**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

Зимин А.И., Суменков А. Л., Бегова А.В.

Теоретическая механика. Решение задач по динамике

Учебно-методическое пособие
для студентов всех форм обучения энерго-механических
специальностей

**Новомосковск
2018**

УДК 531.3
Р 47

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент Подольский В.А.
(ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт)

Зимин А.И., Суменков А. Л., Бегова А.В.
Р 47 **Теоретическая механика. Решение задач по динамике.** Учебно-методическое пособие для студентов всех форм обучения энерго-механических специальностей./ Под ред. А.И. Зимина.- ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал); Новомосковск, 2018. – 99 с.

Наибольшие трудности при изучении курса «Теоретическая механика» возникают у студентов при решении задач из раздела «Динамика». В настоящем учебно-методическом пособии подробно разобраны методика и примеры решения задач, предусмотренных программой курса. В начале изложения каждой темы дается в сжатой форме теоретический материал в объеме, достаточном для освоения методик решения задач, далее подробно разобрано решение наиболее характерных для данной темы примеров.

Учебно-методическое пособие поможет студентам, изучающим курс теоретической механики, успешно освоить один из самых сложных разделов - динамику и научиться применять на практике полученные знания.

Ил. 53. Библиогр.: 2 назв.

УДК 531.3
Р 47

ОТ АВТОРОВ

В процессе изучения курса теоретической механики особые затруднения у студентов возникают при применении общих положений теории к решению задач.

Настоящее пособие по решению задач динамики - основного раздела курса теоретической механики - предназначено в первую очередь для студентов заочного факультета, но может быть использовано и студентами дневных факультетов.

В пособии отсутствуют выводы всех теорем, принципов, уравнений. Предполагается, что читатель владеет необходимыми теоретическими знаниями. Достаточно, например, знакомства с книгой С.М. Тарга, или И.М. Воронкова, или Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье, или Е.Л. Николаи.

Авторы будут благодарны читателям за присланные замечания и пожелания, направленные на улучшение этого учебного пособия.

1 ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 Тема: Две основные задачи динамики точки

Основной закон динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ (1), связывающий между собой массу m, ускорение $\bar{a}$ точки и силу $\bar{F}$, действующую на нее, позволяет сформулировать основные задачи динамики:

I основная задача - по заданному движению точки определить силу, вызывающую его;

II основная задача - по заданной силе, действующей на материальную точку, найти движение этой точки.

Рассмотрим подробно решение каждой из этих задач.

I - я основная задача динамики точки

1) Движение точки задано координатным способом

Дано: а) Система отсчета (система координат)

б) Уравнение движения материальной точки

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

в) Масса точки m

Определить: силу $\bar{F}$.

Решение: Из уравнения (1) имеем (см.рис. 1)

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \qquad (2)$$

Это - дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовой системе координат.

Модуль силы $\bar{F}$ равен $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Направление ее определяется по формулам

$cos(\bar{F}, \bar{\imath}) = \frac{F_x}{F}$; $cos(\bar{F}, \bar{\jmath}) = \frac{F_y}{F}$; $cos(\bar{F}, \bar{k}) = \frac{F_z}{F}$.

2) Движение точки задано естественным способом

Дано: а) Траектория точки

б) Начало (точка 0) и направление положительного отсчета дуги

в) Закон движения $S = S(t)$ точки по траектории

Определить: $\bar{F}$.

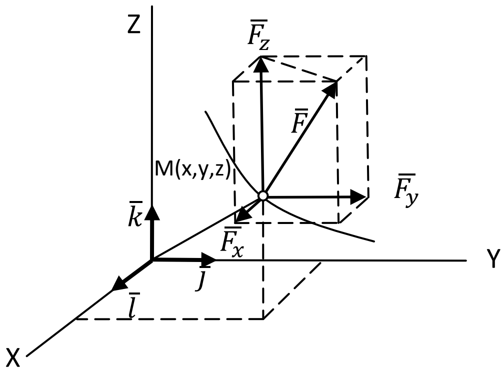

Рисунок. 1

Решение: Проектируя уравнение (1) на оси естественного трехгранника, получим уравнение движения точки в естественной форме:

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases} \tag{3}$$

Учитывая, что $v = \frac{ds}{dt}$, и подставляя все данные в уравнения (3), находим

$F_\tau, F_n, F_b = 0$, а затем и модуль $\bar{F}$ по формуле $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$.

Пример 1.

Движение материальной точки весом $P = 2$ Н выражается уравнениями

$$x = 3cos2\pi t \quad \text{(м)}$$
$$y = 4sin\pi t \quad \text{(м)}$$

(t - в секундах).

Определить величину и направление силы $\bar{F}$, действующей на точку, через t = 1 сек после начала движения.

Решение:

Дифференциальные уравнения движения (2) в нашем случае запишутся в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12\pi^2 cos2\pi t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi^2 sin\pi t; m = \frac{P}{g} \cong 0{,}2kg.$$

Подставив полученные результаты в дифференциальные уравнения, получим

$$F_x = -2{,}4cos2\pi t, F_y = -0{,}8sin\pi t.$$

При $t = 1$ сек. $F_x = -2{,}4,\ F_y = 0$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2{,}4$Н

Направляющие косинусы силы $\bar{f}$ равны

$$cos(\bar{F}, \bar{\imath}) = \frac{F_x}{F} = -1;\ cos(\bar{F}, \bar{\jmath}) = \frac{F_y}{F} = 0$$

Пример 2. (см. рис. 2)

Груз массой $m = 0{,}102$кг , подвешенный на нити длиной L = 30 см в неподвижной точке 0, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить оставляется с вертикалью $\angle AOM = 60^0$. Определить скорость v груза и натяжение Т нити.

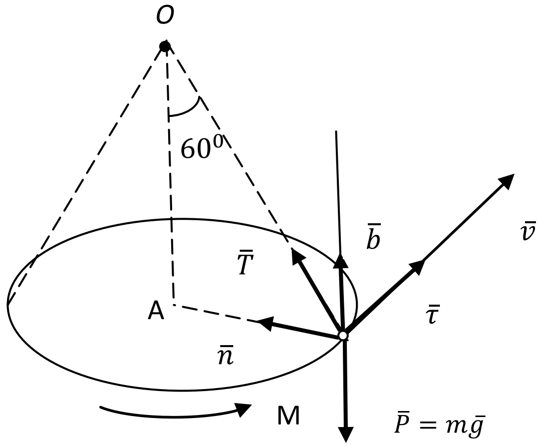

Рисунок. 2.

Решение:

На точку М действует сила веса $\overline{\mathrm{P}}$ и сила натяжения нити $\overline{\mathrm{T}}$. Дифференциальное уравнение движения (3) в нашем случае запишутся в виде

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = 0 \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = Tsin60^0 \\ 0 = \mathrm{T}cos60^0 - P \end{cases}$$

откуда $T = 2mg = 2$ Н; $v = \sqrt{\frac{Tsin60^0 \cdot \rho g}{P}} \cong 2{,}1$ м/с.

(Здесь $\rho = \mathrm{AM} = lsin60^0$).

II - я основная задача динамики точки

Дано:

а) Сила $\bar{F}$, действующая на точку (или ее проекции на оси координат):

$$F_x = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$F_y = F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$F_z = F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

б) Масса м точки:

в) Начальные условия: в момент начала движения ($t = 0$) точка имела координаты x_o, y_o, z_o, и проекции начальной скорости ее равны

$$v_{ox} = \frac{dx}{dt}\bigg| t = 0; v_{oy} = \frac{dy}{dt}\bigg| t = 0; v_{oz} = \frac{dz}{dt}\bigg| t = 0$$

Определить движение точки, то есть найти

$$x = x(t, c_1, c_2 \dots c_6)$$
$$y = y(t, c_1, c_2 \dots c_6)$$
$$z = z(t, c_1, c_2 \dots c_6$$

Мы видим, что вторая основная задача динамики обратно первой и связана о интегрированием дифференциальных уравнений (2) или (3).

Этим и объясняется необходимость задания начальных условий для определения постоянных интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6.

При решении задач рекомендуется придерживаться такой последовательности:

Выбрать точку, движения которой необходимо рассмотреть;

Освободить эту точку от наложенных связей, заменить их действие силами реакций связей;

Показать активные силы, приложенные к выбранной точке;

Записать дифференциальные уравнения движения в координатной или естественной форме, выбрав предварительно систему координат отсчета;

Решить эти уравнения. Для определения постоянных интегрирования воспользоваться начальными условиями;

Провести анализ полученного решения.

Пример 3.

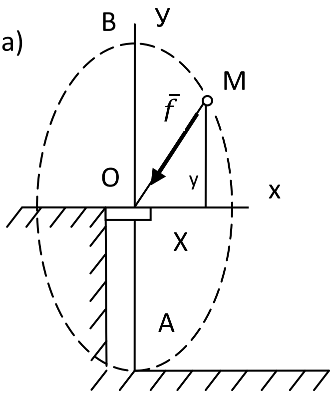

Рисунок. 3а.

Упругая нить, закрепленная в точке А, проходит через неподвижное гладкое кольцо 0; к свободному концу ее прикреплен шарик М с массой m . Длина невытянутой нити $AB = l;$ для удлинения нити на l см нужно приложить силу, равную k^2m ньютонов.

Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарику скорость $\overline{v_o}$, перпендикулярную к прямой AB, то - есть

$$\text{при t = 0} \begin{cases} x_o = o \\ y_o = l \\ v_{ox} = v_o \\ v_{oy} = o \end{cases} \qquad (4)$$

Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению.

Решение:

Из системы тел выбираем точку М, движение которой необходимо рассмотреть (рис. 3а).

Освобождаем ее от наложенной связи (упругой нити), заменив ее действием упругой силой $f = k^2m \cdot OM$ (Н);

Активных сил нет, так как по условию задачи весом Р, по сравнению с F , можно пренебречь;

Записываем уравнение движения точки М в векторной форме и в проекции на оси координат:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

или $m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k^2 m\bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{OM}$.

Откуда имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 mx$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 my$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0;\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0.$$

Так как корни характеристического уравнения $\rho^2 + k^2 = 0$, соответствующего этим линейным дифференциальным однородным уравнениям второго порядка, равны

$\rho_{1,2} = \pm ki$, то решение запишется

$$x = c_1 coskt + c_2 sinkt \tag{5}$$
$$y = c_3 coskt + c_4 sinkt$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями, предварительно продифференцировав выражение (5) по времени

$$v_x = \dot{x} = -c_1 ksinkt + c_2 kcoskt;$$
$$v_y = \dot{y} = -c_3 ksinkt + c_4 kcoskt.$$

Тогда условия (4) позволяют записать

$$o = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot o;\quad v_o = -c_1 k \cdot 0 + c_2 k \cdot 1$$
$$l = c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 0;\quad 0 = -c_3 k \cdot 0 + c_4 k \cdot 1.$$

Откуда

$$c_1 = 0;\ c_2 = \frac{v_o}{k};\ c_3 = l;\ c_4 = 0.$$

Подставляя полученные c_1, c_2, c_3, c_4 в выражение (5), окончательно имеем:

$$x = \frac{v_o}{k} sinkt; y = lcoskt \tag{6}$$

Уравнение траектории найдем, исключив параметр t из уравнений движения (6)

$\frac{x^2k^2}{v_o^2} + \frac{y^2}{l^2} = I$. Траектория точки - эллипс с полуосями l и $\frac{v_o}{k}$. (рис. 3б).

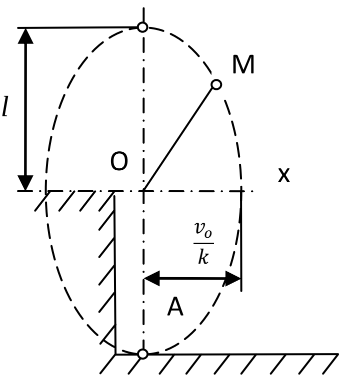

Рисунок. 3б.

Пример 4.

Тело весом P = 2 Н, брошенное вертикально вверх со скоростью $v_0 = 20$м/с, испытывает сопротивление воздуха, пропорционально первой степени скорости v ; коэффициент пропорциональности равен 0,04.

Найти время T, в течение которого тело достигает наивысшего положения.

Решение:

На тело M во время движения действует: сила веса $\overline{P}$ и сила сопротивления среды $\bar{R} = -0{,}04\bar{v}$ (кг).

Ось x направляем вверх *).

Запишем уравнение движения точки M в векторной форме: $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R}$.

Спроектировав это векторное уравнение на ось x, получим

$$m\frac{dv}{dt} = -p - 0{,}04v$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int_{v_9}^{0} \frac{dv}{g + \frac{0{,}04g}{p}v_o} = -\int_{0}^{T} dt;$$

*) В этой и последующих задачах для простоты составления и решения дифференциальных ур-й движения рекомендуется выбирать положительное направление оси в сторону радиуса - вектор точки M (в нашей задаче радиус - вектор τ ̅=(M_o м) ̅).

откуда

$$\frac{P}{0{,}04g}\left[ln\left(g+\frac{0{,}04g}{P}v_o\right)-ln_g\right]=T$$

или

$$T=\frac{P}{0{,}04g}ln\frac{P+0{,}04v_o}{P}=5ln1{,}4\text{ сек.}$$

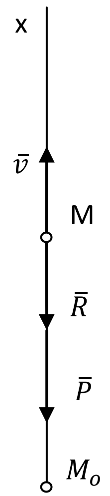

Рисунок. 4.

Пример 5.

На какую высоту H и в какое время T поднимется точка M весом P, брошенная вертикально вверх со скоростью v_o если сопротивление воздуха R может быть выражено формулой $R=k^2pv^2$ (где v - величина скорости точки).

Решение:

На точку M (см.рис.4) в любой момент времени действует сила веса $\overline{\mathrm{P}}$ и сила сопротивления $\bar{R}$. Ось x направлена вверх. Проекция векторного уравнения движения

$m\bar{a}=\bar{P}+\bar{R}$ на эту ось будет:

$$m\frac{dv}{dt}=-P-R$$

или

$$m\frac{dv}{dt}=-P(1+k^2v^2) \tag{7}$$

Далее решение разбивается на две части.

I. <u>Определение Т</u>

В уравнении (7) разделяем переменные и после упрощения и интегрирования

$$\int_{v_o}^{o} \frac{dv}{1+k^2v^2} = -g\int_{o}^{T} dt$$

получаем

$$T = \frac{1}{gk} arctgkv_o$$

II. <u>Определение Н</u>

Умножим левую и правую части уравнения (7) на dx

$$mdx\frac{dx}{dt} = -P(1+k^2v^2)dx$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = v$, разделяем переменные и интегрируем обе части равенства. Учитывая, что

при $x = 0, v = v_0$

при $x = H\ v = 0,$ имеем

$$\int_{v_o}^{o} \frac{vdv}{g(1+k^2v^2)} = \int_{o}^{H} dx$$

Откуда определяем высоту максимального подъема

$$H = \frac{1}{2k^2g} ln(1+k^2v_o^2)$$

Попытаемся теперь проанализировать проведенное решение.

В первой части задачи мы искали Т, в течение которого скорость изменяется в определенных пределах (у нас от v_o до 0), то есть мы должны были найти зависимость v от t

$$v = v(t)$$

Для этого нам достаточно было просто в дифференциальном уравнении движения вида $m\frac{dv}{dt} = f(v)$ разделить переменные и проинтегрировать обе части полученного уравнения.

Во второй части задачи определяется расстояние, пройденное точкой, если известно изменение скорости, то есть определяется

$$x = x(v)$$

В таких случаях предлагается применять искусственный прием домножения левой части и правой частей дифференциального уравнения вида

$$m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

на dx. Это позволяет исключить из уравнения t, оставив лишь интересующую нас зависимость между x и v:

$$mdx \cdot \frac{dv}{dt} = f(v)dx$$

или

$$m\frac{vdv}{f(v)} = dx.$$

Откуда

$$m\int \frac{vdv}{f(v)} = \int dx + c$$

$$x = \varphi(v) + c.$$

Рекомендуется просмотреть снова решение последних задач с учетом проведенного выше анализа.

Пример 6.

Найти уравнение движения материальной точки весом Р, притягиваемой однородным горизонтальным переменным магнитным полем, если сила этого поля $F = Asin\omega t$, где A и ω - постоянные. Принять начальное положение точки за начало координат; ось x направить по горизонтали, а ось y - по вертикали вниз. (рис. 5). Начальная скорость точки равна нулю (т.е. при $t = 0$, $x_o = 0$, $y_o = 0$, $v_{ax} = 0, v_{ay} = 0$).

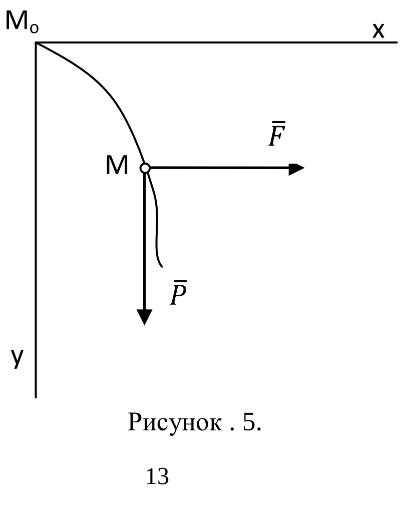

Рисунок . 5.

Решение:

На точку М в некоторой момент времени t действуют силы $\bar{P}$ и $\bar{F}$. Дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме и в проекциях на оси координат следующие: $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}$

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = F \\ m\frac{dv_y}{dt} = P \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = Asin\omega t \\ \frac{dv_y}{dt} = g \end{cases} \qquad (8)$$

Решаем первое из уравнений (8)

$$m\int dv_x = A\int sin\omega tdt + c_1$$

$$\frac{P}{g}v_x = -\frac{A}{\omega}cos\omega t + c_1$$

Подставляем сюда

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

и разделяем переменные

$$\frac{P}{g}dx = -\frac{A}{\omega}cos\omega tdt + c_1 dt$$

После интегрирования получаем:

$$\frac{P}{g}x = -\frac{A}{\omega^2}sin\omega t + c_1 t + c_2$$

Воспользовавшись начальными условиями (при $t = 0, x_o = 0, v_{ox} = 0$), определяем c_1 и c_2:

$$c_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{A}{\omega}$$

и окончательно

$$x = -\frac{Ag}{P\omega^2}sin\omega t + \frac{Ag}{p\omega}t$$

Аналогично решаем второе из уравнений (8):

$$dv_y = gdt;\ v_y = gt + c_3;\ v_y = \frac{dy}{dt}$$

поэтому

$$dy = gtdt + c_3 dt,$$

откуда

$$y = \frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4$$

Начальные условия (при $t = 0, y_o = 0, v_{oy} = 0$) позволяют получить

$$0 = c_4$$

$$0 = c_3$$

и окончательно

$$y = \frac{gt^2}{2}$$

Таким образом, уравнения движения точки имеют вид

$$x = \frac{Ag}{P\omega}\left(t - \frac{1}{\omega} sin\omega t\right); y = \frac{1}{2}gt^2.$$

2 ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

По характеру действующих на точку сил, колебания точки делятся на несколько типов, схематически представленных в таблице.

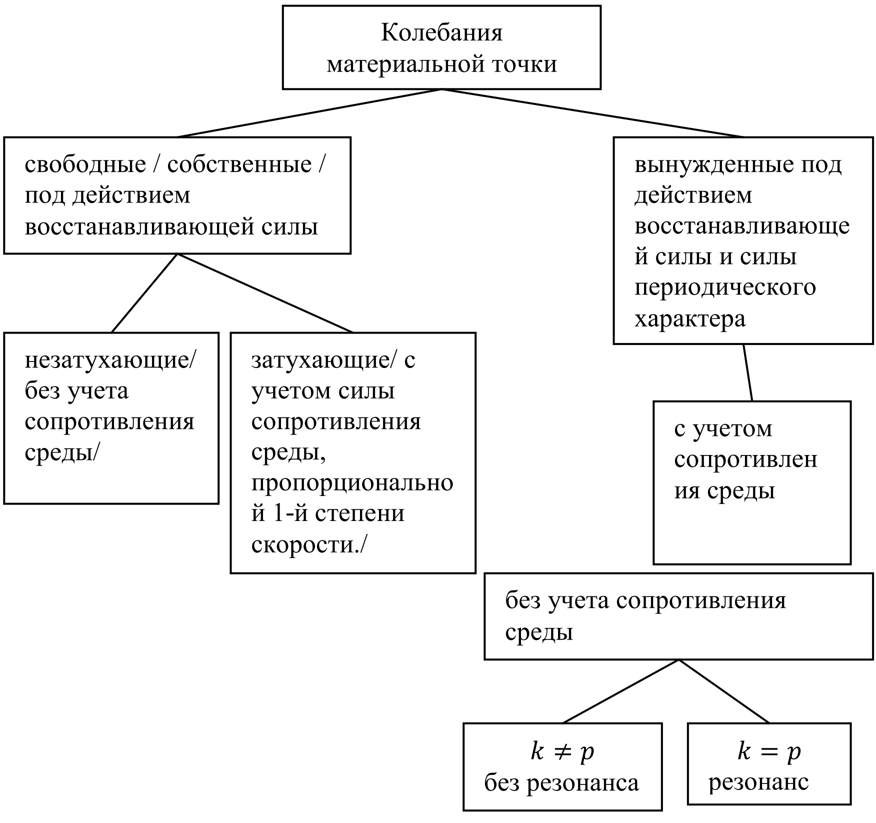

Рисунок. 6.

2.1. Свободные незатухающие колебания

Свободными колебаниями называется движение материальной точки под действием некоторой восстанавливающей силы $\bar{F}$, стремящейся вернуть точку в положение равновесия.

Причем, колебания эти могут происходить в пустоте (то есть в среде, сопротивлением которой можно пренебречь) и в вязкой среде (сопротивление которой следует учитывать).

Поэтому различают колебания незатухающие и затухающие.

а) Незатухающие колебания

Решим конкретный пример.

Пример 7.

Пружина АВ, закрепленная одним концом в точке А, такова, что жесткость ее $c = 19{,}6$ Н/м [*]. В некоторый момент к нижнему концу в недеформированной пружины подвешивают гирю веса $Q = 0{,}98$ Н и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду α и период колебания Т (рис. 7а).

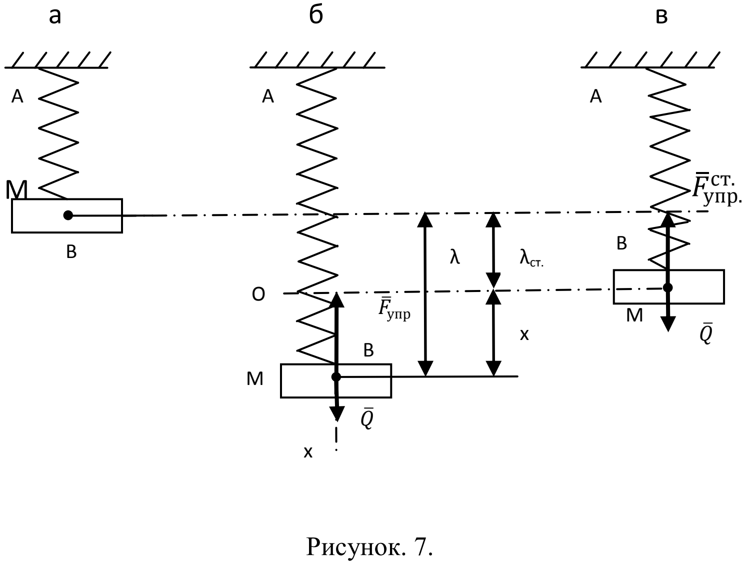

Рисунок. 7.

