

**Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет
имени Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

ФИЗИКА

Часть 1

Конспект лекций для бакалавров

**Новомосковск
2021**

УДК 53
ББК 22.3
Ф 48

Рецензент:

доктор технических наук, профессор Сафонов Б.П.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева)

**Составители: Подольский В.А., Логачева В.М., Резвов Ю.Г.,
Сивкова О.Д.**

Ф 48 ФИЗИКА. ЧАСТЬ 1. Конспект лекций для бакалавров/ ФГБОУ
ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Но-
вомосковск, 2021.- 108 с.

Учебное пособие написано в соответствии с лекционным курсом первого семестра дисциплины «Физика» НИ РХТУ и содержит краткое изложение разделов «Механика» и «Молекулярная физика». Данное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов технических специальностей.

Ил. 75. Библиогр.: 6 назв.

УДК 53
ББК 22.3

©ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева,
Новомосковский институт (филиал), 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное издание «ФИЗИКА часть 1. Конспект лекций для бакалавров» написано в соответствии с рабочей программой по физике для студентов технических вузов, составленной согласно ФГОС ВО-3+. В издание включены главы курса физики, изучаемые студентами первого курса – это разделы механики и молекулярной физики. Необходимость издания данного пособия вызвано вводом нового стандарта обучения и единого государственного экзамена в школе, что существенно изменило уровень подготовки абитуриентов по физике. Современная система оценки знаний основана на компетентностном подходе, одной из важных составляющих которой является текущая оценка знаний студентов. Все это вызвало потребность в подготовке учебного пособия уменьшенного объема благодаря краткости изложения и тщательного отбора изучаемого материала.

Данное издание, прежде всего, предназначено для подготовки студентов дневной и заочной форм обучения к лабораторным и практическим занятиям по темам курса физики первого семестра. Материалы могут также быть использованы для подготовки к коллоквиуму и экзамену, при решении контрольных работ студентами-заочниками.

Для улучшения усвоения изучаемого материала все основные понятия, определения и законы в пособии четко выделены отдельным шрифтом. Формулы, определяющие физические величины и устанавливающие связь между ними, а также выражающие основные законы механики и молекулярной физики, обведены рамками. Большое количество рисунков, подробные пояснения математических выводов, разъяснение физического смысла понятий и законов будет способствовать их лучшему пониманию.

Авторы надеются, что данное учебное издание будет ценным вспомогательным материалом наряду с традиционными учебниками и поможет студентам успешно усвоить законы механики и молекулярной физики.

ВВЕДЕНИЕ

Конспект лекций включает два раздела физики – механику и молекулярную физику

Механика – это наука о механическом движении тел и происходящих при этом взаимодействиях между телами. Под механическим движением понимают изменение взаимного положения тел или их частей в пространстве с течением времени. В механике рассматриваются взаимодействия тел (действия тел друг на друга), приводящие к изменению движения этих тел или их деформации.

По характеру решаемых задач механика состоит из трех разделов.

1. Кинематика изучает движение тел без учета их взаимодействия с другими телами. Основной задачей кинематики является нахождение координат тела и его скорости в любой момент времени. 2. Динамика изучает движение тел с учетом их взаимодействия с другими телами, т.е. здесь изучаются, главным образом, причины движения тел. 3. Статика изучает условия равновесия тел. 4. Раздел колебания и волны посвящен изучению одного из распространенных и важных видов движения

При описании движения тела в механике рассматривается модели тела, что позволяет при изучении движения пренебречь или его размерами, или деформацией, или атомно-молекулярной структурой.

Механика тесно связана с другими разделами физики и в частности с молекулярной физикой. Молекулярная физика изучает физические свойства тел на основе рассмотрения их молекулярного строения.

В пособие включены следующие основные разделы курса молекулярной физики для технических специальностей. 1. Молекулярно-кинетическая теория, в которой на примере идеального газа рассмотрены основные особенности этой теории. 2. Элементы статистической физики, в которой приведены знаменитые распределения Максвелла и Больцмана. 3. Термодинамика, которая изучает свойства тел, не интересуясь их молекулярным строением. Это делает термодинамику особенно ценной при изучении различных состояний систем. 4. Явления переноса – краткое описание неравновесных процессов: диффузии, теплопроводности, внутреннего трения.

Рассмотренные в конспекте лекций разделы физики является одной из основ развития многих областей современной науки и техники.

1. КИНЕМАТИКА

1.1 Механическое движение. Материальная точка. Абсолютно твердое тело. Система отсчета. Радиус - вектор. Траектория. Путь. Перемещение

Механическое движение - это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется **механической системой**. Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется **материальной точкой** или **частицей**. Это простейшая модель тела, упрощающая математическое описание его движения. Другая модель - **абсолютно твердое тело** - тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как состоящее из огромного числа (теоретически - из бесконечного) материальных точек, взаимное расположение которых не изменяется.

Изменение положения данного тела можно указать только по отношению к другому телу. Для описания движения необходимо так же определять время. Тело, по отношению к которому рассматривается движение других тел, называется **телом отсчета**. Тело отсчета и отсчитывающие время часы называют **системой отсчета**. **Относительность движения** заключается в том, что движение данного тела относительно различных систем отсчета имеет разный характер. Например, человек, сидящий в движущемся поезде, покоится относительно вагона и движется относительно Земли.

Начнем изучение механики с кинематики материальной точки (частицы). Для количественного описания движения частицы нужно с телом отсчета связать систему координат. В прямоугольной декартовой системе координат положение частицы в пространстве задается ее координатами x, y, z . Для простоты будем рассматривать движение в плоскости, используя двумерную систему координат с осями координат x и y . В этом случае положение частицы в пространстве определяется двумя ее координатами x и y . **Радиус-вектором** точки называется *вектор, проведенный из начала координат в данную точку* (рис. 1.1а, радиус-вектор \vec{r} проведен в точку с координатами x, y). Таким образом, положение частицы можно задавать ее радиус-вектором \vec{r} . Из рис. 1.1а видно, что проекции r_x и r_y радиус-вектора \vec{r} на оси координат равны координатам x и y частицы соответственно: $r_x = x$; $r_y = y$. Т.к. $\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y$, то **радиус-вектор частицы** в момент времени t связан с ее координатами x и y в тот же момент времени соотношением:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \quad (1.1)$$

где \vec{e}_x и \vec{e}_y - единичные векторы (орты) координатных осей x и y соответственно, причем $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$.

На рис 1.1б радиус-вектор \vec{r}_1 проведен в начальное положение частицы (в момент времени t_1), \vec{r}_2 - в конечное положение (в момент времени t_2). Линия, которую описывает частица при своем движении, называется **траекторией** (рис. 1.1б). Длина пути (путь) S - расстояние, пройденное частицей вдоль траектории. **Перемещение** $\Delta\vec{r}$ - вектор, соединяющий начальное (в момент времени t_1) и конечное (в момент времени t_2) положение частицы (рис. 1.1б). В соответствии с правилом вычитания векторов

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

т.е. перемещение равно приращению радиус-вектора.

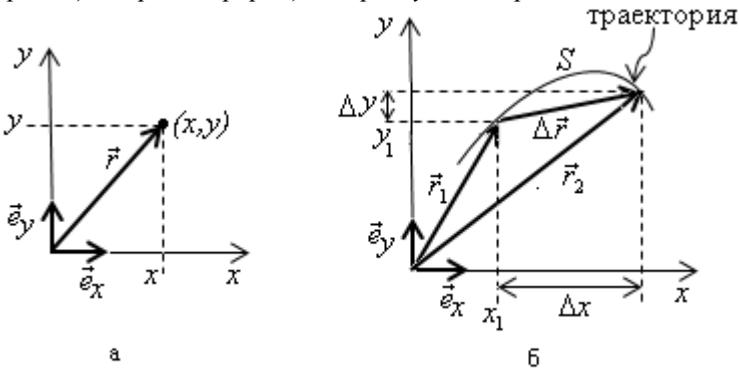


Рис. 1.1

1.2 Средняя и мгновенная скорости. Модуль скорости. Проекция скорости. Уравнение пути

Быстрота и направление движения частицы характеризуются векторной величиной \vec{v} , называемой скоростью. **Средняя скорость** $\langle \vec{v} \rangle$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt , за который оно произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Чем меньше промежуток времени Δt в формуле (1.2), тем ближе значение средней скорости к скорости \vec{v} в данный момент времени t . В пределе при стремлении Δt к нулю отношение в правой части (1.2) дает скорость в момент времени t (мгновенную скорость):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Т.о. мгновенная скорость равна пределу (\lim) при Δt стремящемся к нулю ($\Delta t \rightarrow 0$) отношения перемещения $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt , за который оно произошло. Сравнивая (1.3) с определением производной, можно сделать вывод, что скорость в момент времени t - **мгновенная скорость** равна *первой производной от радиус-вектора по времени*:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}. \quad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что скорость направлена так же, как перемещение $\Delta \vec{r}$. Т.к. при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор перемещения $\Delta \vec{r}$ стремится установиться по касательной к траектории (рис. (1.2), то, следовательно, и *вектор скорости \vec{v} направлен по касательной к траектории*.

Подставим в (1.4) выражение (1.1) для радиус-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y. \quad (1.5)$$

Выразим скорость \vec{v} через проекции v_x и v_y :

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y. \quad (1.6)$$

Из сравнения уравнений (1.5) и (1.6) видно, что **проекции скорости** равны *производным от соответствующих координат по времени*:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}; \quad \boxed{v_y = \frac{dy}{dt}}. \quad (1.7)$$

Найдем модуль скорости как модуль выражения (1.3):

$$v \equiv |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}.$$

Из рис. 1.2 видно, что модуль вектора перемещения $\Delta \vec{r}$, т.е. его длина, стремится к длине дуги траектории, которая "ограничивает" вектор. Сле-

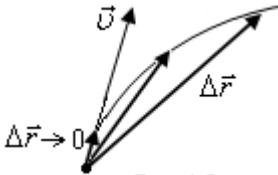


Рис. 1.2

довательно, при $\Delta t \rightarrow 0$ модуль перемещения равен пути: $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$, а выражение для модуля скорости принимает вид: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, (1.8)

Т.о. модуль скорости равен первой производной от пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}. \quad (1.9)$$

Модуль скорости можно выразить через проекции скорости (рис. 1.3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

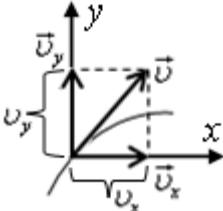


Рис. 1.3

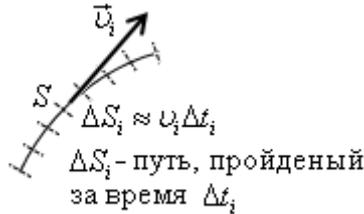


Рис. 1.4

Найдем путь, пройденный частицей за промежуток времени от t_1 до t_2 , зная зависимость $v(t)$ скорости частицы от времени (рис.1.4). Для этого интервал времени от t_1 до t_2 разобьем на малые промежутки Δt_i . Тогда из (1.8) следует, что путь, пройденный за время Δt_i : $\Delta S_i \approx v_i \Delta t_i$. Весь путь S равен сумме путей за малые промежутки времени: $S \approx \sum \Delta S_i = \sum v_i \Delta t_i$. Чем меньше промежутки Δt_i , тем точнее мы найдем путь, поэтому при

$\Delta t_i \rightarrow 0$ сумма переходит в интеграл: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Отметим, что это уравнение можно получить чисто математически. Из (1.9): $dS = v(t) dt$. Проинтегрируем это равенство, считая, что $S=0$ в момент времени t_1 , а к моменту времени t_2 пройден путь S :

$$\int_0^S dS = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Т.к. $\int_0^S dS = S$, то получим уравнение пути в общем виде: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ (1.10)

Из геометрического смысла интеграла следует, что путь равен площади под графиком скорости.

Пример. Путь при равномерном движении. Равномерным называется движение, при котором частица за равные промежутки времени проходит равные пути. При таком движении модуль скорости v постоянен (не изменяется с течением времени). Если $v = \text{const}$, то в правой части уравнения (1.10) v можно вынести за знак интеграла:

$$S = v \int_{t_1}^{t_2} dt = v \cdot t \Big|_{t_1}^{t_2} = v \cdot (t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t .$$

Если принять $t_1=0$ и $t_2=t$, то получим **уравнение пути для равномерного движения**:

$$\boxed{S=vt}$$

1.3 Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

Скорость при движении тел может меняться как по величине, так и по направлению (рис. 1.5): $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ - приращение скорости за время Δt . *Быстроту изменения скорости характеризуют ускорением:*

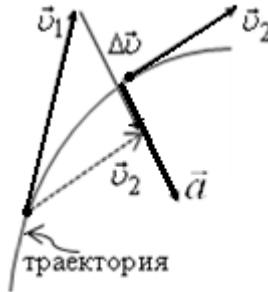


Рис. 1.5

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}} \quad (1.11)$$

Таким образом, **ускорение** равно *первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени*. Вторая производная в (1.11) обусловлена тем, что скорость есть первая производная от радиус-вектора.

