**Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет
имени Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Конспект лекций по физике для бакалавров

Новомосковск
2018

УДК 537
ББК 22.3
Э 454

Рецензент:
доктор технических наук, доцент,
зав. кафедрой «Электроснабжение промышленных предприятий»
Жилин Б.В.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева)

Составители: Подольский В.А., Логачева В.М., Резвов Ю.Г., Сивкова О.Д.

Э 454 **Электрическое поле. Постоянный электрический ток.** Конспект лекций по физике для бакалавров. ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Новомосковск, 2018.- 60с.

Учебное пособие написано в соответствии с лекционным курсом дисциплины «Физика» НИ РХТУ и содержит краткое изложение следующих разделов: «Электростатика», «Электрическое поле в диэлектрике», «Проводники в электрическом поле», «Постоянный электрический ток». Данное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов технических специальностей.

Ил.55. Библиогр.: 6 назв.

УДК 537
ББК 22.3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конспект лекций «Электрическое поле. Постоянный электрический ток» написаны в соответствии с рабочей программой по физике для студентов технических вузов, составленной согласно ФГОС ВО-3+. Необходимость переиздания данного пособия вызвано вводом нового стандарта обучения и единого государственного экзамена в школе, что существенно изменило уровень подготовки абитуриентов по физике. Современная система оценки знаний основана на компетентностном подходе, одной из важных составляющих которой является текущая оценка знаний студентов. Все это вызвало потребность в подготовке учебного пособия уменьшенного объема благодаря краткости изложения и тщательного отбора изучаемого материала.

Данное издание, прежде всего, предназначено для подготовки студентов дневной и заочной форм обучения к лабораторным и практическим занятиям по теме «Электростатика. Постоянный электрический ток» во втором семестре. Материалы могут также быть использованы для подготовки к коллоквиуму и экзамену по физике, при решении контрольных работ студентами-заочниками.

Для улучшения усвоения изучаемого материала все основные понятия, определения и законы в пособии четко выделены отдельным шрифтом. Формулы, определяющие физические величины и устанавливающие связь между ними, а также выражающие основные законы теории электричества, обведены рамками. Большое количество рисунков, подробные пояснения математических выводов, разъяснение физического смысла понятий и законов будет способствовать их лучшему пониманию.

Авторы надеются, что данное учебное издание будет ценным вспомогательным материалом наряду с традиционными учебниками и поможет студентам успешно усвоить основы теории электричества.

ВВЕДЕНИЕ

Много веков назад люди открыли особые свойства янтаря: при трении в нем возникает электрический заряд. Само слово "электрический" происходит от латинского слова electrum, означающего "янтарь". Только в 17в. ученые подошли вплотную к изучению электричества. Кулон, Гильберт, Отто фон Герике, Мушенбрек, Франклин, Эрстед, Араго, Ломоносов, Луиджи Гальвани, Алессандро Вольта – вот далеко не полный список ученых занимавшихся проблемами электричества.

Электрические заряды влияют друг на друга. Положительный и отрицательный заряды притягиваются друг к другу, а два отрицательных или два положительных заряда отталкиваются друг от друга. Знаменитый ученный Тесла, написал незадолго до смерти в замечательном очерке истории электротехники "Сказку об электричестве": "Кто действительно хочет помять все величие нашего времени, тот должен познакомиться с историей науки об электричестве”.

Открытия Эрстеда, Араго, Ампера заинтересовали гениального английского физика Майкла Фарадея и побудили его заняться всем кругом вопросов о превращении электрической и магнитной энергии в механическую. Другой английский физик Джеймс Клерк (Кларк) Максвелл 1873 году издал капитальный двухтомный труд «Трактат об электричестве и магнетизме», который объединил понятия электричество, магнетизм и электромагнитное поле. С этого момента началась эра активного использования электрической энергии в повседневной жизни.

Начиная с XIX века электричество плотно входит в жизнь современной цивилизации. Электричество используют для освещения и передачи информации, а также для приведения механизмов в движение, что активно используется на транспорте и в бытовой технике

В целях получения электричества созданы оснащенные электрогенераторами электростанции, а для его хранения - аккумуляторы и электрические батареи. Сегодня электричество используют и для получения материалов, для их обработки, создания музыки и многого другого.

1 Электростатика

1.1 Электрический заряд. Элементарный заряд. Квантование заряда. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона

Электростатика - это раздел учения об электричестве, в котором изучаются взаимодействия и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчёта.

Существуют два рода электрических зарядов - положительные и отрицательные. Силы взаимодействия неподвижных тел (частиц), обусловленные электрическими зарядами этих тел (частиц), называются электростатическими силами. Разноимённые заряды притягиваются, а одноимённые - отталкиваются. **Точечный электрическимй заряд** - это заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в условиях данной задачи. Например, рассматривая электростатическое взаимодействие двух тел, их можно считать точечными электрическими зарядами, если размеры этих тел во много раз меньше, чем расстояние между ними.

Электрический заряд *Q* является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц. Единица измерения заряда - кулон (Кл). Заряд всех элементарных частиц, если он не равен нулю, одинаков по абсолютной величине и называется **элементарным зарядом** $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В частности из элементарных зарядов состоит атом. В его состав входит ядро и электронная оболочка. Ядро состоит из протонов и нейтронов. Заряд электрона отрицательный Q_e=-e, протона - положительный Q_p=e, нейтрона - Q_n= 0. Из этих частиц состоят атомы и молекулы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел. В атоме число электронов равно числу протонов – суммарный заряд атома равен нулю. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в телах в равных количествах. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом объёме тела равна нулю и каждый такой объём (и тело в целом) будет нейтральным. Если в теле создать каким-либо образом избыток частиц одного знака (соответственно недостаток другого знака), то тело окажется заряженным. Поскольку любой заряд Q образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным «е»:

$$\boxed{Q = \pm Ne}, \qquad (1.1)$$

где N=1,2,3,4,**…** - число избыточных зарядов в теле.

Из формулы (1.1) следует, что электрический заряд может принимать только определенные дискретные значения, т.е. заряд квантуется.

Система называется электрически изолированной, если в нее не проникают и из нее не выходят заряженные частицы. **Закон сохранения**

электрического заряда: при любых взаимодействиях в электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} Q_i = const} \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) не изменится, если к нему добавить одинаковые положительный и отрицательный заряды. Это значит, что в электрически изолированной системе могут образовываться одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов.

Силы электростатического взаимодействия заряженных тел подчиняются экспериментально установленному **закону Кулона**: сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению Q_1Q_2 этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между зарядами и направлена вдоль прямой их соединяющей (рис. 1.1), т.е.

$$\boxed{F = \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}}\ , \qquad (1.3)$$

В уравнении (1.3) ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м. – электрическая постоянная., ε - диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{F_в}{F_c}},$$

где $F_в$ - сила взаимодействия зарядов вакууме, F_c - сила взаимодействия тех же зарядов в среде. Разноимённо заряды притягиваются, одноимённые - отталкиваются. На рис.1.1 $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на заряд Q_1 со стороны заряда Q_2 , $\vec{F}_{21}$ - сила, действующая на заряд Q_2 со стороны заряда Q_1, $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F$.

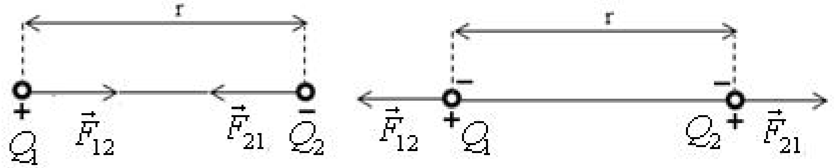


Рис.1

Если ввести обозначение $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м\Ф , то уравнение (1.3) примет вид:

$$F = k\frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{\varepsilon r^2} \qquad (1.3а)$$

Закон Кулона можно записать в векторной форме. Для этого введем единичный вектор $\vec{j}$, направленный от заряда Q_1 к заряду Q_2 (рис.1.2). Тогда закон Кулона может быть выражен в виде:

Рис.1.2

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon r^2}\cdot\vec{j}\,;\,\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon r^2}\cdot\vec{j}}.$$

Силы, направленные вдоль прямой, соединяющие точечные заряды (материальные точки) называются центральными, т.е. кулоновские силы - центральные.

Любое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна векторной сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела. Расчёты показывают, что закон Кулона в формах (1.3) и (1.4) справедлив также и для взаимодействия тел сферической формы, если заряды Q_1 и Q_2 распределены равномерно по всему объёму или по всей поверхности этих тел. В этом случае *r* - расстояние между центрами сфер (шаров). При этом радиусы тел могут быть соизмеримы с расстоянием *r*.

1.2 Электрическое поле. Напряжённость электрического поля. Напряжённость поля точечного заряда. Силовые линии электрического поля. Принцип суперпозиции полей

Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством электрического поля. Каждый заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое действует на другие заряды.

Для обнаружения и опытного исследования электрического поля используется положительный точечный заряд, который обычно называют пробным. Обозначим его Q_0. Если в данную точку поля помещать разные по величине пробные заряды Q_0, то на них будут действовать различные силы $\vec{F}$, которые согласно закону Кулона (1.3),(1.4) пропорциональны этому заряду. Поэтому отношение $\vec{F}/Q_0$ не зависит от величины Q_0 пробного заряда и характеризует электрическое поле в той точке, где находится заряд Q_0. Эта векторная величина является силовой характеристикой электрического поля и называется напряжённостью $\vec{E}$.

Напряжённость электрического поля равна отношению силы $\vec{F}$, действующей со стороны поля на неподвижный точечный заряд, помещённый в рассматриваемую точку поля, к величине этого заряда Q_0:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F}/Q_0} \qquad (1.5)$$

Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд и противоположно силе, действующей на отрицательный заряд (рис. 1.3). На рис. 1.3 а показана некоторая точка А поля, в которую внесен положительный заряд, на который действует сила $\vec{F}$, и, соответственно в этой точке напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена также, как сила. Если из этой точки убрать заряд Q_0 то мы уже будем знать направление напряженности поля в этой точке (рис. 1.3б). Если в эту точку поместить отрицательный заряд, то сила действующая на него будет направлена противоположно вектору напряженности (рис. 1.3в).

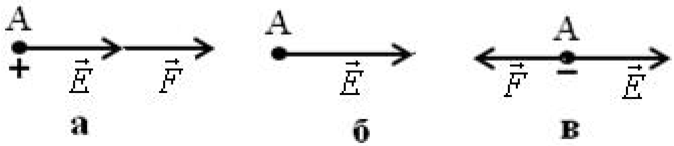


Рис. 1.3

Модуль вектора напряженности

$$E = F/|Q_0| \qquad (1.5а)$$

Из формулы (1.5) видно, что **сила** $\vec{F}$, действующая со стороны электрического поля на помещенный в него точечный заряд Q, можно определить по формуле:

$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{E}}, \qquad (1.6)$$

Причем $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E}$, если $Q > 0$, и $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E}$, если $Q < 0$ (рис. 1.3).

Электрическое поле называется однородным, если во всех его точках $\vec{E}$ = const.

Из формулы (2.1) следует, что напряжённость электрического поля измеряется в Н/Кл:

[E] = Н/Кл = В/м,

где В (вольт) - единица потенциала электрического поля.

Получим формулу для вычисления напряжённости электрического поля, созданного точечным зарядом Q. Для этого поместим заряд Q_0 в поле, созданное зарядом Q (рис. 1.4; на рис. 1.4а $Q>0$, рис. 1.4б $Q<0$).

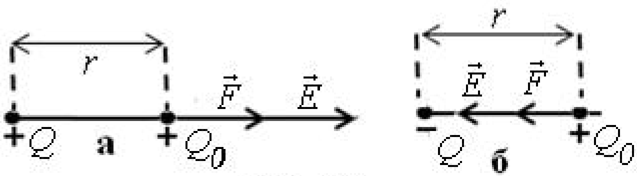


Рис. 1.4

Запишем закон Кулона (1.3)

$$F = \frac{|QQ_0|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

и подставим это выражение в (1.5а):

$$E = \frac{|QQ_0|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\,|Q_0|} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}}. \qquad (1.7)$$

Т.о. соотношение (1.7) определяет **напряженность *E* электрического поля точечного заряда**, где r - расстояние от точечного заряда Q до точки, в которой находим напряжённость поля.

Из рис. 1.4 и определения напряженности $\vec{E}$ (1.5) следует, что вектор напряженности электрического поля, созданного точечным зарядом Q, **направлен** по радиальным прямым от заряда, если $Q > 0$ и к заряду, если $Q < 0$. (рис. 1.5).

Чтобы записать напряженность поля точечного заряда в векторном виде, введем единичный вектор $\vec{j}_r$ направленный от заряда к точке, в которой определяется вектор $\vec{E}$ (рис. 1.5). Тогда вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля:

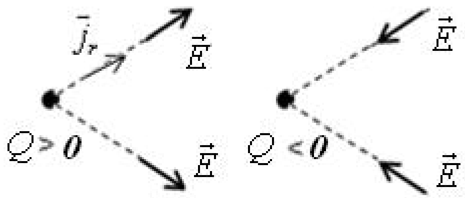


Рис. 1.5

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\vec{j}_r}, \quad (1.7а)$$

причем в уравнении (1.7а) заряд берется с учетом его знака.