---

[*] Жесткость C называется сила, необходимая для удлинения пружины на единицу длины.

Решение:

Рассмотрим некоторый момент времени t, когда груз движется вниз (рис. 7б) и пружина растянута. Вычертим силы $\bar{Q}$ и $\overline{f_{\text{упр.}}}$, действующие на груз М в этот момент времени. Ось направлена вниз.

Тогда можем записать $m\bar{a} = \bar{Q} + \overline{F_{\text{упр}}}$ или , в проекции на ось x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q - F_{\text{упр}} \tag{9}$$

Очевидно, что

$$F_{\text{упр}} = c\lambda, \tag{10}$$

где λ - удлинение пружины в данный момент времени (см. рис. 7б).

Легко сообразить, что груз М может висеть на пружине неподвижно (см. рис. 7в). Положение это называется положением статического равновесия.

Удлинение пружины в этом случае называется статическим удлинением пружины $\lambda_{\text{ст.}}$

В положении статического равновесия сила тяжести $\bar{Q}$ и $\overline{F_{\text{упр}}}$ - статическая сила упругости уравновешиваются (рис. 7в), то есть

$$Q = F_{\text{упр.}}^{\text{ст.}} \text{ или } Q = c\lambda_{\text{ст.}} \tag{11}$$

Начало координат *(x = 0)* выбираем в положении статического равновесия.

Тогда (рис. 7б).

$$\lambda = \lambda_{\text{ст.}} + x \tag{12}$$

Формулы (10), (11), (12) позволяют уравнение (9) записать в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\lambda_{\text{ст.}} - \text{c}(\lambda_{\text{ст.}} + x)$$

или, после простейших преобразований:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \tag{13}$$

где обозначили $k^2 = \frac{c}{m}$.

Уравнение (13) есть дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

Характеристическое уравнение

$$\tau^2 + k^2 = 0,$$

соответствующее уравнению (13), имеет корни $\tau_{1,2} = \pm ki$.

Поэтому

$$x = c_1 coskt + c_2 sinkt \tag{14}$$

Для того, чтобы удовлетворить начальным условиям, подсчитаем скорость точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -kc_1 sinkt + kc_2 coskt \tag{15}$$

Приравнивая $x - (14)$ и $v - (15)$ при t = *0* значениям x_o и v_o, , соответственно получаем $c_1 = x_o$ и $c_2 = \frac{v_o}{k}$.

Подставляем c_1 и c_2 в уравнение (14)

$$x = x_o coskt + \frac{v_o}{k} sinkt \qquad (16)$$

Уравнение (16) можно записать в другом виде.

Для этого обозначим $x_o = asin\alpha$; $\frac{v_o}{k} = acos\alpha$

и подставим в (16): $x = asin(kt + \alpha)$

Причем k - частота колебаний груза М.

$\alpha = arctg\frac{x_o k}{v_o}$ - начальная фаза колебаний,

$a = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{k}\right)^2}$ - амплитуда колебаний.

В рассматриваемом примере начальное условия имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x_o = -\lambda_{\text{ст.}} \\ v_o = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$-\lambda_{\text{ст}} = c_1$$
$$0 = c_2$$

Поэтому $x = -\lambda_{\text{ст}} coskt.$

Или в числах $\lambda_{\text{ст.}} = \frac{Q}{C} = 0{,}05\text{м}$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 14\ 1/\text{с}$

и $x = -5cos14t.$ То есть амплитуда колебаний груза на пружине равна $a = 0{,}05\text{м}$,

частота $k = 14\ 1/\text{с}$ и период $T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}45c.$

2,2 Затухающие колебания

Пример 8.

Пластинка *D* весом *Q = 0,98* Н, подвешенная на пружине *AB* в неподвижной точке А, движется между полюсами магнита (рис. 8а).

Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $R = \mu\phi^2 v_H$, где $\mu = 0{,}001$,

v - скорость, ϕ - магнитный поток между полюсами N и S . В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута; жесткость с = 19,6 Н/м.

Определить движение пластинки в том случае, когда $\phi = 1000\sqrt{5}$ ед. CGS .

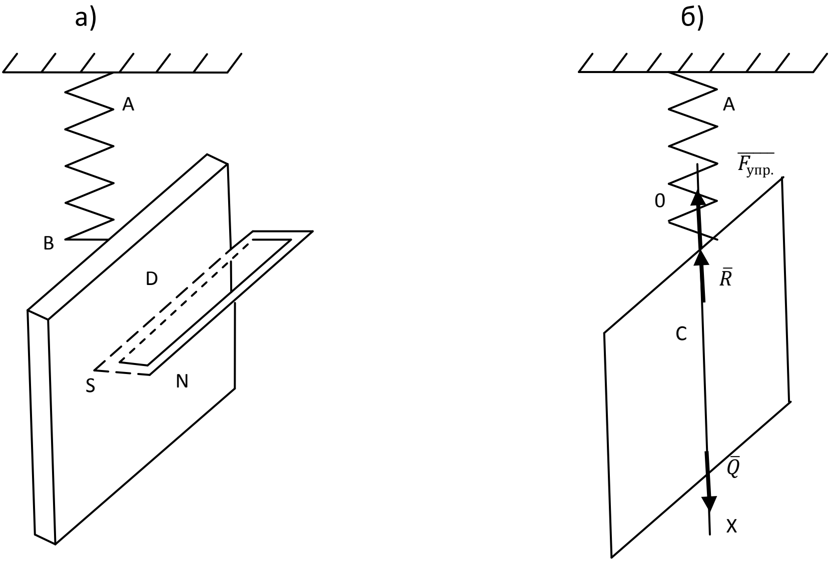

Рисунок. 8.

Запишем условие кратко:

Дано:

Q =0,98 Н

С =19,6 Н/м

$R = \mu \phi^2 v_{дин}$

μ = 0,001

φ = $10\sqrt{5}$ Вб

при $t = 0$ $\quad x_0 = -\lambda_{ст.}$

$v_0 = 0$

Определить $x = x(t)$

Решение:

Как и в предыдущей задаче, будем рассматривать пластинку в некоторой произвольный момент времени t , когда она движется вниз и пружина растянута (рис. 8б). Тогда на пластинку действуют силы $\bar{Q}, \overline{F_{упр}}$, $\bar{R}$.

Ось x направляем вниз, начало координат - в положении статического равновесия.

Уравнение движения центра тяжести пластинки, а следовательно, и всей пластинки, запишется в виде

$$m\bar{a} = \bar{Q} + \overline{F_{\text{упр}}} + \bar{R}$$

или в проекции на ось x :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q - F_{\text{упр}} - R$$

Учитывая, что $Q = c\lambda_{\text{ст.}}$ и $F_{\text{упр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\phi^2\frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \qquad (17)$$

где

$$2n = \frac{\mu\phi^2}{m}, \qquad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Уравнение (17) - дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

Это - дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, линейное.

Корни его характеристического уравнения $\tau^2 + 2n\tau + k^2 = 0$ равны

$$\tau_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Очевидно, что возможны три случая записи общего решения уравнения (17):

Если $n < k$, то, обозначив $k^2 - n^2 = k_1^2$, получим

$\tau_{1,2} = -n + k_1 i$ и решение имеет вид:

$$x = e^{-nt}(c_1 cosk_1 t + c_2 sink_1 t)$$

Если $n = k$, то $\tau_1 = \tau_2 = -n$ и решение имеет вид:

$$x = e^{-nt}(c_1 + c_2 t)$$

Если $n > k$, то $\tau_1 \neq \tau_2$ - действительные числа и решение имеет вид:

$$x = c_1 e^{\tau_1 t} + c_2 e^{\tau_2 t}$$

Как видим, колебательное движение будет лишь в 1- м случае $(n < k)$.

В рассматриваемом примере 8

$$n = \frac{\mu\phi^2}{2m} = 2{,}5 \ (\text{с}^{-1})$$

$$k = 14 \ (\text{с}^{-1})$$

То есть $n < k$, $k_1 = \sqrt{k^2 + n^2} = 13{,}8$ (с $^{-1}$)

Поэтому решение имеет вид:

$$x = e^{-nt}(c_1 cosk_1 t + c_2 sink_1 t).$$

Определяем из начальных условий c_1 и c_2.

Запишем

$$v = \frac{dx}{dt} = -ne^{-nt}(c_1 cosk_1 t + c_2 sink_1 t)$$
$$+ e^{-nt}(-k_1 c_1 sink_1 t + k_1 c_2 cosk_1 t).$$
$$\text{при t = 0} \begin{cases} x_o = c_1 \\ v_o = -nc_1 + k_1 c_2 \end{cases}$$

Откуда

$$c_2 = \frac{v_o + nx_o}{k_1}$$

Итак,

$$x = e^{-nt}\left(x_o cosk_1 t + \frac{v_o + nx_o}{k_1} sink_1 t\right)$$

или

$$x = -e^{-2{,}5t}(5cos13{,}8t + 0{,}91sin13{,}8t) \text{ (см)}$$

Мы видим, что в случае затухающих колебаний амплитуда α равна

$$\alpha = e^{-nt}\sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o + nx_o}{k_1}\right)^2}$$

и с течением времени убывает.

2.3 Вынужденные колебания

Если на точку кроме восстанавливающей силы действует еще и сила $\overline{F_{\text{возм}}}$, изменяющаяся по гармоническому закону $F_{\text{возм}} = Asinpt + Bcospt$, то дифференциальное уравнение движения запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = Hsinpt + Gcospt \qquad (18)$$

Здесь $H = \frac{A}{m}$; $G = \frac{B}{m}$; $k^2 = \frac{c}{m}$

Общее решение уравнение (18) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого его частного решения.

При этом возможны два случая.

Первый:

Частоты собственных и вынужденных колебаний не совпадают ($k \neq p$).

Частное решение дифференциального уравнения (18) ищем в виде

$$x_{\text{вын}} = D_1 sinpt + D_2 cospt.$$

Второй:

Частоты собственных и вынужденных колебаний совпадают ($k = p$).

Возникает явление, называемое резонансом.

В этом случае $X_{вын}$ имеет вид:

$$x_{\text{вын}} = t(\varepsilon_1 sinpt + \varepsilon_2 cospt).$$

Амплитуда колебаний при этом возрастает с течением времени:

$$\alpha = t\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Рассмотрим каждый из случаев на конкретных примерах.

Пример 9.

Пружина А (рис. 9а) скреплена со штоком поршня, который находится в камере В. В эту камеру попеременно сверху и снизу поступает сжатый воздух, вследствие чего сила, действующая на поршень изменяется по закону

$$F_{\text{возм}} = 2{,}3 sin 8\pi t + 0{,}5 cos 8\pi t \text{ (Н)}$$

Определить вынужденные колебания поршня, если его вес

Q = 4,9Н, а жесткость пружины с = 200 Н/м. Определить также амплитуду вынужденных колебаний.

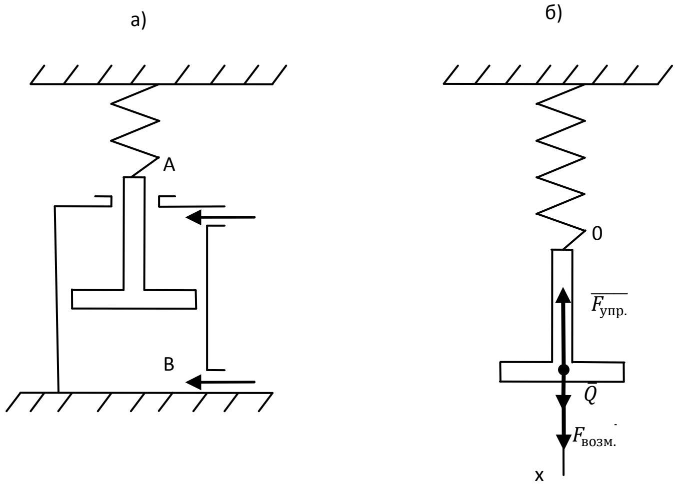

Рисунок. 9.

Решение:

Закон движения поршня имеет вид (рис. 9б):

$$m\bar{a} = \bar{Q} + \overline{F_{\text{упр}}} + \overline{F_{\text{возм}}}$$

или в проекции на ось *x:*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} Q - F_{\text{упр}} + F_{\text{возм}} ,$$

где

$$F_{\text{упр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$$

После подстановки значений $F_{\text{возм}}$, $F_{\text{упр}}$ и небольших преобразований получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = Hsinpt + Gcospt \tag{19}$$

Здесь $k^2 = \frac{c}{m} = 400; H = \frac{230}{m} = 460; G = \frac{50}{m} = 100; p = 8\pi$.

Так как $k \neq p$, то частное решение уравнения (19) имеет вид:

$$x_{\text{вын}} = D_1 sinpt + D_2 cospt. \quad (20)$$

Коэффициенты D_1 и D_2 определим, подставив решение (20) в дифференциальное уравнение (19) и приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах в левой и правой частях полученного тождества:

$$-D_1 p^2 sinpt - D_2 p^2 cospt + k^2(D_1 sinpt + D_2 cospt) = Hsinpt + Gcospt;$$

$$-D_1 p^2 + D_1 k^2 = H; \; -D_2 p^2 + D_2 k^2 = G,$$

откуда

$$D_1 = \frac{H}{k^2 - p^2}; \;\; D_2 = \frac{G}{k^2 - p^2}$$

Значения D_1 и D_2 подставляем в (20) и получаем закон вынужденных колебаний поршня:

$$x_{\text{вын}} = \frac{H}{k^2 - p^2} sinpt + \frac{G}{k^2 - p^2} cospt \quad (20)$$

или

$$x_{\text{вып}} = 1{,}9 sin8\pi t - 0{,}42 cos8\pi t$$

Амплитуда этих колебаний равна:

$$\alpha = \sqrt{1{,}9^2 + 0{,}42^2} \cong 1{,}91 \text{ (см)}$$

Пример 10.

Решить предыдущую задачу (рис.9) при условии, что

$$F_{\text{возм}} = 2{,}3 sin20t + 0{,}5 cos20t.$$

Решение:

Дифференциальное уравнение движения поршня (19) в этом случае выглядит так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = Hsinpt + Gcospt. \quad (21)$$

Так как здесь $p = 20$ и $k = 20$, то есть $k = p$, то частное решение неоднородного уравнения (21) ищем в виде:

$$x_{\text{вын}} = t(\varepsilon_1 sinpt + \varepsilon_2 cospt). \quad (22)$$

Для определения неизвестных коэффициентов ε_1 и ε_2 подставляем $x_{\text{вын}}$ в дифференциальное уравнение (21).

Для этого найдем $\frac{d^2 x_{\text{вын}}}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 x_{\text{вын}}}{dt^2} = 2(\varepsilon_1 pcospt - \varepsilon_2 psinpt) + t(-\varepsilon_1 sinpt - \varepsilon_2 cospt)p^2.$$

И после подстановки $\frac{d^2 x_{\text{вын}}}{dt^2}$ и $x_{\text{вын}}$ в (21) получим:

$$2\varepsilon_1 pcospt - 2\varepsilon_2 psinpt = Hsinpt + Gcospt$$

Приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах в левой и правой частях последнего тождества, получим:

$$2\varepsilon_1 p = G; \;\; -2\varepsilon_2 p = H,$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{G}{2p}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{H}{2p}.$$

И закон вынужденных колебаний в случае резонанса запишется:

$$x_{\text{вын}} = \frac{t}{2p}(Gsinpt - Hcospt).$$

Амплитуда колебаний в этом случае равна:

$$\alpha = \frac{t}{2p}\sqrt{G^2 + H^2}.$$

Подставив числовые данные, получим:

$$x_{\text{вын}} = \frac{t}{4}(10sin20t - 46cos20t) \quad (\text{см})$$

$$\alpha = 1{,}18t \quad (\text{см})$$

Пример 11.

Определить в примере 9 закон движения поршня при условии, что в начальный момент он находился в положении статического равновесия и начальная скорость равнялась нулю.

То есть при *t = 0* $\qquad x_o = 0$

$$v_o = 0.$$

Решение:

Дифференциальное уравнение движения (19)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = Hsinpt + Gcospt$$

остается тем же.

Общее его решение *x* имеет вид:

$$x = x_1 + x_2, \tag{23}$$

где x_1 - общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (19); то есть x_1 - закон собственных (свободных) колебаний;

$x_2 = x_{\text{вын}}$ - частное решение неоднородного уравнения (19), то есть x_2 , как мы видели, является законом вынужденных колебаний.

x_2 определено нами в примере 9 (формула 20). Определим x_1 .

Характеристическое уравнение однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$, соответствующего неоднородному уравнению (19), имеет мнимые корни

$$\tau_{1,2} = \pm ki.$$

Поэтому

$$x_1 = c_1coskt + c_2sinkt.$$

Общее решение (23) запишется:

$$x = c_1coskt + c_2sinkt + \frac{H}{k^2-p^2}sinpt + \frac{G}{k^2-p^2}cospt. \tag{24}$$

Вид уравнения (24) позволяет сказать, что движение материальной точки получается как результат наложения вынужденных колебаний $\frac{H}{k^2-p^2} sinpt + \frac{G}{k^2-p^2} cospt$

на собственные колебания $c_1 coskt + c_2 sinkt.$

Для определения c_1 и c_2 продифференцируем выражение (24) и воспользуемся начальными условиями

$$v = \frac{dx}{dt} = -kc_1 sinkt + kc_2 coskt + \frac{pH}{k^2 - p^2} cospt - \frac{pG}{k^2 - p^2} sinpt$$

при $t = 0$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + \dfrac{G}{k^2 - p^2} \\ 0 = \dfrac{pH}{k^2 - p^2} + kc_2, \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = -\frac{G}{k^2-p^2}, \quad c_2 = -\frac{pH}{k(k^2-p^2)} .$$

Подставляем c_1 и c_2 в (24) и получим:

$$x = -\frac{1}{k^2 - p^2}\left(Gcoskt + \frac{pH}{k} sinkt - Hsinpt - Gcospt\right)$$

или после подстановки числовых данных:

$$x = 0{,}04(10cos20t + 57sin20t - 46sin8\pi t - 10cos8\pi t) \text{ (см)}$$

Примечание: Следует обратить внимание на то, что амплитуда вынужденных колебаний точки не зависит от начальных условий, в то время как амплитуда собственных колебаний определяется ими.

3 ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Закон движения точки по отношению к неинерциальной системе координат имеет вид:

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} + \overline{F_{\text{ин}}^{\text{пер}}} + \overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}} \quad \text{,где}$$

$\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}$- сумма активных сил и сил реакций связей, действующих на точку;

$\overline{F_{\text{ин}}^{\text{пер}}}$ - переносная сила инерции;

$\overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}}$ - кориолисова сила инерции;

Причем

$$\overline{F_{\text{ин}}^{\text{пер}}} = -m\bar{a}_{\text{пер}} \quad \text{, где}$$

$\bar{a}_{\text{пер}}$ - переносное ускорение,

$$\overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}} = -m\bar{a}_{\text{кор}} \quad \text{, где}$$

$\bar{a}_{\text{кор}}$ - кориолисово ускорение.

Методика решения задач остается прежней.

Пример 12.

(Рис.10). Труба вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, составляя с ней все время прямой угол. В трубе находится шарик массой m, скрепленный с ней посредством пружины жесткости С . В начальный момент шарик находился на расстоянии α от оси трубки и был отпущен без начальной скорости; пружина при этом не деформирована. Определить последующее движение шарика вдоль трубки, совместив начало координат с начальным положением шарика. Трением пренебречь.

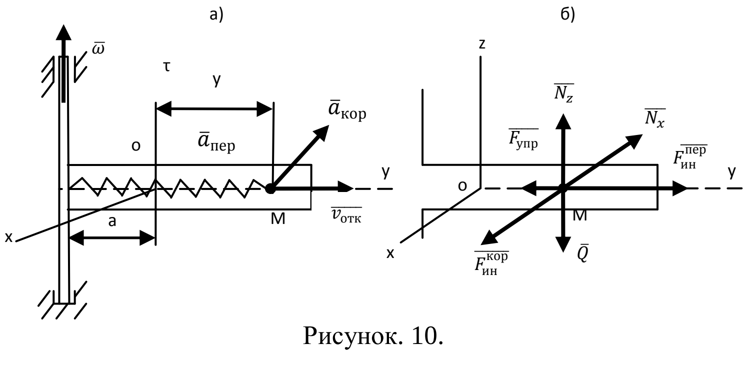

Рисунок. 10.

Решение:

Выберем подвижные оси координат, как показано на рисунке 10.

На шарик действует сила:

$\bar{Q}$ - сила тяжести;

$F_{упр} = cy$ - упругая сила пружины;

$\bar{N} = N_x\bar{\imath} + N_z\bar{k}$ - сила реакции трубки.

Приложим силы инерции. Для этого подсчитаем $\bar{a}_{пер}$и $\bar{a}_{кор}$.

Так как вращение трубки равномерное, то $\bar{a}_{пер} = a_{пер}^n = \omega^2(\alpha + y)$ и направлено по трубке к оси вращения. Ускорение кориолиса равно

$$a_{кор} = 2\bar{\omega} \cdot \overline{v_{отн}} \quad ,$$
$$a_{кор} = 2\omega v_{отн} sin(\overline{\omega v_{отн}}).$$

Так как

$$v_{отн} = \frac{dy}{dt}, \bar{\omega} \perp \bar{v}_{отн} \quad \text{, то}$$
$$W_{кор} = 2\omega \frac{dy}{dt}$$

направлено параллельно оси x .

Тогда

$$F_{ин}^{пер} = m\omega^2(\alpha + y) \text{ и } F_{ин}^{кор} = 2m\omega \frac{dy}{dt} .$$

Направлены эти силы в стороны, противоположные направлениям соответствующих ускорений.

Закон относительного движения записывается:

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{Q} + \bar{N} + \bar{F}_{упр} + \overline{F_{ин}^{пер}} + \overline{F_{ин}^{кор}}$$

Начальные условия имеют вид: при $t = 0$

$$\begin{cases} y_o = 0 \\ v_{отн} = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Проектируем закон относительного движения на оси x, y, z

$$\begin{cases} 0 = F_{ин}^{кор} - N_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -F_{упр} + F_{ин}^{пер} \\ 0 = -Q - N_z \end{cases}$$

1-е и 3-е уравнения служат для определения силы реакции трубки

$$N_Z = F_{ин}^{кор}, \;\; N_z = Q, N = \sqrt{Q^2 + 4m^2\omega^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

2-е уравнение является дифференциальным уравнением относительного движения шарика.

После небольших преобразований это дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)y = \omega^2\alpha.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение этого уравнения складывается из общего решения y_1 однородного уравнения и частного решения y_2 неоднородного уравнения:

$$y = y_1 + y_2.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде постоянного числа

$$y_2 = A$$

Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, получим $\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) A = \omega^2 \alpha$, откуда $A = \frac{\omega^2 \alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2}$.