Из (1.11) следует, что ускорение \vec{a} направлено так же, как $\Delta \vec{v}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. На рис. 1.5 видно, что вектор \vec{a} направлен в сторону вогнутости траектории.

Подставим в (1.11) выражение (1.6) вектора \vec{v} через его проекции и учтем, что производная от суммы функций равна сумме производных:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y. \quad (1.12)$$

Запишем вектор \vec{a} через его проекции a_x и a_y : $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$. (1.13)

Сравнивая правые части выражений (1.12) и (1.13) с учетом (1.7), получим:

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}}, \quad \boxed{a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}}. \quad (1.14)$$

Т.о. **проекции ускорения равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат по времени.** Из (1.11) единица измерения ускорения:

$$[a] = \frac{m}{c} / c = \frac{m}{c^2}.$$

Малый участок криволинейной траектории всегда можно представить как дугу окружности радиуса R (рис. 1.6). Этот радиус называется **радиусом кривизны траектории** в данной точке. Центр окружности (точка O) называется центром кривизны траектории. Из сказанного выше следует, что вектор \vec{a} всегда направлен в сторону центра кривизны. Раз-

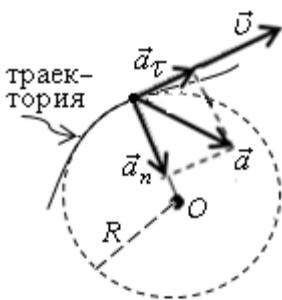


Рис. 1.6

ложим вектор \vec{a} на две составляющие (рис. 1.6): одна из них \vec{a}_n направлена по радиусу кривизны, вторая \vec{a}_τ - по касательной к траектории (т.е. перпендикулярно радиусу кривизны). Тогда ускорение (в данном случае его называют **полным ускорением**)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (1.15)$$

Составляющая \vec{a}_n называется **нормальным ускорением** и *характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.* **Мо-**

дуль нормального ускорения

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}. \quad (1.16)$$

Составляющая \vec{a}_τ называется **тангенциальным** (или касательным) **ускорением** и *характеризует быстроту изменения величины скорости.* **Мо-**

доль тангенциального ускорения равен первой производной от модуля скорости по времени:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.17)$$

Из рис. 1.6, используя теорему Пифагора, находим модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} \quad (1.18)$$

Примеры

1. *Прямолинейное движение*: радиус кривизны траектории $R \rightarrow \infty$. Из (1.16) получим: $a_n = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{\tau}$, т.е. полное ускорение равно тангенциальному (рис. 1.7).

2. *Криволинейное движение с постоянной по величине скоростью $v = const$* .

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n,$$

т.е. полное ускорение равно нормальному (рис. 1.7).

3. *Равнопеременное движение*: $\vec{a} = const \Rightarrow$ Проекция ускорения $\vec{a}_x = const$; $\vec{a}_y = const$.

Пусть в начальный момент времени ($t=0$) частица имела скорость \vec{v}_0 и находилась в точке с координатами x_0, y_0 . Из (1.14) $dv_x = a_x dt$. Проинтегрируем левую и правую части этого выражения:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt \Rightarrow v_x - v_{0x} = a_x t \Rightarrow$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \quad (1.19)$$

Аналогично для оси y :

$$v_y = v_{0y} + a_y t. \quad (1.20)$$

Выразим из (1.7) $dx = v_x dt$. Проигнорируем левую и правую части этого выражения с учетом (1.19)

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_{0x} + a_x t) dt \Rightarrow x - x_0 = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.21)$$

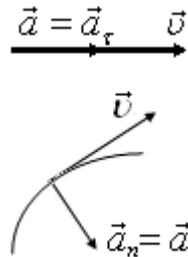


Рис. 1.7

Аналогично для оси y :

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (1.22)$$

Уравнения (1.19–1.22) позволяют найти скорость \vec{v} и координаты x, y частицы в любой момент времени t , если известны ее начальная скорость \vec{v}_0 , начальные координаты x_0, y_0 и ускорение \vec{a} .

Например, пусть тело брошено с высоты h со скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис.1.8). В данном случае ускорение тела равно ускорению свободного падения: $\vec{a} = \vec{g}$ и направлено вертикально вниз ($g=9,81\text{м/с}^2$). Из рисунка 1.7 видно, что $x_0=0$; $y_0=h$; $a_x=0$; $a_y=-g$,

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha .$$

Поэтому формулы (1.19–1.22) принимают вид:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad , \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt ;$$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t ; \quad y = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

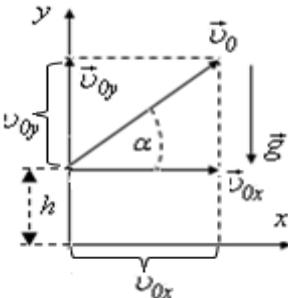


Рис. 1.8

1.4 Вращательное движение. Угловая скорость. Угловое ускорение.

Период, частота. Связь между линейными и угловыми величинами
Вращательное движение – это движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. При таком движении все точки тела за одно и то же время поворачиваются на одинаковый угол. Поэтому в случае вращательного движения изменение положения тела и каждой его точки характеризуют углом поворота $\Delta\varphi$ (в радианах). Угол поворота удобно представить в виде вектора $\Delta\vec{\varphi}$ (рис.1.9): вектор $\Delta\vec{\varphi}$ численно равен углу поворота $\Delta\varphi$ и направлен вдоль оси вращения согласно правилу правого винта. При вращении правого винта (буравчика) направление поступательного перемещения буравчика совпадает направлением вектора $\Delta\vec{\varphi}$.



Рис. 1.9

Быстроту вращения тела характеризуют **угловой скоростью** $\vec{\omega}$, которая равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} ; \omega = \frac{d\varphi}{dt}}. \quad (1.25)$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (т.е. $\Delta\vec{\varphi}$ при $\Delta t \rightarrow 0$) (формула (1.25) и рис. 1.9). Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным.

$$\text{При равномерном вращении угловая скорость } \omega = \frac{\varphi}{t}, \quad (1.26)$$

где φ - угол поворота за время t .

Равномерное вращательное движение характеризуют периодом и частотой вращения. **Период вращения T** - это время, за которое тело совершает один оборот:

$$\boxed{T = \frac{t}{N}}, \quad (1.27)$$

где N - число оборотов за время t . **Частота вращения n** равна числу оборотов за единицу времени:

$$\boxed{n = \frac{N}{t}}. \quad (1.28)$$

Из (1.27) и (1.28) вытекает **связь частоты и периода**: $\boxed{n = \frac{1}{T}}$. (1.29)

За время $t=T$ тело совершает один оборот, поворачиваясь при этом на угол 360° , которому в радианах соответствует угол $\varphi = 2\pi$ рад. С учетом этого из (1.26) и (1.29) следует **связь между угловой скоростью, периодом и частотой вращения**:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n} \quad (1.30)$$

Следует отметить, что понятия периода T и частоты n можно использовать и для неравномерного вращательного движения, принимая за эти величины те значения, которые имела бы точка, вращаясь равномерно с данным значением мгновенной угловой скорости ω . Из (1.25), (1.27) и (1.28) следуют единицы измерения угловой скорости, периода и частоты вращения соответственно: $[\omega]=\text{рад/с}$, $[T]=\text{с}$, $[n]=1/\text{с}=\text{с}^{-1}$.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ может изменяться как из-за изменения быстроты вращения вокруг оси (при изменении величины угловой скорости), так и вследствие поворота оси вращения (т.е. изменяется направление вектора $\vec{\omega}$). Пусть за время Δt вектор $\vec{\omega}$ изменился на $\Delta\vec{\omega}$. Быстроту изменения угловой скорости характеризует **угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$** , которое равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\vec{\varepsilon} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} \quad (1.31)$$

Если ось вращения не меняет своего направления, то изменение угловой скорости $\vec{\omega}$ обусловлено только изменением ее величины ω . Следовательно, при вращении вокруг неподвижной оси из (1.31) получим, что модуль ε углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (1.32)$$

В этом случае, при увеличении величины ω вектор $\Delta \vec{\omega}$ совпадает с вектором $\vec{\omega}$ (рис 1.10), при уменьшении – противоположен (рис. 1.11). Из сказанного и выражения (1.31) следует, что угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ направлено так же, как угловая скорость $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении, и противоположно направлению $\vec{\omega}$ при замедленном. Из (1.32) получим единицу измерения углового ускорения: $[\varepsilon] = \text{рад} / \text{с}^2$.

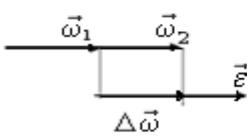


Рис. 1.10

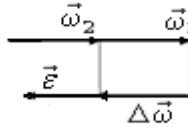


Рис. 1.11

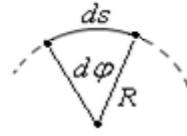


Рис. 1.12

Найдем связь линейных характеристик движения (v , a , a_n , a_τ) с угловыми (ω , ε). Из рис. 1.12 видно, что при повороте тела на угол $d\varphi$ точка тела, находящаяся на расстоянии R от оси вращения, проходит по дуге окружности путь $dS = d\varphi \cdot R$. Разделим это выражение на dt :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R.$$

Откуда с учетом формул (1.9) и (1.25) запишем **связь линейной v и угловой ω скоростей**:

$$v = \omega R. \quad (1.33)$$

Подставим (1.33) в (1.16): $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$. Сократив это выражение на R ,

получим **связь нормального ускорения a_n с угловой скоростью ω**

$$a_n = \omega^2 R, \quad (1.34)$$

Возьмем производную от выражения (1.33) с учетом того, что радиус постоянный ($R = \text{const}$) и его можно вынести за знак производной:

$$\frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Отсюда, используя формулы (1.17) и (1.31), находим **связь тангенциального a_τ и углового ε ускорений**:
$$\boxed{a_\tau = \varepsilon \cdot R}. \quad (1.35)$$

Подставив (1.34) и (1.35) в (1.18), выразим **полное ускорение a через угловые величины ω и ε** : $a = \sqrt{(\omega^2 \cdot R)^2 + (\varepsilon \cdot R)^2}$ или $\boxed{a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$.

Чтобы получить **уравнения угла поворота и угловой скорости в общем виде**, выразим $d\varphi$ и $d\omega$ из (1.25) и (1.31) соответственно и проинтегрируем эти выражения: $d\varphi = \omega \cdot dt$ и $d\omega = \varepsilon \cdot dt \Rightarrow$

$$\boxed{\varphi = \int \omega \cdot dt}, \quad \boxed{\omega = \int \varepsilon \cdot dt}.$$

Пример: равноускоренное вращательное движение ($\varepsilon = \text{const}$).

Из (1.31): $d\omega = \varepsilon \cdot dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \varepsilon t$.

Откуда **уравнение угловой скорости для равноускоренного вращения**:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon t}, \quad (1.36)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, ω – угловая скорость в момент времени t . Выразим из (1.25) $d\varphi$ и проинтегрируем с учетом (1.36):

$$d\varphi = \omega \cdot dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot t) dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \quad \text{или} \quad \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}}. \quad (1.37)$$

Выражение (1.37) представляет собой **уравнение угла поворота φ для равноускоренного вращения**.

2 ДИНАМИКА

2.1 Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Сила. Масса. Второй закон Ньютона. Импульс. Третий закон Ньютона. Понятие состояния

Первый закон Ньютона: *если на тело не действуют другие тела, то тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.* Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются **инерциальными**. Любая система отсчета, которая движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, будет также инерциальной. Следовательно, инерциальных систем отсчета существует бесконечное множество. Законы Ньютона выполняются только

в инерциальных системах отсчета. Земля перемещается по криволинейной траектории относительно Солнца и вращается вокруг своей оси, т.е. движется с ускорением. Поэтому система отсчета, связанная с Землей не является инерциальной. Однако ускорение Земли настолько мало, что в большинстве случаев такую систему отсчета можно считать практически инерциальной.