Графически электрическое поле изображают с помощью **линий напряжённости** (силовых линий), которые проводят так, что касательные к ним в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости в данной точке поля (рис. 1.6). Линии напряжённости нигде не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор $\vec{E}$ имеет лишь одно направление. Линии напряжённости начинаются на положительных зарядах или в бесконечности и заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности. Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям напряжённости, было пропорциональна модулю вектора $\vec{E}$. Следовательно, где линии гуще, там напряжённость поля больше и наоборот – на рис. 1.6 напряженности поля в точках А и Б связаны соотношением $E_A < E_Б$. Т.о. по картине линий напряжённости можно судить о направлении и величине вектора $\vec{E}$ в различных точках пространства

Для точечного заряда линии напряжённости представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положительный, и к заряду, если он отрицательный (рис. 1.7). На рисунке 1.8 изображены линии напряжённости двух разноимённых одинаковых по модулю зарядов, а на рис. 1.9 - силовые линии однородного поля.

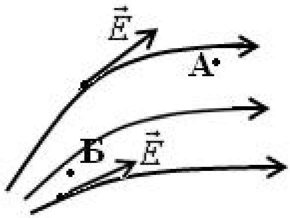


Рис. 1.6

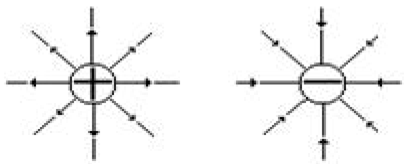


Рис. 1.7

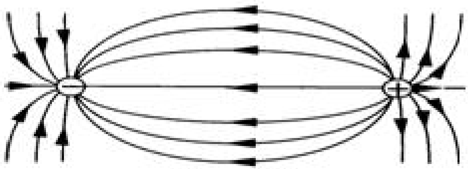


Рис. 1.8

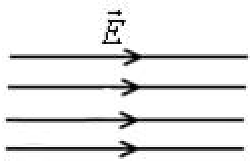


Рис. 1.9

Рассмотрим электрическое поле произвольной системы неподвижных зарядов Q_1, Q_2, ..., Q_N. Напряжённость $\vec{E}$ электрического поля, созданного этими зарядами:

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i}. \qquad (1.8)$$

Равенство (1.8) выражает **принцип суперпозиции электрических полей**: напряжённость электрического поля системы зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей каждого из этих зарядов в отдельности.

Например (рис. 1.10): по принципу суперпозиции напряжённость $\vec{E}$ поля, созданного двумя точечными зарядами $Q_1>0$ и $Q_2<0$ определяется по формуле $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

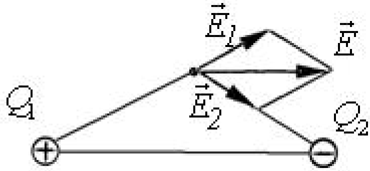


Рис. 1.10

Для расчёта напряжённости $\vec{E}$ электрического поля, созданного заряженным телом, которое нельзя считать точечным зарядом, необходимо: 1) разбить тело на части, каждую из которых можно считать точечным зарядом; 2) по формуле (1.7а) вычислить напряжённости $\vec{E}$, создаваемые каждой частью тела в рассматриваемой точке и определить их направление; 3) в соответствии с формулой (1.8) векторно сложить напряжённости полей, создаваемых каждой частью тела.

1.3 Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса для электрического поля

Если каждой точке пространства соответствует некоторая векторная величина $\vec{a}$, т.е. имеется поле некоторого вектора $\vec{a}$, то выражение $d\Phi_a = \vec{a} \cdot d\vec{S}$ **называется потоком $d\Phi_a$ вектора $\vec{a}$ через поверхность dS.** В приведённой выше формуле $\vec{a}d\vec{S} = adS\cos\alpha$ есть скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $d\vec{S}$: $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный ($|\vec{n}|=1$) вектор нормали к поверхности dS (рис. 1.11; т.к. выбор направления вектора $\vec{n}$ условен: его можно направить как в одну сторону от площадки, так и в другую, то $d\vec{S}$ является не истинным вектором, а псевдовектором). Просуммировав потоки через все элементарные площадки dS, найдём поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S, т.е. $\Phi_a = \int_S \vec{a}d\vec{S}$. Учитывая, что $\vec{a}d\vec{S} = adS\cos\left(\widehat{\vec{a}d\vec{S}}\right) = adS\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{n}}\right) \Rightarrow \vec{a}d\vec{S} = a_n dS$, где a_n – проекция вектора $\vec{a}$ на направление нормали $a_n = a\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{n}}\right)$, получим:

Рис. 1.11

$$\Phi_a = \int_S a_n dS.$$

Поток Φ_E вектора напряжённости $\vec{E}$ электрического поля через поверхность S (рис.1.12) определится по формуле

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\alpha = \int_S E_n \cdot dS}, \qquad (1.9)$$

где α — угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$; E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали (перпендикуляра) к элементарной площадке dS, $d\vec{S}$ — псевдовектор элемента площади.

Поток (1.9) есть алгебраическая величина, причём знак её зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность S при вычислении Φ_E. В случае замкнутых поверхностей принято брать внешнюю нормаль к dS (нормаль, направленную наружу). Если электрическое поле однородное ($\vec{E}$ = $const$), а поверхность S плоская ($\alpha = const$) (рис. 1.13), то поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \int_S E \cdot dS \cdot cos\,\alpha = E \cdot cos\,\alpha \int_S dS = E \cdot S \cdot cos\,\alpha.$$

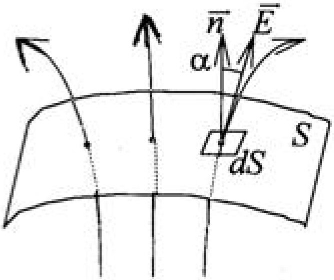


Рис. 1.12

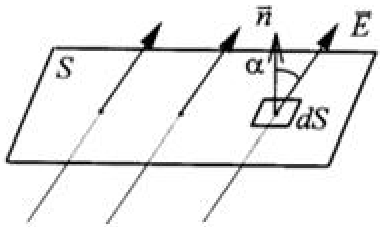


Рис. 1.13

Получим теорему Гаусса для электрического поля. Возьмём точечный положительный заряд Q и вычислим поток Φ_E вектора напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом, через сферическую поверхность радиусом r, охватывающую заряд Q. Центр сферической поверхности совпадает с зарядом (рис. 1.14). Поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S EdS\,cos\,\alpha. \quad (1.10)$$

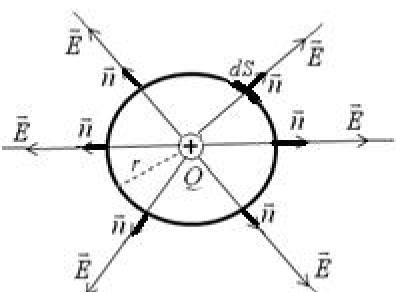


Рис. 1.14

В данном случае угол α между $\vec{E}$ и $\vec{n}$ равен 0^0 ($\alpha = 0^0$, $cos\alpha = 1$) и формула (1.10) принимает вид:

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \cdot cos\,0^0 = \oint_S E \cdot dS. \quad (1.11)$$

Напряжённость E электрического поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r от него определяется по формуле (1.7):

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

Заряд Q находится в центре сферы, поэтому из (1.7) следует, что для любой точки сферической поверхности напряжённость *E* есть величина постоянная и её в формуле (1.11) можно вынести за знак интеграла, т.е.

$$\Phi_E = E\oint_S dS = E \cdot S\,, \qquad (1.12)$$

где площадь сферической поверхности $S = 4\pi r^2$. (1.13)

Равенство (1.2) с учётом формул (1.7) и (1.13) примет вид:

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\,. \qquad (1.14)$$

Сравнивая формулы (1.10) и (1.14) получаем:

$$\oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\,. \qquad (1.15)$$

Можно доказать, что соотношение (1.15) справедливо для замкнутой поверхности любой формы и для любого количества (положительных и отрицательных) зарядов, находящихся внутри этой поверхности. В общем случае равенство (1.15) имеет вид

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{N} Q_i}{\varepsilon_0\varepsilon}.}. \qquad (1.16)$$

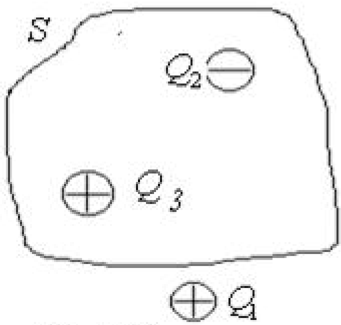


Рис. 1.15

Равенство (1-16) - **теорема Гаусса**: поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённой на $\varepsilon_0\varepsilon$.

Например, для поверхности *S*, изображённой на рис. 1.15, теорема Гаусса запишется следующим образом:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_3 - |Q_2|}{\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Основная задача электростатики заключается в следующем: по заданному распределению зарядов в пространстве найти вектор напряжённости $\vec{E}$ в каждой точке поля. Для решения этой задачи можно воспользоваться теоремой Гаусса (1.16) или формулами (1.7) и (1.8).

1.4 Применение теоремы Гаусса для расчёта электрических полей

1.4.1 Электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т.е. зарядами, образованными огромным числом элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределёнными в пространстве непрерывным образом с конечной плотностью. Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое тела, то распределение заряда характеризует **поверхностная плотность заряда σ -** заряд, приходящийся на единицу площади:

$$\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dS}}, \qquad (1.17)$$

где dQ — заряд, находящийся на поверхности площадью dS. Единица измерения поверхностной плотности заряда $[\sigma]$ = Кл/м^2.

Пусть плоскость бесконечных размеров заряжена с одинаковой поверхностной плотностью σ (рис. 1.16а; 1.16б – сечение рисунка 1.16а); для определённости будем считать заряд плоскости положительным: σ>0. Из соображений симметрии следует, что напряжённость поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное к плоскости. Действительно, поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, нет никаких оснований к тому, чтобы вектор $\vec{E}$ отклонялся в какую-либо сторону от нормали к плоскости. Очевидно, что в симметричных относительно плоскости

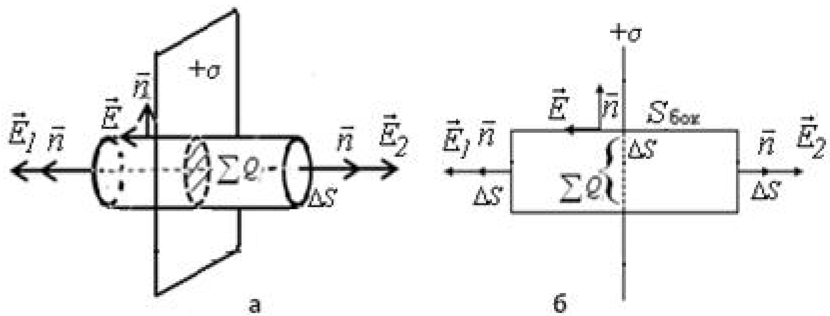


Рис. 1.16

точках напряжённость поля одинакова по величине и противоположна по направлению ($E_1 = E_2 = E$). Возьмем цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями площадью ΔS, расположенными симметрично относительно плоскости. Согласно теореме Гаусса (1.16) поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность:

$$\Phi_E = \oint_S EdS\cos\alpha = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (1.18)$$

Поток Φ_E через всю цилиндрическую поверхность равен сумме потоков через ее боковую поверхность $S_{бок}$ и два ее основания площадью $S_{осн}$ каждое. Поэтому выражение (1.18) с учетом рис. 1.16 принимает вид (1.19):

$$\oint_S E\cdot dS\cdot\cos\alpha = \int_{S_{бок}} E\cdot dS\cdot\cos 90^0 + 2\int_{S_{осн}} E\cdot dS\cdot\cos 0^0 = 2E\int_{S_{осн}} dS = 2ES_{осн},$$

где E — напряжённость поля в месте расположения оснований цилиндра. Сумма зарядов, заключённых внутри цилиндрической поверхности, есть заряд на площади, вырезаемой цилиндрической поверхностью из плоскости (она равна площади основания цилиндра). Тогда из (1.17):

$$\sum Q_i = \sigma\cdot S_{осн}, \qquad (1.20)$$

Поэтому теорема Гаусса (1.18) с учётом равенств (1.19) и (1.20) примет вид

$$2E\cdot S_{осн} = \frac{\sigma\cdot S_{осн}}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}}. \qquad (1.21)$$

Если изменить размеры цилиндрической поверхности на рис. 1.16 придём к той же формуле (1.21). Это означает, что на любых расстояниях от плоскости **напряжённость электрического поля бесконечно заряженной плоскости** (1.21) одинакова по величине, а поле бесконечной плоскости однородно. Если плоскость заряжена отрицательно, то в (1.21) σ - модуль поверхностной плотности заряда, а вектор $\vec{E}$ направлен к плоскости. По формуле (1.21) можно найти напряженность поля плоскости конечных размерах на расстояниях от плоскости много меньших ее линейных размеров.

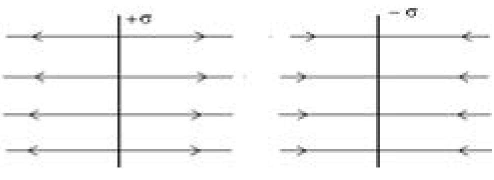


Рис. 1.17

На рис. 1.17 показаны линии напряженности бесконечных плоскостей, заряженных положительно и отрицательно и находящихся на большом расстоянии друг от друга.