Теперь найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение запишется в виде:

$$\tau^2 + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = 0 .$$

Откуда

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 - \frac{c}{m}} .$$

Положим $\frac{c}{m} > \omega^2$, тогда $\tau_{1,2} = i\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} = \pm ik$, где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2}.$$

В таком случае $y_1 = c_1 coskt + c_2 sinkt + \frac{\omega^2 \alpha}{k^2}$.

и общее решение запишется

$$y = c_1 coskt + c_2 sinkt + \frac{\omega^2 \alpha}{k^2} .$$

Это решение должно удовлетворять начальным условиям, воспользовавшись которыми, получаем:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + \dfrac{\omega^2 \alpha}{k^2} \\ 0 = kc_2 \end{cases}$$

Откуда

$$c_1 = -\frac{\omega^2 \alpha}{k^2}, \quad c_2 = 0$$

и решение примет вид:

$$y = \frac{\omega^2 \alpha}{k^2}(1 - coskt).$$

Итак, мы получаем следующее: если $\frac{c}{m} > \omega^2$, то есть, если частота собственных колебаний шарика больше угловой скорости вращения трубки, то шарик в трубке будет совершать гармонические колебания.

Если же $\frac{c}{m} < \omega^2$, то движение шарика будет апериодическим, так как в этом случае корни характеристического уравнения будут равны двум разным действительным числам

$$\tau_1 = +\alpha, \ \ \alpha^2 = \left(\omega^2 - \frac{c}{m}\right)$$

$\tau_2 = -\alpha,$ общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$y = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} + \frac{\omega^2 \alpha}{\frac{c}{m} - \omega^2}.$$

Если $\frac{c}{m} = \omega^2$, то дифференциальное уравнение относительного движения примет вид $\frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 \alpha$. И решение будет: $y = \frac{1}{2}\omega^2 a t^2$, то есть шарик в этом случае движется по трубе равноускоренно.

Пример 13.

(Рис.11). Гладкий стержень *AB* равномерно вращается вокруг вертикальной оси, составляя с ней неизменный угол α.

Определить наибольшую величину угловой скорости вращения ω, при которой колечко М, надетое на стержень, будет находится в относительном равновесии в положении *A*, если при этом его расстояние до оси вращения равно a .

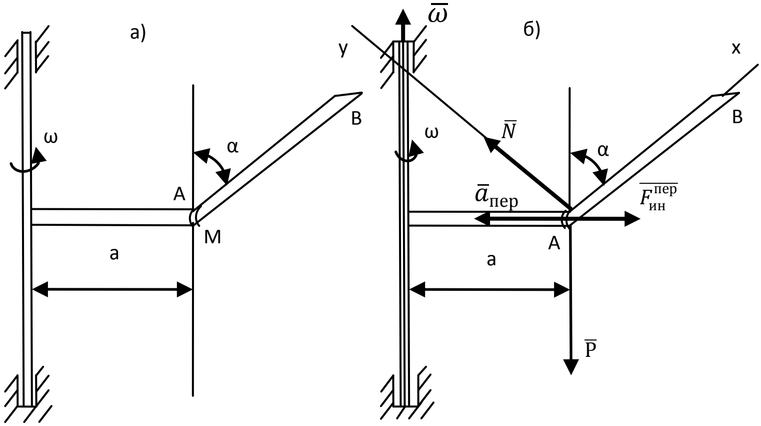

Рисунок. 11.

Решение:

В этой задаче рассматривается случай относительного равновесия, когда $v_{отн} = 0$, $a_{отн} = 0$.

Следовательно, в этом случае $a_{\text{кор}} = 0$ и уравнение относительного равновесия запишется $\sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} + \bar{F}_{\text{ин}}^{\text{пер}} = 0$.

В нашем примере условие равновесия кольца М выглядит так:

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{ин}}^{\text{пер}} = 0$$

или в проекциях на оси координат:

$$\sum F_X = -Pcos\alpha + F_{\text{ин}}^{\text{пер}} sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = N - Psin\alpha + F_{\text{ин}}^{\text{пер}} cos\alpha = 0$$

Из первого уравнения, подставив значения $F_{\text{ин}}^{\text{пер}} = m\omega^2 a$, находим значение

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a} ctg\alpha}.$$

Если ω будет больше $\sqrt{\frac{g}{a} ctg\alpha}$, то кольцо начнет двигаться по AB.

Второе уравнение дает возможность найти силу N реакции стержня на кольцо в положении равновесия, равную по величине давлению кольца на стержень.

Пример 14.

(Рис.12). Железнодорожный поезд идет со скоростью 15 м/с по рельсам, проложенным по меридиану с юга на север. Вес поезда 2000 т. Определить боковое давление поезда на рельсы, если он пересекает в данный момент в северном полушарии параллель с широтой $\varphi = 60^0$.

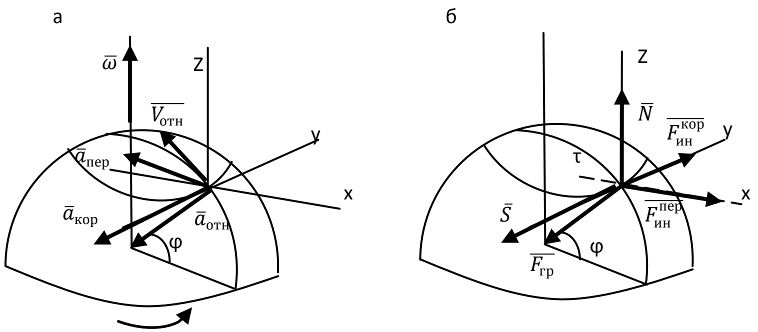

Рисунок. 12.

Решение:

Движение поезда по меридиану - относительное, вращение земли для поезда является переносным. Выберем оси координат, как показано на рис.12а. Чтобы направить $\bar{F}_{\text{ин}}^{\text{пер}}$ и $\bar{F}_{\text{ин}}^{\text{кор}}$, необходимо подсчитать $\bar{W}_{\text{пер}}$ и $\overline{W_{\text{кор}}}$.

$$a_{\text{пер}} = a_{\text{пер}}^{n} = \omega^2 \tau \text{ , где}$$

$\tau = Rcos\varphi$ - расстояние поезда до оси вращения. Направлено $\overline{W_{\text{пер}}}$ к оси вращения земли. Следовательно, $\bar{F}_{\text{ин}}^{\text{пер}} = -m\bar{W}_{\text{пер}}$ и направлена от оси вращения, то есть вдоль оси x (рис.12б)

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2\bar{\omega} \times \overline{v_{\text{отн}}} \quad .$$

Модуль его

$$a_{\text{кор}} = 2\omega v_{\text{отн}} sin\varphi \text{ , где}$$

$$v_{\text{отн}} = 15\text{м/с} \text{ ,}$$

$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7 \cdot 10^{-5}$ 1/с - угловая скорость вращения земли.

$\bar{W}_{\text{кор}}$ направлено по касательной к параллели, на запад (см. рис.12а).

Кориолисова сила инерции равна

$$\overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}} = -m\bar{a}_{\text{кор}} \text{ .}$$

Следовательно, $\overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}}$ в нашем примере направлена по касательной к параллели, на восток, то есть вдоль оси y.

Итак, на железнодорожный поезд силы: $\overline{F_{\text{гр}}}$ - сила притяжения земли, $\bar{N}$ - вертикальная сила реакции рельс, $\bar{S}$ - боковая сила реакции рельса и приложенные нами $\overline{F_{\text{ин}}^{\text{пер}}}$ и $\overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}}$ (см.рис.12б).

Чтобы найти боковое давление, достаточно записать закон относительного движения поезда и спроектировать его на ось y:

$$m\bar{a}_{\text{кор}} = \overline{F_{\text{гр}}} + \bar{N} + \bar{S} + \bar{F}_{\text{ин}}^{\text{пер}} + \overline{F_{\text{ин}}^{\text{кор}}};$$

$$0 = S - \bar{F}_{\text{ин}}^{\text{кор}}$$

Откуда

$$S = F_{\text{ин}}^{\text{кор}} = 2m\omega v_{\text{отн}} sin\varphi \cong 384 \text{ (кг).}$$

4 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

4.1 Теорема о движении центра инерции

Теорема о движении центра масс системы формулируется следующим образом: центр инерции или центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

$$M\bar{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_\text{к}^\text{е}$$

В проекциях на неподвижные оси прямоугольной декартовой системы координат теорема запишется:

$$M\frac{d^2x_\text{е}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^\text{е};$$

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^\text{е};$$

$$M\frac{d^2z_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^\text{е}.$$

М - масса всей системы,

x_c, y_c, z_c - координаты центра масс,

$F_{kx}^\text{е}, F_{ky}^\text{е}, F_{kz}^\text{е}$ - проекции внешней силы на координатные оси.

Внутренние силы на движение центра масс не влияют.

Пример 15. (Рис.13).

Определить давление на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую, если вес неподвижных частей корпуса *D* и фундамент *E* равен P_1 , вес кривошипа $OA = a$ равен P_2, вес кулисы *B* и поршня *C* равен P_3. Кривошип *OA*, вращающийся равномерно с угловой скоростью ω , считать однородным стержнем.

Решение:

Рассматриваем движение системы, состоящей из неподвижных частей корпуса и фундамента, кривошип *AB* и кулиса *B* с поршнем *C* .

Направим оси координат, как показано рис.13б. На систему действуют внешние силы:

$\bar{P}_1$ - вес неподвижных частей (приложен в точке $\mathrm{C}_1(\mathrm{B}, \mathrm{o})$, где

B - некоторое постоянное число)

$\bar{\mathrm{P}}_2$ - вес кривошипа (приложен в точке $C_1\left(\frac{a}{2}cos\varphi;\ \frac{a}{2}sin\varphi\right)$

$\bar{P}_3$ - вес кулисы с поршнем (приложен в точке $C_3(acos\varphi + l, 0)$.

Здесь *B, l* - введенные нами постоянные величины,

$\bar{N}, \bar{S}$ - составляющие силы реакции грунта.

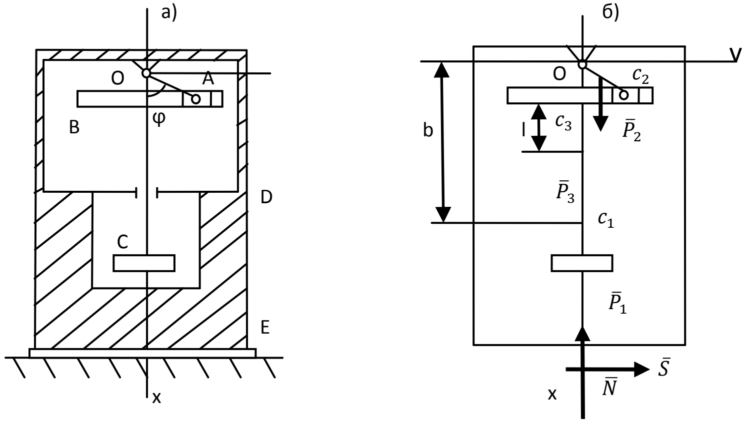

Рисунок. 13.

Нас интересует давление насоса на грунт. Оно по величине равно силе реакции грунта N. Чтобы определить N, запишем теорему о движении центра инерции.

$$M\bar{W}_c = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{N} + \bar{S},$$

где масса системы $M = \frac{1}{g}(P_1 + P_2 + P_3)$

Спроектируем это векторное равенство на ось *x:*

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = P_1 + P_2 + P_3 - N.$$

Отсюда

$$N = P_1 + P_2 + P_3 - M\frac{d^2x_c}{dt^2} \ .$$

Легко видеть, что

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{P_1b + P_2\frac{a}{2}cos\varphi + P_3(l + acos\varphi)}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Здесь $\varphi = \omega t$, так как кривошип вращается равномерно.

Теперь подсчитаем

$$\frac{d^2x_c}{dt^2} = -\frac{a\omega^2(P_2 + 2P_3)}{2(P_1 + P_2 + P_3)}cos\omega t$$

и получим выражение для силы давления насоса на грунт

$$N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_2 + 2P_3}{2g}a\omega^2cos\omega t.$$

Давление будет максимальным, когда $\varphi = 0$, то есть когда кривошип ОА занимает низшее положение, и минимальное, когда $\varphi = \pi$, то есть когда кривошип занимает вертикальное верхнее положение.

Пример 16.

(Рис.14). Электрический мотор весом Р установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте. На валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длиной *2l* и весом Р, на другой конец стержня насажен точечный груз *Q*; угловая скорость вала равна ω.

Определить горизонтальное движение мотора.

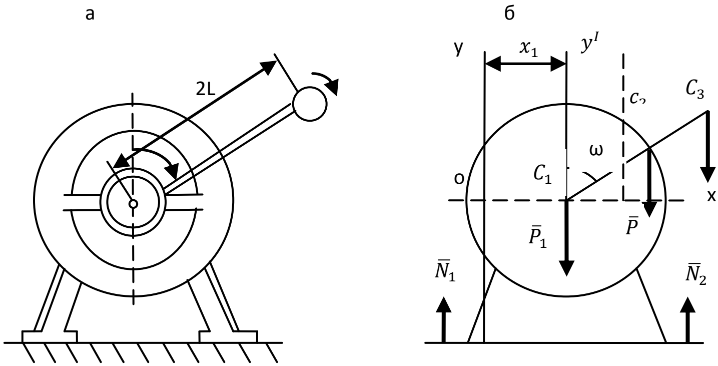

Рисунок. 14.

Направление осей координат показано на рис.14.б.

Решение:

Внешними силами, действующими на систему, состоящую из мотора, стержня и точечного груза, является:

вес мотор $\overline{P}_1$ приложен в точке $c_1(x_1, 0)$;

вес стержня $\overline{P}$ приложен в точке $c_2(x_1 + lsin\omega t, lcos\omega t)$;

вес точечного груза $\bar{Q}$ приложен в точке $c_3(x_1 2lsin\omega t, 2lcos\omega t)$

Здесь x_1 - неизвестная координата центра тяжести мотора.

Так как мотор установлен без креплений на гладком фундаменте, то силы реакции $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ направлены по вертикали.

Теорема о движении центра этой системы запишется:

$$M\bar{W}_c = \bar{P}_1 + \bar{P} + \bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2$$

Нас интересует по горизонтальное движение мотора, поэтому проектируем это векторное равенство на ось *x:*

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = 0$$

Следовательно, $\frac{dx_2}{dt} = const = 0$, так как в начальный момент времени система покоилась. Отсюда следует, что

$$x_c = const.$$

Таким образом, мы видим, что если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую - нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. В частности, если в начальный момент эта проекция была равна нулю, то центр масс системы в этом случае вдоль данной оси перемещаться не будет.

И вообще, если на систему действуют такие внешние силы, что

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^{\text{е}} = 0$$

то скорость центра масс $\bar{v}_{\text{с}} = const$, то есть центр масс либо движется равномерно и прямолинейно, либо находится в состоянии покоя. В этом и заключается закон сохранения движения центра масс системы.

Найдем координату x_c центра масс рассматриваемой системы:

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P(lsin\omega t + x_1) + Q(2lsin\omega t + x_1)}{P_1 + P + Q}.$$

Будем считать, что ось y проходит через центр масс. Тогда x_c равна нулю и

$$x_1 = (P_1 + P + Q) + lsin\omega t(P + 2Q) = 0.$$

Отсюда легко определяем закон горизонтального движения мотора:

$$x_1 = -\frac{P + 2Q}{P_1 + P + Q} lsin\omega t.$$

То есть мотор, совершает гармонические колебания с частотой ω и амплитудой

$$\frac{P + 2Q}{P_1 + P + Q} l.$$

Пример 17.

(Рис.15). Сохраняя условие предыдущей задачи, найти горизонтальное R^I, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундамент.

Решение:

Теорема о движении центра масс в этом случае запишется так же , как и раньше, только добавляется еще одна сила $\bar{R}$ - горизонтальная составляющая сила реакции болтов ($\bar{R} = -\bar{R}^I$):

$$M\bar{a}_c = \bar{P}_1 + \bar{P} + \bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{R}.$$

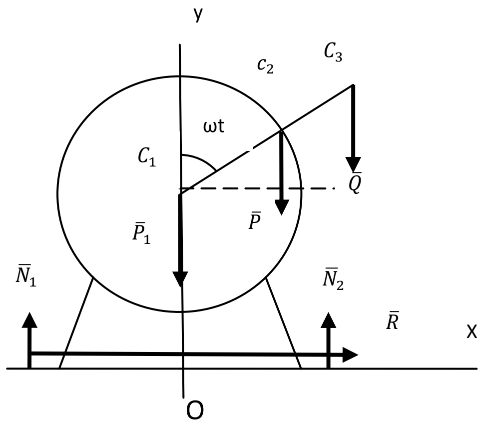

Рисунок. 15.

Выбираем оси координат. Так как нас интересует величина горизонтального усилия, то проектируем это векторное уравнение на ось x.

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = R.$$

В этом случае

$$x_c = \frac{Plsin\omega t + Q2lsin\omega t}{P_1 + P + Q}$$

(ось y проходит через точку C_1 , то есть $x_1 = 0,\ \ y_1 = 0;$)

Следовательно,

$$R = -\frac{P + 2Q}{g}l\omega^2 sin\omega t.$$

Легко видеть, что наибольшее значение горизонтального усилия равно

$$\frac{1}{g}(P + 2Q)l\omega^2.$$

Пример 18.

(Рис.16). На однородную призму *A*, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма *B*; поперечные сечения призм - прямоугольные треугольники, вес призмы *A* втрое больше веса призмы *B*. Предлагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину *l* , на которую передвинется призма *A*, когда призма *B*, спускаясь по *A*, дойдет до горизонтальной плоскости.

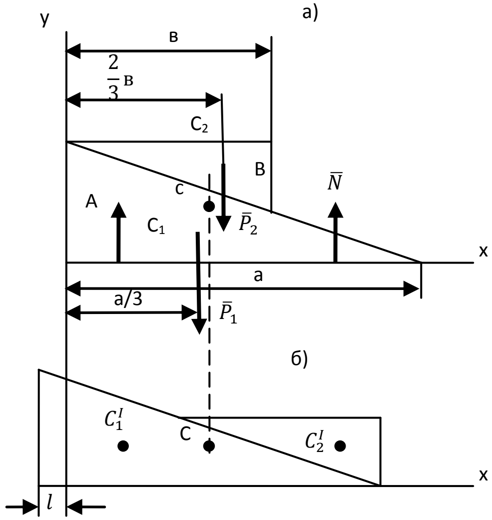

Рисунок. 16.

Решение:

На систему, состоящую из двух призм, действуют вертикальные внешние силы: $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{N}$, то есть $\sum F_{kx}^{e} = 0$ (рис.16а).

Так как система в начальный момент покоилась, то

$$x_c = const.$$

Найдем x_c в начальный момент времени (рис.16а).

$$x_c = \frac{P_1 \frac{a}{3} + P_2 \frac{2}{3}\text{в}}{P_1 + P_2}$$

Найдем x_c в момент времени, когда призма А дошла до горизонтальной плоскости (рис.16б):

$$x_c = \frac{P_1 \left(\frac{a}{3} - l\right) + P_2 \left(a - l - \frac{\text{в}}{3}\right)}{P_1 + P_2}$$

Но $x_c = const.$ следовательно

$$P_1 \frac{a}{3} + P_2 \frac{2}{3}\text{в} = P_1 \left(\frac{a}{3} - l\right) + P_2 \left(a - l + \frac{\text{в}}{3}\right)$$

Отсюда

$$l = \frac{(a - \text{в})P_2}{P_1 + P_2}$$

В нашем случае $\text{P}_1 = 3\text{P}_2$, следовательно $l = \frac{1}{4}(a - \text{в})$

4.2 Теорема об изменении количества движения системы

Количество движения системы, состоящей из n точек, равно геометрической сумме количеств движения всех точек системы.

$$\bar{K} = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k ,$$

где $m_k, \bar{v}_k$ - масса и скорость точки системы.

Количество движения системы можно подсчитать и проще:

$$\bar{K} = M\bar{v}_c \text{ , где}$$

$M = \sum m_k$ - масса всей системы, $\bar{v}_c$ - скорость центра масс системы.

<u>Формулировка теоремы:</u>

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e.$$

В проекциях на оси координат будем иметь:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e ; \ \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e ; \ \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e .$$

Ценность этой теоремы, как и теоремы о движении центра масс, заключается в том, что она позволяет исключить из расстояния внутренние силы. Кроме того, при изучении движения жидкости и газа понятие о центре масс практически теряет смысл. Для решения задач в этих случаях применение теоремы о количестве движения оказывается особенно эффективным.

<u>**Пример 19.**</u>

(Рис.17). Однородная квадратная рама *ABCD* со стороной *a* вращается вокруг оси *AB* с постоянной угловой скоростью ω. Вокруг оси *CB*, совпадающей с диагональю рамы, вращается однородный диск весом P_1 . Определить количество движения системы, если вес рамы равен P_2 .

<u>**Решение:**</u>

Количество движения системы равно $\bar{K} = M\bar{v}_c$.

Центр масс этой системы находится в центре симметрии системы в точке E. Следовательно, $\bar{v}_c = \bar{v}_E$, $v_E = \omega \cdot \frac{a}{2}$. Масса же этой системы равна

$$M = \frac{1}{g}(P_1 + P_2).$$

Теперь окончательно можем записать:

$$K = \frac{P_1 + P_2}{2g}\omega a.$$

Направлен этот вектор как скорость точки E , т.е. всегда перпендикулярно плоскости рамы *ABCD*, в сторону ее вращения.

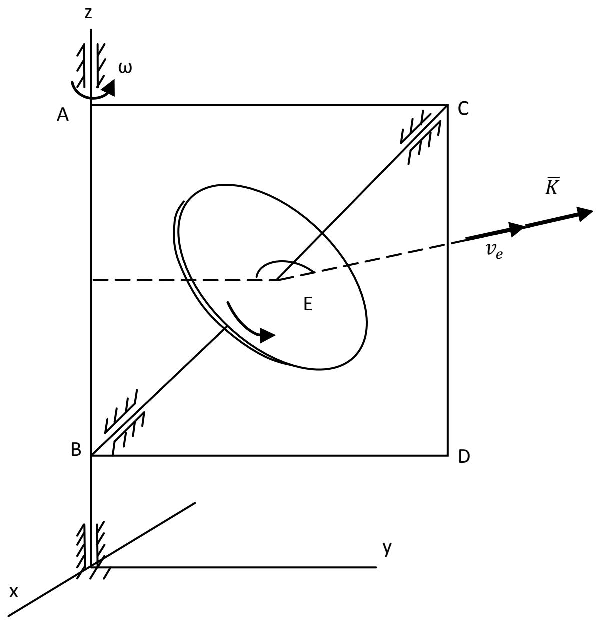

Рисунок. 17.

Пример 20.

(Рис.18). Однородная шестерня *I* радиуса τ катится по неподвижной шестерне *II* с тем же радиусом при помощи кривошипа *OA,* вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить количество движения системы, если вес шестерни *I* равен P_1. Кривошип представляет собой однородный стержень весом P_2 .