Сила - это векторная величина, характеризующая меру воздействия на данное тело со стороны других тел. Если на тело действует несколько сил (т.е. несколько тел), то действие этих сил можно заменить действием одной силы, которую обычно называют результирующей (равнодействующей, суммарной) силой:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i, \quad (2.1)$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ - силы, действующие на тело, \vec{F} - результирующая сила. Используя понятие силы, для первого закона Ньютона можно записать: если $\vec{F} = 0$, то $\vec{a} = 0$.

При действии на частицу силы ее скорость меняется. Под действием одной и той же силы изменение скорости разных тел различно. Чем меньше изменение скорости, тем больше инертность тела, т.е. меньше реакция на внешнее воздействие. *Количественная мера инертности тела называется массой*. За единицу массы в системе СИ принята масса эталонного тела, которое хранится в Международном бюро мер и весов. Эта единица называется килограмм (кг).

Второй закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение частицы прямо пропорционально результирующей силе, действующей на частицу, и обратно пропорционально массе частицы:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}, \quad (2.2)$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ - результирующая всех сил, действующих на частицу,

m - масса частицы. Из второго закона Ньютона следует, что вектор ускорения направлен в ту же сторону, что и результирующая сила (т.к. в механике всегда $m > 0$). Из (2.2) следует, что

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}, \quad (2.3)$$

а единица измерения силы (ньютон): $[F] = 1\text{Н} = 1\text{кг} \cdot 1\text{м}/\text{с}^2$.

Подставим в (2.3) выражение (1.11) для ускорения:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m d\vec{v}}{dt}.$$

Т.к. в классической механике масса тела величина постоянная ($m=const$), то ее можно внести под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (2.4)$$

Произведение массы тела на его скорость называют **импульсом тела**:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) определяет импульс материальной точки (частицы) или тела, движущегося поступательно (когда все точки тела имеют одинаковую скорость). С учетом (2.5) выражение (2.4) принимает вид:

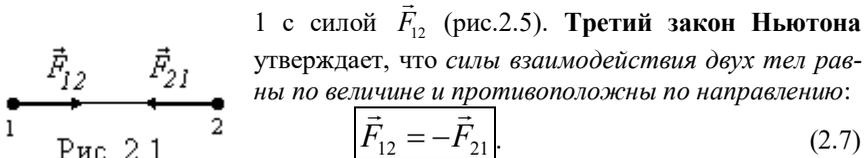
$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}. \quad (2.6)$$

Мы получили другую формулировку **второго закона Ньютона**: *действующая на частицу сила равна первой производной от импульса частицы по времени, или сила равна скорости изменения импульса.*

В частном случае при $\vec{F} = 0$ из (2.2) следует $\vec{a} = 0$, т.е. результат совпадает с первым законом Ньютона. Несмотря на это первый закон формулируют независимо от второго, т.к. в нем постулируется (утверждается) существование инерциальных систем отсчета.

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Если тело 1 действует на тело 2 с силой \vec{F}_{21} , то и тело 2 действует на тело



1 с силой \vec{F}_{12} (рис.2.5). **Третий закон Ньютона** утверждает, что *силы взаимодействия двух тел равны по величине и противоположны по направлению*:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}. \quad (2.7)$$

Третий закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета и при скоростях много меньших скорости света, т.е. в рамках классической механики.

Состояние механической системы характеризуют координатами и скоростями всех частиц этой системы (или величинами, связанными со скоростью - импульсом и т.п.). Состояние системы можно в принципе найти, решив уравнение (2.2) или (2.6). Таким образом, второй закон Ньютона позволяет, зная состояние системы в данный момент времени t_0 и воздействие на систему $\vec{F}(x,t)$, найти состояние системы в любой последующий момент времени t . В этом смысле этот закон является одним из основных в механике.

2.2 Силы в механике

В механике рассматриваются силы различной физической природы.

Гравитационные силы – это *силы притяжения между телами*. Каждое тело создает вокруг себя гравитационное поле, которое действует на другие тела. Гравитационное взаимодействие тел описывается **законом всемирного тяготения**, согласно которому сила F гравитационного притяжения двух частиц прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (рис. 2.2):

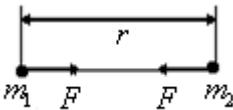


Рис. 2.2

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.8)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы частиц, r – расстояние между частицами. Закон всемирного тяготения (2.8) выполняется и для однородных сферических тел, в этом случае r – расстояние между центрами сфер. Действием сил всемирного тяготения обусловлено движение планет вокруг Солнца, движение Луны и искусственных спутников Земли, движение тел вблизи поверхности Земли. Например, по закону всемирного тяготения (2.8) сила притяжения планеты и ее спутника (рис. 2.3):

$$F = G \frac{mM}{(R + h)^2}, \quad (2.9)$$

где M и m – массы планеты и спутника соответственно, R – радиус планеты, h – высота спутника над поверхностью планеты.

Одним из проявлений силы всемирного тяготения является **сила тяжести** – *сила притяжения тела к Земле вблизи ее поверхности*. Т.к. вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – *ускорением свободного падения*, то согласно второму закону Ньютона (2.3) на тело действует **сила тяжести**

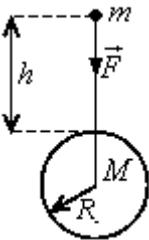


Рис. 2.3

$$\vec{F}_T = m\vec{g}, \quad (2.10)$$

Эта сила направлена вертикально вниз и примерно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле:

$$mg \approx G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow g \approx G \frac{M}{R^2},$$

где m – масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли. Небольшое отличие в силах обусловлено вращением Земли вокруг своей

оси, но в большинстве случаев этим различием можно пренебречь. Из последней формулы видно, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Если тело положить на опору (или подвесить), то вследствие притяжения к Земле оно будет давить на опору или растягивать подвес. **Весом тела** \vec{P} называют силу, с которой тело действует на опору или подвес. Однако согласно третьему закону Ньютона опора или подвес тоже действуют на тело. **Сила реакции** \vec{N} - сила, с которой опора или подвес действуют на тело. С учетом третьего закона Ньютона можно записать, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\boxed{N=P} \text{ или } \boxed{\vec{N} = -\vec{P}}. \quad (2.11)$$

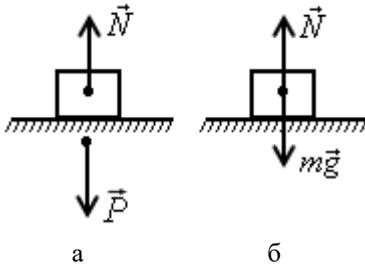


Рис. 2.4

Т.к. вес и сила реакции приложены к разным телам (рис. 2.4а) – вес \vec{P} к опоре, а сила реакции \vec{N} к телу, то они друг друга уравнивать не могут. Тело, лежащее на опоре (рис. 2.4б), находится в равновесии вследствие того, что сила реакции \vec{N} уравнивает силу тяжести $m\vec{g}$. Вес \vec{P} и сила реакции \vec{N} всегда направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения тела и опоры (рис. 2.4 и рис.2.6).

Силы трения возникают при соприкосновении тел. Трение между поверхностями твердых тел называется *сухим*, трение между твердым телом и жидкостью или газом - *вязким*. Различают *трение скольжения* - при относительном перемещении соприкасающихся тел и *трение покоя* - при попытке вызвать такое перемещение.

Пусть на тело, лежащее на опоре (рис. 2.5), действует внешняя сила \vec{F} . Пока сила \vec{F} мала по величине тело будет оставаться неподвижным. Это означает, что сила \vec{F} уравнивается **силой трения покоя** $\vec{F}_{тр\ покая}$, которая равна по величине и противоположна по направлению внешней силе \vec{F} , которой пытаются сдвинуть тело:

$$\boxed{\vec{F}_{тр\ покая} = -\vec{F}}. \quad (2.12)$$

Сила трения покоя может принимать значения от нуля до некоторой максимальной величины \vec{F}_{max} , при которой тело начнет скользить по опоре:

$0 \leq \vec{F}_{\text{тр покоя}} \leq \vec{F}_{\text{тр макс}}$. Максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр макс}}$ равна силе трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

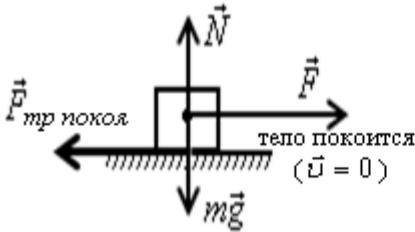


Рис. 2.5

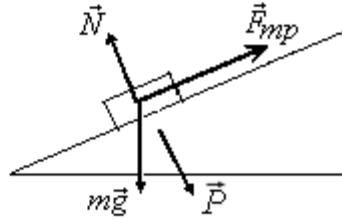


Рис. 2.6

Сила трения скольжения не зависит от площади соприкасающихся тел и приблизительно пропорциональна силе нормального давления N , прижимающей трущиеся поверхности друг другу (рис. 2.6):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.13)$$

где μ - коэффициент трения, зависящий от состояния трущихся поверхностей. Сила трения скольжения направлена противоположно скорости тела вдоль границы соприкосновения тел.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действует сила трения, тормозящая его движение. При небольших скоростях **сила трения** пропорциональна скорости v тела:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -rv, \quad (2.14)$$

где r - коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела, а также от свойств среды, в которой оно движется. Знак минус показывает, что сила направлена противоположно скорости. При больших скоростях движения тела в среде сила трения прямо пропорциональна квадрату скорости тела.

Под действием внешней силы возникает **деформация тела** - изменение его размеров и формы. При упругой деформации после прекращения действия внешней силы тело принимает прежние размеры и форму. При неупругой (пластической) деформации первоначальные размеры и форма

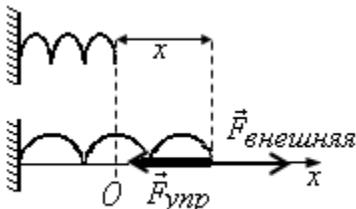


Рис. 2.7

тела не восстанавливаются. Рассмотрим упругую деформацию пружины (рис. 2.7). Под действием внешней силы $\vec{F}_{\text{вн}}$ пружина получает удлинение x , в результате чего в пружине возникает упругая сила $\vec{F}_{\text{упр}}$, уравнивающая силу $\vec{F}_{\text{вн}}$. Со-

гласно **закону Гука** сила упругости $\vec{F}_{упр}$ прямо пропорциональна деформации:

$$\boxed{F_x = -kx}, \quad (2.15)$$

где F_x - проекция силы упругости $\vec{F}_{упр}$ на ось « x », x - величина деформации (удлинение пружины), k – жесткость пружины, зависящая от материала, размера витка и длины пружины. Силами упругости являются силы реакции \vec{N} . По своей физической природе силы упругости являются электромагнитными: при растяжении пружины возникают силы электрического притяжения между атомами, а при сжатии – силы отталкивания, стремящиеся вернуть пружину в недеформированное состояние. Силы трения также имеют электромагнитную природу: они возникают из-за электрического взаимодействия молекул соприкасающихся тел.