1.4.2 Электрическое поле двух разноимённо заряженных плоскостей

Пусть две параллельные бесконечные плоскости заряжены однородно с одинаковой поверхностной плотностью + σ и -σ (рис. 1.18), т.е. ||+σ| = |-σ| = σ. Каждая из плоскостей создаёт однородное электрическое поле с напряжённостью, определяемой формулой (1.21). Для расчёта напряжённости результирующего поля, созданного двумя плоскостями, воспользуемся принципом суперпозиции полей (1.8). В области между плоскостями складываемые поля имеют одинаковое направление (рис. 1.18), так что результирующая напряжённость

$$E = E^{+} + E^{-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Т.о. **напряженность электрического поля в пространстве между двумя плоскостями**и

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.} \qquad (1.22)$$

Вне объёма, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряжённость равна нулю:

$$E = E^{+} - E^{-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 0.$$

Т.о. **снаружи от плоскостей напряженность** $\boxed{E=0}$. (1.23)

Таким образом, электрическое поле сосредоточено между плоскостями. Напряжённость поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению, т.е. поле однородно (рис. 1.9.).

Полученный результат (1.22, 1.23) приближённо справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями

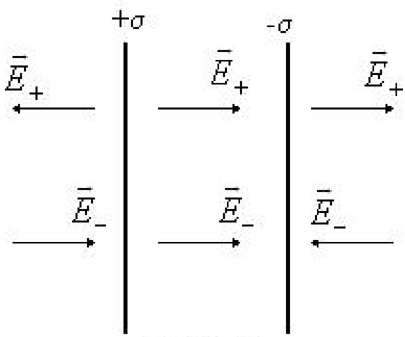


Рис. 1.18

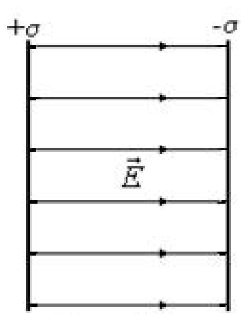


Рис. 1.19

много меньше их линейных размеров (например, плоский конденсатор). В этом случае отклонение полей от однородности наблюдается только вблизи краёв плоскостей.

1.4.3 Электрическое поле однородно заряженного бесконечного цилиндра

Если заряд распределён по объёму или поверхности цилиндрического тела (равномерно в каждом сечении), то распределение заряда характеризуют с помощью **линейной плотности заряда** τ **-** заряда приходящего на единицу длины нити, определяемого выражением

$$\tau = \frac{dQ}{d\ell}, \qquad (1.24)$$

где dQ — заряд, находящийся на отрезке цилиндра, длиной $d\ell$. $[\tau]$= Кл/м.

Пусть электрическое поле создаётся бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью заряда (рис. 1.20а; рис. 1.20б – сечение рисунка 1.20а; рис. 1.20в - вид «сверху» рисунка 1.20а).

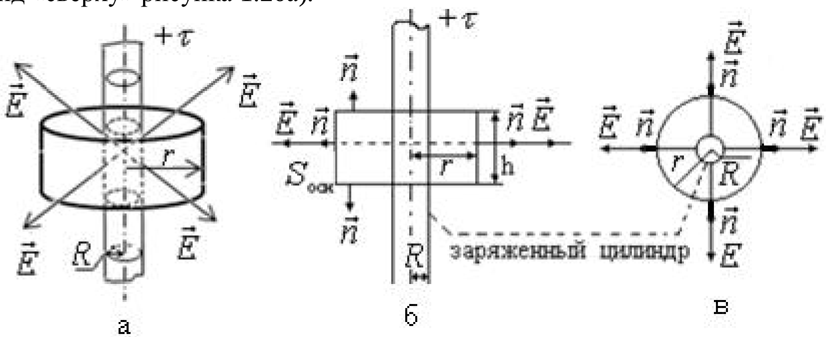


Рис. 1.20

Из соображений симметрии следует, что напряжённость поля в любой точке должна быть направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндрической поверхности, а величина напряжённости может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра. Для применения теоремы Гаусса возьмём замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты h, коаксиальную с заряженной поверхностью (оси симметрии этих поверхностей совпадают; рис. 1.20). Согласно теореме Гаусса

$$\oint_S E \cdot dS \cdot cos\,\alpha = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (1.25)$$

Поток вектора напряженности через замкнутую цилиндрическую поверхность равен сумме потоков через ее боковую поверхность два основания:

$$\oint_S E\cdot dS\cdot cos\,\alpha = \int_{S_{бок}} E\cdot dS\cdot cos\,0^o + 2\int_{S_{осн}} E\cdot dS\cdot cos\,90^o =$$

$$= E\int_{S_{бок}} dS = E\cdot S_{бок} = E\cdot 2\pi r\cdot h,, \qquad (1.26)$$

где $S_{бок} = 2\pi r h$ — площадь боковой поверхности цилиндра

Для $r \geq R$ заряд, находящийся внутри этой цилиндрической поверхности, с учетом (1.24) равен:

$$\sum Q_i = \tau\cdot h\,, \qquad (1.27)$$

где τ — линейная плотность заряда.

Формула (1.25) с учётом равенств (1.26) и (1.27) примет вид:

$$E\cdot 2\pi r\cdot h = \frac{\tau\cdot h}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\;\Big|_{при\;\; r>R}}. \qquad (1.28)$$

Для r < R рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому $\sum Q_i = 0$, следовательно:

$$\boxed{E = 0 \quad при \quad r < R}. \qquad (1.29)$$

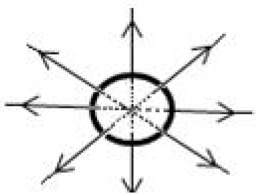


Рис. 1.21

Таким образом, вне бесконечной заряженной цилиндрической поверхности силовые линии имеют вид радиальных прямых, выходящих из оси цилиндра и перпендикулярные к ней (рис. 1.21). Внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности бесконечной длины электрическое поле отсутствует.

1.4.4 Электрическое поле равномерно заряженной сферы

Электрическое поле, создаваемое равномерно заряженной сферой радиуса R будет цетрально-симметричным. Это означает, что направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр сферы, а величина напряжённости является функцией расстояния *r* от центра сферы $E(r)$. На рис. 1.22 показаны силовые линии этого поля.

Для применения теоремы Гаусса выберем концентрическую с заряженной сферой сферическую поверхность радиуса $r>R$ (рис. 1.22). Поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса *r*:

$$\oint_S E \cdot dS \cdot cos\,0^\circ = E \cdot \oint_S ds = E \cdot S_{сф} = E \cdot 4\pi r^2, \qquad (1.30)$$

где $S_{сф}=4\pi r^2$ – площадь сферической поверхности. Для $r>R$ внутрь поверхности радиуса r попадает весь заряд Q заряженной сферы радиуса R, поэтому в теореме Гаусса $\sum Q_i = Q$, а сама теорема Гаусса (1.25) с учетом (1.30) принимает вид:

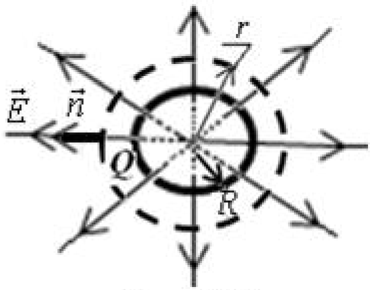


Рис. 1.22

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \Big|_{при\ \ r \geq R}}, \qquad (1.31)$$

Сферическая поверхность радиуса r<R не будет содержать зарядов:

$$\sum Q_i = 0.$$

Теорема Гаусса принимает вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0 \quad при \quad r < R.}. \qquad (1.32)$$

Из сравнения формул (1.31) и (1.7) следует, что электрическое поле вне равномерно заряженной сферы с заряд Q, совпадает с полем точечного заряда той же величины, помещённым в центр сферы.

1.5 Работа по перемещению одного заряда в поле другого. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов

Пусть электрическое поле, создается неподвижным точечным зарядом Q_1; а заряд Q_2 перемещается в этом поле из точки 1 в точку 2 (рис. 1.23). В любой точке поля на точечный заряд Q_2 действует сила, определяемая по закону Кулона (1.3):

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \qquad (1.33)$$

где r – расстояние между зарядами. Для определенности будем считать оба заряда положительными.

Элементарная работа, совершаемая силами электрического поля, созданного зарядом Q_1, по перемещению заряд Q_2 определиться по формуле

$$dA = \vec{F} d\vec{\ell} = F d\ell\, cos\,\alpha \qquad (1.34)$$

где $d\vec{\ell}$ - элементарное перемещение заряда Q_2. Из равенств (1.34) и (1.33) получаем:

$$dA = \frac{Q_1 Q_2 d\ell \cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,. \qquad (1.35)$$

Из рис. 1.23 следует, что

$$d\ell \cos\alpha = dr \qquad (1.36)$$

где dr - изменение расстояния между зарядами при перемещении заряда Q_2.на $d\ell$ Формула (1.35) с учетом равенства (1.36) примет вид:

$$dA = \frac{Q_1 Q_2 dr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \qquad (1.37)$$

Интегрируем равенство (5.5), учтя, что Q_1, Q_2, $4\pi\varepsilon\varepsilon_0$ - постоянные величины:

$$A_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\left.\frac{r^{-1}}{-1}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{r_2^{-1}}{-1} - \frac{r_1^{-1}}{-1}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{A_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}}\,. \qquad (1.38)$$

Из формулы (1.38) видно, что работа совершаемая электростатическим полем, не зависит от формы траектории движущегося заряда, а зависит только от начального и конечного положений этого заряда. Следовательно, **кулоновские силы консервативные, а электростатическое поле является потенциальным** (стационарное, т.е. не изменяющееся с течением времени, поле консервативных сил называется потенциальным).

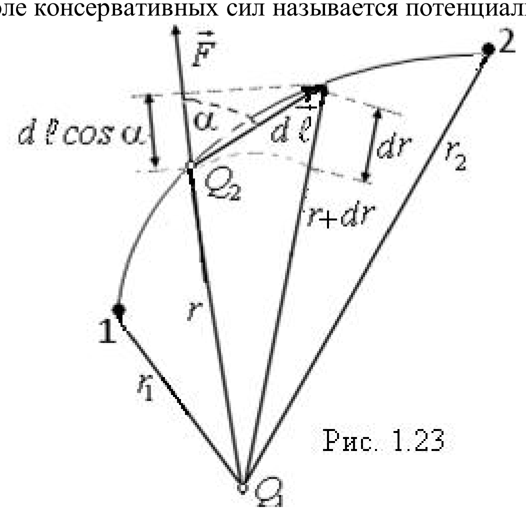


Рис. 1.23

Работа, совершаемая кулоновскими силами, по перемещению заряда определяется по формуле (1.38). Из механики известно, что работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A_{12} = W_1 - W_2 \qquad (1.39)$$

Из сравнения формул (1.38) и (1.39) получаем:

$$W_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}, \quad W_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2},$$

где W_1 и W_2 - потенциальные энергии взаимодействия точечных зарядов Q_1 и Q_2, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 друг от друга. Из двух последних равенств следует, что если расстояние между зарядами равно r, то потенциальная энергия взаимодействия этих зарядов определиться по формуле:

$$\boxed{W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}} \qquad (1.40)$$

(Если $r \to \infty$, то $W = 0$).

1.6 Потенциал электрического поля. Потенциал поля точечного заряд. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Потенциальная энергия системы точечных зарядов

Пусть точечный заряд Q_0 находится в электрическом поле, созданном точечный зарядом Q. Их взаимная потенциальная энергия W определяется по формуле:

$$W = \frac{Q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}. \qquad (1.41)$$

Из равенства (1.41) видно, что отношение $\frac{W}{Q_0}$ не зависит от величины заряда Q_0 и может быть использовано для характеристики поля заряда Q. Эта величина - **потенциал** φ электрического поля в данной точке:

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{Q_0}}. \qquad (1.42)$$

Т.о. **потенциал** φ равен отношению потенциальной энергии W заряда Q_0, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда Q_0. Единица измерения потенциала – вольт (В): φ] = Дж/Кл = В.

Подставляя выражение (1.41) в (1.42), получаем $\varphi = \frac{Q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r Q_0}$, т. е.

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}}. \qquad (1.43)$$

где φ **- потенциал электрического поля, созданного точечным электрическим зарядом** Q, r – расстояние от заряда Q до точки, в которой находят потенциал.

Найдем работу A сил электрического поля при перемещении заряда Q из точки 1 в точку 2 (рис. 1.24). Согласно формуле (1.42) заряд Q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$W = Q\varphi. \qquad (1.44)$$

В параграфе 1.5 показано, что силы электростатического поля являются консервативными. Из механики известно, что работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии: $A = W_1 - W_2$. (1.45)

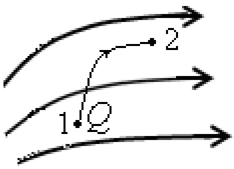


Рис. 1.24

В соответствии с формулой (1.44) заряд Q в точках 1 и 2 поля имеет потенциальные энергии:

$$W_1 = Q\varphi_1, \quad W_2 = Q\varphi_2, \qquad (1.46)$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы электрического поля в точках 1 и 2 соответственно. Подставляя (1.46) в (1.45), получим $A = Q\varphi_1 - Q\varphi_2$ или

$$\boxed{A = Q(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.47)$$

Т.о., **работа, совершаемая над зарядом *Q* силами электрического поля,** равна произведению заряда на разность (убыль) потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$).