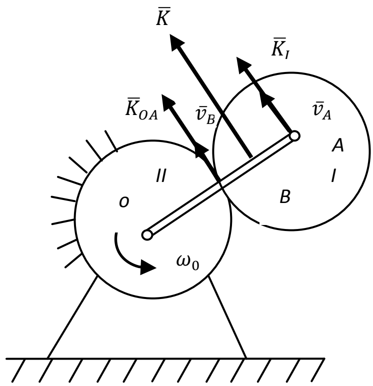

Рисунок. 18.

Решение:

Необходимо подсчитать количество движений системы, состоящей из кривошипа OA и шестерни I.

$$\overline{K} = \overline{K}_{OA} + \overline{K}_I.$$

Центр масс кривошипа находится в т. B - середине OA

Следовательно,

$$K_{OA} = m_{OA} \cdot v_B = \frac{P_2}{g}\omega_o\tau;$$

$\overline{K}_{OA}$ - направлен перпендикулярно OA.

Аналогично подсчитываем

$\overline{K}_I$ - количество движения шестерни I.

$$K_I = m_I v_A = \frac{P_1}{g}\omega_0 \cdot 2\tau;$$

$\overline{K}_I$ - направлен перпендикулярно OA.

Так как $\overline{K}_I$ и $\overline{K}_{OA}$ параллельны, то количество движения системы равно

$$K = \frac{1}{g}\omega_o\tau(P_2 + 2P_1)$$

направлен перпендикулярно OA.

Теорему об изменении количества движения системы можно сформулировать и так: приращение количества движения системы за конечный интервал времени равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.

То есть если обозначить

$\sum \overline{F}_k^e = \overline{R}^e$, то $d\overline{K} = \overline{R}^e dt$ или после интегрирования

$$\overline{K} - \overline{K}_0 \int_0^t \overline{R}^e dt.$$

Для материальной точки очевидно

$$\overline{mv} - \overline{mv_o} = \int_0^t \overline{F}\,dt$$

Пример 21.

(Рис.19). Точка массы m движется по окружности с постоянной по величине скоростью v .

Определить величину импульса силы за четверть и пол - оборота

Решение:

Подсчитаем импульс силы за четверть оборота. Количество движения точки в начальный момент равно $\overline{mv_o}$. Когда точка сделает четверть оборота, количество движения ее будет $\overline{mv}$ (рис.19а).

Импульс силы равен

$$\bar{S} = \overline{mv} - \overline{mv_o}\ .$$

Постоим эту разность (рис.19б).

Так как $v_0 = v$, то импульс силы

$$S = mv\sqrt{2}.$$

Когда же точка сделает пол - оборота, то импульс силы равен (рис.19в, г):

$$S = 2mv.$$

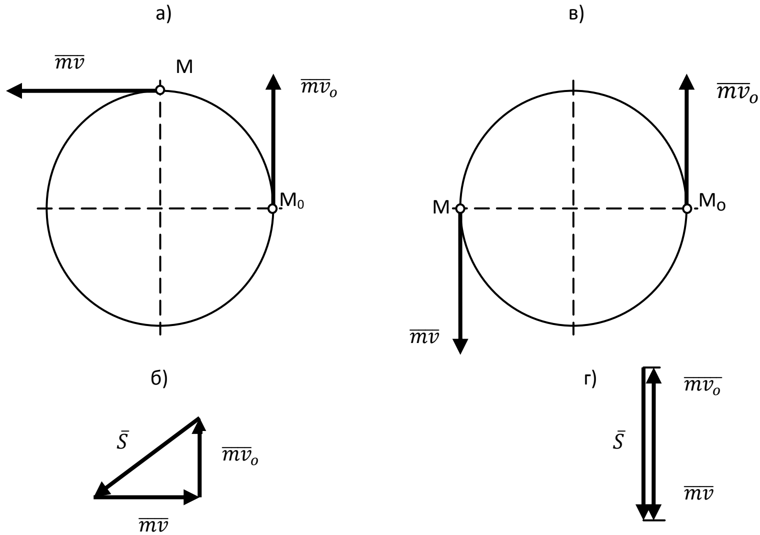

Рисунок. 19.

Пример 22.

(Рис.20). Тело А весом P = 9,81 кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы Q, образующей с плоскостью угол $\alpha = 30^0$.

Определить величину силы Q, если за t = 5 секунд скорость тела возросла с $v_o = 2$ м/с до $v = 4$ м/с, а коэффициент трения скольжения $\varphi = 0{,}15$.

Решение:

На тело A, размерами которого пренебрегаем, действуют силы: $\overline{\mathrm{P}}$ - сила тяжести,

$\bar{Q}$ - постоянная сила, величину которой необходимо определить.

$\bar{N}$ - нормальная составляющая силы реакции поверхности

$F_{\text{тр}} = \varphi N$ - горизонтальная составляющая силы реакции поверхности.

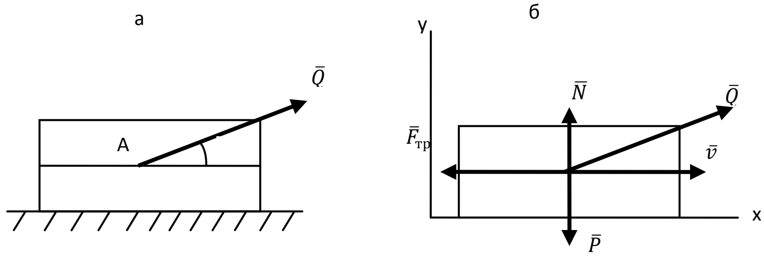

Рисунок. 20.

Выберем направление осей координат. Изобразим вес, силы действующие на тело A (рис. 20б).

По вертикали тело не перемещается, следовательно,

$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0$, откуда $N = P - Qsin\alpha$, т.е.

$$F_{тр} = \varphi(P - Qsin\alpha).$$

Теперь применим теорему об изменении количества движения.

В проекции на ось *x* эта теорема в нашем случае запишется:

$$mv - mv_0 = \int_o^t \left(Qcos\alpha - F_{тр}\right) dt \text{ или}$$

$$\frac{P}{g}(v - v_o) = [Qcos\alpha - (P - Qsin\alpha)\varphi]t,$$

Откуда

$$Q = \frac{P(v - v_o) + Pt\varphi g}{gt(cos\alpha + \varphi sin\alpha)} \cong 2 \text{ (кг)}.$$

Пример 23.

(Рис.21). В трубе *AOB*, изогнутой под прямым углом, диаметр поперечного сечения которой 8 см , течет струя воды со скоростью $v = 5$м/с $(v_1 = v_2 = v)$.

Определить равнодействующую $\bar{R}$ сил давления текущей жидкости на стенки трубки (рис.21а).

Решение:

Воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы материальных точек $\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^I$ или $d\bar{K} = \bar{R}^I dt$

Здесь $\bar{R}^I = -\bar{R}$ - суть сила, действующая со стороны трубки на массу протекающей воды. (рис.21б).

В момент t_1 количество движения массы *dm* равно:

$$d\bar{K}_1 = dm \cdot \bar{v}_1$$

В момент t_2 количество движения системы материальных точек массы *dm* равно:

$$d\bar{K}_2 = dm \cdot \bar{v}_2,$$

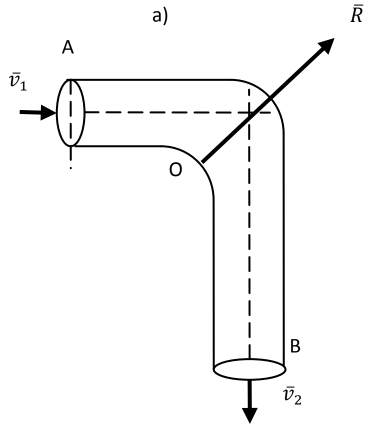

Рис. 21(а).

где dm - элементарная масса жидкости, проходящей через сечение трубки за время dt.

Очевидно, что $dm = \rho svdt$,

ρ - плотность жидкости

$S = \frac{1}{4}\pi d^2$ - площадь поперечного сечения трубки.

Изменение количества движения элементарной массы равно

$$d\bar{K} = d\bar{K}_2 - d\bar{K}_1.$$

$$d\bar{K}_2 - d\bar{K}_1 = \bar{R}^I dt.$$

В нашем случае

$$v_1 = v_2 = v,$$

$$dK_2 = dK_1 = dmv \text{ и } Rdt = dmv\sqrt{2} \text{ (рис.21в).}$$

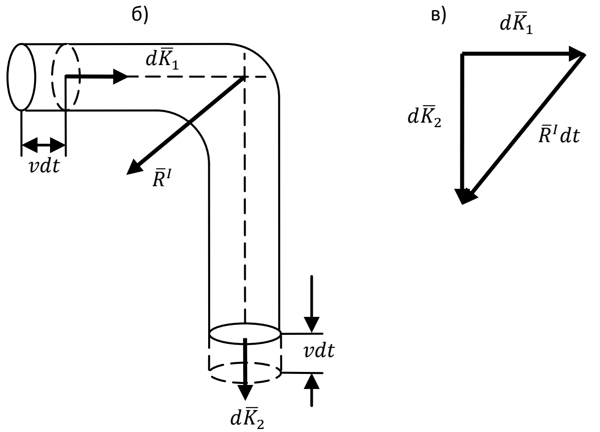

Рис. 21(б, в).

Откуда

$$R^I = v\sqrt{2}\frac{dm}{dt} = \frac{\pi d^2}{4}\rho v^2\sqrt{2} = 18{,}1 \text{ кг}$$

и направлена по биссектрисе угла AOB

Сила же действия жидкости на стенки трубки равна этой силе R^I и направлена в противоположную сторону.

Если внешние силы, действующие на механическую систему, таковы, что $\sum \bar{F}_k^e = 0$,

то есть вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

Если внешние силы, действующие на некоторую механическую систему, таковы, что сумма их проекций на какую - нибудь ось равна нулю, то при движении проекция количества движения ее на эту ось остается постоянной, то есть, если

$$\sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } K_x = const.$$

В этом заключается закон сохранения количества движения системы.

Пример 24.

(рис.22). На покоящейся лодке весом Q находится человек весом P. С какой скоростью $\bar{v}$ будет перемещаться лодка, если человек начнет двигаться по ней с относительной скоростью $\bar{v} =$?

Сопротивление воды пренебречь.

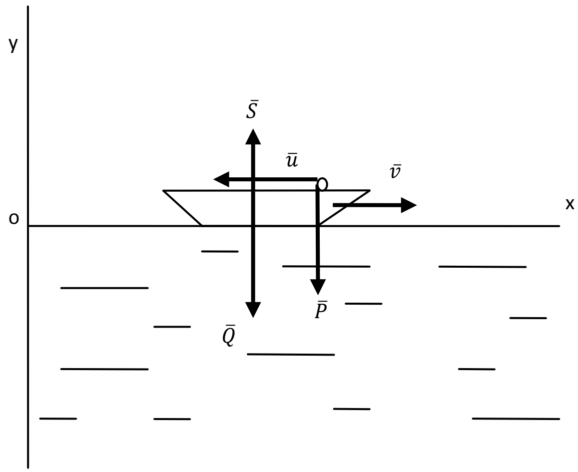

Рисунок. 22.

Решение:

На систему, состоящую из человека и лодки, действуют силы тяжести $\overline{P}, \bar{Q}$ и выталкивающая сила воды $\bar{S}$. Легко видеть, что при отсутствии горизонтальной силы сопротивления воды

$$\sum F_{kx} = 0.$$

Следовательно, $K_x = const = 0$, так как в начальный момент система покоилась. Подсчитаем количество движения системы, когда человек начал двигаться.

Абсолютная скорость лодки равна v, абсолютное сопротивление человека равна $v - u$.

Тогда

$$K_x = K_{\text{человека}} + K_{\text{лодки}} = \frac{P}{g}(v - u) + \frac{Q}{g}v = 0,$$

откуда

$$v = \frac{Pu}{P+Q}.$$

Пример 25.

(Рис.23). Сохраняя условие предыдущей задачи, определить скорость лодки в зависимости от времени, считая сопротивление воды постоянным и равным R. В начальный момент времени человек и лодка находились в покое.

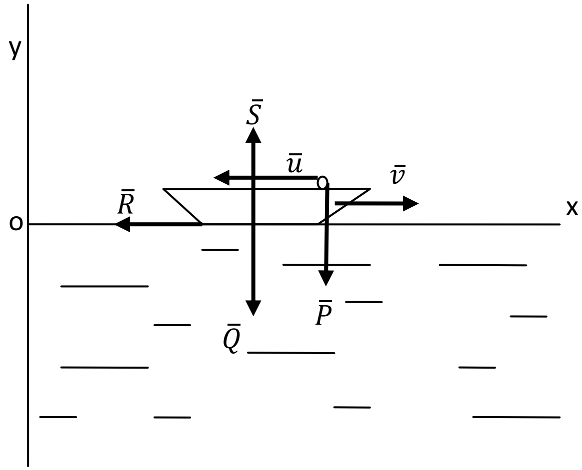

Рисунок. 23.

Решение:

Согласно теореме об изменении количества движения системы можно записать:

$\overline{K}_1 - \overline{K}_o = \int_o^t (\bar{Q} + \bar{P} + \bar{S} + \bar{R})\,dt$. Так как $K_o = 0$, а $K_1 = \frac{P}{g}(v-u) + \frac{Q}{g}v$, то теорема об изменении количества движения в проекции на ось x запишется:

$$\frac{P}{g}(v-u) + \frac{Q}{g}v = -\int_o^t Rdt,$$

Откуда

$$v = \frac{Pu - Rgt}{p + Q}.$$

4.3 Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Момент вектора количества движения $\bar{l}_o$ материальной точки М относительно некоторого неподвижного центра О называется вектор - момент, величина и направление которого определяется векторным равенством

$$\bar{l}_o = \bar{\tau} \times \overline{mv}, \tag{25}$$

где $\bar{\tau}$ - суть радиус - вектор материальной точки М относительно центра О (рис.24).

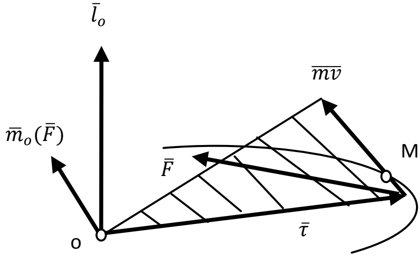

Рисунок. 24.

<u>Теорема</u>

Об изменении этого вектора формулируется следующим образом: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту действующей на материальную точку силы относительно того же центра*)

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \bar{m}_o(\bar{F}). \tag{26}$$

Из уравнения (26) следует, что если $\bar{m}_o(\bar{F}) = 0$, то $\bar{l}_o = const$, то есть вектор кинематического момента сохраняет неизменными свою величину и направление в пространстве. Следовательно, материальная точка М в этом случае описывает плоскую траекторию.

<u>Пример 26.</u>

(Рис.25). Материальная точка М движется под действием центральной силы $\bar{F}$.

Здесь $\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$, следовательно, $l_o = const,$ то есть траектория, описываемая точкой М, плоская кривая.

Отсюда же следует (так как $l_o = |\bar{\tau} \times \overline{mv}|$), что

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Проектируя выражение (26) на оси координат, получаем:

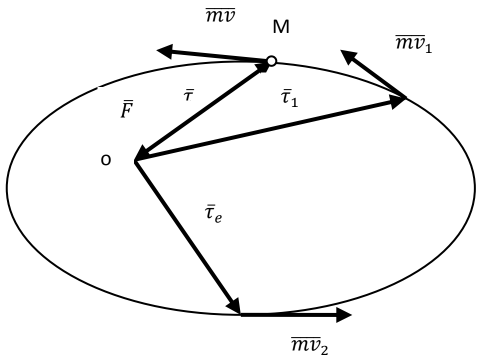

Рисунок.25.

Если на точку действует несколько сил, то под $\bar{F}$ подразумевается их геометрическая сумма.

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{F});\ \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{F});\ \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F}) \qquad (27)$$

Здесь l_x, l_y, l_z - суть кинетические моменты материальной точки М относительно осей x, y, z:

$$l_x = m_x(\overline{mv});\ l_y = m_y(\overline{mv});\ l_z = m_z(\overline{mv}).$$

Каждое из уравнений (27) представляет собой теорему моментов относительно оси: производная по времени от кинетического момента материальной точки, взятого относительно оси, равна моменту относительно этой оси силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку.

Пример 27.

(Рис.26). Записать дифференциальное уравнение движения тяжелой точки М, подвешенной на нити длиной $OM = l$. Массой нити пренебречь.

Решение:

Теорема моментов относительно оси OZ (рис.26) в данном случае принимает вид:

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{P}) + m_z(\bar{T}), \qquad (28)$$

где $\overline{P}$ - сила тяжести точки М;

$\overline{T}$ - натяжение нити OM.

Учитывая, что $l_z = m_z(\overline{mv}) = mv \cdot l = m\omega l^2 = ml^2 \frac{d\varphi}{dt}$,

$$m_z(\bar{P}) = -Ph = -Plsin\varphi, m_z(\bar{T}) = 0.$$

и, подставив эти выражения в (28), получим:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = -mlsin\varphi.$$

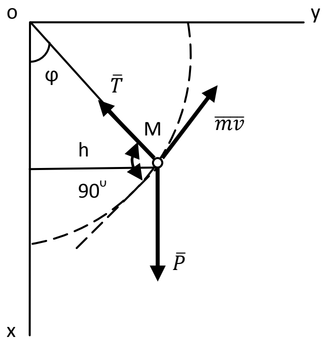

Рисунок.26.

После простейших преобразований получаем уравнение колебаний математического маятника: *)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0. \qquad (29)$$

Решение этого дифференциального уравнения весьма сложно.

В случае же малых колебаний, $sin\varphi \cong \varphi$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \ (30)$$

решение которого не представляет затруднений.

<u>Пример 28.</u>

(Рис.27). Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити M_1OA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $M_1C_1 = R$, делая $n_1 = 120$ об/мин. Медленно втягивая нить ОА в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_2 , при которой гирька описывает окружность радиусом $M_2C_2 = \frac{1}{2}R$.

Сколько оборотов в минуту (n_2) делает гирька в этой окружности?

Ось OA назовем осью Z и запишем теорему моментов относительно этой оси:

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{P}) + m_z(\bar{T}). \qquad (31)$$

Но $m_z(\bar{P}) = 0$ и $m_z(\bar{T}) = 0$.

Поэтому $\frac{dl_z}{dt} = 0$, то есть $l_z = const$.

---

*) Математическим маятником называется груз малых размеров, подвешенный на нерастяжимой невесомой нити

Решение:

Рассмотрим движение шарика *M*. В любой момент времени на него действует сила веса $\overline{P}$ и сила натяжения нити $\overline{T}$.

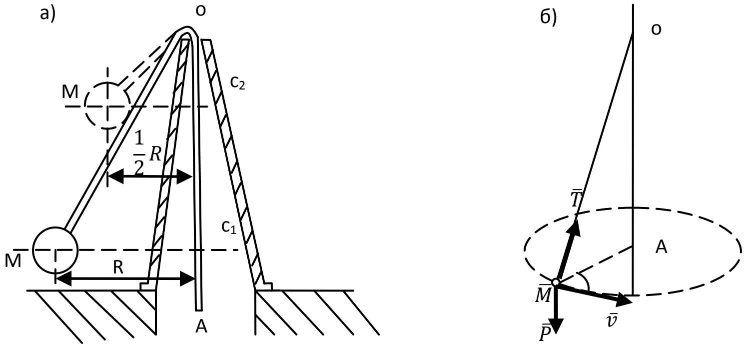

Рисунок. 27.

Обозначим l_{1z} и l_{2z} моменты количества движения материальной точки относительно оси Z в положении M_1 и M_2 соответственно.

Причем

$$l_{1z} = m_z(\overline{mv_1}) = m\omega_1(M_1C_1)^2 = m\frac{\pi n_1}{30}R^2,$$

$$l_{2z} = m_z(\overline{mv_2}) = m\omega_2(M_2C_2)^2 = m\frac{\pi n_2}{30}\frac{1}{4}R^2.$$

$l_{1z} = l_{2z}$ (так как $l_z = const$) , откуда

$$n_2 = 4n_1 = 480 \text{ об/мин.}$$

4.4 Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек

Кинетическим моментом $\bar{L}_o$ системы материальных точек относительно некоторого неподвижного центра О называется геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек системы относительно того же центра О.

$\bar{L}_o = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_o\,(\bar{m}_k \bar{v}_k)$ (32)

(n - число точек, входящих в систему).

Кинематическим моментом L_z системы материальных точек относительно некоторой неподвижной оси Z называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно оси Z.

$L_z = \sum_{y=1}^{n} m_z\,(\bar{m}_k \bar{v}_k).$ (33)

Или (см. обозначения предыдущего параграфа (25) и (27)

$\bar{L}_o = \sum_{k=1}^{n} \bar{l}_{ov}\,;\; L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zv}.$ (34)

Формулировка теоремы:

Производная по времени от вектора кинетического момента $\bar{L}_o$ системы материальных точек относительно произвольного неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил системы $\bar{M}_o^e$ относительно того же центра O.

$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_o^{(e)}.$ (35)

Или в проекциях на оси координат

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{(e)};\; \frac{dL_y}{dt} = M_y^{(e)};\; \frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \quad (36)$$

Здесь L_x, L_y, L_z - кинетические моменты системы материальных точек относительно осей координат;

$M_x^{(e)}, M_y^{(e)}, M_z^{(e)}$ - проекции главного момента внешних сил $\bar{M}_o^{(e)}$ на оси координат. Необходимо помнить, что

$$M_x^{(e)} = \sum_{y=1}^{n} m_x\left(\bar{F}_y^e\right)$$

$$M_y^{(e)} = \sum_{y=1}^{n} m_y\left(\bar{F}_y^e\right)$$

$$M_z^{(e)} = \sum_{y=1}^{n} m_z\left(\bar{F}_y^e\right)$$

Если механическая система материальных точек совершает вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси Z , то кинетический момент системы

$$L_z = J_z\omega \tag{37}$$

и теорема моментов (36) в этом случае приобретает вид:

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = M_z^{(e)}, \tag{38}$$

где

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

J_z - момент инерции системы относительно оси Z;

φ - угол поворота системы относительно оси Z.

Здесь могут встретиться задачи двух типов:

Если главный момент внешних сил не равен нулю:

$\bar{M}_o^{(e)} \neq 0$ или $M_z^{(e)} \neq 0$ *) , то

выражение (35), (36) или (38) дают дифференциальные уравнения, которые и следует решать в зависимости от поставленного в задаче вопроса.

Если главный момент внешних сил равен нулю

$\bar{M}_o^{(e)} = o$ или $M_z^e = 0$ *) , то

из уравнения (35) и (36) следует, что $\bar{L}_o = const$ или $L_z = const$, что и используется при решении задач.

Из уравнения (38) в этом случае получается, что $J_z\omega = const$, откуда ясно, что для увеличения угловой скорости системы достаточно лишь уменьшить момент инерции ее.