2.3 Второй закон Ньютона для системы частиц и твердого тела. Центр масс системы. Импульс системы

Системой называют совокупность нескольких взаимодействующих тел. Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц (рис. 2.8). Силы взаимодействия между телами системы называются **внутренними** (на рис. 2.8 это \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21}); силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящими в данную систему, называются **внешними** (силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2). Запишем второй закон Ньютона (2.6) для первой и второй частиц соответственно:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \quad \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt},$$

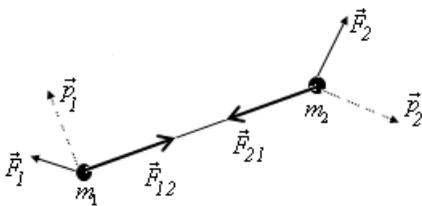


Рис. 2.8

где \vec{p}_1 и \vec{p}_2 - импульсы частиц; \vec{F}_1 и \vec{F}_2 - результирующие внешних сил, действующих на частицы; \vec{F}_{12} - сила, действующая на первую частицу со стороны второй (внутренняя сила), \vec{F}_{21} - сила,

действующая на вторую частицу со стороны первой (внутренняя сила). Сложим эти уравнения:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}. \quad (2.16)$$

Согласно третьему закону Ньютона (2.7) сумма внутренних сил

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Кроме того, сумма производных в правой части выражения (2.16) равна производной от суммы. Поэтому (2.16) принимает вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Аналогичным образом можно доказать, что для системы из N частиц:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad (2.17)$$

где \vec{F}_i - результирующая внешняя сила, действующая на i -ую частицу, \vec{p}_i - импульс i -ой частицы. Введем обозначения в (2.17):

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - \text{сумма внешних сил, действующих на систему;}$$

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \text{импульс системы.}$$

Тогда (2.17) **второй закон Ньютона для системы частиц:**

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}. \quad (2.18)$$

Этот закон утверждает, что *производная от импульса системы по времени равна сумме внешних сил, действующих на систему.*

Центром масс системы частиц называется *точка пространства, положение которой определяется радиус-вектором центра масс:*

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (2.19)$$

Здесь m_i - масса i -ой частицы, \vec{r}_i - радиус-вектор i -ой частицы, $m = \sum_{i=1}^N m_i$

- масса системы. Отметим, что в однородном поле силы тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Возьмём производную по времени от уравнения (2.19):

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \right) \Rightarrow \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \quad (2.20)$$

где $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ - скорость центра масс системы, а $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ - скорость i -ой частицы. С учетом этих соотношений (2.20) принимает форму:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{v}_i. \quad (2.21)$$

Т.к. $m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$ - импульс i -ой частицы, то $\sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{сист}$ - импульс системы. Поэтому выражение (2.21) преобразуется к виду:

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{p}_{сист}}{m}. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что **импульс системы равен произведению массы системы на скорость центра масс:**

$$\vec{p}_{сист} = m\vec{v}_C. \quad (2.23)$$

Подставим (2.23) в (2.18):

$$\vec{F}_{внешн} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{внешн} = m \frac{d\vec{v}_C}{dt}.$$

Т.к. $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_C$ - ускорение центра масс, то получаем, что

$$\vec{F}_{внешн} = m\vec{a}_C. \quad (2.24)$$

Т.е. **второй закон Ньютона для системы частиц** можно сформулировать следующим образом: *сумма внешних сил, приложенных к системе, равна произведению массы системы на ускорение ее центра масс.*

Все полученные выше соотношения справедливы и для твердого тела, т.к. его можно представить состоящим из большого числа частиц. Если тело является абсолютно твёрдым, то взаимное расположение его частиц при движении не изменяется. Следовательно, не меняется положение центра масс частиц тела относительно самого тела. Таким образом, второй закон Ньютона (2.24) описывает движение центра масс твердого тела – центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, действующих на тело. Отметим, что уравнения (2.18), (2.23) и (2.24) справедливы и для системы твердых тел.

2.4 Момент силы и момент импульса относительно точки и оси

Момент силы характеризует способность силы вращать тело относительно

точки или оси. Пусть к твердому телу в точке A приложена сила \vec{F} (само тело на рисунке не показано). Проведем из точки O в точку A радиус-вектор \vec{r} (рис.2.9). **Момент силы \vec{M} относительно точки O равен векторному произведению радиус-вектора \vec{r} на силу \vec{F} :**

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}], \quad (2.25)$$

Модуль момента силы относительно точки O

$$M = rF \sin \alpha, \quad (2.26)$$

где α - угол между векторами \vec{r} и \vec{F} . **Плечом силы ℓ кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы.** Из рис. 2.9 следует, что $\ell = r \sin \alpha$. С учетом этого выражение (2.26) принимает вид:

$$M = F \ell,$$

т.е. **модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на плечо силы.** Направление вектора \vec{M} определяется по правилу векторного произведения векторов: на рис. 2.9 пунктиром показана плоскость, в которой лежат

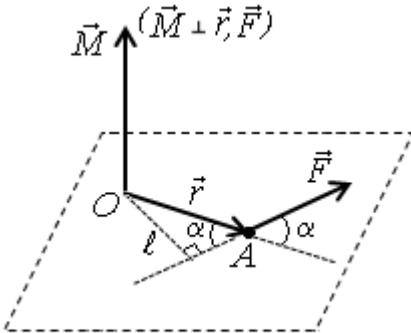


Рис. 2.9

векторы \vec{r} и \vec{F} , вектор \vec{M} перпендикулярен этой плоскости. Вращение тела вокруг оси Z определяет **момент силы M_Z относительно оси**, который равен проекции на ось Z момента силы \vec{M} (2.25) относительно любой точки O , лежащей на оси.

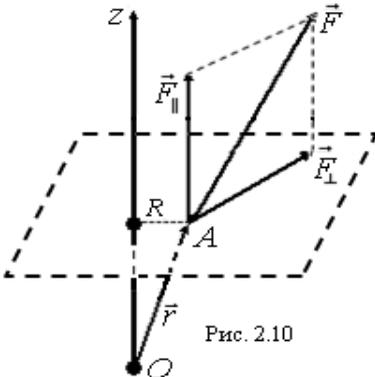


Рис. 2.10

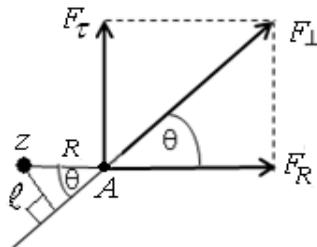


Рис. 2.11

Рассмотрим более подробно вращение твердого тела вокруг неподвижной оси Z (рис.2.10). Пусть сила \vec{F} приложена к точке A тела (само тело на рисунке не показано). Силу \vec{F} можно разложить на две составляющие: \vec{F}_{\parallel} - параллельную оси Z и \vec{F}_{\perp} - перпендикулярную оси Z . Вектор \vec{F}_{\parallel} не может вращать тело, вращательное движение тела будет определяться составляющей \vec{F}_{\perp} . Разложим вектор \vec{F}_{\perp} также на две составляющие (рис. 2.11, ось Z перпендикулярна плоскости рисунка): \vec{F}_R - параллельную радиусу R окружности, по которой движется точка A , и \vec{F}_{τ} - перпендикулярную радиусу и направленную по касательной к той же окружности, где R - радиус вращения точки A - длина перпендикуляра, проведенного от точки A к оси Z . При этом радиальная составляющая \vec{F}_R будет стремиться деформировать тело, а вызвать вращение может только касательная (тангенциальная) составляющая \vec{F}_{τ} . Чем больше R , тем «эффективнее вращательная способность» этой силы. Поэтому **момент силы M_Z относительно оси Z равен произведению касательной составляющей силы \vec{F}_{τ} на радиус вращения R :**

$$\boxed{M_Z = F_{\tau} R} \quad (2.27)$$

Опустим перпендикуляр от оси Z на линию, вдоль которой действует составляющая \vec{F}_{\perp} (рис.2.11). **Плечо силы ℓ относительно оси Z - кратчайшее расстояние от оси Z до линии действия перпендикулярной составляющей силы \vec{F}_{\perp} .** Из рисунка видно, что

$$\ell = R \sin \theta \Rightarrow M_Z = F_{\tau} R = F_{\perp} \cdot \sin \theta \cdot R = F_{\perp} \ell$$

Следовательно, **момент силы относительно оси Z :**

$$\boxed{M_z = F_{\tau} R = F_{\perp} \ell}. \quad (2.28)$$

Момент импульса \vec{L} частицы относительно точки O равен векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , проведенного от точки O к частице, на импульс \vec{p} частицы (рис.2.12):

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]}. \quad (2.29)$$

В соответствии с правилом векторного произведения вектор \vec{L} (рис. 2.12) перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \vec{r} и \vec{p} , а **модуль момента импульса**

$$L = rp \sin \alpha = p\ell, \quad (2.30)$$

где ℓ - плечо импульса – кратчайшее расстояние от точки O до линии, вдоль которой направлен импульс.

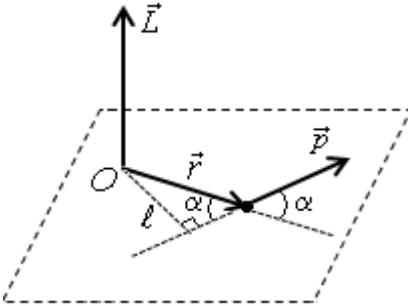


Рис. 2.12

Момент импульса L_z частицы относительно оси Z равен проекции на эту ось момента импульса \vec{L} относительно любой точки, лежащей на оси. Можно показать, что для L_z выполняются соотношения подобные (2.28):

$$L_z = p_\tau R = p_\perp \ell. \quad (2.31)$$

Здесь смысл обозначений в аналогичен тем, что были приняты для момента силы в (2.28).

2.5 Момент импульса и момент инерции твердого тела относительно оси. Теорема Штейнера

Рассмотрим движение частицы (материальной точки) массы m по окружности радиуса R вокруг неподвижной оси Z (рис. 2.13, ось Z перпендикулярна плоскости рисунка). В этом случае скорость \vec{v} и импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ частицы направлены по касательной к траектории. Поэтому касательная составляющая импульса p_τ в формуле (2.31) равна модулю импульса p : $p_\tau = p$. С учетом этого момент импульса частицы относительно оси Z :

$$L_z = p_\tau R = pR = m v R.$$

Так как $v = \omega R$, где ω - угловая скорость, то получаем, что $L_z = mR^2 \omega$ (2.32)

В выражении (2.32) величина

$$I = mR^2 \quad (2.33)$$

называется **моментом инерции материальной точки (частицы) относительно оси вращения**, где R – расстояние от частицы до оси вращения. Из (2.32) и (2.33) следует, что

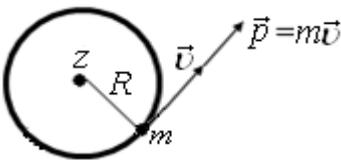


Рис. 2.13

$$L_z = I\omega, \quad (2.34)$$

т.е. момент импульса частицы относи-

тельно оси вращения равен произведению момента инерции частицы на ее угловую скорость.

Твердое тело можно рассматривать как совокупность большого числа частиц. Поэтому момент импульса тела L_z можно найти как сумму моментов импульсов всех частиц этого тела: $L_z = \sum L_{zi}$, (2.35) где с учетом (2.34) и (2.33) момент импульса i -ой частицы тела

$$L_{z,i} = I_i \omega = \Delta m_i R_i^2 \omega.$$

Тогда момент импульса тела (2.35) можно представить в виде:

$$L_z = \sum I_i \omega = \sum \Delta m_i R_i^2 \omega, \quad (2.36)$$

где Δm_i и R_i - соответственно масса и радиус вращения i -ой частицы тела. Так как угловая скорость ω всех точек твердого тела одинакова, то индекс « i » у ω в уравнении (2.36) не пишется. По той же причине в (2.36) можно вынести ω за знак суммы:

$$L_z = \omega \cdot \sum I_i = \omega \cdot \sum \Delta m_i R_i^2. \quad (2.37)$$

В выражении (2.37) сумма моментов инерции I_i всех частиц тела называется **моментом инерции тела относительно оси вращения**:

$$I = \sum I_i = \sum \Delta m_i R_i^2. \quad (2.38)$$

Тогда из (2.37) и с учетом (2.38) получим:

$$L_z = I \omega. \quad (2.39)$$

Таким образом, **момент импульса тела относительно оси равен произведению момента инерции тела на его угловую скорость**.

Для вычисления момента инерции тела его мысленно разбивают на частицы бесконечно малой массы dm (рис. 2.14). Согласно (2.33) момент инерции такой частицы $dI = dm \cdot R^2$. (2.40)

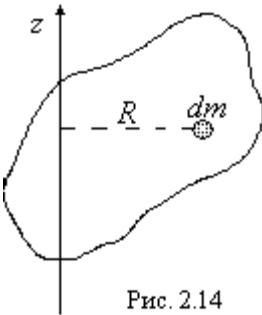


Рис. 2.14

Тогда для нахождения момент инерции всего тела нужно просуммировать выражения (2.40) для всех частиц, что математически сводится к интегрированию. Поэтому **момент инерции тела относительно оси**

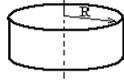
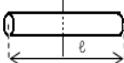
$$I = \int R^2 \cdot dm. \quad (2.41)$$

В таблице 2.1 приведены моменты инерции I_C некоторых однородных тел простой геометрической формы относительно осей, проходящих через их центры масс. Наиболее просто с помощью (2.41) получается формула для момента инерции кольца (см. рисунок в табл. 2.1). Т.к. все элементы кольца находятся на одинаковом расстоянии

R от оси, то можно вынести R за знак интеграла:

$$I = \int R^2 \cdot dm = R^2 \int dm = R^2 \cdot m .$$

Таблица 2.1

Тело	Размеры тела	Момент инерции I_c
кольцо, обруч		$I_c = mR^2$
диск, цилиндр, стержень		$I_c = mR^2/2$
тонкий стержень		$I_c = m\ell^2/12$
прямоугольная пластина		$I_c = m(a^2 + b^2)/12$

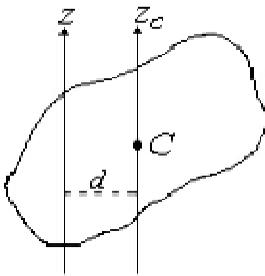


Рис. 2.15

Из (2.38) следует, что момент инерции I тела зависит от положения оси вращения относительно тела: для различных осей расстояние R_i от i -ой частицы тела до этих осей будет разным. Из изложенного следует, что момент инерции тела надо каждый раз рассчитывать для той оси, относительно которой тело вращается. Согласно **теореме Штейнера** момент инерции I тела относительно оси вращения Z :

$$\boxed{I = I_C + md^2}, \quad (2.42)$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси Z_C , проходящий через центр масс и параллельной оси вращения Z , m – масса тела, d – расстояние между осями (рис. 2.15).