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое системой из N зарядов Q_1 , Q_2 .... , Q_N. Работа A, совершаемая силами этого поля при перемещении заряда Q из точки 1 в точку 2, будет равна алгебраической сумме работ A_i сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i \,. \qquad (1.48)$$

Учитывая формулу (1.47) можно записать, что

$$A_i = Q\left(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}\right), \qquad (1.49)$$

где φ_{i1} и φ_{i2} -потенциалы электрического поля, созданного зарядом Q_i в точках 1 и 2. Из равенств (1.48) и (1.49) следует:

$$A = \sum_{i=1}^{N} Q\left(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}\right) = Q\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_{i1} - \sum_{i=1}^{N}\varphi_{i2}\right). \qquad (1.50)$$

Приравняем правые части выражений выражений (1.47) и (1.50):

$$Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = Q\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_{i1} - \sum_{i=1}^{N}\varphi_{i2}\right).$$

Откуда следует, что потенциалы φ_1 и φ_2 поля, создаваемого системой зарядов в точках 1 и 2, соответственно равны:

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i1} \ , \quad \varphi_2 = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{i2} \ .$$

Т.о., **потенциал поля, создаваемого системой зарядов**, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:.

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i} \ . \qquad (1.51)$$

Равенство (1.51) выражает **принцип суперпозиции электрических полей для потенциалов.**

Получим формулу для потенциальной энергии системы точечных зарядов. Преобразуем равенство (1.40), по которому определяется взаимная потенциальная энергия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2. Потенциал φ_1 электрического поля, созданного зарядом Q_2, в точке нахождения заряда Q_1 (рис. 1.25) определится по формуле:

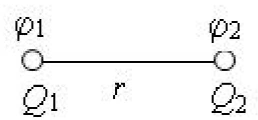


Рис. 1.25

$$\varphi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \ . \qquad (1.52)$$

Из равенства (1.42) и (1.52) следует, что потенциальная энергия заряда Q_1

$$W_1 = Q_1\varphi_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \ . \qquad (1.53)$$

Аналогично, потенциал φ_2 поля, созданного зарядом Q_1, в точке нахождения заряда Q_2 (рис. 1.25), определится по формуле:

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \ . \qquad (1.54)$$

Из (1.42) и (1.54) получаем, что

$$W_2 = Q_2\varphi_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (1.55)$$

Из равенства правых частей соотношений (1.53) и (1.55), следует, что потенциальные энергии зарядов одинаковы ($W_1 = W_2 = W$) и их можно определить по формуле:

$$W = Q_1\varphi_1 = Q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2\right) \qquad \text{или} \qquad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} Q_i\varphi_i \ .$$

Можно показать, что **потенциальная энергия взаимодействия системы**, состоящей из N зарядов, выразится аналогичным равенством:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \varphi_i}\,, \qquad (1.56)$$

где φ_i - потенциал электрического поля, созданного всеми зарядами, (кроме Q_i), в той точке, где находится заряд Q_i.

1.7 Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля. Циркуляция вектора напряженности электрического поля. Эквипотенциальные поверхности.

Электростатические силы являются консервативными (см. параграф 1.5). Связь проекции консервативной силы F_ℓ и потенциальной энергией W определяется соотношением (см. раздел «механика»):

$$F_\ell = -\frac{\partial W}{\partial \ell}\,.$$

Так как $F_\ell = QE_\ell$, где E_ℓ - проекция вектора $\vec{E}$ на произвольно выбранное направление ℓ (уравнение (1.6)), а W=$Q\varphi$ (уравнение (1.44)), то:

$$QE_\ell = -\frac{\partial(Q\varphi)}{\partial \ell} \Rightarrow QE_\ell = -Q\frac{\partial(\varphi)}{\partial \ell} \Rightarrow$$

После сокращения на Q получим:

$$\boxed{E_\ell = -\frac{\partial \varphi}{\partial \ell}}\,, \qquad (1.57)$$

Из равенства (1.57) следует, что проекции вектора $\vec{E}$ на координатные оси x, y, z определятся по формулам:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\;, \qquad (1.58)$$

(Напомним, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ - это частные производные. Например, частная производная по x вычисляется в предположении, что координаты y, z постоянные). Равенства (1.58) означают, что, например, проекция E_x вектора $\vec{E}$ на ось x равна взятой с обратным знаком частной производной от потенциала φ по переменной x. Аналогично можно прокомментировать формулы для E_y и E_z. Так как $\vec{E}$ можно представить в виде:

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z\,, \qquad (1.59)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты (единичные векторы) координатных осей, то из равенств (1.59) и (1.58) следует, что

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z \right). \qquad (1.60)$$

Выражение, стоящее в скобках, называется градиентом скалярной функции φ (обозначается *grad*φ). Используя обозначение градиента, можно равенство (1.60) переписать в виде

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi}. \qquad (1.61)$$

Т.о., напряженность $\vec{E}$ электрического поля равна взятому с обратным знаком градиенту потенциала φ. Градиент скалярной функции есть вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой функции. Знак минус в формуле (1.61) показывает, что напряженность $\vec{E}$ направлена в сторону наибыстрейшего уменьшения потенциала.

Равенства (1.57) и (1.61) выражают **связь между потенциалом φ и напряженность поля** $\vec{E}$ в **дифференциальной форме**. Они позволяют рассчитать распределение вектора напряжённости в пространстве, зная распределение потенциала.

Работу A_{12} по перемещению заряда Q в электрическом поле из точки 1 в точку 2 можно определить двумя способами:

1. $A_{12} = \int_1^2 Fd\ell \cos\alpha = \int_1^2 QEd\ell \cos\alpha = Q\int_1^2 E_\ell dl$,

где E_ℓ - проекция вектора $\vec{E}$ на направление перемещения $d\ell$;

2. $A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$

Из двух последних формул получаем $Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q\int_1^2 E_\ell d\ell$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathrm{E}_\ell d\ell}. \qquad (1.62)$$

Равенство (1.62) выражает **связь между потенциалом φ и напряженностью поля** $\vec{E}$ **в интегральной форме**. Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, т.к. работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории, по которой перемещается заряд. В (1.62) $d\ell$ - элемент длины линии, по которой берется интеграл.

Пример. Рассмотрим однородное электрическое поле, т.е. $\vec{E} = const$, и найдем разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 (рис. 1.26). Применим формулу (1.62) для прямой ℓ (в этом случае $\alpha = \mathrm{const}$):

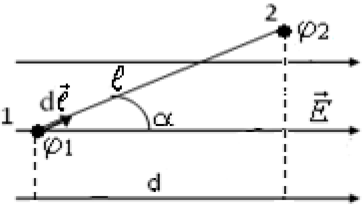


Рис. 1.26

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_\ell d\ell = \int_0^\ell E\cos\alpha d\ell =$$

$$= E\cos\alpha \int_0^\ell d\ell = E\ell\cos\alpha \quad . \qquad (1.63)$$

Из рисунка (1.26) видно, что

$$\ell\cos\alpha = d, \qquad (1.64)$$

где d - проекция расстояния ℓ между точками 1 и 2 на направление вектора $\vec{E}$. Из равенств (1.63) и (1.64) получаем $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$. Откуда находим:

$$\boxed{E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}} . \qquad (1.65)$$

Равенство (1.65) выражает **связь напряженности** $\vec{E}$ **с разностью потенциалов** $\varphi_1 - \varphi_2$ **для однородного поля** ($\vec{E} = const$): напряженность поля равна разности потенциалов двух точек поля, деленной на расстояние d между этими точками вдоль силовой линии.

Если каждой точке пространства соответствует некоторая векторная величина $\vec{a}$ (имеется поле вектора $\vec{a}$), то интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на элемент длины контура $d\vec{\ell}$, т.е.

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \oint_L a_\ell \cdot d\ell$$

называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L.

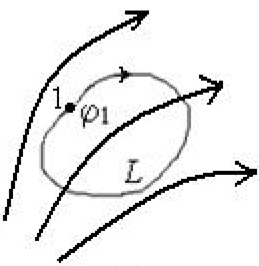


Рис. 1.27

Совершим перемещение в электростатическом поле по замкнутому контуру L из точки 1 в ту же точку 1 (рис. 1.27). В этом случае формула (1.62) примет вид

$$\varphi_1 - \varphi_1 = \oint_L E_\ell d\ell = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\boxed{\oint_L E_\ell d\ell = 0} \qquad (1.66)$$

Т.о.**, циркуляция вектора напряженности электростатического поля** $\vec{E}$ **по произвольному замкнутому контуру равна нулю**. Это следствие консервативности сил электростатического поля, т.е. его потенциального характера. Величина $\oint_L E_\ell d\ell$ есть работа сил электрического поля по перемещению единичного заряда (F=QE, Q=1Кл) по замкнутому контуру, а работа консервативной силы по любому замкнутому контуру всегда равна нулю.

Формула (1.66) справедлива только для электростатического поля. В частности поле движущихся зарядов (т.е. изменяющееся со временем) не является потенциальным и следовательно условие (1.66) для него не выполняется.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, **называется эквипотенциальной поверхностью**. Ее уравнение имеет вид $\varphi(x,y,z)=const$.

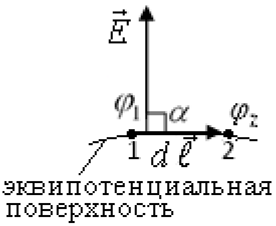


Рис. 1.28

Пусть точечный заряд Q совершает элементарное перемещение $d\vec{\ell}$ по эквипотенциальной поверхности из точки 1 в точку 2 (рис. 1.28, $\varphi_1=\varphi_2$). Согласно уравнению (1.57)

$$E_\ell=-\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}.$$

Так как $\varphi(x,y,z)=const$, то эта производная от φ равна нулю: $\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}=0.$ Следовательно

$E_\ell=0 \Rightarrow E\cos\alpha=0$, где угол α - угол между перемещением $d\vec{\ell}$ и вектором $\vec{E}$. Так как $E\neq 0$, то $\cos\alpha=0\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}.$

Таким образом, **вектор $\vec{E}$ всегда направлен перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности**, поэтому линии напряженности (силовые линии) электрического поля в каждой точке ортогональным эквипотенциальным поверхностям.

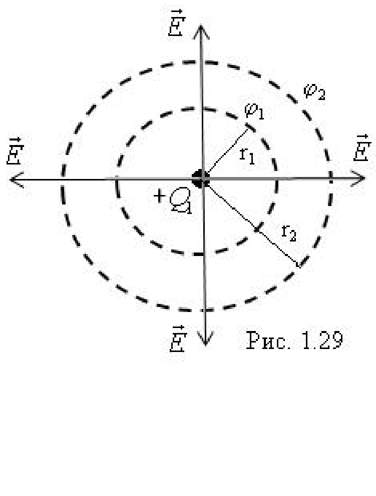


Рис. 1.29

Пример. Для точечного заряда

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$

следовательно $\varphi=\mathrm{const}$, если $r=\mathrm{const}$, т.е. для точечного заряда эквипотенциальные поверхности - концентрические сферы (рис. 1.29)

2 Электрическое поле в диэлектриках

2.1 Диполь. Полярные и неполярные молекулы. Поляризация диэлектрика. Напряженность электрического поля в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость вещества

Электрический диполь - система двух одинаковых по величине противоположных по знаку точечных зарядов +*Q* и -*Q*, расположенных на расстоянии ℓ друг от друга. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя. Ориентацию оси диполя в пространстве задают с помощью вектора $\vec{\ell}$, проведенного от заряда -*Q* к заряду +*Q* (рис. 2.1), модуль которого равен расстоянию между зарядами.

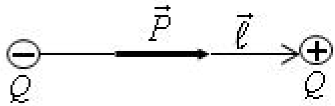


Рис. 2.1

Произведение положительного заряда *Q* на вектор $\vec{\ell}$ называется электрическим моментом диполя или **дипольным моментом**:

$$\boxed{\vec{P} = Q\vec{\ell}.} \qquad (2.1)$$

Вектор $\vec{P}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному (рис. 2.1). Единица измерения дипольного момента: [P] = 1 Кл·м.

Если диполь поместить в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, то на образующие диполь заряды +*Q* и -*Q* будут действовать равные по величине и противоположные по направлению силы $\vec{F}^+$ и $\vec{F}^-$ (рис. 2.2). Эти силы стремятся повернуть диполь так, чтобы его дипольный электрический момент $\vec{P}$ установился по направлению поля, т.е. $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (рис. 2.3). В этом положении (рис. 2.3.) диполь находится в состоянии устойчивого равновесия. При этом диполь создает собственное электрическое поле, силовые линии которого показаны на рис. 1.8. Из рисунка видно, что напряженность $\vec{E}_Д$ электрического поля, созданного диполем, противоположна напряженности $\vec{E}$ внешнего электрического поля,

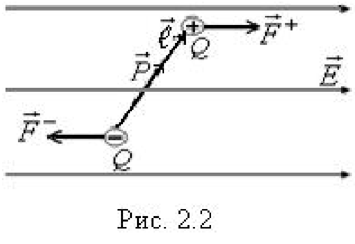


Рис. 2.2

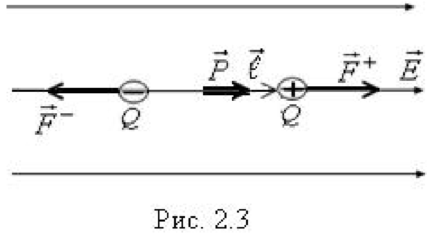


Рис. 2.3

в котором находится диполь. Следовательно, электрическое поле диполя ослабляет внешнее поле.

Диэлектриками (изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток (реально диэлектрики проводят ток в 10^{15}-10^{20} раз хуже, чем вещества, называемые проводниками).

Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных ядер и движущихся вокруг них отрицательно заряженных электронов. При этом суммарный заряд атома или молекулы равен нулю. У диэлектриков заряды, входящие в состав молекул, прочно связаны друг с другом и могут быть разъединены только при воздействии на них очень сильного поля. Поэтому заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются **связанными**.

Внутри или на поверхности тела могут находиться заряды, которые не входят в состав его молекул. Такие заряды, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, называют **свободными** (сторонними).

В зависимости от взаимного расположения зарядов внутри молекулы различают полярные и неполярные молекулы. У **полярных молекул** центры положительных и отрицательных зарядов смещены относительно друг друга, вследствие чего молекула является диполем и обладает собственным дипольным моментом $\vec{P} \neq 0$ (это молекулы $HC\ell$, H_2O, CO и др.). У неполярных молекул центры положительных и отрицательных зарядов совпадают, эти молекулы не являются диполями и их дипольный момент р $\vec{P} = 0$ (это молекулы H_2, N_2, O_2, CH_4 и др.).

Рассмотрим действие внешнего электрического поля на молекулы различных типов. В отсутствие внешнего поля дипольные моменты полярных молекул ориентированы хаотически (рис. 2.4а), поэтому суммарный дипольный момент вещества равен нулю. Внешнее электрическое поле оказывает на полярные молекулы в основном ориентирующее действие, стремясь установить их дипольными моментами по полю (см. рис. 2.2 и 2.3). Этому противодействует тепловое движение, которое стремится «разбросать» дипольные моменты равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается преимущественная ориентация дипольных моментов по полю, тем большая, чем сильнее поле и чем ниже температура (рис. 2.4б). При этом вещество в целом приобретает дипольный момент, т.е. поляризуется.

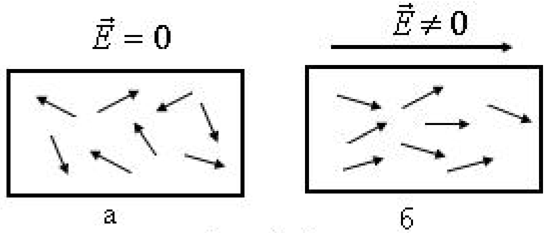


Рис. 2.4

Действие электрического поля на неполярную молекулу приводит к тому, что центр положительных зарядов молекулы смещается в направлении поля, а центр отрицательных зарядов - в противоположную сторону (рис. 2.5). В результате неполярная молекула приобретает индуцированный (наведенный) дипольный момент, точно ориентированный по полю (рис. 2.6).

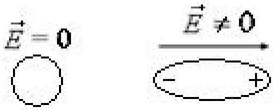


Рис. 2.5

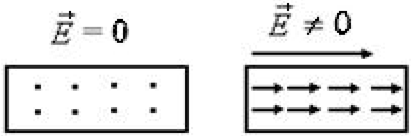
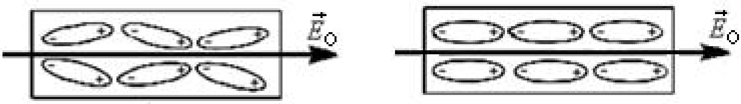


Рис. 2.6

Следовательно, независимо от типа молекул диэлектрики под действием внешнего электрического поля приобретают дипольный момент. Это явление называется **поляризацией диэлектрика**.

В результате поляризации на поверхности диэлектрика возникает избыток связанных зарядов (рис. 2.7а – диэлектрик с полярными молекулами, рис. 2.7б – с неполярными).



а б

Рис. 2.7

Следовательно, поляризованный диэлектрик создает собственное электрическое поле $\vec{E}'$, которое накладывается на внешнее поле $\vec{E}_0$. В итоге **напряженностью** $\vec{E}$ **электрического поля в диэлектрике**:

$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'}, \qquad (2.2)$$

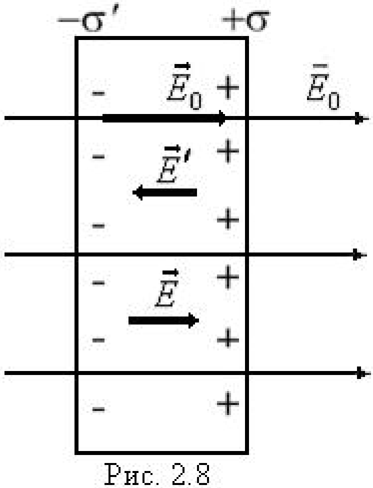


Рис. 2.8

где $\vec{E}'$ - напряженность электрического поля, созданного самим диэлектриком; $\vec{E}_0$ - напряженность внешнего электрического поля.

Если диэлектрик имеет форму плоскопараллельной пластины, перпендикулярной к направлению внешнего поля $\vec{E}_0$ (рис. 2.8), то поверхностные плотности σ' связанных зарядов на противоположных гранях пластины будут равны по величине и противоположны по знаку ($+\sigma'$ и $-\sigma'$). Напряженность $\vec{E}'$ поля, создаваемого этими связанными зарядами, направлена противоположно полю $\vec{E}_0$ (причем $E' < E_0$). Поэтому выражение (2.2) в проекциях на направление внешнего поля принимает вид:

$$E = E_0 - \vec{E}'.$$

Т.о. напряженность E электрического поля в диэлектрике меньше напряженности внешнего поля E_0 - диэлектрик ослабляет внешнее электрическое поле. Это имеет место не только для диэлектрической пластины, но и для диэлектрика любой геометрической формы.

Диэлектрическая проницаемость вещества ε показывает во сколько раз данное вещество ослабляет внешнее электрическое поле:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E_0}{E}}, \tag{2.3}$$

где E_0 - напряженность электрического поля в вакууме (т.е. внешнего поля), E - напряженность электрического поля в веществе. Для диэлектриков $\varepsilon \geq 1$, для вакуума ε=1.

2.2 Поляризованность. Электрическое смещение и его связь с поляризованностью. Теорема Гаусса для электрического смещения

Количественной характеристикой поляризации является **поляризованность $\vec{P}$ диэлектрика** - дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i}{V}}, \tag{2.4}$$

где $\vec{P}_i$ - дипольный момент одной молекулы, N - число молекул в объеме V диэлектрика. Единица измерения поляризованности [P]=(Кл·м)/м^3= Кл/м^2.

Молекулы диэлектрика испытывают действие суммарного поля $\vec{E}$. Поэтому поляризованность $\vec{P}$ диэлектрика определяется этим полем. Для большинства изотропных диэлектриков поляризованность пропорциональна напряженности поля $\vec{E}$, т.е.

$$\boxed{\vec{P} = æ\varepsilon_0 \vec{E}.} \tag{2.5}$$

где æ - **диэлектрическая восприимчивость вещества**, связанная с диэлектрической проницаемостью **ε** соотношением:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + æ.} \qquad (2.6)$$

Для характеристики электрического поля в диэлектрике удобно пользоваться вспомогательной величиной, которая определяется только распределением зарядов и не зависит от свойств среды. Эта величина называется **электрическое смещение**

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.} \qquad (2.7)$$

Подставляя в (2.7) выражения для напряженностей из главы 1, можно получить формулы для электрического смещения различных систем зарядов. Например, из формул (2.7) и (1.22) следует, что в пространстве между двумя заряженными плоскостями $\boxed{D = \sigma.}$

Найдем связь между поляризованностью и электрическим смещением. Для этого подставим равенство (2.6) в (2.7) и раскроем скобки:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + æ) \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + æ\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Откуда с учетом выражения (2.5) получим **связь между электрическим смещением и поляризованностью**:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}. \qquad (2.8)$$

Можно показать, что для вектора электрического смещения $\vec{D}$ будет иметь место теорема Гаусса, аналогичная теореме Гаусса (1.16) для вектора напряженности $\vec{E}$:

$$\boxed{\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{N} Q_i}. \qquad (2.9)$$

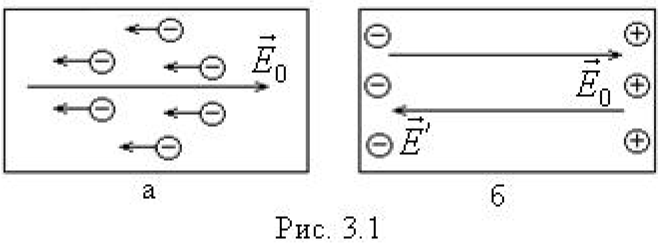
Теорему Гаусса для вектора электрического смещения можно сформулировать следующим образом: поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных (сторонних) зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

3 Проводники в электростатическом поле

3.1 Проводники в электростатическом поле. Равновесие зарядов на проводнике

В проводниках (металлы, электролиты, плазма) имеются электрически заряженные частицы (электроны, ионы) - носители заряда, которые в отсутствие электрического поля движутся хаотически по всему объему проводника. В металлах носители заряда - свободные электроны. Они образуются вследствие того, что валентные электроны атомов металла отрываются от атомов и становятся общими для всего металла. Атомы, потерявшие электроны, становятся положительными ионами. Они находятся в узлах кристаллической решетки и совершают колебания около своего положения равновесия – перемещаться по всему проводнику они не могут. В электролитах носители заряда - положительные и отрицательные ионы.

При внесении металлического проводника в электрическое поле на хаотическое движение электронов накладывается их упорядоченное движение в направлении противоположном внешнему полю $\vec{E}_0$ (рис. 3.1а). В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, причем положительный заряд обусловлен ионами кристаллической решетки металла. Поле этих зарядов $\vec{E}'$ направлено противоположно внешнему полю $\vec{E}_0$ (рис. 3.1б). Упорядоченное перемещение электронов происходит до тех пор, пока сила, действующая на любой электрон ($\vec{F} = Q\vec{E}$) со стороны суммарного электрического поля ($E = E_0 - E'$) не станет равной нулю. Сила $\vec{F}$ будет равна нулю, если $\vec{E} = 0$. Следовательно, перераспределение зарядов происходит до тех пор, пока напряженность $\vec{E}$ суммарного поля внутри проводника не станет равной нулю.



а б

Рис. 3.1

На поверхности проводника (вне его) вектор $\vec{E}$ направлен по нормали к этой поверхности, иначе под действием составляющей $\vec{E}_\tau$, касательной к поверхности проводника, заряды перемещались бы по проводнику, что противоречило бы их равновесному распределению.

Следовательно, **условия равновесия зарядов на проводнике**:

1. Напряженность поля внутри проводника должна равняться нулю:

$$\boxed{\vec{E} = 0}.$$

2. Напряженность поля на поверхности проводника направлена по нормали к поверхности:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_n}.$$

Из первого условия следует, что если в любой точке внутри проводника $\vec{E} = 0$, то и $E_\ell =$ 0, а т.к. в соответствии с равенством (1.57) $E_\ell = -\frac{\partial \varphi}{\partial \ell}$, то следовательно $\frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = 0 \to \varphi = \text{const}$. Т.е. потенциал φ во всех точках внутри проводника одинаков. Из второго условия следует, что т.к. вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности, то поверхность проводника эквипотенциальна. Т.о. при равновесии зарядов на проводнике **весь объем и поверхность проводника эквипотенциальны** (имеют одинаковый потенциал).

Сообщим проводнику электрический заряд. Перераспределение носителей заряда в проводнике будет происходить до тех пор, пока каждая заряженная частица не будет находиться в равновесии ($\vec{F} = 0$). А в этом случае будет выполняться условия 1, 2 (см. вышеизложенное). Сообщенный проводнику **заряд распределяется по поверхности проводника**. Это следует из теоремы Гаусса (2.9). Действительно, внутри заряженного проводника (см. условие 1) $\vec{E} = 0$, а следовательно и $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = 0$. Если замкнутая поверхность S находится внутри проводника, то по теореме Гаусса $\sum_{i=1}^{N} Q_i = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0$, т.е. внутри заряженного проводника алгебраическая сумма зарядов равна нулю.

Если внутри проводника, находящегося во внешнем электростатическом поле, имеется полость, то поле внутри нее отсутствует ($\vec{E} = 0$), что используется для электростатической защиты.

3.2 Электроемкость уединенного проводника. Конденсатор. Электроемкость плоского конденсатора. Соединения конденсаторов

Рассмотрим уединенный проводник (удаленный от других проводников, тел и зарядов). Его потенциал, согласно (1.43), прямо пропорционален заряду проводника. Из опыта следует, что разные проводники будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника можно записать

$$\varphi = \frac{1}{C} \cdot Q \,. \qquad (3.1)$$

Из равенства (3.1) получаем, что по определению **электроемкость проводника** равна отношению заряда проводника Q к его потенциалу φ:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi}}. \qquad (3.2)$$

Единица измерения электроемкости - *фарад* (Ф): $[\text{Ф}] = \frac{Кл}{В}$.

Электроемкость (или просто емкость) проводника зависит от его размеров и формы, от диэлектрической проницаемости окружающей среды и не зависит от заряда и потенциала проводника (т.к. чем больше заряд проводника, тем больше его потенциал, а их отношение остается постоянным).

Найдем емкость C проводящего шара радиуса R, погруженного в безграничный однородный и изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε**.** Потенциал поверхности шара, которому сообщили заряд Q**,** определяется равенством (1.43):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \,. \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.3) и (3.2) получаем:

$$C = \frac{Q \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}{Q} \,.$$

Откуда **электроемкость уединенного шара**

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \qquad (3.4)$$

Электроемкость уединенных проводников невелика. Например, шар таких размеров как Земля имеет емкость всего лишь $7 \cdot 10^{-4}$ Ф (расчет проведен по формуле (3.4)). Как видно из (3.4), для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь очень большие размеры. На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших потенциалах накапливать («конденсировать») значительные по величине заряды, иными словами обладать большой емкостью. Эти устройства получили название **конденсаторов**.