Методика решения задач

Нам кажется целесообразным соблюдение следующего порядка при решении задач:

1) Четко определить, движение какой механической системы необходимо рассмотреть для решения задачи;

2) Отбросить все связи, наложенные на рассматриваемую систему, заменив их силами реакций связей.

3) Выяснить активные внешние силы, действующие на систему;

4) Записать теорему о кинетическом моменте;

5) Решить полученные уравнения.

Пример 29.

(Рис.28). Написать дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника, то есть твердого тела, имеющего горизонтальную ось вращения OZ (перпендикулярную плоскости чертежа) и движущегося лишь под действием собственного веса. Известно, что $OC = h$, где точка C - центр тяжести тела.

Решение:

Рассмотрим механическую систему материальных точек, которую в данном случае представляет твердое тело.

Мысленно отбрасываем связь - цилиндрический шарнир, заменяя его действие силой реакции $\bar{R}_o$ [**)].

Вычерчиваем активную внешнюю силу, действующую на тело - силу веса $\overline{\mathrm{P}}$.

Записываем теорему о кинетическом моменте относительно оси Z:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_z(\bar{P}) + m_z(\bar{R}_o).$$

Но

$$m_z(\bar{P}) = -P \cdot OCsin\varphi \text{ и } m_z(\bar{R}_o) = 0,$$

Поэтому уравнение принимает вид:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Phsin\varphi = 0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение колебаний физического маятника.

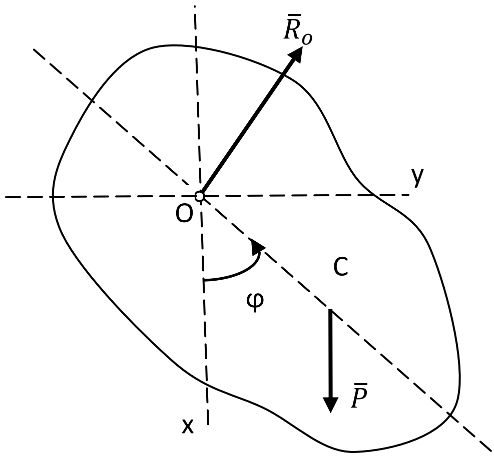

Рисунок. 28.

---

[*] Индекс Z взят произвольно.

[**] Как известно из статики, сила $\bar{R}_o$ расположена в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, то есть в плоскости чертежа.

Если φ мал, то $sin\varphi \cong \varphi$, и дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника будет

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Ph}{J_z}\varphi = 0. \qquad (39)$$

Это дифференциальное уравнение - линейное, второго порядка, однородное, с постоянными коэффициентами. Решение его имеет вид:

$$\varphi = c_1 cos\sqrt{\frac{Ph}{J_z}}t + c_2 sin\sqrt{\frac{Ph}{J_z}}t$$

Здесь $\sqrt{\frac{Ph}{Y_z}} = k$ - частота малых колебаний физического маятника.

Постоянные C_1 и C_2 найдем из начальных условий.

Период этих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi\sqrt{\frac{Y_z}{Ph}}.$$

<u>Пример 30.</u>

(Рис.29). Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным *M*; при этом возникает момент сил сопротивления M_1, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела

$$M_1 = \alpha\omega^2.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси *Z* равен *J*.

Найти закон изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ (рис.29а).

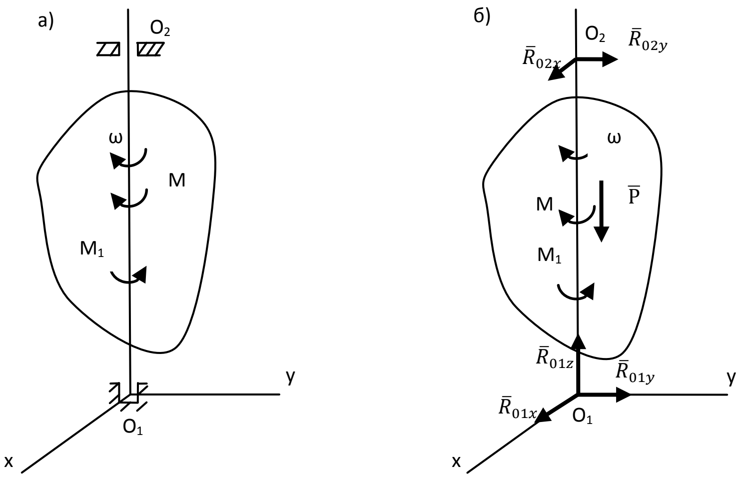

Рисунок. 29.

Решение:

Рассматриваем систему материальных точек, представляющих в нашем случае твердое тело.

Освобождаем это тело от наложенных на него связей в точках O_1 - подпятник и O_2 - подшипник, заменяя связи силами реакций связей. Вычерчиваем составляющие этих реакций по осям координат (рис.29б). Здесь же вычерчиваем M_1 - момент сил сопротивления.

Вычерчиваем активную силу - вес $\overline{P}$ и вращающий момент M.

Записываем теорему о кинетическом моменте системы в форме:

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_1 + m_z(\bar{R}_{o1}) + m_z(\bar{R}_{o2}) + m_z(\bar{P}).$$

Учитывая, что

$$m_z(\bar{R}_{o1}) = 0;\ m_z(\bar{R}_{o2}) = 0;\ m_z(\bar{P}) = 0$$

и что

$$M_1 = \alpha\omega^2,$$

получаем

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - \alpha\omega^2$$

или

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2.$$

Разделим переменные

$$\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = \frac{dt}{J}$$

и, учитывая начальное условие: при $t = 0$, $\omega_0 = 0$, проинтегрируем

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = \int_o^{t}\frac{dt}{J}$$

или

$$\frac{1}{2\sqrt{M\alpha}}ln\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega} = \frac{t}{J},$$

откуда, потенцируя и сделав простейшие алгебраическое преобразование, находим закон изменения угловой скорости ω с течением времени

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\cdot\frac{e\dfrac{2\sqrt{M\alpha}}{J} - 1}{e\dfrac{2\sqrt{M\alpha}}{J} + 1}$$

Пример 31.

(Рис.30). Круглая горизонтальная платформа вращения без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести, с постоянной угловой скоростью ω_1; при этом на платформе стоят четыре человека одинакового веса: два - на краю платформы (в точке A и B) и два - на расстоянии от оси вращения, равных половине радиуса платформы (в точках C и D) (рис.30а).

Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u , а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$?

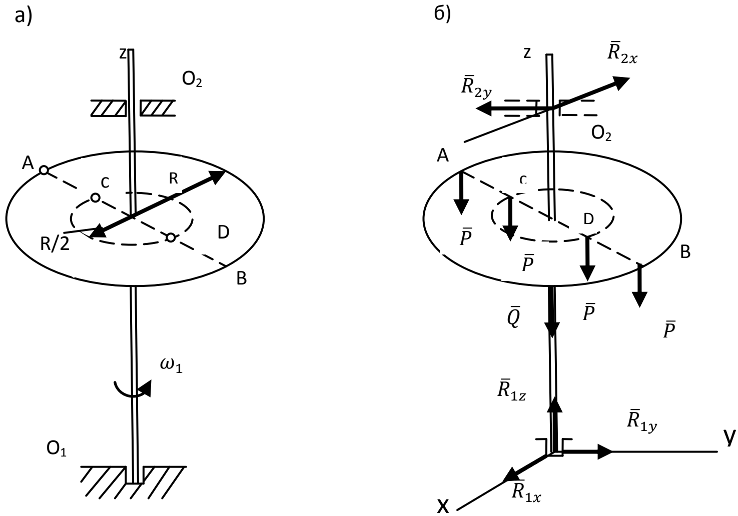

Рисунок. 30.

Решение:

Рассматриваемая механическая система состоит из тяжелой платформы, четырех человек и невесомого стержня O_1 и O_2 .

Освобождаем эту систему от наложенных на нее связей (цилиндрического шарнира O_2 и подшипника O_1), заменяем их действие силами реакций ($\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$) (рис.30б).

К активным внешним силам, действующим на систему, относятся вес платформы $\bar{Q}$ и веса $\bar{P}$ каждого из четырех человек.

Записываем теорему о кинетическом моменте для системы относительно оси вращения:

$$\frac{dL_z}{dt} = m_z(\bar{Q}) + m_z(\bar{P}_A) + m_z(\bar{P}_B) + m_z(\bar{P}_c) + m_z(\bar{P}_D) + m_z(\bar{R}_1) + m_z(\bar{R}_2).$$

Легко видеть, что каждое из слагаемых правой части равно нулю, следовательно,

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \text{ и } L_z = const,$$

т.е. кинетический момент системы относительно оси Z постоянен во все время движения.

Подсчитываем значение L_{z1} , когда платформа вращалась с угловой скоростью ω_1,а люди относительно платформы были неподвижны; затем подсчитываем L_{z2}, когда платформа вращается с новой угловой скоростью ω_2 и люди относительно платформы движутся, согласно условию задачи.

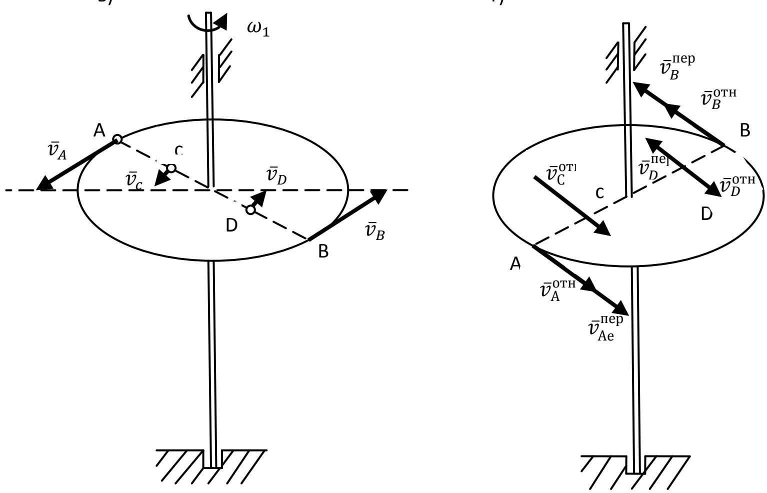

Рисунок. 30(в, г).

$$L_{z1} = L_{z1\text{платф.}} + 2l_{z1A} + 2l_{z1c} \text{ , где (рис.30в)}$$

$$L_{z1\text{платф.}} = J_z\omega_1 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{R^2}{2}\omega_1;$$

$$L_{z1A} = L_{z1B} = \frac{P}{g}v_a \cdot R = \frac{P}{g}\omega_1 R^2;$$

$$L_{z1c} = L_{z1D} = \frac{P}{g}v_c \cdot \frac{P}{2} = \frac{P}{g}\omega_1\frac{R^2}{4}.$$

Подставляя эти выражения в L_{z1} получаем

$$L_{z1} = \omega_1\frac{R^2}{2g}(Q + 5P). \quad (40)$$

Аналогично подсчитываем значение L_{z2} :

$$L_{z2} = L_{z2\text{платф.}} + 2l_{z2A} + 2l_{z2c},$$

$$L_{z2\text{платф.}} = J_z\omega_2 = \frac{Q}{g}\cdot\frac{R^2}{2}\omega^2.$$

При подсчете кинетических моментов точек *A*, *B*, *C*, и *D* следует подсчитать величины их абсолютных скоростей (рис.30г):

$$v_A = v_B = v_A^{\text{пер}} + v_A^{\text{отн}} = \omega_2 R + u,$$

$$v_C = v_D = v_C^{\text{пер}} + v_C^{\text{отн}} = \omega_2\frac{R}{2} - 2u.$$

Тогда

$$l_{z2A} = l_{z2B} = \frac{P}{g}v_A R = \frac{P}{g}(\omega_2 R + u)R,$$

$$l_{z2C} = l_{z2D} = \frac{P}{g}v_B\cdot\frac{R}{2} = \frac{P}{g}(\omega_2 R - 2u)\frac{R}{2}.$$

После подстановки этих величин в выражение L_{z2} получаем

$$L_{z2} = \frac{R^2}{2g}\omega_2(Q + 5P). \qquad (41)$$

Приравнивая L_{z1} и L_{z2}, находим, что $\omega_2 = \omega_1$.

То есть угловая скорость платформы осталась прежней.

4.5 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}, \text{ где}$$

m_k - масса;

$k^{\underline{\text{ой}}}$ - точи;

v_k- ее скорость;

(или, где $\frac{m_k v_k^2}{2}$ - кинетическая энергия $k^{\underline{\text{ой}}}$ точки системы).

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно равна:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 \text{ , где}$$

M - масса тела;

v_c - скорость центра инерции (или любой точки тела).

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \text{ где}$$

J_z- момент инерции тела относительно оси вращения;

ω - угловая скорость его вращения;

Для твердого тела, совершающего плоско - параллельное движение

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \text{ где}$$

к старым обозначениям *M,* v_c и ω добавился J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной неподвижной плоскости.

<u>Формулировка теоремы:</u>

Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

Здесь T_0 и T - кинетическая энергия системы в начальный и конечный момент времени соответственно;

$A^{(e)}$ - работа внешних сил,

$A^{(i)}$ - работа внутренних сил системы.

Элементарная работа силы на бесконечно малом перемещении $dr = ds$ равна

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = F \cdot ds\cos(\bar{F}, \bar{v}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Для определения работы силы на конечном перемещении следует взять определенный интеграл

$$A = \int_{s_0}^{s} F ds cos(\bar{F}, \bar{v}).$$

Подсчет работ различных сил будет проведен при разборе решений задач.

Подчеркнем, что работа внутренних сил абсолютно твердого тела, как и любой неизменяемой системы, равна нулю.

<u>Пример 32.</u>

(Рис.31). На кривошип $OA = r$ кривошипно - кулисного механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, действует постоянный вращающий момент М. Определить, какую угловую скорость приобретает кривошип после поворота его на угол φ, если в начальный момент система находилась в покое, а кривошип был расположен на прямой ОК. Кривошип считать однородным стержнем веса P_1; вес кулисы P_2; трение и массой ползуна пренебречь.

Решение:

В этой задаче рассматривается движение системы, состоящей из двух абсолютно твердых тел: кривошипа и кулисы. Внешними силами, действующими на систему, является $\overline{P}_1, \overline{P}_2$, вращающий момент *M*, сила реакции на шарнире *O*, реакция направляющих *K*.

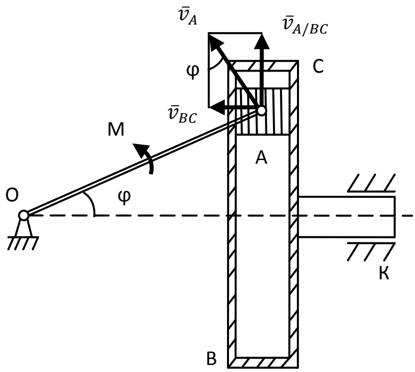

Рисунок. 31.

Применим теорему об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

T_0 - так система в начальный момент покоилась.

$A^{(i)} = 0$, так как система неизменяема.

$T = T_{OA} + T_{BC}$ - кинетическая энергия системы в момент, когда кривошип повернулся на угол φ.

T_{OA} - кинетическая энергия кривошипа. Кривошип совершает вращательное движение вокруг оси 0. Момент инерции его относительно оси вращения

$$J_o = \frac{1}{3} m_{OA} \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P_1}{g} \tau^2.$$

Следовательно, $T_{OA} = \frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{P_1}{g} \omega^2 r^2$, где

ω - интересующая нас угловая скорость вращения кривошипа.

Кулиса BC совершает поступательное движение, ее кинетическая энергия будет

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} v_{BC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} v_{BC}^2 .$$

Здесь через v_{BC} обозначена скорость кулисы. Чтобы определить v_{BC}, рассмотрим движение точки A. Движение точки A можно представить суммой двух движений: относительного - вдоль кулисы и переносного - вместе с кулисой. Следовательно, абсолютная скорость точки A может быть представлена суммой.

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{A/BC} + \bar{v}_{BC}.$$

Абсолютная скорость $v_A = \omega \cdot OA = \omega r$ и направлена перпендикулярно ОА; относительная скорость $\bar{v}_{A/BC}$ направлена вдоль прорези кулисы; переносная скорость точки $\bar{v}_{BC}$ направлена горизонтально.

Зная $\bar{v}_A$ и направлена $\bar{v}_{A/BC}$ и $\bar{v}_{BC}$, построим параллелограмм скоростей, откуда

$$v_{BC} = v_A sin\varphi = \omega r sin\varphi.$$

Теперь имеем возможность записать значение кинетической энергии системы окончательно:

$$T = \frac{1}{6} \cdot \frac{P_1}{g} \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} \omega^2 r^2 sin^2\varphi = \frac{\omega^2 r^2}{6g} (P_1 + 3P_2 sin^2\varphi).$$

Подсчитаем работу внешних сил, действующих на систему. Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то работа сил тяжести равна нулю. Шарнир О неподвижен, следовательно, сила реакции работы не производит. Трением пренебрегаем. Работа вращающего момента равна произведению величины момента на угол поворота тела.

Итак, $A^{(e)} = M\varphi,$

и теорема об изменении кинетической энергии этого механизма дает уравнение:

$$\frac{\omega^2 r^2}{6g} (P_1 + 3P_2 sin^2\varphi) = M\varphi,$$

Откуда определяем ω:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{6gM\varphi}{P_1 + 3P_2 sin^2\varphi}}.$$

Легко видеть, что угловая скорость кривошипа зависит от угла поворота кривошипа, то есть ω меняется с изменением φ.

Пример 33.

(Рис.32). Цилиндрический каток диаметром 60 см и массой M = 392 кг приводится в движение человеком, который давит на рукоятку *OA* с постоянной силой *P* в направлении *OA*; длина *OA* равна 1,5 м; высота точки *A* над горизонтом 1,2 м.

Определить, пренебрегая трением в подшипниках, силу *P*, при которой человек, пройдя путь S = 2 м, сообщит оси катка скорость $v_0 = 0{,}8$ м/с.

Решение:

Каток катится без скольжения. На него действуют активные силы: $\overline{\text{P}}$ - давление человека на рукоятку, $\bar{Q}$ - сила тяжести; и сила реакции поверхности: $\bar{N}$ - нормальная реакция, $\bar{F}_{\text{тр}}$ - сила трения скольжения.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

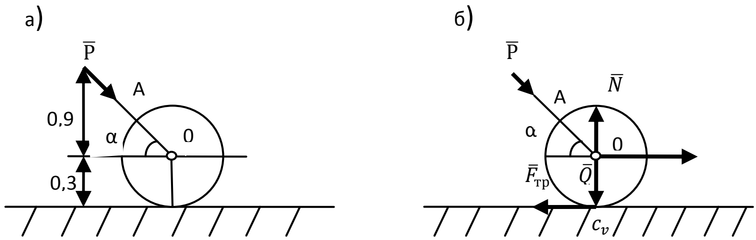

Рисунок. 32(а, б).

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

В нашем случае $T_0 = 0$, так как движение начинается из состояния покоя.

Каток совершает плоскопараллельное движение.

В таком случае его кинетическая энергия во время движения равна

$$T = \frac{1}{2}Mv_o^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2, \text{ где}$$

$$J_0 = \frac{1}{2}Mr^2 \text{ , а}$$

τ - радиус катка. Угловая скорость катка ω необходимо выразить через скорость центра O. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке касания его с неподвижной поверхностью, следовательно,

$$\omega = \frac{v_o}{oc_v} = \frac{v_o}{r}.$$

Воспользуемся этим и получим:

$T = \frac{1}{2}Mv_o^2 + \frac{1}{4}Mr^2 \cdot \frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3}{4}Mv_o^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g}v_o^2$, где

$Q = Mg$ - вес катка

Работу производит только сила $\overline{\mathrm{P}}$.

Работа силы $\bar{Q}$ равна, нулю, так как перемещение точки *O* перпендикулярно силе $\bar{Q}$.

Элементарное перемещение точки c_v (точки приложения сил $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{тр}}$) равно нулю. Следовательно, силы $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{тр}}$ работы не производят и $A^{(e)} = Pscos\alpha$, где

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{1{,}5^2 - 0{,}9^2}}{1{,}5} = 0{,}8.$$

$A^{(i)} = 0$, так как каток и рукоятка - абсолютно твердые тела.

Теперь теорема об изменении кинетической энергии запишется в виде

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g}v_0^2 = Pscos\alpha,$$

Откуда

$$P = \frac{3Qv_o^2}{4gscos\alpha} = 117{,}6 \text{ Н}.$$

Пример 34.

(Рис.38). Грузы *A* и *B* приводятся в движение посредством двух блоков: подвижного *K* и неподвижного *L*.

В результате толчка, сообщенного грузу *A*, он начал опускаться со скоростью v_A.

На какое расстояние должен опуститься груз *A* для того, чтобы его скорость увеличилась в два раза ?

Грузы *A* и *B* одинакового веса *P*. Блоки *K* и *L* считать однородными круглыми дисками одинакового веса Q . Коэффициент трения скольжения груза *B* о горизонтальную плоскость равен *φ*.

Массой веревки пренебречь.

Решение:

Рассмотрим движение системы, состоящей из 4-х тел: подвижного блока *K*, совершающего плоскопараллельное движение, неподвижного блока *L*, вращающегося вокруг горизонтальной оси L , и грузов *A* и *B*, движущихся поступательно.

Внешними силами для этой системы будут:

$\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{P}}$; $\bar{Q}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}, \bar{S}, \bar{R}_L$. (рис.33а).

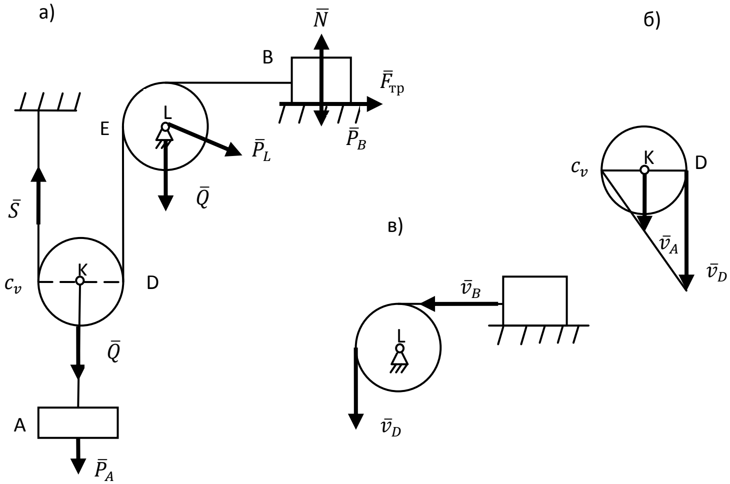

Рисунок. 33.

Решаем задачу с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

$$T - T_o = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

Кинетическая энергия системы в начальный момент времени равна T_0 (когда грузу А сообщили скорость $\bar{v}_A$).

$$T_o = T_A + T_B + T_K + T_L \text{ , где}$$

T_A, T_B, T_K, T_L - кинетическая энергия грузов A, B и блоков K и L соответственно.