Выражение (2.38) означает, что момент инерции I является величиной **аддитивной**: момент инерции тела равен сумме моментов частиц, из которых состоит это тело. Масса тела так же величина аддитивная: $m = \sum m_i$ – масса тела равна сумме масс частиц, составляющих это тело.

2.6 Закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Уравнение моментов

Пусть частица массы m движется по окружности вокруг оси Z под действием силы \vec{F} , касательная составляющая которой \vec{F}_τ сообщает частице

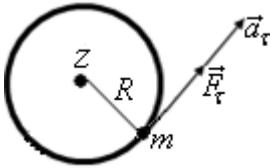


Рис. 2.16

тангенциальное ускорение a_τ (рис. 2.16). Запишем второй закон Ньютона в проекциях на направление касательной: $F_\tau = ma_\tau$. Т.к. в соответствии с (1.35) $a_\tau = \varepsilon R$, то

$$F_\tau R = mR^2 \varepsilon. \quad (2.43)$$

Умножим обе части уравнения (2.43) на R :

$$F_\tau R^2 = mR^2 \varepsilon.$$

Откуда, учитывая (2.27) и (2.33), получим, что для частицы

$$M_Z = I \varepsilon. \quad (2.44)$$

Рассмотрим твердое тело как систему, состоящую из множества частиц. Запишем уравнение (2.44) для каждой из них:

$$M_{Z,i} = I_i \varepsilon, \quad (2.45)$$

где i - номер частицы, $M_{Z,i}$ - сумма моментов сил, действующих на i -ую частицу, I_i - момент инерции i -ой частицы. Угловое ускорение ε для всех частиц тела одинаково и равно угловому ускорению твердого тела. Поэтому индекс « i » у ε в уравнении (2.45) не пишется. Просуммируем левые и правые части уравнений (2.45) для всех частиц тела:

$$\sum M_{Z,i} = \sum I_i \varepsilon = \varepsilon \sum I_i. \quad (2.46)$$

При суммировании моментов сил следует учесть, что на каждую частицу действуют внутренние и внешние силы (см. п. 2.3). Но вследствие третьего закона Ньютона сумма всех внутренних сил будет равна нулю, и в левой части уравнения (2.46) останется только сумма моментов внешних сил:

$$M_{\text{звнешн}} = \sum M_{Z,i} = \sum M_{\text{звнешн}} + \sum M_{\text{звнутр}} = \sum M_{\text{звнешн}}. \quad (2.47)$$

В правой части (2.46) $I = \sum I_i$ - момент инерции тела. С учетом введенных обозначений из (2.46) получаем **закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси**:

$$\boxed{M_{\text{звнешн}} = I \varepsilon}. \quad (2.48)$$

Этот закон утверждает, что *сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно оси, равна произведению момента инерции тела на его угловое ускорение*.

Из закона динамики вращательного движения (2.48) следует, что чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно получит под действием данного момента силы. Поэтому физический смысл момента инерции состоит в том, что он является мерой инертности тела при вращательном движении.

Подставим в уравнение (2.48) угловое ускорение (1.31):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow M_{\text{внешн}} = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega).$$

Откуда с учетом формулы (2.39) $L_z = I\omega$ получим **уравнение моментов для твердого тела относительно неподвижной оси**:

$$M_{\text{внешн}} = \frac{dL_z}{dt}. \quad (2.49)$$

Выражение (2.49) утверждает, что *сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно оси, равна производной по времени от момента импульса тела относительно той же оси*. Свое название уравнение моментов получило в связи с тем, что оно выражает связь между моментом силы и моментом импульса.

Для частицы **уравнение моментов** относительно оси и точки (в векторном виде) записывается аналогично:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (2.50)$$

где $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ - векторная сумма моментов всех сил, действующих на частицу (для одной частицы деление сил на внутренние и внешние лишено смысла).

Основные величины и законы кинематики и динамики приведены в таблице 2.2. Откуда видно, что имеет место аналогия между законами поступательного и вращательного движения

Таблица 2.2

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Поступательное движение		Вращательное движение	
величина, закон	формула	величина, закон	формула
изменение положения точки	$\Delta \vec{r} ; \Delta S$	изменение положения точки	$\Delta \vec{\varphi} ; \Delta \varphi$
скорость поступательного движения	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = \frac{dS}{dt}$	скорость вращательного движения	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \omega = \frac{d\varphi}{dt}$
ускорение при поступательном движении	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	ускорение при вращательном движении	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
масса	m	момент инерции	I
сила	\vec{F}	момент силы	$M_z = F_\tau R = F_\perp \ell$

импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	момент импульса	$L_z = I\omega$
второй закон Ньютона	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	закон динамики вращательного движения, уравнение моментов	$M_z = I\varepsilon$ $M_z = \frac{dL_z}{dt}$
* работа	$dA = \vec{F}d\vec{S}$	работа	$dA = M_z d\varphi$
* кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	кинетическая энергия	$\frac{I\omega^2}{2}$

3 РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ

3.1 Работа. Мощность

Пусть к частице массой m приложена сила \vec{F} (рис. 3.1), и частица за время dt совершила перемещение $d\vec{\ell}$ (в п. 1.2 перемещение обозначалось $d\vec{r}$). Работа, совершаемая силой F при бесконечно малом (элементарном) перемещении $d\vec{\ell}$ частицы, называется **элементарной работой**:

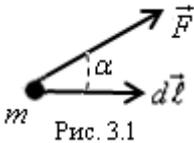


Рис. 3.1

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.1)$$

т.е. **элементарная работа равна скалярному произведению силы на перемещение**.

Из свойств скалярного произведения следует, что формулу (3.1) можно представить в виде:

$$dA = Fd\ell \cos \alpha = F_\ell d\ell, \quad (3.2)$$

где $F_\ell = F \cos \alpha$ - проекция силы \vec{F} на направление перемещения $d\vec{\ell}$, α - угол между векторами \vec{F} и $d\vec{\ell}$. (Обратите внимание: т.к. $d\vec{\ell}$ очень мало, то можно считать, что при перемещении $d\vec{\ell}$ сила $\vec{F} = const$). Из (3.2) следует, что единица измерения работы $[A] = \text{Нм} = \text{Дж}$ (джоуль).

Для того чтобы найти работу на всем пути, надо весь путь разделить на малые участки, найти работу на каждом из них, а затем результат просуммировать. Таким образом, для того, чтобы найти работу на всем пути, необходимо проинтегрировать уравнение (3.1) или (3.2):

$$\dot{A} = \int_{\ell} dA = \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = \int_{\ell} F d\ell \cos \alpha = \int_{\ell} F_{\ell} d\ell. \quad (3.3)$$

Индекс « ℓ » в (3.3) означает, что интегрирование проводится вдоль траектории, обозначенной « ℓ ». (Обратите внимание: $\int_{\ell} dA \neq A_2 - A_1$, т.к. работа в точке 2 и точке 1 смысла не имеет). Таким образом, **работа на всем пути**

$$A = \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = \int_{\ell} F d\ell \cos \alpha = \int_{\ell} F_{\ell} d\ell \quad (3.4)$$

Сила F в уравнении (3.4) может быть как одна из действующих на тело сил (тогда A - работа этой силы), так и результирующая нескольких сил (тогда A - работа результирующей силы).

Пример: работа постоянной силы, частица движется прямолинейно: $\vec{F} = \text{const}$, $\alpha = \text{const} \Rightarrow$

$$A = \int_{\ell} F \cos \alpha d\ell = F \cos \alpha \int_{\ell} d\ell = F \ell \cos \alpha.$$

Мощность P - это работа совершаемая в единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (3.5)$$

Единица измерения мощности $[P] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$ (ватт).

Подставим в (3.5) выражение (3.1):

$$P = \frac{\vec{F} d\vec{\ell}}{dt}.$$

Т.к. $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v}$ - скорость точки, то получаем **связь мощности и силы**:

$$P = \vec{F} \vec{v}. \quad (3.6)$$

Т.о., **мощность равна скалярному произведению силы на скорость.**

3.2. Кинетическая энергия. Связь работы и кинетической энергии

Рассмотрим частицу массы m , которая движется под действием нескольких сил, результирующая которых равна \vec{F} . В начальном положении 1 частица имела скорость v_1 , а в конечном 2 - скорость v_2 (рис. 3.2). Работу A , которая совершается при таком движении можно найти из соотношения (3.4):

$$A = \int_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell}. \quad (3.7)$$

Результирующую силу \vec{F} выразим через ускорение \vec{a} из второго закона

Ньютона (2.3) $\vec{F} = m\vec{a}$ и подставим в (3.7):

$$A = \int_{\ell} m\vec{a}d\vec{\ell}. \quad (3.8)$$

Так как \vec{F} - это результирующая всех действующих сил, то выражение (3.8) позволяет найти работу результирующей всех сил, действующих на частицу.

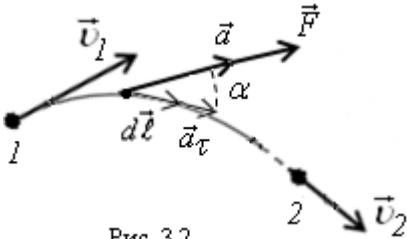


Рис. 3.2

На рис. 3.2 показана результирующая сила \vec{F} и направление ускорения \vec{a} для перемещения $d\vec{\ell}$, угол между вектором перемещения $d\vec{\ell}$ и ускорением \vec{a} равен α .

По определению скалярного произведения

$$\vec{a}d\vec{\ell} = a \cdot d\ell \cdot \cos \alpha$$

Из рис. 3.2 видно, что $a \cdot \cos \alpha = a_{\tau}$, где a_{τ} - тангенциальная составляющая ускорения. Следовательно, из (3.8) получаем:

$$A = \int_{\ell} m\vec{a}d\vec{\ell} = \int_{\ell} m \cdot a \cdot d\ell \cdot \cos \alpha = \int_{\ell} ma_{\tau}d\ell. \quad (3.9)$$

Т.к. согласно (1.17) тангенциальное ускорение $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$,

где v - модуль скорости частицы, то выражение (3.9) принимает вид:

$$A = \int_{\ell} m \frac{dv}{dt} d\ell = \int_{\ell} m \frac{d\ell}{dt} dv.$$

С учетом того, что в последнем соотношении модуль скорости $v = \frac{d\ell}{dt}$,

оно принимает вид:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m v dv.$$

Здесь масса m - постоянная величина, ее можно вынести за знак интеграла:

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v dv. \quad (3.10)$$

Интеграл в правой части равенства (3.10) $\int v dv = \frac{v^2}{2}$.

Поэтому соотношение (3.10) принимает вид:

$$A = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2}.$$

Откуда, подставляя пределы интегрирования, получим:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.11)$$

Здесь величина

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.12)$$

называется **кинетической энергией частицы**.

Из (3.11 и 3.12) следует, **связь между работой и кинетической энергией**:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k, \quad (3.13)$$

или

$$dA = dE_k. \quad (3.13a)$$

Таким образом, **работа результирующей всех сил, действующих на частицу, равна приращению (изменению) кинетической энергии частицы.**

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех частиц, составляющих это тело. При поступательном движении все частицы тела имеют одинаковую скорость v . Поэтому кинетическая энергия тела при поступательном движении:

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i = \frac{v^2}{2} \cdot m,$$

где $m = \sum m_i$ - масса тела, равная сумме масс всех частиц этого тела (i - номер частицы, m_i - масса i -ой частицы). Т.о. **кинетическая энергия поступательно движущегося тела** также определяется выражением (3.12). Т.к. кинетическая энергия зависит от скорости тела, следовательно, этой энергией обладают только движущиеся тела.