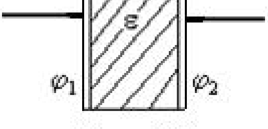


Рис. 3.2

Конденсатор состоит их двух близко расположенных проводников (называемых обкладками – это две пластины, два коаксиальных цилиндра, две концентрические сферы - плоский, цилиндрический, сферический конденсаторы), разделенных диэлектриком. Электрические заряды на обкладках конденсатора равны по величине и противоположны по знаку. На рисунке 3.2 показан **плоский конденсатор**, состоящий из двух проводящих пластин, между которыми находится диэлектрик. **Емкость C конденсатора** равна отношению заряда Q одной из обкладок к разности потенциалов U=φ_1- φ_2 между обкладками:

$$\boxed{C=\frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{Q}{U}}. \qquad (3.5)$$

Найдем емкость плоского конденсатора. Пусть площадь одной пластин (обкладки) равна S, а расстояние между обкладками d. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком с проницаемостью ε. Если d много меньше линейных размеров обкладок, то напряженность электрического поля между обкладками можно рассчитать по той же формуле, что и для двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей (1.22) и считать поле однородным.

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (3.6)$$

где σ - поверхностная плотность заряда на обкладке, ε - диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора. Так как

$$\sigma=\frac{Q}{S}, \qquad (3.7)$$

где Q - заряд на обкладке, то, подставляя (3.7) в (3.8), получаем:

$$E=\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}. \qquad (3.8)$$

Поскольку электрическое поле между обкладками однородное, то можем воспользоваться равенством (1.65):

$$E=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}. \qquad (3.9)$$

Приравнивая правые части выражений (3.9) и (3.8), имеем

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}=\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\Rightarrow \quad \frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (3.10)$$

Из сравнения формул (3.5) и (3.10) получаем, что **электроемкость плоского конденсатора**

$$\boxed{C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}, \qquad (3.11)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика, находящегося между пластинами конденсатора, ε_0 – электрическая постоянная, S – площадь пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами.

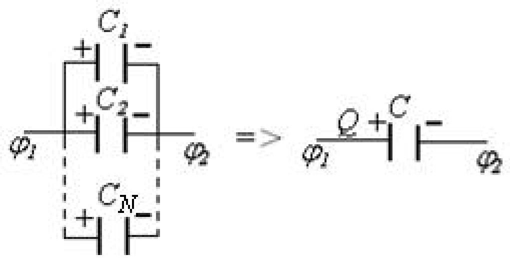
Располагая некоторым набором конденсаторов, можно получить много различных значений емкости, если применить соединения конденсаторов в батареи. На рис. 3.3а показано **параллельное соединение конденсаторов**. Их надо заменить одним (эквивалентным) конденсатором C (рис. 3.3б). При параллельном соединении (рис. 3.3а) одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал φ_1, а другая φ_2. Поэтому разность потенциалов $U=\varphi_1-\varphi_2$ на всех конденсаторах и эквивалентном конденсаторе C одинакова:

$$\boxed{U_1=U_2=\cdots U_N=U=\varphi_1-\varphi_2}.$$

На соединенных вместе обкладках конденсаторов, а следовательно и на эквивалентном конденсаторе, накапливается суммарный заряд Q:

$$Q=\sum_{i=1}^{N}Q_i=\sum_{i=1}^{N}C_iU=U\sum_{i=1}^{N}C_i \Rightarrow$$

$$\boxed{Q=U\sum_{i=1}^{N}C_i.}$$



а б

Рис. 3.3

Емкость C батареи получим, разделив суммарный заряд на приложенную разность потенциалов:

$$C=\frac{Q}{U}=\sum_{i=1}^{N}C_i \Rightarrow$$

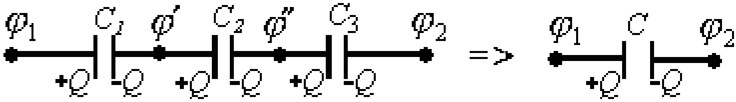
$$\boxed{C=\sum_{i=1}^{N}C_i}, \qquad (3.12)$$

где C - **электроемкость батареи из N параллельно соединенных конденсаторов**.

На рисунке 3.4а показано **последовательное соединение конденсаторов**. Их надо заменить одним (эквивалентным) конденсатором C (рис. 3.4б). При последовательном соединении конденсаторов заряды всех обкладок одинаковы по величине и равны заряду Q эквивалентного конденсатора:

$$\boxed{Q_1=Q_2=\cdots Q_N=Q}. \qquad (3.13)$$

Для упрощения расчётов рассмотрим батарею из трёх последовательно включенных конденсаторов (рис. 3.4). Поверхность заряженного проводника эквипотенциальна, поэтому соединённые между собой



а б

Рис. 3.4

обкладки конденсаторов имеют одинаковые потенциалы (рис. 3.4а). Тогда разности потенциалов на конденсаторах:

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi' \ ; U_2 = \varphi' - \varphi'' \ ; \ U_3 = \varphi'' - \varphi_2 .$$

Сложим эти три равенства:

$$U_1 + U_2 + U_3 = \varphi_1 - \varphi' + \varphi' - \varphi'' + \varphi'' - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = U \Rightarrow$$

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3 .}. \qquad (3.14)$$

Разделим это выражение на заряд *Q:*

$$\frac{U}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} + \frac{U_3}{Q}. \qquad (3.15)$$

По определению (3.5) электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} \ \Rightarrow \ \frac{U}{Q} = \frac{1}{C}.$$

Поэтому равенство (3.15) с учетом (3.13) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

При последовательном соединении *N* конденсаторов последняя формула принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}, \qquad (3.16)$$

где *C* - **электроемкость батареи из *N* последовательно соединенных конденсаторов**.

3.3 Энергия заряженных проводника и конденсатора. Объёмная плотность энергии электрического поля

Находящийся на проводнике заряд *Q* можно рассматривать как систему точечных зарядов ΔQ_i, для которой $Q = \sum_{i=1}^{N} \Delta Q_i$. Потенциал φ всех точек проводника находящегося в электростатическом поле одинаковый (см. параграф 3.1). Поэтому потенциал точек, в которых находятся заряды ΔQ_i одинаков и равен потенциалу φ проводника. Воспользуемся формулой (1.56) для потенциальной энергии системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \varphi \Delta Q_i = \frac{1}{2}\varphi \sum_{i=1}^{N} \Delta Q_i = \frac{1}{2}\varphi Q . \qquad (3.17)$$

Приняв во внимание формулу (3.2), можно получаем, что **энергии заряженного проводника**

$$\boxed{W=\frac{\varphi Q}{2}=\frac{Q^2}{2C}=\frac{C\varphi^2}{2}}. \qquad (3.18)$$

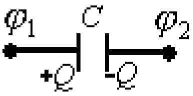


Рис. 3.5

Найдём энергию заряженного конденсатора (рис. 3.5).Предположим, что потенциал обкладки, на которой находится заряд +*Q*, равен φ_1, а потенциал обкладки, на которой находится заряд -*Q*, равен φ_2. Энергия заряженного конденсатора будет равна сумме энергии каждой из заряженных обкладок, т. е.

$$W=W_1+W_2. \qquad (3.19)$$

где W_1 и W_2 - энергии первой и второй обкладок конденсатора. Используя формулу (12.1), можно записать:

$$W_1=\frac{1}{2}(+Q)\varphi_1; \quad W_2=\frac{1}{2}(-Q)\varphi_2 \qquad (3.20)$$

Из равенств (3.19) и (3.20) получаем:

$$W=\frac{1}{2}(+Q)\varphi_1+\frac{1}{2}(-Q)\varphi_2=\frac{1}{2}Q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}QU$$

Приняв во внимание формулу (3.5), получим, что **энергия заряженного конденсатора**:

$$\boxed{W=\frac{QU}{2}=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}}. \qquad (3.21)$$

Равенства (3.21) и (3.18) отличаются только заменой φ на U.

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора через характеристики электрического поля в зазоре между обкладками. Для однородного электрического поля справедливо соотношение (1.65):

$$E=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}=\frac{U}{d}\Rightarrow U=Ed. \qquad (3.22)$$

Ёмкость плоского конденсатора (3.11):

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \qquad (3.23)$$

Подставим выражения (3.22) и (3.23) в последнее равенство соотношений (3.21):

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2d^2}{2d}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2d}{2}.$$

Произведение *Sd* равно объёму *V* пространства между пластинами кондесатора, т. е. объёму в котором сосредоточено электрическое поле. Следовательно,

$$W=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V. \qquad (3.24)$$

Объемная плотность энергии – это энергия, содержащаяся в единице объема:

$$w = \frac{W}{V}.$$

Электрическое поле плоского конденсатора однородно. Поэтому энергия (3.24) распределяется по объёму равномерно, а в единице объёма содержится энергия

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

С учётом соотношения (2.7) для электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ полученную формулу можно представить в виде:

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}}, \qquad (3.25)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{D}$ – напряженность электрического поля и электрическое смещение в данной точке поля.

Выражения (3.25) определяют объёмную плотность энергии электрического поля и в случае неоднородного поля.

4 Постоянный электрический ток

4.1. Электрический ток. Сила и плотность тока

Если через некоторую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, то через эту поверхность течет электрический ток. Для протекания тока необходимо наличие **носителей тока -** заряженных частиц, которые могут свободно перемещаться по всему телу. В металлах носителями тока являются электроны, электролитах - положительные и отрицательные ионы. Носители тока находятся в беспорядочном тепловом движении. При наличии электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение носителей тока – возникает ток. **Электрический ток -** это упорядоченное движение электрических зарядов. **Условиями существования тока** являются наличие носителей тока и электрического поля. **За направление тока** условились принимать направление движения положительных зарядов. Если ток обусловлен движением отрицательных зарядов (например, электронов), то направление тока считают противоположным направлению движения этих зарядов.

Заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность (например, через поперечное сечение проводника) в единицу времени, называется **силой тока *I*:**

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \qquad (4.1)$$

где dQ - заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за время dt.

Ток, величина и направление которого не изменяется со временем, называется постоянным. Для постоянного тока справедливо соотношение

$$\boxed{I = \frac{Q}{t}}, \qquad (4.2)$$

где Q - заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечное время t.

Единица силы тока в СИ - ампер (А) вводится в теории электромагнетизма и определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2\cdot10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока $\vec{j}$, который совпадает по направлению с направлением тока. **Плотность тока** j численно равна току, протекающему через единицу площади, перпендикулярную направлению тока:

$$\boxed{j = \frac{dI}{dS_{\perp}}} \qquad (4.3)$$

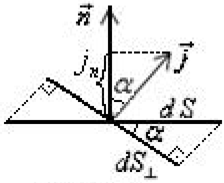


Рис. 4.1

где dI – сила тока, протекающего через элемент площади $dS_{\perp}$, перпендикулярный направлению тока.

Рассмотрим малый элемент поверхности площадью dS расположим так, что нормаль $\vec{n}$ к этому элементу составляет с вектором плотности тока $\vec{j}$ угол α (рис. 4.1). Через площадку dS течет такой же ток, как через площадку $dS_{\perp} = dS \cdot \cos\alpha$. Тогда согласно (4.3), сила тока dI через площадку dS равна

$$dI = jdS_{\perp} = jdS\cos\alpha = j_n dS, . \qquad (4.4)$$

где $j_n = j\cos\alpha$ - проекция вектора плотности тока на нормаль $\vec{n}$. **Сила тока *I* через поверхность S** находится суммированием токов dI через все элементарные площадки dS этой поверхности, что математически сводится к интегрированию соотношения (4.4):

$$\boxed{I = \int\limits_S j_n dS.}, \qquad (4.5)$$

Если плотность тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника, то

$$\boxed{j = \frac{I}{S}}. \qquad (4.6)$$

Установим связь между средней скоростью $\vec{u}$ упорядоченного движения носителей и плотностью тока j. Пусть по цилиндрическому проводнику площадью поперечного сечения S течет постоянный ток I, плотность j которого одинакова во всех точках проводника. При этом носителями тока будут положительно заряженные частицы, имеющие заряд e и скорость упорядоченного движения $\vec{u}$. Рассмотрим элемент длины этого проводника $d\ell$ (рис. 4.2). Через сечение S за время dt пройдут все носители тока, заключенные в цилиндре высотой $d\ell = u \cdot dt$. Объем этого цилиндра

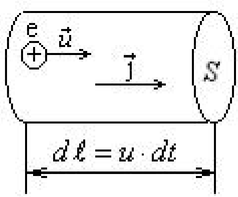


Рис. 4.2

$$dV = S \cdot d\ell = S \cdot u \cdot dt. \qquad (4.7)$$

В этом объеме находятся $dN = ndV$ носителей тока, или с учетом (4.7): $dN = nSudt$. (4.8)
где n - концентрация носителей тока (число носителей тока в единице объема). Следовательно, за время dt через сечение S пройдет заряд

$$dQ = edN. \qquad (4.9)$$

Подставляя (4.8) в (4.9) получим: $dQ = enuSdt.$ (4.10)
Из определения силы тока (4.1) с учетом (4.10) получим:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{enuSdt}{dt} = enuS. \qquad (4.11)$$

Плотность тока найдем по формуле (4.6), приняв во внимание (4.11):

$$j = \frac{I}{S} = \frac{enuS}{S} = enu.$$

Т.о., **плотность тока *j* связана со скоростью *u* упорядоченного движения носителей тока** соотношением:

$$\boxed{j = enu}. \qquad (4.12)$$

Это равенство выполняется в векторном виде:

$$\boxed{\vec{j} = en\vec{u}.}. \qquad (4.13)$$

Для положительно заряженных носителей тока ($e > 0$).направления $\vec{j}$ и $\vec{u}$ совпадают, для отрицательных ($e < 0$) – противоположны.