Кинетическая энергия тела A_1 равна

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2g} P v_A^2.$$

Кинетическая энергия подвижного блока K, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_K = \frac{1}{2} m_k v_k^2 + \frac{1}{2} J_K \omega_L^2 \text{ , где}$$

$$\omega_K = \frac{v_A}{K c_v} = \frac{v_A}{r} \text{ (рис.33б).}$$

$$J_K = \frac{1}{2} m_k r^2.$$

Следовательно,

$$T_K = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} v_A^2.$$

Кинетическая энергия блока L

$$T_L = \frac{1}{2} J_L \omega_L^2 \text{ , где}$$

$$\omega_A = \frac{v_D}{r}$$

$$v_D = 2v_A,$$
$$\omega_L = \frac{2v_A}{r} \text{ и } J_L = \frac{1}{2}m_L r^2 \text{ (рис.33в)}$$
$$T_B = \frac{2P}{g}v_A^2.$$

Таким образом,

$$T_o = \frac{P}{2g}v_A^2 + \frac{2P}{g}v_A^2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{Q}{g}v_A^2 + \frac{Q}{g}v_A^2 = \frac{v_A^2}{4g}(10P + 7Q).$$

Очевидно, что, когда скорость груза A увеличивается в два раза, кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{v_A^2}{g}(10P + 7Q).$$

Подсчитаем работу всех внешних сил на этом перемещении точек системы. Работа внутренних сил $A^{(i)}$ равна нулю, так как все тела, входящие в систему, абсолютно твердые, а нить - нерастяжима.

$$A^{(i)} = (Q + P)S_A - F_{\text{тр}}\cdot S_B;$$
$$F_{\text{тр}} = \varphi N = \varphi P.$$

Так как $v_B = 2v_A$, то и $S_B = 2S_A$.

Следовательно,

$$A^{(i)} = (Q + P)S_A - \varphi P\cdot 2S_A = [Q + P(1 - 2\varphi)]S_A,$$

и теорема об изменении кинетической энергии системы запишется:

$$\frac{v_A^2}{g}(10P + 7Q) - \frac{v_A^2}{4g}(10 + 7Q) = [Q + P(1 - 2\varphi)]S_A.$$

Откуда легко определить то расстояние, на которое должен опуститься груз А для того, чтобы его скорость стала в два раза больше начальной скорости v_A :

$$S_A = \frac{3v_A^2(10P+7Q}{4g[Q+P(1-2\varphi)]}.$$

Следует иметь в виду, что с помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно находить и ускорения движущихся тел.

Для этого надо записать кинетическую энергию системы как функцию скорости того тела, ускорением которого интересуемся, а уравнение $T - T_o = A^{(e)} + A^{(i)}$, продифференцировать обе его части по времени и исключить скорость. Покажем пример такого расчета.

<u>Пример 35.</u>

(Рис.34). Груз A весом P, спускаясь по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством невесомой и нерастяжимой нити барабан B весом Q и радиусом r. Определить угловое ускорение барабана, если считать барабан однородным круглым цилиндром. Массой неподвижного блока C пренебречь.

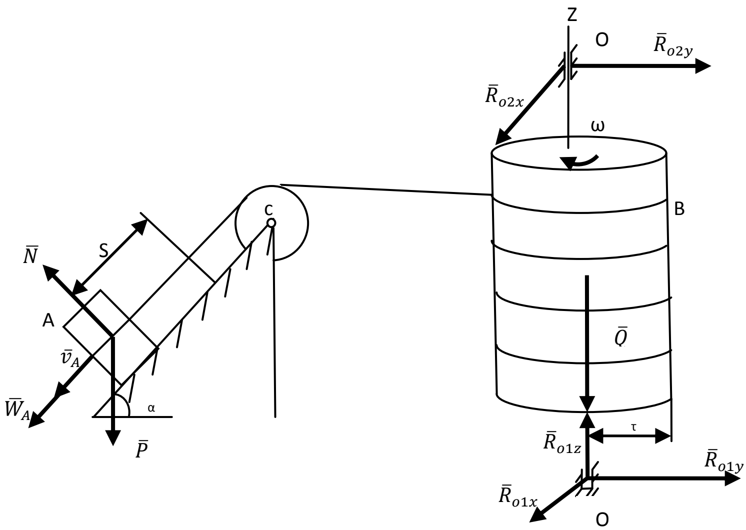

Рисунок. 34.

Решение:

$$T - T_o = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

$T_0 = 0$, так как считаем, что движение начинается из состояния покоя.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

Так как $v_A = \omega r$; $J_z = \frac{1}{2} m_B r^2$, то

$$T = \frac{\omega^2 r^2}{4g}(2P + Q).$$

Из внешних сил работу производит лишь сила тяжести груза A.

$$A^{(e)} = Psin\alpha,$$

$$A^{(i)} = 0.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы запишется:

$$\frac{1}{4g}\omega^2 r^2 (2P + Q) = PS \cdot sin\alpha.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по времени:

$$\frac{r^2}{4g} 2\omega \frac{d\omega}{dt}(2P + Q) = Psin\alpha \cdot \frac{dS}{dt}.$$

Помня, что

$$\frac{ds}{dt} = v_A = \omega\tau, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

получим:

$$\varepsilon = \frac{(2P+Q)r^2}{2g} = Psin\alpha \cdot \tau,$$

откуда угловое ускорение барабана

$$\varepsilon = \frac{2gPsin\alpha}{r(2P+Q)}.$$

То есть барабан вращается равноускоренно.

Пример 36.

(Рис.34). Определить в предыдущей задаче ускорение груза *A*.

Решение:

Сейчас нас интересует ускорение А, поэтому запишем кинетическую энергию системы как функцию скорости груза v_A.

Угловая скорость барабана $\omega = \frac{v_A}{r}$ и $J_z = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$,

Следовательно,

$$T = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{v_A^2}{4g}(2P+Q).$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы теперь запишется:

$$\frac{v_A^2}{4g}(2P+Q) = PS \cdot sin\alpha.$$

Дифференцируем это равенство по времени:

$$\frac{v_a}{2g} \cdot \frac{dv_A}{dt}(2P+Q) = Psin\alpha \cdot \frac{ds}{dt},$$

и, помня, что

$$\frac{ds}{dt} = v_A,$$

$$\frac{dv_A}{dt} = W_A,$$

так как

$$W_A^n = 0$$

при прямолинейном движении точки, получим:

$$W_A = 2g\frac{Psin\alpha}{2P+Q}.$$

Видим, что груз *A* совершает равноускоренное движение.

Часто при решении задач удобно пользоваться законом сохранения механической энергии, который гласит:

Если система движется под действием потенциальных сил, то полная механическая энергия системы во время движения остается величиной постоянной.

Потенциальной энергией поля называется работа, которую могут совершить силы поля перемещения взаимодействующего с полем тела из данного положения в некоторое положение, принятое за нулевое.

Если обозначить через *П* потенциальную энергию системы, то закон сохранения механической энергии запишется

$$\text{Т} + \text{П} = const.$$

Пример 37.

(Рис.35). Груз весом P подвешен на нерастяжимом однородном тросе длиной l, навитом на цилиндрический барабан с горизонтальной осью вращения.

момент инерции барабана относительно оси вращения J, радиус барабана - R, вес единицы длины каната - q.

Определить скорость груза в момент, когда длина свисающей части каната равна x, если в начальный момент скорость груза $v_0 = 0$, а длина свисающей части каната была x_o; трением на оси барабана, толщиной троса и изменением потенциальной энергии троса, навитого на барабан, пренебречь.

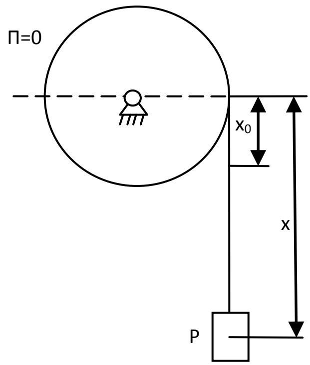

Рисунок. 35.

Решение:

Воспользуемся законом сохранения энергии для системы, состоящей из груза, троса и барабана:

$$\text{Т}_\text{о} + \text{П}_\text{о} = \text{Т} + \text{П}.$$

Здесь T_o , $П_o$ - кинетическая и потенциальная энергия системы в начальный момент времени,

Т, П - кинетическая и потенциальная энергия системы в момент, когда груз *Р* опускается на расстояние *х.*

$T_o = 0$, так как в начальный момент времени система покоилась.

$$\text{П}_\text{о} = \text{П}_\text{груза} + \text{П}_\text{троса} = -\left(Px_o + \frac{gx_o^2}{2}\right)$$

(полагаем, П = 0 на горизонтальной плоскости, проходящей через ось вращения барабана).

Потенциальная энергия барабана равна нулю, так как он не меняет своего положения.

Подсчитаем потенциальную энергию в момент, когда груз P опуститься:

$$\Pi = -\left(P_x + \frac{gx^2}{2}\right),$$

$$T = T_{\text{груза}} + T_{\text{троса}} + T_{\text{барабана}} = \frac{Pv^2}{2g} + \frac{gl}{g}\cdot\frac{v^2}{2} + J\frac{\omega^2}{2}.$$

Если подставить значение:

$$\omega = \frac{v}{R}, \text{ то}$$

$$T = \frac{1}{2gR^2}v^2(PR^2 + Jg + glR^2).$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$-\left(Px_o + \frac{gx_o^2}{2}\right) = -\left(P_x + \frac{gx^2}{2}\right) + \frac{v^2}{2gR^2}\left(PR^2 + J_g + glR^2\right),$$

откуда

$$v^2 = \frac{gR^2(x - x_o)[g(x_o - x) + 2P]}{PR^2 + Jg + glR^2}$$

5 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела массой M в плоскости x о y имеют вид:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^{e}\,;$$

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}^{e}\,;$$

$$J_c\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}m_c\,(\bar{F}_k^e),$$

где x_c,y_c - координаты центра масс;

φ - угловая координата;

J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения тела;

$$\sum_{k=1}^{n}m_c(\bar{F}_k^e)$$

сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

С помощью этих уравнений можно решить прямую задачу: но заданным уравнениями движения найти силы и обратную: по известным силам определить закон движения тела.

Пример 38.

(Рис.36). При подъеме автомашины в гору, склон который расположен под углом α к горизонту, к оси C ведомого колеса приложена постоянная сила $\bar{S}$.

Определить закон движения центра тяжести C колеса.

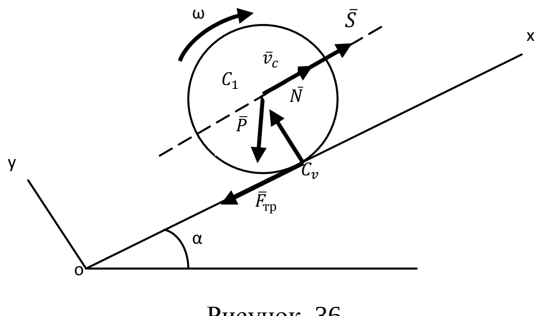

Рисунок. 36.

Решение:

Колесо движется под действием сил $\bar{S}, \bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_{тр}$.

Составим дифференциальное уравнение движения этого колеса, выбрав оси координат, как показано на рисунке:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = S - F_{\text{тр}} - Psin\alpha,$$

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2} = N - Pcos\alpha,$$

$$J_c\frac{d^2\varphi}{dt^2} = F_{\text{тр}} \cdot r$$

где

$$J_c = Mr^2.$$

Задача заключается в том, чтобы найти x_c и y_c как функции времени.

Очевидно, что $y_c = R$, то есть $y_c = const$. Следовательно, второе уравнение дает возможность определить

$$N = Pcos\alpha.$$

x_c определяется интегрированием первого уравнения, в котором одно слагаемое $F_{\text{тр}}$ неизвестно. Третье уравнение дает:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{r}J_c\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M\tau\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Известно, что при качении без скольжения мгновенный центр скоростей c_v находится в точке касания тела с неподвижной поверхностью. То есть можно записать $v_c = \omega r$

$$\frac{dx_c}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Это дает возможность сказать, что

$$F_{\text{тр}} = M\frac{d^2x_c}{dt^2}.$$

Подставим это выражение для $F_{\text{тр}}$ в первое уравнение и получим

$$2M\frac{d^2x_c}{dt^2} = S - Psin\alpha.$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение, воспользовавшись начальными условиями: при $t = 0, x_c = 0$;

$$\frac{dx_c}{dt} = 0$$

(так как колесо в начальный момент покоилось), получим закон движения точки C:

$$x_c = \frac{g}{4P}(S - Psin\alpha)t^2.$$

Из решения видно, что движение колеса вверх будет происходить, если $S > Psin\alpha$.

Пример 39.

(Рис.37). Однородная тонкостенная труба весом P поднимается при помощи идеальных блоков, как показано на рисунке 37а.

Определить угловое ускорение трубы и время ее подъема на высоту h, если к концам тросов приложения силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2$. Радиус трубы r. Массами блоков пренебречь.

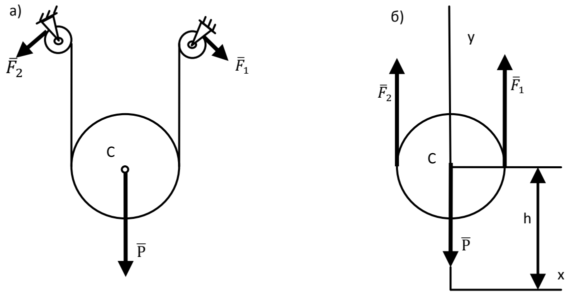

Рисунок. 37(а, б).

Решение:

Труба движется под действием силы тяжести $\bar{P}$ и натяжений нитей $\bar{F}_1$ и$\bar{F}_2$. Пусть $F_1 > F_2$. Оси координат направим, как показан на рисунке 37б. Начало координат - 0 - в начальном положении точки С. Дифференциальные уравнения движения трубы запишутся

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = 0; M\frac{d^2y_c}{dt^2} = F_2 + F_1 - P;\ J_c\varepsilon = F_1r - F_2r.$$

Из первого уравнения следует, что $\frac{dx_c}{dt} = c_1$;

c_1- постоянная, определяется из начальных условий.

Но так как при $t = 0$ $v_{cx} = 0$, то $c_1 = 0$.

Следовательно, $x_c = const = 0$.

Из третьего уравнения получим

$$\varepsilon = \frac{(F_1 - F_2)g}{Pr}.$$

Интегрирование второго уравнения с использованием начальных условий (при $t = 0, y_c = 0$, $v_{cy} = 0$) дает

$$\frac{P}{g}y_c = (F_2 - F_1 - P)\frac{t^2}{2},$$

Откуда можно найти время подъема трубы на высоту h

$$t = \sqrt{\frac{2hP}{g(F_2 + F_1 - P)}}.$$

6 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

6.1 Принцип Даламбера для материальной точки

Формулировка принципа:

Если в каждый момент времени ко всем силам, действующим на точку $\bar{F}^{\text{ак}}$ и $\bar{N}$, прибавить силу инерции $\bar{F}^{\text{ин}}$, то полученная система сил будет уравновешенной, то есть

$$\bar{F}^{\text{ак}} + \bar{N} + \bar{F}^{\text{ин}} = 0.$$

Таким образом, с помощью принципа Даламбера задачи динамики сводятся к задачам статики.

Причем

$$\bar{F}^{\text{ин}} = -m\bar{a}.$$

Здесь m - масса точки;

$\bar{a}$ - вектор ускорения ее.

Из формулы ясно, что вектор $\bar{F}^{\text{ин}}$ направлен в сторону, противоположную вектору ускорения$\bar{a}$ (рис.38). Модуль же $\bar{F}^{\text{ин}}$ равен ma.

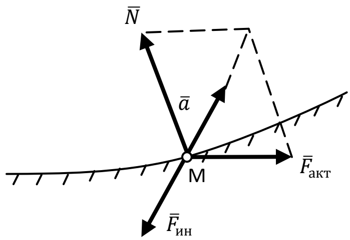

Рисунок. 38.

С помощью принципа Даламбера легко определить силу динамической реакции связи $\bar{N}$, если известно ускорение $\bar{a}$ и $\bar{F}^{\text{ак}}$.

Пример 40.

(Рис.39). Горизонтальная платформа, на которой лежит груз весом Q = 98 Н, опускается вертикально вниз с ускорением a = 4 м/с^2.

Найти давление, производимое грузом на платформу во время их совместного спуска.

Решение:

Рассмотрим движение груза Q.

Освободив его от наложенной связи - платформы, заменив ее действие силой реакции платформы $\bar{N}$ (рис.39б).

Вычертим активную силу - вес Q.

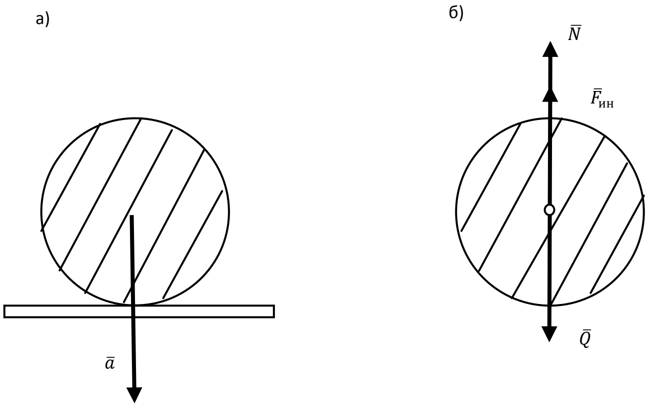

Рисунок. 39.(а, б).

Применим принцип Даламбера и приложим силу инерции $\bar{F}^{ин} = -m\bar{a}$,

где $\bar{a}$ - ускорение платформы.

Тогда можно записать уравнение равновесия груза:

$$Q - N - F^{ин} = 0.$$

Откуда динамическая реакция платформы:

$$N = Q - F^{ин} = Q\left(1 - \frac{a}{g}\right) = 58\ H.$$

Естественно, что искомое давление равно по величине N и противоположно по направлению.

Пример 41 (Рис.40).

Материальная точка массы m, прикрепленная к нити длиной *OM* = *l*, движется в вертикальной плоскости вокруг неподвижного центра *O*, описывая дугу окружности радиуса *l* (рис.40а).

Определить натяжение T нити для любого момента времени.

Решение:

Рассмотрим движение материальной точки *M*. Освободив ее от связи (нити), заменив действие связи силой натяжения *T* (рис.40б).

Вычертим активную силу - силу тяжести $\bar{Q}$ точки *M*.

Приложим силы инерции $\bar{F}_n^{ин}$ и $\bar{F}_\tau^{ин}$.

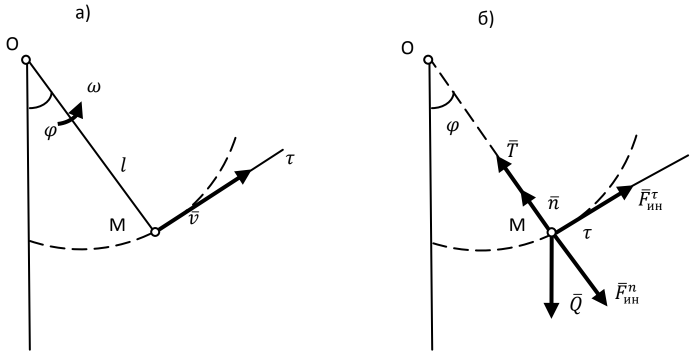

Рис. 40 (а, б)

Запишем принцип Даламбера для данной точки:

$$\bar{Q} + \bar{T} + \bar{F}_n^{ин} + \bar{F}_\tau^{ин} = 0.$$

Проектируя последнее уравнение на направления $(\bar{n})$ и $(\bar{\tau})$, получим соответственно

$$T - Qcos\varphi - F_n^{ин} = 0,$$
$$-Qsin\varphi + F_\tau^{ин} = 0$$

Учитывая, что

$$F_n^{ин} = \frac{Q}{g} a_n = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{l}$$

и

$$T = Q\left[cos\varphi + \frac{1}{lg} v^2\right].$$
$$sin\varphi = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt},$$

где

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}.$$

проинтегрируем это выражение, найдем $\varphi = \varphi(t)$ и, подставив в выражение для Т, найдем $T = T(t)$.

6.2 Принцип Даламбера для системы материальных точек

Формулировка принципа:

Для любой движущейся механической системы материальных точек в каждый момент времени активные силы, действующие на систему, силы реакций связей и Даламберовы силы инерции, искусственно приложенные к точкам системы, уравновешены.

Пример 42.

(Рис.41). Сплошной цилиндрической однородный каток *C* весом *G* и радиусом *r* катится без скольжения по неподвижной плоскости. К центру O_I катка прикреплена невесомая нить, переброшенная через неподвижный блок весом *Q* и радиусом *r* . Другим концом нить прикреплена к грузу *A* весом *P*. Груз *A* движется вниз с ускорением$\bar{a}$. Считая блок *B* однородным сплошным цилиндром, определить натяжение нитей на участках *ав* и *cd* и реакцию шарнира О. (рис.41а).

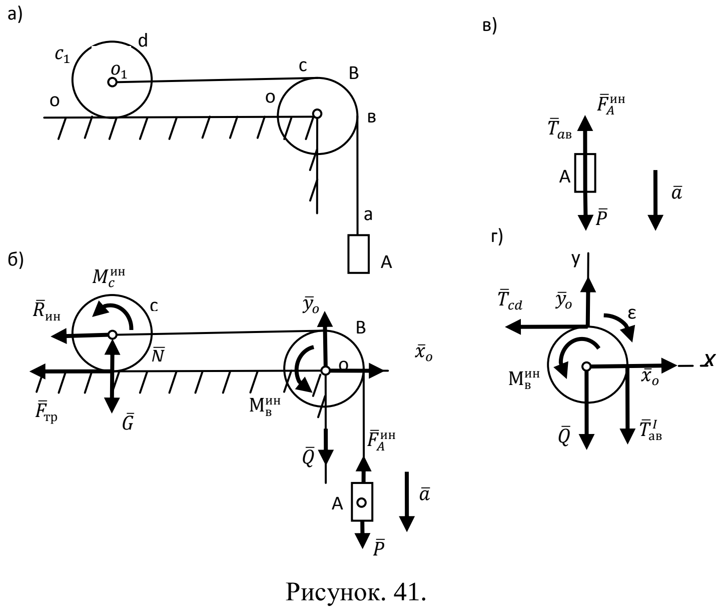

Рисунок. 41.

Решение:

В соответствии с принципом Даламбера для системы, укажем силы активные, силы реакций и приложим силы инерции: $\bar{F}_A^{ин}$, $M_B^{ин}$,$M_C^{ин}$, $\bar{R}^{ин}$. Здесь $M_B^{ин}$, $M_C^{ин}$, $\bar{R}^{ин}$ - главные моменты и главный вектор сил инерции, приложенных к блоку *B* и цилиндру *C* соответственно (рис.41б).

Принцип Даламбера для всей системы запишем:

$$(\bar{G}, \bar{Q}, \bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_{тр}, \bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{F}_A^{ин}, \bar{M}_B^{ин}, \bar{M}_C^{ин}, \bar{R}_{ин}) \equiv 0.$$

Таким образом, принцип Даламбера позволил динамическую задачу свести к задаче статики.

Рассмотрим равновесие каждого тела отдельно. Это даст нам возможность определить силы реакций внутренних связей.