3.3 Кинетическая энергия и работа при вращательном движении твердого тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Представим тело, состоящим из большого числа частиц. Тогда частица массы m_i , имеющая скорость v_i (i - номер частицы), будет обладать кинетической энергией

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Выразим v_i - скорость i -ой частицы через ее угловую скорость ω , используя равенство (1.33):

$$v_i = R_i \omega,$$

где R_i – радиус вращения частицы (угловая скорость ω вращения тела одинакова для всех точек тела). Учитывая это соотношение, кинетическую энергию частицы можно представить в виде:

$$E_{k,i} = \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

Величина $m_i R_i^2$ есть момент инерции i -ой частицы тела (2.33):

$$I_{z,i} = m_i R_i^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия i -ой частицы вращающегося тела

$$E_{k,i} = \frac{I_{z,i} \omega^2}{2}. \quad (3.14)$$

Кинетическую энергию всего тела найдем как сумму кинетических энергий всех частиц тела:

$$E_k = \sum E_{k,i} = \sum \frac{I_{z,i} \omega^2}{2} \Rightarrow E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum I_{z,i}. \quad (3.15)$$

В уравнении (3.15) сумма моментов инерции материальных точек тела есть момент инерции твердого тела (формула (2.38)):

$$I_z = \sum I_{z,i} = \sum m_i R_i^2. \quad (3.16)$$

Таким образом, из (3.15) с учетом (3.16) получим, что **кинетическая энергия вращающегося тела**

$$E_k = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (3.17)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела.

В разделе 3.2 было показано, что элементарная работа всех сил (уравнение (3.13а)) $dA = dE_e$. Следовательно, для вращательного движения с учетом (3.17) можно записать, что

$$dA = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right). \quad (3.18)$$

Проинтегрировав (3.18), приходим к выражению:

$$A = \frac{I_z \omega_2^2}{2} - \frac{I_z \omega_1^2}{2}, \quad (3.19)$$

где ω_1 – начальная угловая скорость, ω_2 – конечная угловая скорость тела. Соотношение (3.19) означает, что *при вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси работа результирующей всех сил равна приращению кинетической энергии вращающегося тела.*

Преобразуем соотношение (3.18), учитывая, что для твердого тела, у которого ось вращения не меняет своего направления в пространстве, момент инерции постоянен ($I_z = \text{const}$) и его можно вынести за знак дифференциала:

$$\text{Так как} \quad dA = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right) = I_z d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) \Rightarrow dA = I_z \omega d\omega \quad \omega = d\varphi/dt$$

(см. 1.25), где φ - угол поворота тела, то

$$dA = I_z \frac{d\varphi}{dt} d\omega \Rightarrow dA = I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi. \quad (3.20)$$

Производная от угловой скорости по времени есть угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Таким образом, из (3.20) следует, что $dA = I_z \varepsilon d\varphi$.

Множитель перед $d\varphi$ есть момент сил, действующих на тело (см. (2.48)):

$$M_z = I_z \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\boxed{dA = M_z d\varphi}. \quad (3.21)$$

Т.о., **элементарная работа при вращательном движении равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота.**

Работа при повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ находится интегрированием уравнения (3.21):

$$\boxed{A = \int_0^{\Delta\varphi} M_z d\varphi}. \quad (3.22)$$

Мощность при вращательном движении $P = dA/dt$ найдем, используя (3.21):

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\boxed{P = M_z \omega}.$$

Т.е., **мощность при вращательном движении тела равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость тела.**

Если тело движется поступательно и одновременно вращается вокруг оси, не меняющей своего направления в пространстве, то кинетическая энергия тела равна:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (3.23)$$

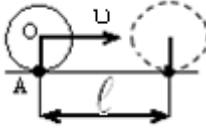


Рис. 3.3

При этом работа всех сил находится из уравнения (3.13), где кинетическая энергия определяется соотношением (3.23).

Пример: колесо катится со скоростью v (рис. 3.3). В этом случае колесо еще и вращается относительно оси, проходящей через центр тяжести колеса (точка “O”), поэтому согласно (3.23):

$$E_e = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Найдем связь ω и v . Центр колеса проходит путь $\ell = 2\pi R$, равный длине окружности колеса, за время $t = \ell/v$. За то же время t каждая точка колеса (например, точка “A”) совершает полный оборот, т.е. поворачивается относительно оси вращения на угол $\varphi = 2\pi$. Найдем угловую скорость ω колеса, используя (1.26):

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{\ell} v = \frac{2\pi}{2\pi R} v = \frac{v}{R}.$$

Подставим полученное выражение $\omega = v/R$ в кинетическую энергию:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z}{2} \left(\frac{v}{R} \right)^2.$$

Момент инерции колеса (обруча) относительно оси, проходящей через его центр (точку “O”) и перпендикулярной плоскости колеса, $I_z = mR^2$ (см. табл. 2.1). Учитывая это, получим:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 v^2}{2R^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow E_k = mv^2.$$

3.4 Поле сил. Консервативные силы. Потенциальная энергия и работа консервативной силы. Потенциальная энергия в поле сил тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации

Если на частицу в каждой точке пространства действуют силы, то частица находится в *поле сил*. Например, вблизи поверхности Земли ча-

стица находится в поле силы тяжести, т.к. в каждой точке на нее действует сила тяжести $m\vec{g}$.

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит от начального и конечного положения тела (рис. 3.4а): $A_{\ell_1} = A_{\ell_2} = A_{\ell_3} = \dots = A$,

т.е. для любой траектории работа консервативной силы при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 одинакова.

На рис. 3.4б показана замкнутая траектория. В точку 1 можно вернуться, пройдя всю замкнутую траекторию ℓ , а можно оставаться на месте этой точке.. Во втором случае $A = 0$ (т.к. перемещение равно 0). Поскольку для консервативной силы, работа не зависит от формы пути, то и работа на замкнутом пути ℓ тоже равна 0. Таким образом, *работа консервативной силы по замкнутой траектории равна 0*: $A_o = 0$. Работа силы (3.4) при перемещении частицы по любой траектории ℓ

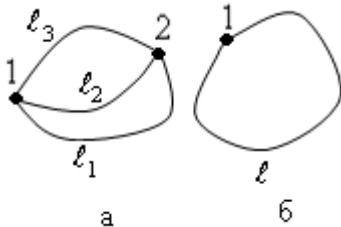


Рис. 3.4

$$A = \int_{\ell} F_{\ell} d\ell,$$

где F_{ℓ} - проекция силы \vec{F} на перемещение $d\vec{\ell}$. Если надо в (3.4) указать, что траектория замкнутая, то интеграл записывается так: $\oint_{\ell} F_{\ell} d\ell$.

Такой интеграл называется *циркуляцией*. Т.к. работа по замкнутой траектории равна нулю ($A_o = 0$), то из (3.4а) получим, что **циркуляция вектора консервативной силы по произвольной замкнутой траектории равна нулю**.

$$\oint_{\ell} F_{\ell} d\ell = 0.$$

Силовое поле, силы которого консервативны, называется *потенциальным*. Поскольку работа в таком поле не зависит формы траектории, она должна зависеть от состояния системы в начальном и конечном положении. *Физическая величина, зависящая от положения системы в поле консервативных сил и определяющая работу этих сил, называется потенциальной энергией (E_p)*. В этом случае работа

$$A = E_{n1} - E_{n2} = -\Delta E_n \quad \text{или} \quad dA = -dE_n. \quad (3.24)$$

где E_{n1} и E_{n2} - потенциальная энергия соответственно в начальном и конечном положениях. Выражение (3.24) означает, что **работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии**.

Покажем, что сила тяжести является консервативной. Для этого надо показать, что работа этой силы не зависит от формы траектории при переходе из одной точки в другую. Для этого рассмотрим движение частицы из точки 1 в точку 2 (рис. 3.5) по некоторой произвольной траектории. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что элементарная работа силы тяжести при малом перемещении $d\vec{l}$:

$$dA = m\vec{g}d\vec{l} = mgd\ell \cos \alpha .$$

Из рис.3.5 видно, что $d\ell \cos \alpha = y' - y'' = -(y'' - y')$.

Приращение координаты $dy = y'' - y' \Rightarrow d\ell \cos \alpha = -dy$.

Поэтому выражение для работы принимает вид:

$$dA = -mgdy; \quad A = -\int_{h_1}^{h_2} mgdy = -mgy \Big|_{h_1}^{h_2} = mgh_1 - mgh_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A = mgh_1 - mgh_2}. \quad (3.25)$$

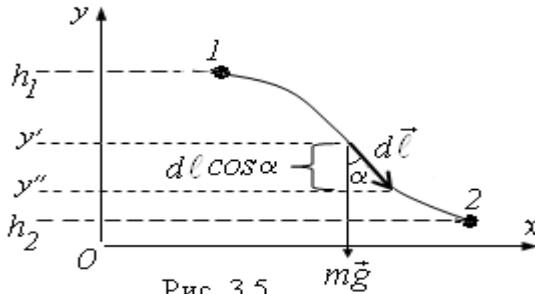


Рис. 3.5

Т.к., в уравнение (3.25) входят только величины h_1 и h_2 , определяющие начальное и конечное положение частицы, то **работа силы тяжести не зависит от формы траектории**. Следовательно, **сила тяжести является консервативной**. (Из выше изложенного видно, что для любой другой траектории, начинающейся в точке 1 и заканчивающейся в точке 2 - результат не изменился бы). Сравнивая (3.25) и (3.24), находим, что **потенциальная энергия в поле силы тяжести**

$$\boxed{E_n = mgh}, \quad (3.26)$$

где h - расстояние от нулевого уровня отсчета высоты до частицы или центра тяжести тела. Нулевой уровень может быть выбран произвольно, но для всех тел системы один и тот же. Возможность произвольного выбора нулевого уровня отсчета высоты означает, что к потенциальной энергии тел можно добавить произвольную постоянную - это соответствует изме-

нению нулевого уровня отсчета высоты. Другими словами потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной. Это, однако, не существенно, так как в физические соотношения входит или разность потенциальных энергий в двух точках, или производная от потенциальной энергии по координатам (см. раздел 3.5). Отметим, что консервативной является и сила гравитационного взаимодействия (2.8).

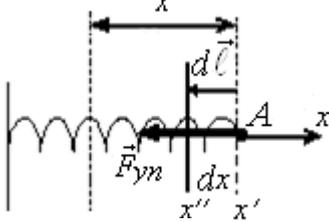


Рис. 3.6

Консервативной является также и сила упругости. Найдем работу этой силы на примере деформации пружины. Пусть растянутая пружина под действием силы упругости \vec{F}_{yn} совершила малое перемещение $d\vec{l}$ (рис. 3.6). При этом в точке A на пружину действует сила упругости, модуль которой $F_{yn} = kx$.

Т.к. $d\vec{l} \rightarrow 0$, то можно считать, что сила F_{yn} не изменилась на перемещении $d\vec{l}$. Элементарная работа силы упругости:

$$dA = \vec{F}_{yn} d\vec{l} = F_{yn} dl \cos 0.$$

Из рис. 3.6 видно, что модуль перемещения $dl = x' - x'' = -(x'' - x')$.

Так как приращение координаты $dx = x'' - x' \Rightarrow dl = -dx$, то выражение для работы принимает вид:

$$dA = -kx dx \quad : \quad A = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

$$\boxed{A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}}. \quad (3.27)$$

Сравнивая (3.27) с (3.24) находим, что **потенциальная энергия при упругой деформации**

$$\boxed{E_n = \frac{kx^2}{2}}. \quad (3.28)$$

Из (3.27) следует, что *работа силы упругости зависит только от начального и конечного положения*. Следовательно, **сила упругости является консервативной**.

3.5 Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

Найдем связь между консервативной силой и потенциальной энергией. Пусть на частицу, движущуюся вдоль оси x , действует консерватив-

ная сила \vec{F} (рис. 3.7). При перемещении $d\vec{\ell}$ координата частицы получает приращение $dx = |d\vec{\ell}|$, а консервативная сила \vec{F} совершает работу

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F dx \cos \alpha = F_x dx,$$

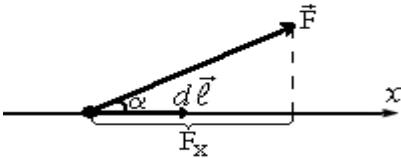


Рис. 3.7

где $F_x = F \cos \alpha$ - проекция силы на ось x , α - угол между силой \vec{F} и осью x . Эту же работа равна убыли потенциальной энергии (см. 3.24):

$$dA = -dE_n.$$

Приравняем правые части обоих выражений для работы: $F_x dx = -dE_n \Rightarrow$

$$F_x = -\frac{d E_n}{d x}. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.29) показывает, что рассмотренном случае проекция F_x консервативной силы на ось x равна взятой с обратным знаком производной от потенциальной энергии E_i по координате x .