4.2 Электродвижущая сила, напряжение и разность потенциалов

Если два разноименно заряженных проводника *A* и *B*, потенциалы которых φ_2 и φ_1, соединить проводником С (рис. 4.3), то под действием электрического поля начнется перемещение положительных носителей тока в направлении ВСА - по проводнику С пойдет ток в направлении от *B* к *A*. При этом потенциал проводника *A* будет увеличиваться, а проводника *B* уменьшаться, пока потенциалы не станут равными: $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда напряженность электрического поля внутри проводников станет равной нулю (E=0), и ток прекратится. Чтобы ток продолжался, необходимо отводить положительные носители от проводника *A* с меньшим потенциалом по другому пути к проводнику *B* с большим потенциалом (рис. 4.4). Т.к.

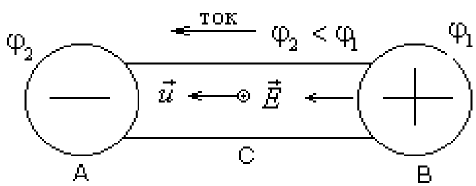


Рис. 4.3

под действием электростатического поля положительные заряды могут перемещаться только от большего к меньшему потенциалу, то перемещение зарядов по пути *АДВ* возможно только под действием сил неэлектростатического происхождения. Эти силы (перемещающие положительный заряд в направлении возрастания потенциала, а отрицательный – в направлении его убывания) называются **сторонними**. Сторонними могут быть силы электромагнитного поля или силы, возникающие при химических реакциях. Т.о. для поддержания тока необходимо, чтобы цепь была замкнута и наличие устройства (источника тока), создающего сторонние силы

Сторонние силы характеризуют работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой** (ЭДС)

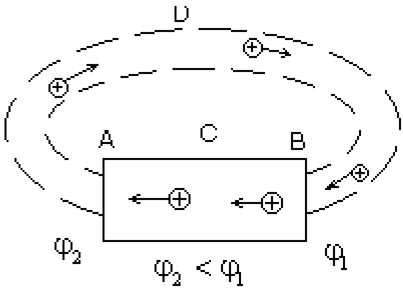


Рис. 4.4

$$\boxed{\varepsilon = \frac{A^{cm}}{Q}}, \qquad (4.14)$$

где A^{cm} работа сторонних сил по перемещению заряда Q в замкнутой цепи или на участке цепи. Единица измерения ЭДС – вольт В:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Стороннюю силу $\vec{F}^{\text{ст}}$, действующую на заряд Q, можно представить в виде

$$\vec{F}^{cm} = Q\vec{E}^*,$$

где $\vec{E}^*$ - напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом Q на участке цепи 1-2 равна:

$$A_{12}^{cm} = \int_1^2 \vec{F}^{cm} d\vec{\ell} = \int_1^2 Q\vec{E}^* d\vec{\ell} = Q\int_1^2 \vec{E}^* d\vec{\ell}.$$

Разделив последнее равенство на Q, получим:

$$\frac{A_{12}^{cm}}{Q} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{\ell}. \qquad (4.15)$$

Из сравнения соотношений (4.14.) и (14.2.) следует, что **ЭДС, действующая на участке цепи**:

$$\boxed{\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{\ell}}. \qquad (4.16)$$

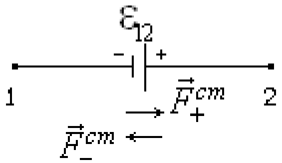


Рис. 4.5

где ε_{12} - ЭДС, действующая на участке цепи 1-2 (на рисунке 4.5 показаны напраления сторонних сил $\vec{F}_{-}^{ст}$ и $\vec{F}_{+}^{ст}$, действующих внутри источника тока на отрицательные и положительные заряды). Напряженность $\vec{E}^{*}$ поля сторонних сил направлена также как сила $\vec{F}_{+}^{ст}$. Под знаком интеграла стоит скалярное произведение $\vec{E}^{*}$ на элемент длины $d\vec{\ell}$ линии, по которой ведется интегрирование.

Электродвижущая сила, действующая в замкнутой цепи:

$$\boxed{\varepsilon = \oint\limits_{\ell} \vec{E}^{*} d\vec{\ell}}\,. \tag{4.17}$$

Т. о., ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на носители тока действуют и электростатические силы, поэтому полная работа A_{12}, совершаемая электростатическими и сторонними силами над зарядом Q на участке цепи 1-2:

$$A_{12} = A_{12}^{эл} + A_{12}^{ст}, \tag{4.18}$$

Работа, совершаемая электростатическими и сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется **напряжением** на участке цепи:

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_{12}^{эл} + A_{12}^{ст}}{Q}.} \tag{4.19}$$

Работа (1.47) сил электрического поля: $A_{12}^{эл} = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$, (4.20)

Работа сторонних сил из (4.14): $A_{12}^{ст} = Q\varepsilon_{12}$. (4.21)

Подставляя (4.20) и (4.21) в (4.19), получаем:

$$U_{12} = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2) + Q\varepsilon_{12}}{Q} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}\,. \tag{4.22}$$

Участок цепи, в котором действуют сторонние силы, называется **неоднородным**. Таким образом, соотношение (4.22) показывает, что **напряжение на неоднородном участке цепи** равно сумме разности потенциалов

$(\varphi_1 - \varphi_2)$ и ЭДС $\mathcal{E}_{12}$. Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Его можно рассматривать как частный случай неоднородного с ЭДС $\mathcal{E}_{12} = 0$. С учетом этого из (4.22) следует:

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2}\,. \tag{4.23}$$

Т.о., **напряжение на однородном участке цепи** равно разности потенциалов на концах этого участка.

4.3 Закон Ома для участка цепи и замкнутой цепи

В 1826 г. немецкий физик Г. Ом экспериментально установил зависимость между силой тока *I* и напряжением *U* на участке цепи:

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}\,, \tag{4.24}$$

где *R* - электрическое сопротивление участка цепи (более подробно о сопротивлении см. дальше).

В случае однородного участка цепи напряжение *U* равно разности потенциалов (4.23) и формула (4.24) примет вид:

.

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.}. \tag{4.25}$$

Равенство (4.25) - это **закон Ома для однородного участка цепи**. Здесь *R* – суммарное сопротивление всего участка цепи. В простейшем случае однородный участок представляет собой проводник сопротивлением *R* (рис. 4.6).

Для неоднородного участка цепи согласно (4.22) напряжение

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

и закон Ома (4.24) принимает вид:

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}}. \tag{4.26}$$

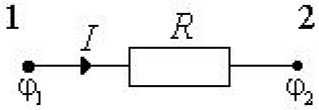


Рис. 4.6

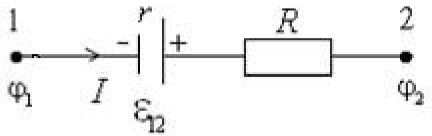


Рис. 4.7

Это **закон Ома для неоднородного участка цепи**. Здесь R - суммарное сопротивление всего участка цепи. На рис. 4.7 показан неоднородный участок, состоящий из источника тока с ЭДС ε_{12} и проводника сопротивлением R. В этом случае суммарное сопротивление участка равно (R+r), где r - сопротивление источника тока, и закон Ома (4.26) можно записать в виде:

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R + r}.} \qquad (4.27)$$

В формуле (4.27) сила тока I и ЭДС - величины алгебраические. Сила тока положительна, когда ток течет от точки 1 к точке 2. ЭДС считается положительной, если она способствует движению положительных зарядов в направлении 1-2 (см. рис. 4.7). Если на рис. 4.7 поменять полярность включения источника, то в формуле (4.27) перед ЭДС нужно поставить знак минус.

На рисунке 4.8 показана замкнутая цепь, состоящая из источника тока и проводника. Такую цепь можно получить, если соединить концы 1 и 2 неоднородного участка (рис. 4.7). Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$, и формула (4.27) преобразуется в **закон Ома для замкнутой цепи**:

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}}. \qquad (4.28)$$

Здесь в общем случае ε - суммарная ЭДС, действующая в цепи, R - сопротивление внешнего участка цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока.

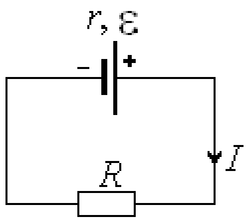


Рис. 4.8

4.4 Электрическое сопротивление проводника. Соединения проводников

Если в проводнике создать стационарное (т.е. не изменяющееся с течением времени) электрическое поле, то устанавливается конечная плотность *тока j=enu*. Это свидетельствует о том, что, несмотря на действие на носители тока электрической силы $\vec{F} = e\vec{E}$, скорость их упорядоченного движения не возрастает неограниченно, а достигает конечного значения *u*. Следовательно, на носители тока кроме электрической силы действует сила, тормозящая их движение. Например, в металлических проводниках носители тока - электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки и теряют скорость упорядоченного движения, причем часть их кинетической энергии превращается во внутреннюю энергию проводника (проводник нагревается). В результате таких столкновений в проводнике устанавливается некоторая средняя скорость упорядоченного движения носителей тока. Эти столкновения носителей тока и обусловливают электрическое сопротивление проводников.

Выразим сопротивление *R* из закона Ома:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}.} \tag{4.29}$$

Т.о., **электрическое сопротивление проводника** равно напряжению на проводнике при протекании через него тока 1А. Единица измерения сопротивления из соотношения (4.29) ом (Ом): $\left[R\right] = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}$. 1 Ом равен сопротивлению проводника, в котором при напряжении 1В течет ток силой 1А. Сопротивление не зависит от напряжения на проводнике: чем больше напряжение *U* на проводнике, тем больше в нем ток *I*, а их отношение остается постоянным (см. формулу 4.29).

Электрическое сопротивление проводника зависит от размеров и формы проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан.

Сопротивление однородного цилиндрического проводника

$$\boxed{R = \rho\frac{\ell}{S}}, \tag{4.30}$$

где ℓ - длина проводника, *S* - площадь его поперечного сечения, ρ - удельное электрическое сопротивление вещества (различное для разных материалов). Из (4.30) следует, что удельное сопротивление ρ численно равно сопротивлению *R* проводника длиной ℓ = 1м и *S* = 1м^2. Единица измерения [ρ]=Ом м.

Установлено, что удельное сопротивление металлических проводников с увеличением температуры возрастает по закону:

$$\boxed{\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)}, \tag{4.31}$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при температуре $T_1 = 273K$, ρ - удельное сопротивление при температуре $T = T_1 + \Delta T$, α - температурный коэффициент сопротивления, зависящий от материала проводника. Единица измерения $[\alpha] = \mathrm{K}^{-1}$.

Располагая некоторым набором проводников (резисторов) можно получить много разных значений сопротивления, если применить различные способы их соединения. На рис. 4.9 показано **последовательное соединение проводников**, имеющее следующие закономерности.

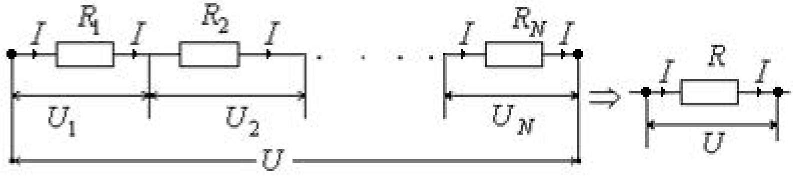


Рис. 4.9

1) **Токи** во всех проводниках одинаковы и равны общему току *I*:

$$\boxed{I_1 = I_2 = \ldots = I_N = I}. \tag{4.32}$$

2) **Напряжение** *U* на всем участке равно сумме напряжений на каждом проводнике:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + \ldots + U_N} \text{ или } \boxed{U = \sum_{i=1}^{N} U_i} \tag{4.33}$$

3) Разделим (4.33) на силу тока *I*, которая во всех проводниках одинакова в соответствии с (4.32):

$$\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \ldots + \frac{U_N}{I},$$

откуда с учетом закона Ома (4.24) получаем:

$$\boxed{R = R_1 + R_2 + \ldots + R_N} \text{ или } \boxed{R = \sum_{i=1}^{N} R_i}. \tag{4.34}$$

Т.о. при последовательном соединении **общее сопротивление** *R* участка равно сумме сопротивлений всех проводников. Если последовательно соединено *N* проводников с одинаковым сопротивлением R_1, то формула (4.34) примет вид:

$$\boxed{R = NR_1}. \tag{4.35}$$

На рис. 4.10 показано **параллельное соединение проводников**, имеющее следующие закономерности.