Для тела A имеем (рис.41Вв):

$$\bar{F}_A^{\text{ин}} = -m_A \bar{a} = -\frac{P}{g}\bar{a},$$

$$(\bar{P}, \bar{T}_{\text{ав}}, \bar{F}_{\text{А}}^{\text{ин}}) \equiv 0,$$

$$P - T_{\text{ав}} - F_A^{\text{ин}} = 0,$$

Откуда

$$T_{\text{ав}} = P - F_{\text{А}}^{\text{ин}} = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Для определения $\bar{T}_{cd}, \bar{X}_O, \bar{Y}_O$ применим принцип Даламбера к блоку B (рис.41г).

Очевидно

$$\bar{T}_{\text{ав}}^I = \bar{T}_{\text{ва}};$$

$$M_B^{\text{ин}} = -J_B \varepsilon_B$$

Составим уравнение равновесия плоской произвольной системы сил, действующих на блок B:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_O - T_{cd} = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_O - Q - T_{\text{ав}}^I = 0$$

$$\sum m_o(\bar{F}_K) = 0;\ T_{cd} r - T_{\text{ав}}^I r + |M_B^{\text{ин}}| = 0,$$

где

$$|M_B^{\text{ин}}| = J_B \varepsilon = \frac{Q\tau^2}{2g} \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2g} Qra;$$

Решая уравнения, получаем ответ на поставленный вопрос:

$$X_O = T_{cd} = P - \frac{a}{g}\left(P + \frac{Q}{2}\right),$$

$$Y_O = Q + P\left(1 - \frac{a}{g}\right),$$

$$T_{\text{ав}} = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Очевидно,

$$R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}.$$

<u>Пример 43.</u>

Тонкий прямолинейный однородный стержень OB длиной l и весом P вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с вершиной в точке O вокруг вертикальной оси OA. В точке B к стержню прикреплен тяжелый шарик весом Q(размерами шарика пренебрегаем).

Определить величину угла φ отклонения системы от вертикали как функцию ω, а также давление $\bar{N}$ системы на шарнир O.

Решение:

Применяем принцип Даламбера к механической системе, состоящей из стержня OB и шарнира B.

Запишем, что система сил внешних $\bar{X}_o, \bar{Z}_o, \bar{P}, \bar{Q}$ и сил инерции $\bar{F}_B^{\text{ин}}, \bar{R}^{\text{ин}}$ - суть уравновешенная система сил:

$$(\bar{X}_o, \bar{Z}_o, \bar{P}, \bar{Q}, F_B^{\text{ин}}, R^{\text{ин}}) \equiv 0$$

Здесь $\bar{X}_o, \bar{Z}_o$ - составляющие реакции в шарнире O,

$\bar{F}_B^{\text{ин}}$ - сила инерции, искусственно приложенная к шарниру B.

$\bar{R}^{\text{ин}}$ - главный вектор сил инерции, искусственно приложенных к стержню OB.

Так как $\omega = const$, то нет касательных сил инерции, и главный момент сил инерции $|M^{\text{ин}}| = J\varepsilon = 0$.

Сила инерции $F_B^{\text{ин}} = m_B a_B = \frac{Q}{g}\omega^2 l sin\varphi$ и направлена в сторону, противоположную $\bar{a}_B$ (рис.42б).

Перейдем теперь к определению главного вектора $\bar{R}^{\text{ин}}$ сил инерции, приложенных к стержню OB.

Направим ось ξ от точки O вдоль стержня. На расстоянии ξ возьмем элемент длиной $d\xi$ и определим величину элементарной силы инерции $dF^{\text{ин}}$, приложенной к этому элементу стержня:

$$dF^{\text{ин}} = dm a_\xi = dm\omega^2\xi sin\varphi = \frac{P}{lg} d\xi\omega^2\xi sin\varphi.$$

Здесь $dm = \frac{P}{lg} d\xi$; $a_\xi = \omega^2\tau_\xi = \omega^2\xi sin\varphi$.

$d\bar{F}^{\text{ин}}$ направлена, как указано на рис.24б (в сторону, противоположную $\bar{a}_\xi$).

Мы видим, что $d\bar{F}^{\text{ин}}$ для различных элементов стержня пропорциональна расстоянию до оси вращения, то есть увеличиваются, по мере удаления от точки O, по линейному закону (рис.42б).

Известно, что равнодействующая таких сил проходит через центр тяжести $\Delta\ OBK$ и равна

$$R^{\text{ин}} = \int_{(m)} dF^{\text{ин}} = \frac{P\omega^2}{lg} sin\varphi \int_o^l \xi d\xi = \frac{P\omega^2 l}{2g} sin\varphi.$$

Для получившейся плоской произвольной системы сил (рис.42в) составляем три уравнения равновесия и определяем три искомые величины $\bar{X}_o, \bar{Z}_o, \varphi$.

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_o - R^{ин} - F_B^{ин} = 0.$$
$$\sum F_{ky} = 0;\ Z_o - P - Q = 0.$$
$$\sum m_o\,(\bar{F}_k) = 0;\ \left(P\frac{1}{2} + Q\right) l sin\varphi - \left(F_B^{ин} + R^{ин}\cdot\frac{2}{3}\right) l cos\varphi = 0.$$

Ответ:

$$N = R_o = \sqrt{X_o^2 + Z_o^2} = \sqrt{(P+Q)^2 + (2Q+P)^2\frac{\omega^4 l^2}{4g^2} sin^2\varphi}$$

$$cos\varphi = \frac{3g}{2\omega^2 l}\cdot\frac{P+2Q}{P+3Q}$$

$$\varphi = arccos\left[\frac{3g}{2\omega^2 l}\cdot\frac{P+2Q}{P+3Q}\right].$$

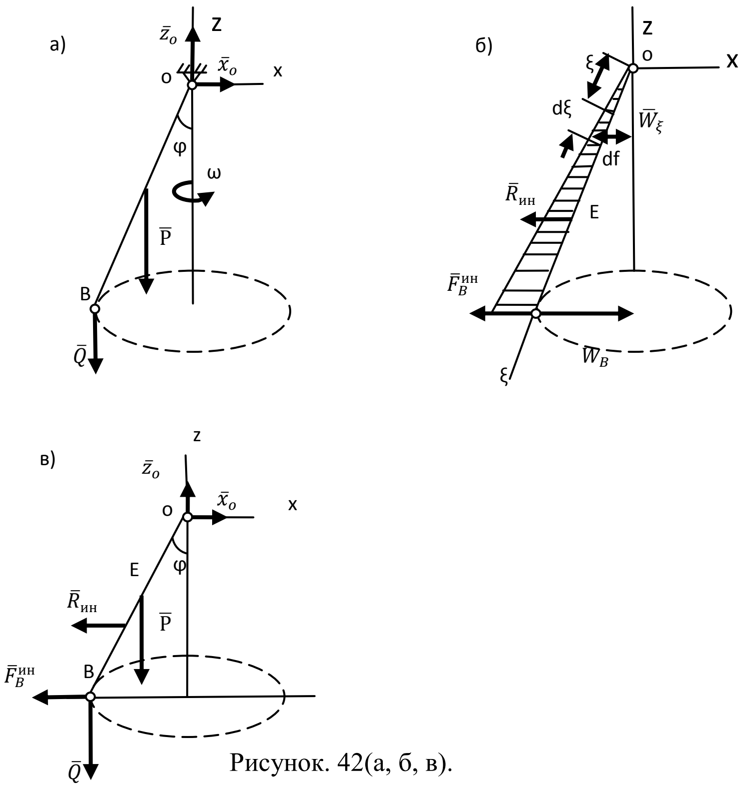

Рисунок. 42(а, б, в).

6.3 Принцип возможных перемещений

Формулировка принципа:

Для равновесия механической системы материальных точек с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил, действующих на систему, на любом из возможных перемещений системы была равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1} \sigma A_K^a = 0.$$

Напомним, что:

1) возможным перемещением механической системы называется совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых наложенными на систему связей;

2) идеальными связями называется связи, сумма элементарных работ сил реакций связей которых на возможных перемещениях системы равна нулю.

При решении задач рекомендуем придерживаться следующего плана:

- Определить точки и тела, которые войдут в рассматриваемую нами систему;
- Изобразить на чертеже все активные силы, действующие на рассматриваемую систему;
- Установить число степеней свободы и выбрать независимые возможные перемещения;
- Подсчитать и приравнять нулю сумму элементарных работ всех действующих на систему активных сил на возможных перемещениях системы;
- Решить и проанализировать получившиеся уравнения.

Пример 44.

(Рис. 43. В кулисном механизме при качании кривошипа *OC* вокруг горизонтальной оси *O* ползун *A*, перемещается вдоль кривошипа *OC*, приводит в движение стержень *AB*, движущийся в вертикальных направлениях К. Даны размеры: *OC* = *R*, *OK* = *l*. Какую силу Q надо приложить перпендикулярно кривошипу *OC* в точке *C* для того, чтобы уравновесить силу *P*, направленную вдоль стержня *AB* вверх ?

Решение:

Система состоит из кривошипа *OC*, ползуна *A*, стержня *AB* и неподвижного шарнира *O*. На систему действуют активные силы $\bar{P}, \bar{Q}$ и сила реакции в шарнире *O*. На систему наложены идеальные связи, так как шарнир *O* неподвижен; трением в шарнире *O* и направляющих *"K"* пренебрегаем.

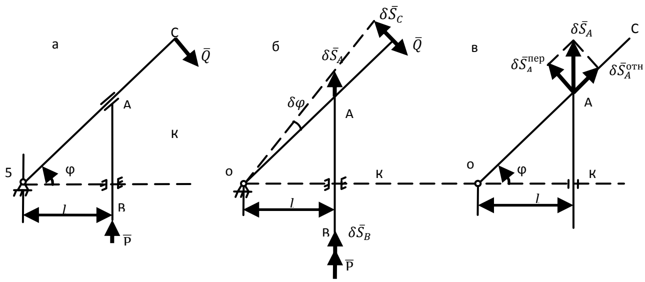

Рисунок. 43(а, б, в).

Система обладает одной степенью свободы (Очевидно, что движения всех точек прекратятся, если закрепить кривошип). Следовательно, элементарные перемещения всех звеньев механизма можно выразить через перемещение какого-нибудь одного тела, например, через элементарный угол поворота кривошипа. Сообщим системе возможное перемещение: повернем кривошип на угол $\delta\varphi$, тогда точки AB и C переместятся соответственно на $\delta\bar{S}_A = \delta\bar{S}_B, \delta\bar{S}_с$ (рис. 43б).

Так как механизм должен находиться в равновесии, то сумма элементарных работ сил $\bar{Q}$ и $\bar{P}$ на этом возможном перемещении должно быть равна нулю:

$$\sum \delta A_K^a = P\delta S_B - Q\delta S_C = 0$$

Выразим перемещения точек А и В через элементарный угол поворота кривошипа $\delta\varphi$:

$$\delta S_c = R\delta\varphi, \delta\bar{S}_B = \delta\bar{S}_A.$$

Перемещение точки A можно представить суммой двух перемещений:

относительного $\delta\bar{S}_A^{отн}$ вдоль OC и переносного $\delta\bar{S}_A^{пер}$ вместе с кривошипом OC (рис.43в).

На основании теории сложного движения точки запишем:

$$\delta\bar{S}_A = \delta\bar{S}_A^{отн} + \delta\bar{S}_A^{пер},$$

$$\delta S_A^{пер} = OA \cdot \delta\varphi = \frac{l}{cos\varphi}\delta\varphi.$$

$$\delta S_A = \frac{\delta S_A^{пер}}{cos\varphi} = \frac{l}{cos^2\varphi}\delta\varphi.$$

Условие равновесия системы примет вид:

$$\sum \delta A_K^a = \left(P\frac{l}{cos^2\varphi} - QR\right)\delta\varphi = 0.$$

Откуда следует (так как $\delta\varphi$ - произвольно), что $\frac{Pl}{cos^2\varphi} - QR = 0$,

поэтому

$$Q = P \cdot \frac{l}{Rcos^2\varphi}.$$

Пример 45.

(Рис.44). Механизм заднего колеса плуга состоит из двух рычагов: прямого AB и ломаного CD, вращающихся вокруг неподвижных шарниров O_1 и O_2. Концы B и C этих рычагов соединены шарнирно шатуном BC, который составляет с ними в положении, показанном на чертеже, углы φ_1 и φ_2. В этом положении механизма превышение точки A над осью O_1 равно h и горизонтальное расстояние между точкой D и осью O_2 равно H. В точке A приложена горизонтальная сила $\overline{\text{P}}$, в точке D - вертикальная сила $\bar{R}$; $0_1\text{B} = r, 0_2\text{C} = r_2$. Найти соотношение между силами P и R, при котором механизм будет оставаться в равновесии.

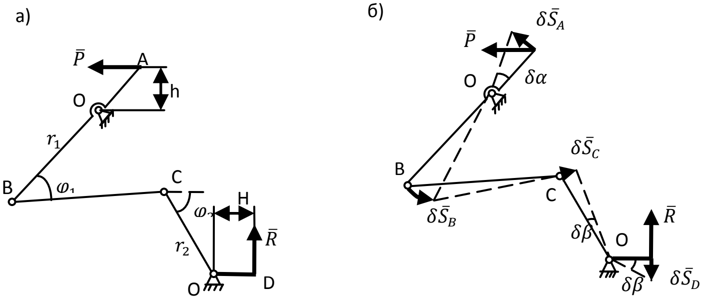

Рис. 44(а, б).

Решение:

Система состоит из рычагов AB, CD.

На систему действуют активные силы $\overline{\text{P}}$ и $\bar{R}$. Связи (шарниры O_1 ,O_2 и стержень BC) идеальны, так как шарниры без трения, а стержень BC - нерастяжимы.

Система имеет одну степень свободы (Элементарные перемещения всех точек можно выразить через элементарный угол поворота рычага AB). Следовательно, система имеет одно возможное перемещение.

Если повернуть рычаг AB на угол $\delta\alpha$, то рычаг CD повернутся на некоторый угол $\delta\beta$. Точки A, B, C и D получат соответственно перемещения $\delta\bar{S}_A, \delta\bar{S}_B, \delta\bar{S}_C, \delta\bar{S}_D$ (рис. 44б),

которые можно выразить через элементарный угол $\delta\alpha$ поворота рычага AB.

Так как эта конструкция должна находиться в равновесии, то сумма элементарных работ активных сил $\overline{\text{P}}$ и $\bar{R}$ на этом возможном перемещении должна быть равна нулю:

$$\sum \delta A_K^a = Ph\delta\alpha - PH\delta\beta = 0.$$

Стержень BC нерастяжим, то есть проекции перемещения точек B и C на BC равны между собой:

$$\delta S_B cos(90^0 - \varphi_1) = \delta S_c cos(90^0 - \varphi_2).$$

Но $\delta S_B = r\delta\alpha, \delta S_C = r_2\delta\beta$, что позволит записать

$$r_1\delta\alpha sin\varphi_1 = r_2\delta\beta sin\varphi_2.$$

Откуда

$$\delta\beta = \delta\alpha \frac{r_1 sin\varphi_1}{r_2 sin\varphi_2}.$$

Подстановка этого соотношения в условие равновесия позволяет сказать, что заднее колесо плуга сохранит равновесие, если между силами $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ будет следующая зависимость:

$$P = R\frac{Hr_1 sin\varphi_1}{hr_2 sin\varphi_2}.$$

Пример 46.

(Рис.45). Найти веса P_1 и P_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом P на плоскостях, наклоненных к горизонту под углом α и β, если грузы P_1 и P_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза P_1 через блок O_1, насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку O, несущему груз P , а затем через блок O_2 , насаженный на ось блока O_1 к грузу P_2 (рис.45а).

Трением, а также массами блоков и троса пренебречь.

Решение:

Рассматриваемая система, состоящая из грузов P_1 , P_2 ,P и блоков O, O_1, O_2 имеет две степени свободы: груз P_2 , может двигаться при закрепленном грузе P_1 (а груз P_1 будет перемещаться при неподвижном грузе P_2).

Сообщим системе первое возможное перемещение, при котором груз P_1 неподвижен (рис. 45б). Для этого перемещения принцип возможных перемещений дает

$$\sum \delta A_1^a = P_2\delta S_2 sin\beta = P\delta S^{(1)} = 0$$

Легко видеть (рис. 45б), что

$$\delta\bar{S}^{(1)} = \delta\bar{S}_o = \frac{1}{2}\delta\bar{S}_2^I;\ \delta S_2^I = \delta S_2,$$

а, следовательно, можно записать:

$$(2P_2 sin\beta - P)\delta S^{(1)} = 0 \text{ и } P_2 = \frac{P}{2sin\beta}.$$

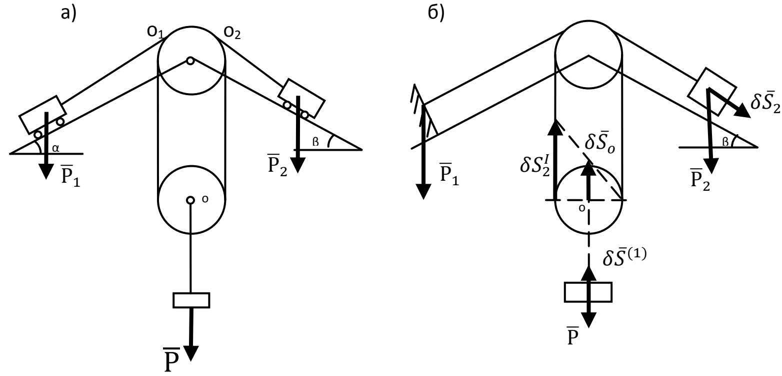

Рисунок. 45(а, б).

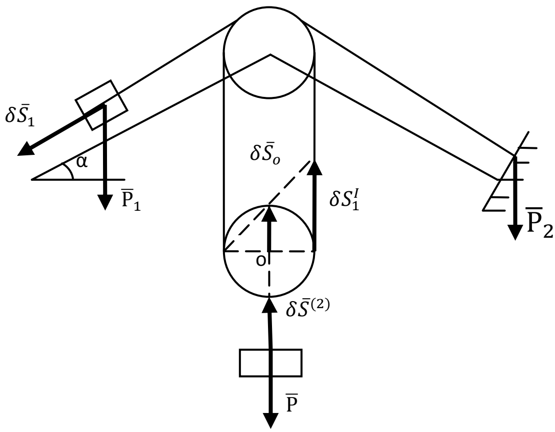

Рис. 45(в).

Теперь сообщим второе независимое возможное перемещение: пусть груз P_2 - неподвижен (рис. 45в), а грузы Р и P_1 перемещаются. Так как система находится в равновесии, то сумма элементарных работ активных сил на этом возможно перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A_2^a = P_1 \delta S_1 sin\alpha - P\delta S^{(2)} = 0$$

Если подставить $\delta S^{(2)} = \frac{1}{2}\delta S_1$, то $P_1 = \frac{P}{2sin\alpha}$.

7 ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Если воспользуемся принципом Даламбера, то можно любую движущуюся механическую систему представить находящейся в состоянии покоя.

Соединение принципов Даламбера и возможных перемещений и дает общее уравнение динамики: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

$$\sum \delta A_K^a + \sum \delta A_K^{\text{ин}} = 0,$$

или

$$\sum \left[(F_{ix}^a + F_{ix}^{\text{ин}})\delta x + \left(F_{iy}^a + F_{iy}^{\text{ин}}\right)\delta y + (F_{iz}^a + F_{iz}^{\text{ин}})\delta z \right] = 0.$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение движения механической системы. Чтобы записать это уравнение для системы, состоящей из твердых тел, надо к действующим на каждое тело активными силам добавить главный вектор и главный момент сил инерции (см. гл."Принцип Даламбера" нашего пособия). Затем приравнять нулю сумму элементарных работ активных сил, действующих на систему, и сил инерции, искусственно приложенных к ней на каждом из возможных перемещений системы.

Пример 47.

(Рис.46). Груз A весом P, опускаясь вниз, посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок D и намотанной на шкив B, заставляет вал C катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив B радиуса R жестко насажен на вал C радиуса τ; их общий вес равен Q, а радиус инерции относительно оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, равен ρ. Найти ускорение груза A.

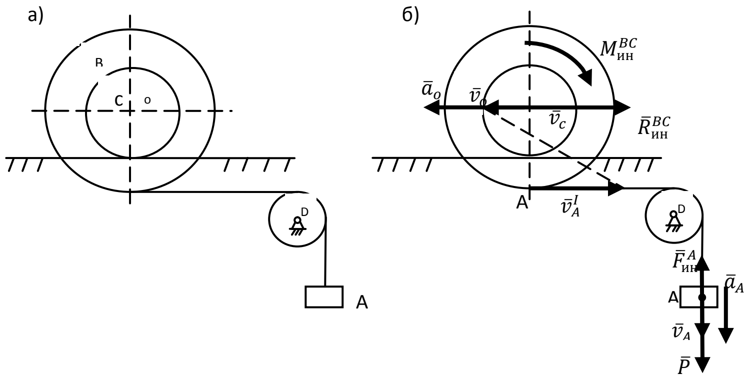

Рисунок. 46 (а, б).

Решение:

Система, состоящая из груза *A*, нити, невесомого блока *D*, шкива *B* с валом *C*, обладает одной степенью свободы.

На систему действуют активные силы $\overline{\mathrm{P}}$ и $\bar{Q}$.

Приложим к каждому телу силы инерции (рис.46б)

$$F_A^{\text{ин}} = \frac{P}{g} a_A;\ R_{BC}^{\text{ин}} = \frac{Q}{g} a_o;\ |M_{BC}^{\text{ин}}| = J_O \varepsilon_{BC},$$

где

$$J_o = \frac{Q}{g}\rho^2.$$

Так как нас интересует ускорение a_A точки *A*, то ускорение точки *O* и угловое ускорение $\varepsilon_{\text{ВС}}$ шкива с барабаном выразим через a_A.

Мгновенный центр скоростей шкива и барабана находится в точке касания их с горизонтальной плоскостью (рис.46б). Следовательно,

$$\omega_{BC} = \frac{v_A^I}{R-r};\ \varepsilon_{BC} = \frac{d\omega_{BC}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{R-r}\right) = \frac{1}{R-r}\cdot\frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A}{R-r}.$$

Скорость точки *O* равна

$$v_o = \omega_{BC}\cdot r = \frac{v_A}{R-r}\cdot r.$$

Точка *O* совершает прямолинейное движение, следовательно, ее ускорение равно только тангенциальному:

$$a_o = \frac{dv_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A r}{R-r}\right) = \frac{r}{R-r}\cdot\frac{dv_A}{dt} = \frac{r}{R-r}\cdot a_A.$$

Запишем общее уравнение динамики:

$$\sum(\delta A^{\text{а}} + \delta A^{\text{ин}}) = P\delta S_A - F_A^{\text{ин}}\delta S_A - R_{BC}^{\text{ин}}\delta S_o - M_{BC}^{\text{ин}}\delta\varphi = 0.$$

Так как система обладает одной степенью свободы, то δS_o и $\delta\varphi$ можно выразить через δS_A:

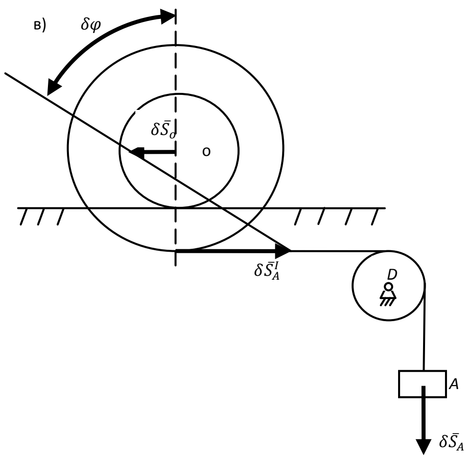

Рисунок. 46(в).

$$\delta\varphi = \frac{\delta S_A}{R-\tau};\ \delta S_o = \tau\delta\varphi = \frac{\tau}{R-\tau}\delta S_A. \quad \text{(рис.46в)}$$

И общее уравнение динамики для рассматриваемой механической системы примет вид:

$$\left[P - \frac{P}{g}a_A - \frac{Q}{g}\cdot\frac{\tau^2}{(R-r)^2}a_A - \frac{Q}{g}\cdot\frac{\rho}{(R-r)^2}a_A\right]\delta S_A = 0.$$

Отсюда

$$a_A = g\frac{P(R-r)^2}{Q(r^2+R^2)+P(R-r)^2}.$$

Пример 48.