В общем случае сила может быть направлена к осям координат произвольно. Тогда аналогичные (3.29) соотношения, будут выполняться для проекций на все три оси x, y, z . Поэтому в общем случае:

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}}; \quad \boxed{F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}}; \quad \boxed{F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}}. \quad (3.30)$$

Здесь вместо $\frac{d E_n}{d x}$ написано $\frac{\partial E_n}{\partial x}$, т.к. производная по x вычисляется,

считая y и z постоянными. Такая производная называется частной. Выражения (3.30) означают, что, например, проекция F_x консервативной силы на ось x равна взятой с обратным знаком частной производной от потенциальной энергии E_i по координате x . Выразим вектор силы \vec{F} через его проекции:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - единичные векторы (орты) осей x, y, z соответственно.

Подставим (3.32) в последнее равенство:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.31)$$

Из математики известно, что градиент скалярной функции $f(x, y, z)$ есть векторная величина

$$\mathit{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Оператор градиент берет частные производные от функции и умножает их на орты осей. Вектор $\mathit{grad} f$ направлен в сторону наибольшего возрастания функции f . Таким образом, формулу (3.31) можно записать в виде:

$$\vec{F} = -\mathit{grad} E_n. \quad (3.32)$$

Соотношение (3.34) выражает **связь консервативной силы и потенциальной энергии**: *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком*. Фактически уравнение (3.32) есть сокращенная запись уравнения (3.31). Знак «-» в (3.32) показывает, что консервативная сила направлена в сторону наибольшего убывания потенциальной энергии. Например, в поле сил тяжести потенциальная энергия убывает с уменьшением высоты, в этом же направлении (т.е. «вниз») направлен вектор силы тяжести.

Соотношение (3.32) позволяет найти силу \vec{F} , действующую на частицу в каждой точке поля, если известно выражение $E_i(x, y, z)$ для потенциальной энергии. Покажем это на примере поля силы тяжести. Потенциальная энергия частицы в поле сил тяжести определяется выражением (3.26): $E_i = mgh$. Если частица находится в точке с координатой y (рис. 3.5), то в формуле (3.26) высоту h можно заменить на y . Тогда:

$$E_n = mgy \Rightarrow \frac{dE_n}{dy} = mg, \quad \frac{\partial E_n}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_n}{\partial z} = 0. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.31), получим, что сила тяжести, ее проекция и модуль соответственно равны:

$$\vec{F} = -mg \cdot \vec{e}_y = m\vec{g}, \quad F_y = mgy = -mg, \quad F = |\vec{F}| = mg.$$

3.6 Работа неконсервативных сил и механическая энергия

В общем случае на систему тел действуют кроме консервативных сил и другие силы, которые в дальнейшем будем называть неконсервативными. Работа неконсервативных сил по замкнутой траектории не равна нулю. В частности к таким силам относится сила трения. Работа всех сил A , действующих на систему, равна сумме работ консервативных A_k и неконсервативных $A_{нк}$ сил:

$$A = A_k + A_{нк}.$$

Откуда
$$A_{нк} = A - A_k. \quad (3.35)$$

Работа всех сил определяется соотношением (3.13), а работа консервативных сил - соотношением (3.24). Подставим эти выражения в (3.35):

$$A_{нк} = (E_{к2} - E_{к1}) - (E_{н1} - E_{н2}) => \\ A_{нк} = (E_{к2} + E_{н2}) - (E_{к1} + E_{н1}). \quad (3.36)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется **полной механической энергией**:

$$\boxed{E = E_k + E_n} \quad (3.37)$$

С учетом этого обозначения равенство (3.36) принимает вид:

$$A_{нк} = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (3.38)$$

или

$$\boxed{dA_{нк} = dE}.$$

Соотношения (3,38) показывают, что **работа неконсервативной силы равна приращению (изменению) полной механической энергии системы.**

4 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

4.1 Закон сохранения импульса

Для системы частиц (или системы твёрдых тел) второй закон Ньютона можно записать в виде (см. уравнение (2.17)):

$$\sum \vec{F}_{вн,i} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i, \quad (4.1)$$

где $\sum \vec{F}_{вн,i}$ - сумма внешних сил, действующих на систему; $\sum \vec{p}_i$ - импульс системы; \vec{p}_i - импульс i -ого тела.

Если отсутствуют внешние силы, действующие на систему, то система называется *замкнутой*. Для такой системы

$$\sum \vec{F}_{вн,i} = 0. \quad (4.2)$$

Из (4.2) и (4.1) получим, что для замкнутой системы производная от импульса системы равна нулю, а, следовательно, сам импульс не изменяется:

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \\ \boxed{\sum \vec{p}_i = const}. \quad (4.3)$$

Т.е., *суммарный импульс замкнутой системы тел остается постоянным.* Это есть **закон сохранения импульса.**

Очевидно, что если внешние силы не равны нулю, но их сумма равна нулю (уравнение (4.2)), то и в этом случае выполняется соотношение (4.3). Та-

ким образом, импульс остается постоянным и у незамкнутой системы, если сумма внешних сил $\sum \vec{F}_{\text{вн},i} = 0$.

Из сказанного выше следует:

1) Т.к. в замкнутой системе $\sum \vec{F}_{\text{вн},i} = 0$, то в такой системе скорости тел (и импульсов) меняются только вследствие действия внутренних сил. Практически большинство систем не замкнуты, но если в системе скорости тел меняются в основном вследствие действия внутренних сил, то такую систему с достаточной степенью точности можно считать замкнутой.

2) В разделе 2.3 показано, что суммарный импульс системы

$$\sum \vec{p}_i = m\vec{v}_C,$$

где m - суммарная масса тел системы; \vec{v}_C - скорость центра масс. Из (4.3) и последнего уравнения получим, что в замкнутой системе

$$\vec{v}_C = \text{const}$$

Т.е. в замкнутой системе скорость центра масс системы постоянна.

3) Запишем проекцию уравнения (4.1) на некоторую ось Z :

$$\sum F_{\text{вн},Z} = \frac{d}{dt}(\sum \vec{p}_{iZ}).$$

Если $\sum F_{\text{вн},Z} = 0$, то (аналогично (4.3)) получим:

$$\boxed{\sum p_{iZ} = \text{const}}. \quad (4.3a)$$

В этом случае *остаётся постоянной сумма проекций импульсов тел на ту ось, для которой сумма проекций внешних сил равна нулю.*

4.2 Закон сохранения момента импульса

Уравнение моментов для системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси, имеет вид (см. уравнение (2.49)):

$$\sum M_{\text{вн},Z} = \frac{d}{dt}(\sum L_{i,Z}), \quad (4.4)$$

где $\sum M_{\text{вн},Z}$ - суммарный момент внешних сил относительно оси вращения,

$\sum L_{i,Z}$ - суммарный момент импульсов тел относительно оси вращения.

Если система замкнута, то

$$\sum M_{\text{вн},Z} = 0, \quad (4.5)$$

и из (4.4), аналогично (4.3), получим, что: $\frac{d}{dt}(\sum L_{i,Z}) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\sum L_{iZ} = \text{const}}. \quad (4.6)$$

Таким образом, *если сумма моментов внешних сил относительно оси*

вращения равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси остается постоянным. Уравнение (4.6) - частный случай **закона сохранения момента импульса**: *момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным*:
$$\boxed{\sum \vec{L}_i = const}$$

4.3 Закон сохранения механической энергии

Работа неконсервативных сил равна приращению полной механической энергии системы (см. уравнение (3.38)):

$$A_{нк} = \Delta E. \quad (4.7)$$

Если на систему действуют только консервативные силы, то

$$A_{нк} = 0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) следует, приращение механической энергии системы

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E = const \Rightarrow \boxed{\sum E_i = const}. \quad (4.9)$$

Мы пришли к **закону сохранения механической энергии**: *если на тела системы действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы остается постоянной*. Из (4.8) следует, что полная механическая энергия будет также оставаться постоянной, если суммарная работа неконсервативных сил будет равна нулю.

Закон сохранения механической энергии - это частный случай общего **закона сохранения и превращения энергии**: *энергия не возникает и не исчезает, а переходит из одного вида в другой*.

Рассмотренные законы сохранения являются следствием свойств пространства и времени. Они - одни из фундаментальных законов природы.

Пример. Соударение двух тел.

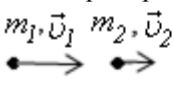


Рис. 4.1

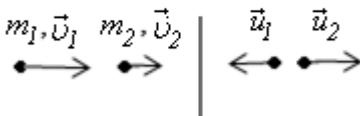


Рис. 4.2

Выполняется закон сохранения импульса, т.к. в этом случае скорость тел меняется в основном вследствие действия внутренних сил.

а) Неупругий удар - скорость тел после удара одинакова (рис. 4.1). Выполняется закон сохранения импульса. Механическая энергия после удара уменьшается, т.к. часть её идет на деформацию тел и переходит во внутреннюю энергию (тела нагреваются) - т.е. *не выполняется закон*

сохранения механической энергии, но выполняется закон сохранения и превращения энергии

б) Упругий удар - скорость тел после удара разная (рис. 4.2). Выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Так как время удара очень мало, то за это время положения центров масс тел практически не меняются, поэтому не изменяется потенциальная энергия. Следовательно, в этом случае, закон сохранения механической энергии означает, что суммарная кинетической энергии тел до и после удара одинакова.

5 КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ

5.1 Колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Кинематическое уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, частота, период колебаний

Колебаниями называются процессы, отличающиеся определенной степенью повторяемости во времени (например: качание маятника, колебание струны, изменение тока в колебательном контуре и т.п.).

Свободные или собственные колебания происходят в системе, представленной самой себе, после того как ее вывели из положения равновесия. При *вынужденных колебаниях* на систему действует внешняя периодически меняющаяся сила. Частный случай вынужденных колебаний – *автоколебания*, при которых моменты действия вынуждающей силы задает сама система.

Рассмотрим одномерное движение частицы вдоль оси x , при котором зависимость потенциальной энергии $E_n(x)$ от координаты x частицы имеет минимум (рис.5.1). Выберем нулевой уровень отсчета и начало координат так, что бы минимум $E_n=0$ соответствовал координате $x=0$. Вблизи минимума, т.е. при достаточно малых x , большинство функций имеет

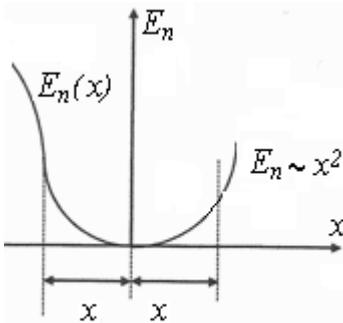


Рис. 5.1

вид параболы. Следовательно, для достаточно малых x потенциальная энергия частицы прямо пропорциональна ее координате x :

$$E_n(x) \sim x^2. \quad (5.1)$$

Если выполняется условие (5.1), то движение частицы называют *малыми колебаниями*. Обозначим коэффициент пропорциональности в соотношении (5.1) $k/2$, где « k » некоторая постоянная. Тогда

$$E_n(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.2)$$

Из уравнения (3.29) получим:

$$F_x = -\frac{d E_n}{d x} = -kx, \quad (5.3)$$

где F_x – проекция силы на ось x .

Из соотношения (5.3) следует, что вблизи минимума потенциальной энергии на частицу действует такая же по форме записи сила, как сила упругости. Ее называют квазиупругой силой. Из соотношения (5.3) видно, что в точке с координатой $x=0$ действующая на частицу сила равна нулю. Следовательно, это *положение равновесия (устойчивого)*.

