27. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x.$

1.28. $y' - 2xy = xe^{-x^2}.$

1.29. $xy' = 3y - x^4y^2.$

1.30. $y' - y = e^x.$

2

2.1. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

2.2. $y' + y \cos x = \cos x$.

2.3. $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0$.

2.4. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

2.5. $y' \cos x \ln y = y$.

2.6. $e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx = \dfrac{e^{2x}}{x-1} dy$.

2.7. $y' = 2^{x-y}$.

2.8. $(1 + e^{2x}) y^2 dy = e^x dx$.

2.9. $3e^x \operatorname{tg} y dx = (1 + e^x) \sec^2 y dy$.

2.10. $yy'/x + e^y = 0$.

2.11. $y' + y = e^x \sin x$.

2.12. $(x + y) dx + x dy = 0$.

2.13. $1 + (1 + y') e^y = 0$.

2.14. $x \cos \dfrac{y}{x} (y dx + x dy) = x^2 \sin \dfrac{y}{x} dx$.

2.15. $y' + y/(x+1) + x^2 = 0$.

2.16. $y^2 dx = (xy - x^2) dy$.

2.17. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$.

2.18. $y' + \dfrac{4xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

2.19. $xy' = y - xy$.

2.20. $(x^2 - 2y^2) dx + 2xy dy = 0$.

2.21. $x + y = xy'$.

2.22. $y' + \dfrac{3}{x} y = \dfrac{2}{x^3}$.

2.23. $y'x + y = -xy^2$.

2.24. $xy' \ln \dfrac{y}{x} = x + y \ln \dfrac{y}{x}$.

2.25. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

2.26. $y = y' \ln y$.

2.27. $(x^2 - x^2 y) y' + y^2 + xy^2 = 0$.

2.28. $3e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \sec^2 y dy$.

2.29. $(1 + y^2) dx - \sqrt{x} dy = 0$.

2.30. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

3

3.1. $y'' \cos^2 x = 1$.

3.2. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

3.3. $y'' x \ln x = y'$.

3.4. $(1 + x^2) y'' = 3$.

3.5. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

3.6. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3.7. $y'' = 4 \cos 2x$.

3.8. $yy'' + y'^2 = 0$.

3.9. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

3.10. $x^3 y''' = 6$.

3.11. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

3.12. $yy'' + 1 = y'^2$.

3.13. $x^2 y''' = y''^2$.

3.14. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

3.15. $y'' = 2yy'$.

3.16. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

3.17. $2yy'' = 1 + y'^2$.

3.18. $y''^2 = y'^2 + 1$.

3.19. $xy'' - y' = x^2 e^x$.

3.20. $x^2 y'' + y'^2 = 0$.

3.21. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

3.22. $xy'' = y' + x^2$.

3.23. $y'' + \dfrac{1}{x} y' = 0$.

3.24. $x^2 y'' = 4$.

3.25. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.

3.26. $y^3 y'' - 3 = 0$.

3.27. $xy'' + 2y' = 0$.

3.28. $1 + y'^2 + yy'' = 0$.

3.29. $yy'' = y'^2$.

3.30. $y'' = 2 - y$.

4

4.1. $y'' - 5y' + 6y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4.2. $4y'' - 8y' + 5y = 5 \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1/13$.

4.3. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4.4. $2y'' - y' = 1 + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4.5. $y'' - 4y = 2 - x$, $y(0) = 11/2$, $y'(0) = 1/4$.
4.6. $y'' - y = \cos 2x$, $y(0) = -1/5$, $y'(0) = 1$.
4.7. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
4.8. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.9. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
4.10. $y'' - 4y' + 4y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.11. $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
4.12. $y'' + y = \cos 3x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.
4.13. $y'' - y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
4.14. $y'' - 4y = 3xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.15. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.16. $y'' - 2y' + 2y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.17. $2y'' + y' - y = 2e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4.18. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
4.19. $y'' + 4y = 5e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4.20. $y'' + 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 17/64$, $y'(0) = 0$.
4.21. $y'' + y = xe^x$, $y(0) = 0{,}5$, $y'(0) = 1$.
4.22. $y'' - y = 2(1 - x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
4.23. $y'' - y = 9xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.
4.24. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
4.25. $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.26. $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
4.27. $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
4.28. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4.29. $y'' + 2y' + y = 9e^{2x} + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
4.30. $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5

5.1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^3$.
5.2. $y'' + 3y' + 2y = 1/e^x + 1$.
5.3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.
5.4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.
5.5. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.
5.6. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.
5.7. $y'' - y = \operatorname{sh} x$.
5.8. $y'' - 3y' + 2y = 2^x$.
5.9. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.
5.10. $y'' + 4y = \cos^2 x$.
5.11. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3(3x - 2)} e^{3x}$.
5.12. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$.
5.13. $y'' + y' = \operatorname{tg} x$.
5.14. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.
5.15. $y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$
5.16. $y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x}e^{3x}$
5.17. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.
5.18. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$
5.19. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$.
5.20. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

5.21. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

5.22. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$.

5.23. $y'' + y = \frac{2 + \cos^3 x}{\cos^2 x}$.

5.24. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

5.25. $y'' - 3y' + 2y = 1 + \frac{1}{1 + e^x}$.

5.26. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

5.27. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

5.28. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

5.29. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

5.30. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа.— М.: Наука, 1969.— 736 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1988.— 432 с.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1989.— 464 с.
4. *Долгов Н. М.* Высшая математика.— Киев: Вища шк., 1988.— 416 с.
5. *Жевняк Р. М., Карпук А. А.* Высшая математика: В 5 ч.— Мн.: Выш. шк., 1984.— 1988.— Ч. 2.— 1985.— 221 с.; Ч. 3.— 1985.— 208 с.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2 т.— М.: Наука, 1981.— Т. 1.— 543 с.
7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч.— М.: Наука, 1971—1973.— Ч. 1.— 1971.— 600 с.; Ч. 2.— 1973.— 448 с.
8. *Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Высш. шк., 1983.— 128 с.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т.— М.: Высш. шк., 1988.— Т. 1.— 712 с.; Т. 2 — 576 с.
10. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1967.— 1970.— Т. 1.— 1967.— 704 с.; Т. 2.— 1970.— 671 с.
11. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1985.— Т. 1.— 432 с.; Т. 2.— 576 с.
12. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 350 с.

Сборники задач и упражнений

13. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1985.— 446 с.
14. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.— М.: Высш. шк., 1986.— Ч. 1.— 446 с.; Ч. 2.— 464 с.
15. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1977.— 528 с.
16. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1978.— 380 с.
17. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Высш. шк., 1978.— 288 с.

18. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

19. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.— Мн.: Выш. шк., 1976.— 456 с.

20. *Марон И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной.— М.: Наука, 1970.— 400 с.

21. Сборник задач по курсу высшей математики/Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др.; Под ред. Г. И. Кручковича.— М.: Высш. шк., 1973.— 576 с.

22. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 2 ч./В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 2.— 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович, **Бархатов** Виктор Владимирович, **Державец** Вера Владимировна, **Юруть** Иван Ефимович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Часть 2

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов.* Редактор *М. С. Молчанова.* Младший редактор *В. М. Кушилевич.* Художник переплета и художественный редактор *Ю. С. Сергачев.* Технический редактор *М. Н. Кислякова.* Корректор *В. П. Шкредова*

ИБ № 2892

Сдано в набор 05.10.89. Подписано в печать 21.12.90. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 18,48. Усл. кр.-отт. 18,48. Уч.-изд. л. 23,77. Тираж 36 000 экз. Заказ 2960. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.