(Рис.47). Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой ω. Определить угол отклонения ручек *OA* и *OB* от вертикали, принимая во внимание только *P* каждого из шаров и вес P_1 муфты *C*; все стержни имеют одинаковую длину *l*.

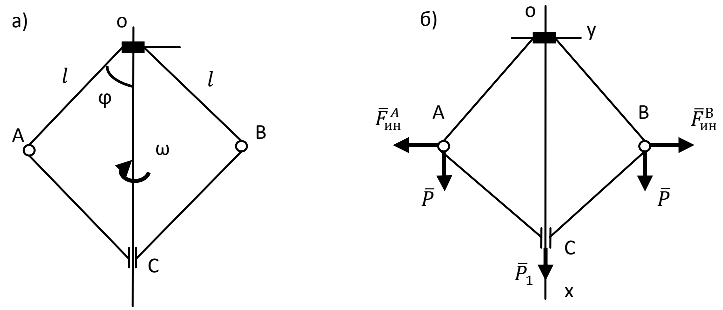

Рисунок. 47(а, б).

Решение:

К действующим на систему активным силам (P, P_1) добавим силы инерции. Так как механизм вращается равномерно, то точки его имеют только нормальное ускорение (рис.47б).

$$a_B = a_A\omega^2 l sin\varphi$$

$$F_B^{ин} = F_A^{ин} = \frac{P}{g}\omega^2 l sin\varphi.$$

$$F_C^{ин} = 0 \text{ , так как } a_c = 0.$$

Общее уравнение динамики для этой системы в координатной форме запишется:

$$\sum(\delta A^{а} + \delta A^{ин}) = P\delta X_A + P\delta X_B + P_1\delta X_C + F_B^{ин}\delta Y_B - F_A^{ин}\delta Y_A = 0.$$

Система обладает одной степенью свободы, следовательно, перемещения точек *A*, *B* и *C* можно выразить через элементарный угол поворота стержней *OA* и *OB*.

Легко видеть, что

$$X_A = X_B = l cos\varphi;\ X_c = 2l cos\varphi;\ Y_B = -Y_A = l sin\varphi.$$

Дифференцируя выражение, находим:

$$\delta X_A = \delta X_B = -l sin\varphi\delta\varphi.$$

$$\delta X_C = -2l sin\varphi\delta\varphi.$$

$$\delta Y_B = -\delta Y_A = l cos\varphi\delta\varphi.$$

Подставим эти выражения и значения сил инерции в общее уравнение динамики и получим:

$$\left(-2Pl sin\varphi - 2P_1 l sin\varphi + \frac{P}{g}\omega^2 sin\varphi \cdot cos\varphi + \frac{P}{g}\omega^2 l sin\varphi cos\varphi\right)\delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$cos\varphi = \frac{g(P + P_1)}{P\omega^2 l}.$$

Пример 49.

(Рис. 49а). Через блоки *A* м *B* с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок *C*; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок *C* нагружен гирей весом P = 4кг, к концам шнура прикреплены грузы P_1 = 2 кг и P_2 = 3 кг. определить ускорение всех трех грузов, пренебрегая массами и шнуров и трением на осях.

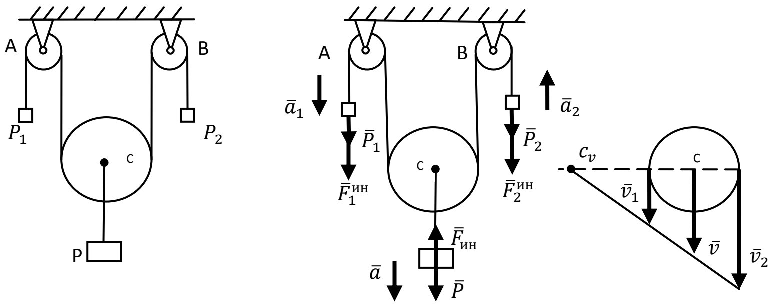

Рисунок. 48(а, б, в)

Решение:

К активным силам $\bar{P}, \bar{P}_1, \bar{P}_2$, действующим на эту систему, состоящую из трех грузов, трех блоков и нити, добавим силы инерции. Допустим, что ускорения грузов направлены так, как показано на рис.48б. Легко видеть, что скорости, а следовательно, и ускорения грузов связаны следующим соотношением (рис.48в).

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}; a = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Система обладает двумя степенями свободы. Следовательно, можно записать: если закрепить груз P_1 , то

$$\sum\left(\delta A_1^a + \delta A_1\right) = -\left(P_2 + \frac{P_2}{g}a_2\right)\delta S_2 - \frac{P}{g}a\frac{\delta S_2}{2} + P\frac{\delta S_2}{2} = 0$$

(см. рис. 48г).

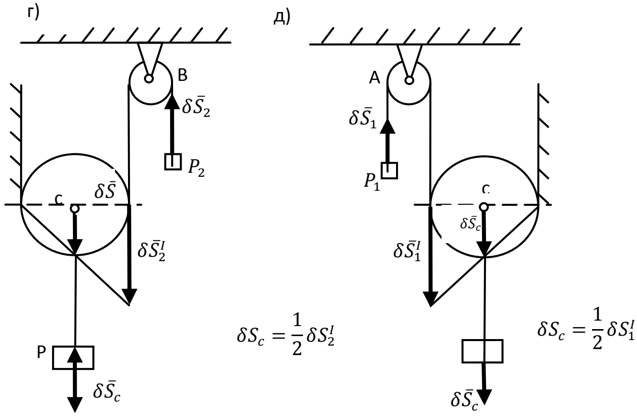

Рисунок. 48(г, д).

если закрепить груз P_2, то

$\sum(\delta A_2^{а} + \delta A_2^{ин}) = P\frac{\delta S_1}{2} - \frac{P}{g}a\frac{\delta S_1}{2} - P_1\delta S_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta S_1 = 0$ (см. рис. 48д).

Откуда получим:

$$a_2 = \frac{(P-2P_2)g - Pa}{2P_2},$$

$$a_1 = \frac{(P-2P_1)g - Pa}{2P_1}.$$

Подставив эти значения в выражение для a, откуда найдем, что

$$a = g\frac{P_1P + P_2P - 4P_1P_2}{P_1P + P_2P + 4P_1P_2} = -\frac{1}{11}g.$$

Знак минус говорит о том, что ускорение груза P направлено вверх, а не вниз, как мы предполагали.

Подставляя это значение a, a_1 и a_2, получим:

$$a_1 = \frac{1}{11}g,$$

то есть ускорение груза P_1 направлено вверх, как мы и предполагали:

$a_2 = -\frac{3}{11}g$, т. е. ускорение груза P_2 направлено вниз.

8 УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2 РОДА

Уравнения Лагранжа 2 рода - дифференциальные уравнения движения механической системы с идеальными связями в обобщенных координатах имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial g_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial g_2} = Q_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_K}\right) = \frac{\partial T}{\partial g_K} = Q_{K.}$$

Число уравнений равно числу степеней свободы K .

Здесь T - кинетическая энергия системы $g_1, g_2, \ldots g_K$ - обобщенные координаты, то есть любые независимые параметры, однозначно определяющие положение системы (число обобщенных координат равно числу степеней свободы),

$\dot{g}_1 = \frac{dg_1}{dt}$; $\dot{g}_2 = \frac{dg_2}{dt}, \ldots \dot{g}_K = \frac{dg_K}{dt}$ - обобщенные скорости,

$Q_1, Q_2, \ldots Q_K$ - обобщенные силы.

Обобщенные силы - это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении элементарной работы действующих на систему сил.

Обобщенные силы можно подсчитать следующим образом. Положим, что при некотором возможном перемещении системы координат q_i получает приращение δg_i, а остальные координаты не изменяются. Подсчитаем сумму элементарных работ всех действующих сил на этом возможном перемещении и запишем

$$\sum \delta A_i = Q_i \delta g_i.$$

Откуда

$$Q_i = \frac{\sum \delta A_i}{\delta g_i}.$$

Легко видеть размерность обобщенной силы: если размерность обобщенной координаты - линейная величина, то обобщенная сила имеет размерность силы, если q_i - угол, то есть безразмерная величина, то Q_i имеет размерность момента силы.

<u>Пример 50.</u>

(Рис.49). На барабан веса G и радиуса R намотан невесомый трос, к концу которого привязан груз A веса P.

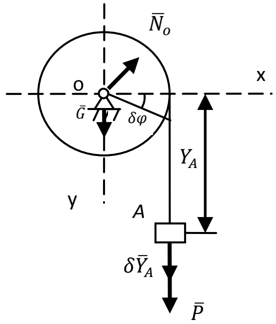

Рисунок. 49.

Эта система, состоящая из барабана, троса и груза, имеет одну степень свободы, т.е. положение системы можно определить одним параметром. Очевидно, если известно положение груза *A* (скажем , известна $У_A$), то положения всех точек легко определяются . Если $У_A$ возрастает на $\delta У_А$, то барабан повернется на угол $\delta\varphi = \frac{1}{R}\delta Y_A$.

Следовательно, за обобщенную координату можно принять $g_1 = Y_A$.

Обобщенная скорость $g_q = \frac{dY_A}{dt} = v_A$ - это скорость *A*.

Из всех внешних сил $(\bar{G}, \bar{P}, \bar{N}_o)$, действующих на систему на возможном перемещении δY_A, работу производит только сила P.

Тогда обобщенная сила

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_1}{\delta g_1} = \frac{P\delta Y_A}{\delta Y_A} = P.$$

<u>Пример 51.</u>

(Рис.50). На кривошип эллипсографа, расположенного в горизонтальной плоскости, действует вращающий момент M_o. Кривошип и линейка - однородные стержни, причем *OC* = *AC* = *BC* =*α* .

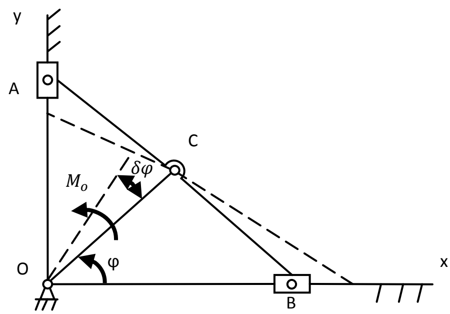

Рисунок. 50.

Эта система (*OC, AB, A, B*) обладает одной степенью свободы: если закрепить точку *A* (или точку *B*, или кривошип *OC*), то движения всех точек прекратятся.

Очевидно, что положение всего механизма и любой его точки будет определено, если известен угол φ (или X_B, и Y_A).

Таким образом, за обобщенную координату q можно принять или φ, или X_B, или Y_A.

Пусть $q = \varphi$.

А обобщенная скорость $q = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$ - угловая скорость кривошипа.

Определим обобщенную силу. Если $\delta\varphi \neq 0$, то сумма элементарных работ, внешних сил равна $\sum \delta A = M_o \delta\varphi$, следовательно,

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi} = M_o.$$

<u>Пример 52.</u>

(Рис.51). Однородный диск радиуса *R*, имеющий массу *M*, может вращаться вокруг горизонтальной оси *O*. К диску с помощью нити *AB* длинной *l* подвешена материальная точка массы m.

Система имеет две степени свободы, (если закрепить т. *B*, то диск может продолжать вращаться).

Следовательно, положение системы определяется двумя параметрами.

Примем за обобщенные координаты углы φ и ψ.

Пусть $q_1 = \varphi, q_2 = \psi$.

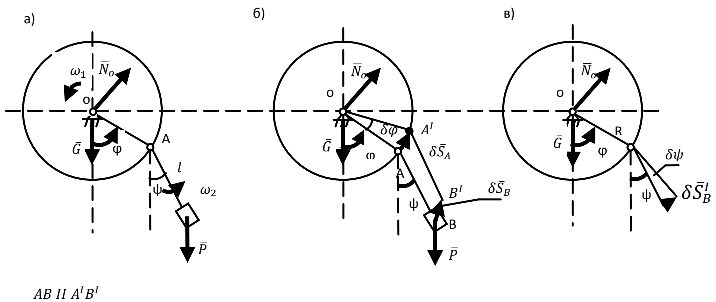

Рисунок. 51.

Обобщенные скорости равны, соответственно:

$q_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$ - угловая скорость вращения диска;

$q_2 = \frac{d\psi}{dt} = \omega_2$ - угловая скорость относительного вращения маятника.

Теперь определим обобщенные силы. На систему действуют внешние силы: вес точки $B - \bar{P}$, вес диска $\bar{G}$; реакция $\bar{N}_o$ шарнира 0.

Положим
$\delta q_1 = \delta\varphi \neq 0,$ а $\delta q_w = \delta\psi = 0$ (рис. 51б).
Тогда

$$\sum \delta A = -PR\delta\varphi sin\varphi, \text{ так как } \delta S_B = \delta S_A = R\delta\varphi,$$

и

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi} = -PRsin\varphi.$$

Затем положим

$$\delta q_1 = \delta\varphi = 0 \text{ , а } \delta q_2 = \delta\psi \neq 0 \text{ (рис. 51в)}$$

Сумма элементарных работ всех внешних сил на этом возможном перемещении равна:

$$\sum \delta A = -Plsin\psi\delta\psi, \text{ так как } \delta S_B = l\delta\psi,$$

и вторая обобщенная сила запишется:

$$Q_2 = \frac{\sum \delta A}{\delta\psi} = -Plsin\psi.$$

При решении задач с помощью уравнения Лагранжа 2 рода рекомендуем придерживаться следующего плана:

1. Определить, какие точки и тела следует ввести в систему;
2. Изобразить на рисунке внешние силы, действующие на систему;
3. Определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты;
4. Подсчитать кинетическую энергию системы;
5. Подсчитать обобщенные силы;
6. Записать уравнение Лагранжа 2 рода;
7. Найти решение и исследовать его.

Пример 53.

(Рис.52). В зацеплении, показанном на рис.52, колесо 1 приводится в движение моментом M_1 к колесу 2 приложен момент сопротивления M_2 и к колесу 3 - момент сопротивления M_3. Найти угловое ускорение ε_1 первого колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых m_1 , m_2 , m_3 и радиусы которых r_1, r_2, r_3.

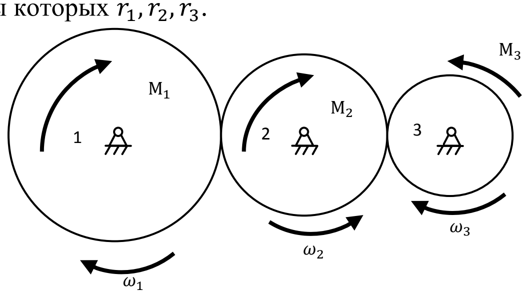

Рисунок. 52.

Решение:

Система состоит из трех колес, размеры и массы которых известны. На систему действуют моменты сил: M_1, M_2, M_3 .

Если закрепить какое-нибудь колесо, движения других тоже прекратятся. Следовательно, система обладает одной степенью свободы, т. е, если известен угол поворота первого колеса φ_1, то положения других колес будут тоже определены, так как

$$\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2 = \varphi_3 r_3.$$

Пусть обобщенная координата $q_1 = \varphi_1$, тогда обобщенная скорость $q_1 = \varphi_1 = \omega_1$, и уравнение движения системы - уравнение Лагранжа 2 рода тоже будут одно:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \qquad (*)$$

где Q_1 - обобщенная сила, Т - кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех колес:

$$T = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2.$$

Здесь

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2;\ J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2; J_3 = \frac{1}{2}m_3r_3^2.$$

Угловые скорости 2-го и 3-го колес легко выразить через угловую скорость первого. если приравнять скорости точек соприкосновения колес, то

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3 \text{ и } \omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2};\ \omega_3 = \omega_1\frac{r_1}{r_3}$$

Теперь выражение кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1r_1^2\cdot\omega_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2r_2^2\cdot\omega_1^2\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_3r_3^2\cdot\omega_1^2\frac{r_1^2}{r_3^2}$$
$$= \frac{1}{4}\omega_1^2r_1^2(m_1+m_2+m_3).$$

Обобщенную силу мы найдем из соотношения:

$$Q_1 = \frac{\sum\delta A}{\delta\varphi_1}$$

Пусть $\delta\varphi_1 \neq 0$, тогда элементарные перемещения точек соприкосновения колес равны между собой:

$$r_1\delta\varphi_1 = r_2\delta\varphi_2 = r_3\delta\varphi_3$$

и сумма элементарных работ действующих сил будет:

$$\sum\delta A = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3 = \delta\varphi_1\left(M_1 - M_2\frac{r_1}{r_2} - M_3\frac{r_1}{r_3}\right).$$

Обобщенная сила

$$Q_1 = \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2\frac{r_1}{r_2} - \mathrm{M}_3\frac{r_1}{r_3}.$$

Для того, чтобы записать дифференциальное уравнение движения системы, надо подсчитать

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right).$$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$, так как выражение кинетической энергии системы не содержит φ_1.

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2}\tau_1^2\omega_1(m_1 + m_2 + m_3),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) = \frac{1}{2}r_1^2(m_1 + m_2 + m_3)\frac{d\omega_1}{dt}.$$

Подставив все эти выражения в (*), получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$\frac{1}{2}r_1^2(m_1 + m_2 + m_3)\varepsilon_1 = M_1 - M_2\frac{r_1}{r_2} - M_3\frac{r_1}{r_3}.$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{2\left(M_1 - M_2\frac{r_1}{r_2} - M_3\frac{r_1}{r_3}\right)}{r_1^2(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

<u>Пример 54.</u>

(Рис.53). Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна с массой m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика с массой m_2, соединенного с ползуном стержня AB длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа. Массой стержня пренебречь.

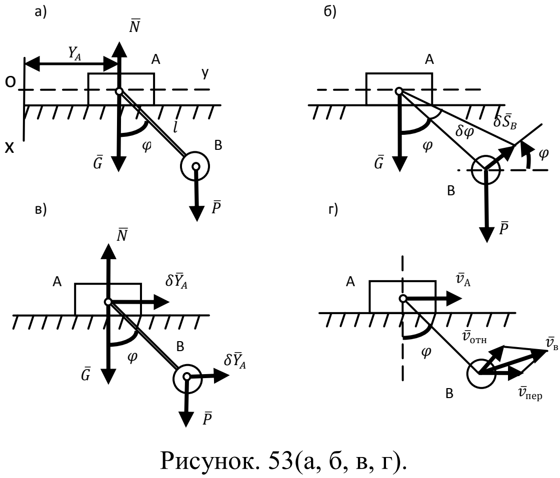

Рисунок. 53(а, б, в, г).

Решение:

Система состоит из ползуна A, стержня AB и точки B. На систему действуют внешние силы: вес ползуна $G = m_1 g$, вес точки B $P = m_2 g$, сила реакции $\bar{N}$ горизонтальной плоскости. Система обладает двумя степенями свободы (если закрепить ползун, маятник может продолжать свое вращательное движение; если закрепить и т. B, то движение всех точек системы прекратиться).

Следовательно, положение системы определяется двумя параметрами, например, координатой Y_A и углом φ.

Обозначим обобщенные координаты

$$g_1 = Y_A, g_2 = \varphi.$$

Обобщенные скорости будут:

$g_1 = \frac{dy_A}{dt} = v_A$ - скорость ползуна,

$g_2 = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$ - относительная угловая скорость маятника.

Уравнение Лагранжа, очевидно, для этой системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial v_A}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y_A} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2 \end{cases}$$

Подсчитаем обобщенные силы.

Положим $\delta g_1 = \delta y_A \neq 0$, а $\delta g_2 = \delta\varphi = 0$ (рис.53б).

Тогда

$$\sum \delta A_{(1)} = 0,$$

(так как $\bar{G} \perp \delta\bar{y}_A$, $\bar{P} \perp \delta\bar{y}_B$) и $Q_1 = 0$.

Затем положим $\delta g_2 = \delta\varphi \neq 0$, а $\delta g_1 = \delta y_A = 0$ (рис. 53в).

Это позволит подсчитать $\sum \delta A_{(2)} = -Psin\varphi\delta S_B = -Plsin\varphi\delta\varphi$, так как $\delta S_B = l\delta\varphi$

$$Q_2 = \frac{\sum \delta A_{(2)}}{\delta g_2} = Plsin\varphi = -m_2 glsin\varphi.$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии ползуна A и точки B:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_B^2.$$

Точка B совершает сложное движение. Вращательное вокруг оси A - относительное. Движение же ползуна A для нее является переносным.

Абсолютная скорость точки B равна $\bar{v}_B = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}}$ (рис.53б).

$$\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_A,$$

$$v_{\text{отн}} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot AB = \omega l,$$

$$\bar{v}_{\text{отн}} \perp AB.$$

Следовательно,

$$v_B^2 = v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{отн}} \cdot v_{\text{пер}} cos\varphi = v_{\text{А}}^2 + \omega^2 l^2 + 2\omega l v_A cos\varphi.$$

Подставим это значение v_B^2 в выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_A^2 + \omega^2 l^2 + 2\omega l v_A cos\varphi).$$

Чтобы записать дифференциальные уравнения движения системы, надо подсчитать

$$\frac{\partial T}{\partial y_A}, \frac{\partial T}{\partial v_A}, \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial \omega}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_A} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_A} = (m_1 + m_2) v_A + m_2 \omega l cos\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 \omega l v_A sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = m_2 (\omega l^2 + l v_A cos\varphi).$$

Уравнение Лагранжа 2 рода запишутся:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[(m_1 + m_2) v_A + m_2 \omega l cos\varphi] = 0 \\ \dfrac{d}{dt}[m_2(\omega l^2 + l v_A cos\varphi)] + m_2 l \omega v_A sin\varphi = -m_2 g l sin\varphi \end{cases}$$

После небольших преобразований дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[(m_1 + m_2) \dot{y}_A + m_2 \dot{\varphi} l cos\varphi] \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{y}_A cos\varphi + g sin\varphi = 0 \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. "Краткий курс теоретической механики".

2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. "Теоретическая механика в примерах и задачах".

СОДЕРЖАНИЕ