1) **Общий ток** *I* равен сумме токов во всех проводниках:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + \ldots + I_N} \quad \text{или} \quad \boxed{I = \sum_{i=1}^{N} I_i} \qquad (4.36)$$

2) **Напряжения** на всех проводниках одинаковы и равны общему напряжению U на участке цепи:

$$\boxed{U_1 = U_2 = \ldots = U_N = U}. \qquad (4.37)$$

3) Разделим (4.36) на напряжение U, которое на всех проводниках одинаково (см. 4.37):

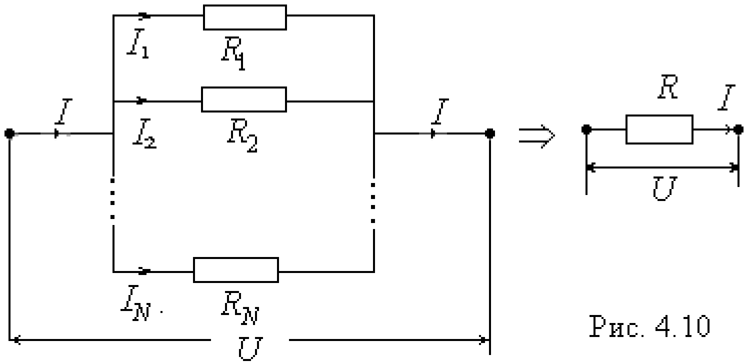


Рис. 4.10

$$\frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \ldots + \frac{I_N}{U}. \qquad (4.38)$$

Из определения сопротивления (4.29) следует, что т.к.

$$R = \frac{U}{I}, \text{ то } \frac{I}{U} = \frac{1}{R}.$$

Поэтому выражение (4.38) можно записать в виде:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}. \qquad (4.39)$$

Соотношение (4.39) позволяет найти **общее сопротивление** R участка цепи из N параллельно соединенных проводников. Если параллельно соединить N проводников с одинаковыми сопротивлениями R_1, то из (4.39) следует:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_1} = N \cdot \frac{1}{R_1} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{N}{R_1} \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{R_1}{N}}. \qquad (4.40)$$

4.5 Закон Ома в дифференциальной форме

Рассмотрим однородный участок цепи и найдем связь между векторами плотности тока $\vec{j}$ и напряженности $\vec{E}$ в данной точке проводника. В изотропном проводнике упорядоченное движение положительно заряженных носителей тока происходит коллинеарно вектору $\vec{E}$. Поэтому направление векторов $\vec{j} = en\vec{u}$ и $\vec{E}$ совпадают.

Выделим в проводнике элементарный цилиндр длиной $d\ell$ и площадью основания S с образующими параллельными векторами $\vec{j}$ и $\vec{E}$ (рис. 4.11). Согласно формуле (4.30) сопротивление этого цилиндра

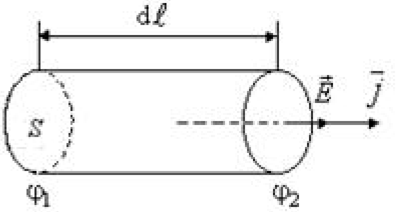


Рис. 4.11

$$dR = \rho\frac{d\ell}{S}. \qquad (4.41)$$

В данном случае закон Ома для однородного участка цепи (4.25) принимает вид:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dR}. \qquad (4.42)$$

Чтобы найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на этом участке воспользуемся связью напряженности и потенциала для однородного электрического поля (1.65), которая для данного элементарного цилиндра принимает вид:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d\ell} \Rightarrow \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = Ed\ell. \qquad (4.43)$$

Подставим выражения (4.43) и (4.41) в (4.42):

$$I = \frac{Ed\ell \cdot S}{\rho d\ell} \Rightarrow I = \frac{ES}{\rho}. \qquad (4.44)$$

Плотность тока j найдем по формуле (4.6), в которую подставим соотношение (4.44):

$$j = \frac{I}{S} = \frac{ES}{\rho S} \Rightarrow \qquad j = \frac{1}{\rho}E. \qquad (4.45)$$

Величина γ, обратная удельному сопротивлению ρ, называется удельной электрической проводимостью (удельной электропроводностью), т. е.

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\rho}}. \qquad (4.46)$$

Формулу (4.55) с учетом равенства (4.46) можно записать в виде:

$$j = \gamma E\ . \qquad (4.47)$$

Воспользовавшись тем, что векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$ направлены одинаково, равенство (4.47) можно написать в векторном виде

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E}}\ . \qquad (4.48)$$

Уравнение (4.48) выражает **закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи**: плотность тока $\vec{j}$ в данной точке проводника прямо пропорциональна напряженности $\vec{E}$ электрического поля в этой точке.

На неоднородном участке цепи на носители тока кроме электростатических сил $\vec{F} = e\vec{E}$ действуют сторонние силы $\vec{F}^{cm} = e\vec{E}^*$. Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, как силы электростатические. Очевидно, что там, где кроме электростатиических сил, на носители тока действуют сторонние силы, плотность тока будет пропорциональна сумме напряженностей $\vec{E} + \vec{E}^*$, т. е.

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\ (\vec{E} + \vec{E}^*\ )} \qquad (4.49)$$

где $\vec{E}$ - напряженность электростатического поля; $\vec{E}^*$ - напряженность поля сторонних сил. Формула (4.49) выражает **закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи**.

4.6 Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим участок цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение *U*. Заряд *Q*, проходящий через поперечное сечение проводника за время *t*, можно найти из равенства (4.2):

$$Q=It, \qquad (4.50)$$

где *I* - сила тока. При этом электростатические и сторонние силы совершают работу *A*, определяемую формулой (4.19):

$$A=UQ. \qquad (4.51)$$

Выражение (4.51) с учетом (4.50) принимает вид:

$$A=UIt.$$

Если учесть закон Ома (*I=U/R => U=IR*) и подставить *I* или *U* в формулу работы, получим, что **работа постоянного тока** на участке цепи:

$$\boxed{A = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t}. \qquad (4.52)$$

Мощность P - величина, численно равная работе, совершаемой за единицу времени, т. е.

$$P = \frac{A}{t} \cdot \qquad (4.53)$$

Из соотношений (4.52) и (4.53) получаем **мощность постоянного тока**:

$$\boxed{P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}}. \qquad (4.54)$$

В общем случае работа тока затрачивается на совершение работы над внешними телами (для этого участок должен перемещаться в пространстве), на протекание в нем химических реакций и на нагревание данного участка цепи. Если проводник неподвижен и химических превращений в нем не происходит, то работа тока (4.52) затрачивается только на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается, т. е. в нем выделяется количество теплоты Q *(не путать с зарядом Q)* .По закону сохранения энергии можем записать, что

$$\mathrm{Q} = A. \qquad (4.55)$$

Тогда формула (4.55) с учетом равенства (4.52) принимает вид:

$$\boxed{\mathrm{Q} = UIt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R}t}. \qquad (4.56)$$

Соотношение

$$\boxed{\mathrm{Q} = I^2 Rt}, \qquad (4.57)$$

определяющее **количество теплоты** Q, выделяющееся в проводнике при протекании тока, выражает **закон Джоуля-Ленца**.

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты, определится по формуле

$$\boxed{\mathrm{Q} = \int_0^t I^2 R dt}. \qquad (4.58)$$

От уравнения (4.57), определяющего тепло, выделяющееся во всем проводнике, перейдем к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника. Рассмотрим однородный участок цепи (отсутствуют сторонние силы) и найдем количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, т.е. величину

$$\omega = \frac{d\mathrm{Q}}{dVdt}, \qquad (4.59)$$

где $d\mathrm{Q}$ - количество теплоты, выделяющееся за время dt в объеме dV проводника. Величину ω называют **удельной тепловой мощностью тока**.

Выделим в проводнике элементарный цилиндр с образующими параллельными векторам $\vec{j}$ и $\vec{E}$ (рис. 4.12). Запишем закон Джоуля-Ленца для этого цилиндрического объема.

$$dQ = I^2 R dt. \qquad (4.60)$$

Т. к. сопротивление R этого цилиндра и ток I в нем соответственно равны:

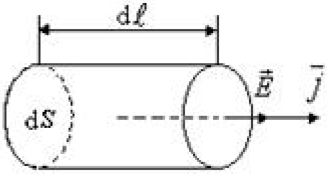


Рис. 4.12

$$R = \rho \frac{d\ell}{dS}; \qquad (4.61)$$

$$I = jdS, \qquad (4.62)$$

то из формулы (4.60) с учетом (4.61) и (4.62) получаем:

$$dQ = j^2 (dS)^2 \frac{\rho d\ell}{dS} dt = j^2 \rho dS d\ell dt.$$

В этом выражении $dV = dSd\ell$ - объем цилиндра, поэтому имеем:

$$dQ = j^2 \rho dV dt. \qquad (4.63)$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи $j=\gamma E$ и равенство (4.46) $\rho = 1/\gamma$, можно записать (4.63) в виде:

$$dQ = \frac{j\gamma E}{\gamma} dVdt \Rightarrow dQ = jEdVdt. \qquad (4.64)$$

Подставив (4.64) в (4.59), получим:

$$\omega = \frac{jEdVdt}{dVdt} \Rightarrow$$

$$\omega = jE. \qquad (4.65)$$

Т.к. векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают по направлению, то их скалярное произведение $\vec{j}\vec{E} = jE\cos 0^0 = jE$. Поэтому формулу (4.65) можно записать в векторном виде:

$$\boxed{\omega = \vec{j}\vec{E}}. \qquad (4.66)$$

Выражение (4.65) с учетом закона Ома $j=\gamma E$ принимает форму:

$$\boxed{\omega = \gamma E^2}. \qquad (4.67)$$

Соотношения (4.65-4.67) выражают **закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме для однородного участка цепи**.

Если участок цепи неоднородный (действуют электростатические и сторонние силы), то формулы (4.66) и (4.67) примут вид:

$$\boxed{\omega = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*) = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^*)^2} \qquad (4.68)$$

Равенство (4.68) выражает **закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи**.

4.7 Коэффициент полезного действия источника тока

Электрическая цепь состоит, как правило, из источника тока $\mathcal{E}$, подводящих проводов и потребителя тока или нагрузки R (рис. 4.13). Каждый из этих элементов цепи обладает сопротивлением. Сопротивление подводящих проводов обычно мало по сравнению с сопротивлением нагрузки, поэтому им можно пренебречь.

Работа, совершаемая электростатическими и сторонними силами по перемещению заряда на участке цепи, определяется выражением (см. параграф 4.2):

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) + Q\varepsilon. \qquad (4.69)$$

Замкнутую цепь можно рассматривать как участок цепи (см. рис. 4.7), концы которого 1 и 2 соединены вместе, так что $\varphi_1 = \varphi_2$. Поэтому для замкнутой цепи формула (4.69) принимает вид: $A = Q\mathcal{E}$, (4.70)

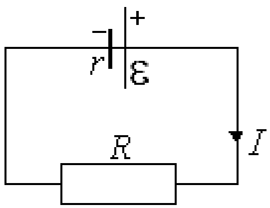


Рис. 4.13

где A - работа источника тока по перемещению заряда Q. Подставим (4.70) в выражение для мощности:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q\varepsilon}{t} = I\varepsilon.$$

Т.о. мощность источника тока

$$\boxed{P = I\mathcal{E},} \qquad (4.71)$$

где $\mathcal{E}$ - ЭДС источника, I - сила тока в цепи, которая определяется законом Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \qquad (4.72)$$

где R - сопротивление нагрузки, r - сопротивление источника тока. Равенство (4.71) с учетом (4.72) принимает вид:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R + r}. \qquad (4.73)$$

Из (4.73) видно, что мощность источника зависит от сопротивления R нагрузки. Причем в нагрузке выделяется только часть этой мощности, которую можно найти по формуле (4.54):

$$P_H = I^2 R.$$

С учетом закона Ома (4.72) эта формула принимает вид:

$$P_H = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}. \tag{4.74}$$

Мощность P_H, выделяемая в нагрузке, называют **полезной мощностью**. Мощность, выделяемая в источнике тока и подводящих проводах, оказывается бесполезной. Отношение полезной мощности ко всей мощности, развиваемой источником ЭДС в цепи, определяет коэффициент полезного действия (КПД) источника тока:

$$\boxed{\eta = \frac{P_н}{P}}. \tag{4.75}$$

Равенство (4.75) с учетом соотношений (4.73) и (4.74) примет вид

$$\eta = \frac{\varepsilon^2 R(R+r)}{(R+r)^2 \varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\eta = \frac{R}{R+r}}. \tag{4.76}$$

Т.о. КПД источника зависит сопротивления нагрузки. Чтобы найти соотношение между R и r, при котором полезная мощность будет наибольшей, нужно взять производную от P_H (см. формулу 4.74) по R и приравнять ее к нулю. В результате получим, что полезная мощность максимальна при $R = r$ (т.е. когда сопротивление нагрузки равно сопротивлению источника тока). Из формулы (4.76) следует, что в этом случае КПД источника тока η=0,5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т.И. Курс физики. Учеб. Пособие для вузов. Издательство: Академия. 2016. - 560с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. В 4-х т. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. Издательство: «КноРус». 2012 г
3. Трофимова Т.И. Основы физики. Электродинамика. Издательство: «КноРус» 2017 г . -272с.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. Учеб. Пособие для студ. Вузов. М.: Академия. 2005. - 720с.
5. Бондарев Б.В., Спирин Г.Г. Курс общей физики. Учеб пособие. М.: Высшая школа. 2005. - 560с.
6. Калашников С. Г. Электричество. Наука, Москва, 1977. -592

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Конспект лекций по физике для бакалавров

Составители:
ПОДОЛЬСКИЙ Вадим Александрович
Логачева Валентина Михайловна
РЕЗВОВ Юрий Герасимович
СИВКОВА Ольга Дмитриевна

Редактор Туманова Е.М.
Подписано к печати . Формат $60x80^{1/16}$
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл.печ.л. 3,4 . Уч.-изд.л. 2,1
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл.,9
Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы,8