Рассмотрим движение частицы под действием **квазиупругой силы**

$$\boxed{F_x = -kx},$$

где k – коэффициент квазиупругой силы. Запишем второй закон Ньютона для данного случая в векторном виде и проекциях на ось x :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x = ma_x.$$

Т.к. согласно (1.14) проекция ускорения

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

то второй закон Ньютона с учетом выражения для квазиупругой силы принимает вид:

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Откуда после алгебраических преобразований, получим:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx &= 0, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В (5.4) величина $\frac{k}{m} > 0$; обозначим ее ω_0^2 :

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}. \quad (5.5)$$

Подставим (5.5) в (5.4):

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}. \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) есть **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**. Решением этого уравнения являются функции вида:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (5.7)$$

$$\text{или } x = A \sin(\omega_0 t + \alpha'), \quad (5.7a)$$

где A , α , α' - некоторые константы (то, что выражения (5.7) и (5.7a) являются решениями уравнения (5.6), можно проверить непосредственной подстановкой). Уравнения (5.7) и (5.7a) – это **кинематические уравнения гармонических (или свободных незатухающих) колебаний**.

Поскольку $\cos\varphi = \sin(\varphi - \pi/2)$, то от первого уравнения (5.7a) всегда можно перейти ко второму и наоборот. В дальнейшем, для определенности, будем использовать первое из уравнений (5.7):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.7)$$

В уравнении (5.7) x - смещение частицы от положения равновесия в момент времени t ; ω_0 - циклическая частота; $\varphi = \omega_0 t + \alpha$ - фаза колебаний (измеряется в радианах); при $t = 0$ фаза $\varphi = \alpha$, т.е. α - начальная фаза колебаний. Т.к. максимальное значение $\cos\varphi = 1$, то из (5.7) получим модуль максимального смещения от положения равновесия $|x_m| = A$. Величина A - амплитуда колебаний – максимальное смещение частицы от положения равновесия. На рис.(5.2) показан график гармонических колебаний (т.е. график функции (5.7)).

Период колебаний T – время одного полного колебания. За это время фаза колебания изменяется на 2π (функция косинуса является периодической с периодом 2π). На рис 5.2 $T = t_2 - t_1$. Фазы колебаний в эти моменты времени:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 + \alpha; \quad \varphi_2 = \omega_0 t_2 + \alpha; \quad \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \omega_0(t_2 - t_1) = \omega_0 T.$$

Так как $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi$,

То из последнего равенства следует, что циклическая частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.8)$$

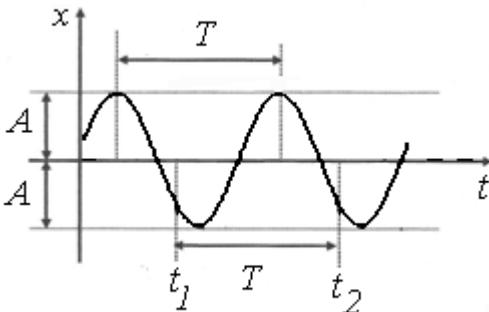


Рис. 5.2

Если за время t совершилось число N полных колебаний, то период T - время, за которое совершается одно полное колебание:

$$T = t/N. \quad (5.8a)$$

Частота колебаний ν - число колебаний за единицу времени:

$$\nu = N/t.$$

Из сравнения с уравнением (5.8а) видно, что частота колебаний ν - величина обратная периоду колебаний. Поэтому связь частоты и периода колебаний имеет вид:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}. \quad (5.9)$$

Подставив (5.9) в (5.8), получим связь циклической частоты с периодом и частотой колебаний

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}. \quad (5.9a)$$

Из уравнений (5.8а) и (5.9) получим единицы измерения T , ν и ω_0 :

$$[T]=c; [\nu]=1/c=\Gamma\text{ц (герц)}, [\omega_0]=\text{рад/с (радиан в секунду)}.$$

5.2 Скорость, ускорение и энергия при гармонических колебаниях

Проекция на ось x скорости колеблющейся частицы

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (5.10)$$

Подставим (5.7) в (5.10) и возьмем производную по времени в полученном выражении:

$$v_x = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega_0 t + \alpha)] \Rightarrow v_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Обозначим:

$$\boxed{v_m = A\omega_0}. \quad (5.11)$$

Тогда

$$\boxed{v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (5.12)$$

где v_m - амплитуда скорости. Видно, что скорость, так же как и координата x частицы, изменяется по гармоническому закону. Т.к.

$$-\sin(\omega_0 t + \alpha) = \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2),$$

то из (5.12) следует, что

$$v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = v_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (5.12a)$$

Из сравнения (5.12а) и (5.7) видно, что разность фаз между x и v_x (другими словами - сдвиг фаз) равна $\pi/2$. В тех точках, где $x = 0$ (т.е. для которых $\varphi = \omega_0 t + \alpha = \pi/2, 3\pi/2, \dots$), $|v_x| = v_m$.

Проекция ускорения на ось x

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x = \frac{d}{dt} [-v_m \sin(\omega_0 t + \alpha)] \Rightarrow a_x = -v_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Обозначим:

$$a_m = v_m \omega_0 = A \omega_0^2. \quad (5.13)$$

Тогда

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (5.14)$$

т.е. ускорение тоже подчиняется гармоническому закону; a_m - амплитуда ускорения.

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = a_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (5.14a)$$

Видно, что сдвиг фаз между a_x и x равен π (см. уравнения (5.14a) и (5.7)); сдвиг фаз между a_x и v_x равен $\pi/2$ (уравнения (5.14a) и (5.12a)). Отметим, что подстановка уравнений (5.14) и (5.7) в уравнение (5.6) с учетом (5.13) дает тождество. Т.о. выражение (5.7) есть решение уравнения (5.6).

В разделе 5.1 было показано, что незатухающие собственные гармонические колебания возникают при действии квазиупругой силы. Так же как и сила упругости - это консервативная сила. Так как других сил нет, то в рассматриваемом случае должен выполняться закон сохранения механической энергии (раздел 4.3). Найдём кинетическую и потенциальную энергии частицы, совершающей гармонические колебания:

$$E_k = mv^2/2 ; E_n = kx^2/2.$$

Подставим в первое из этих выражений уравнение (5.12), во второе - (5.7) (для краткости обозначим фазу $\varphi = \omega_0 t + \alpha$):

$$E_k = \frac{mv_m^2 \sin^2 \varphi}{2} ; E_n = \frac{kA^2 \cos^2 \varphi}{2}. \quad (5.15)$$

Подставим $v_m = A\omega_0$ и найдём полную механическую энергию:

$$E = E_k + E_n \Rightarrow E = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{kA^2 \cos^2 \varphi}{2}.$$

Из (5.5) следует:

$$m\omega_0^2 = k. \quad (5.16)$$

Тогда

$$E = \frac{kA^2}{2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{kA^2}{2}.$$

С учетом (5.16) и (5.11) для полной механической энергии получим:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}. \quad (5.17)$$

Из (5.17) видно, что при гармонических колебаниях механическая энергия частицы не зависит от времени, т.е. остается постоянной, а, следовательно, выполняется закон сохранения механической энергии. Выражение (5.17) показывает, что *при гармонических колебаниях полная механическая энергия равна максимальной потенциальной энергии* (т.е. энергии при $|x|=A$; в этих точках $E_k = 0$), либо максимальной кинетической энергии (т.е. энергии в точке $x = 0$, где $|v|=v_m$, а $E_n=0$).

5.3 Сложение одинаково направленных колебаний

Гармонические колебания часто удобно представить в виде векторной диаграммы (рис. 5.3а). Возьмем вектор \vec{A} , модуль которого равен амплитуде A колебаний и расположим его к оси x под углом α , равным начальной фазе колебаний. Представим, что этот вектор вращается вокруг оси, проходящей через точку O с угловой скоростью ω , равной циклической частоте колебаний. При равномерном вращении за время t он повернется на угол ωt . Угол φ между вектором \vec{A} и осью x будет с течением времени изменяться по тому же закону, что и фаза колебаний: $\varphi = \omega t + \alpha$.

При этом проекция вектора \vec{A} на ось x будет равна: $x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \alpha)$.

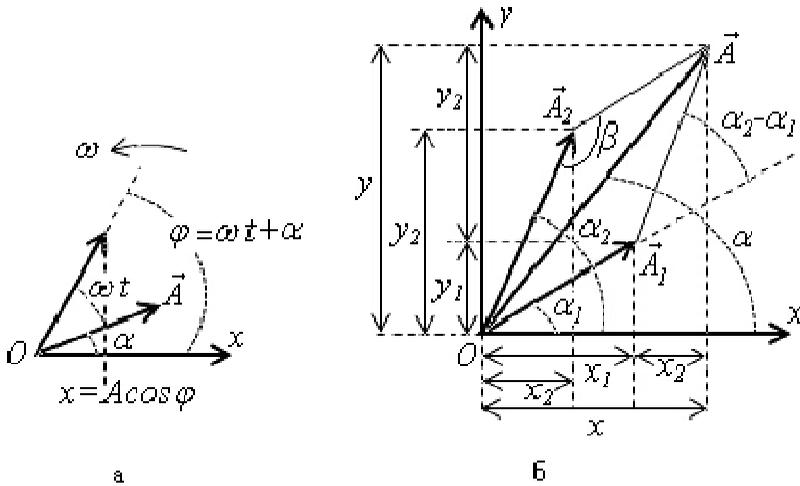


Рис. 5.3

Т.о, проекция вектора \vec{A} на ось x совершает гармоническое колебание. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющейся частицы будет суммой смещений x_1 и x_2 , уравнения которых имеют вид:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (5.18)$$

Представим оба колебания в виде векторной диаграммы (рис. 5.3б). Очевидно, результирующий вектор \vec{A} будет тоже вращаться с угловой скоростью ω , а его проекция

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, результирующее колебание тоже гармоническое и имеет ту же частоту ω . Амплитуда этого колебания равна модулю вектора \vec{A} , а начальная фаза – углу α между вектором \vec{A} и осью x (рис. 5.3б):

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания. Из рис. 5.3б по теореме косинусов получаем, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta.$$

Так как $\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$, то $\cos \beta = \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = -\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$,

где $\alpha_2 - \alpha_1$ – **разность фаз колебаний**. Поэтому выражение для **результующей амплитуды A** принимает вид:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (5.19)$$

Рассмотрев на рис. 5.3б прямоугольный треугольник с гипотенузой A и катетами x и y , можно получить выражение для **начальной фазы α** результирующего колебания:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.4 Пружинный, физический и математический маятники

Пружинный маятник – это твердое тело, соединенное с пружиной и совершающее колебания под действием силы упругости. Очевидно, что действие силы упругости аналогично действию квазиупругой силы, рассмотренной в 5.1. Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 , определяемой выражением (5.5), и периодом T , который можно найти из (5.19а). Поэтому **циклическая частота и период колебаний пружинного маятника** соответственно равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (5.21)$$

где k – жесткость пружины, m – масса тела. **Дифференциальное и кинематическое уравнения колебаний пружинного маятника** имеют соответственно вид (5.6) и (5.7).

Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно неподвижной оси, не проходящей через центр масс (рис. 5.4).

В положении равновесия линия, соединяющая ось вращения и центр масс, расположена вертикально. При колебаниях все точки маятника и эта линия отклоняются от своего положения равновесия на угол φ (рис. 5.4). При этом возникает момент M_z силы тяжести, который стремится вернуть маятник в положение равновесия. В соответствии с (2.28):

$$|M_z| = F \ell,$$

где для физического маятника $F = mg$ - сила тяжести, $\ell = L \cdot \sin \varphi$ - плечо силы, L - расстояние от оси вращения до центра масс (точки C). Поэтому момент силы тяжести относительно оси вращения Z :

$$M_z = -mg \cdot L \cdot \sin \varphi. \quad (5.22)$$

Здесь знак “-” показывает, что отклонение маятника происходит в одну сторону (на рис. “против часовой стрелки”), а момент силы вращает тело в противоположную сторону (на рис. “по часовой стрелке”).

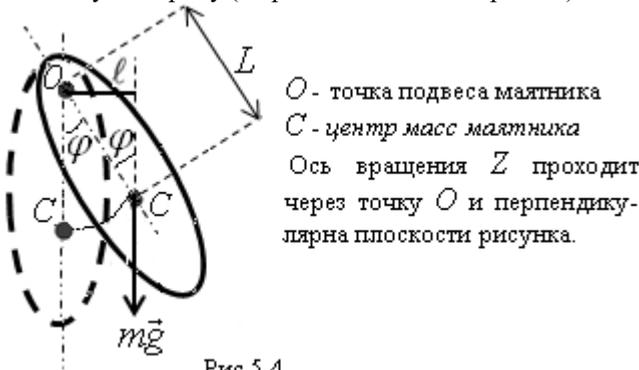


Рис.5.4

Т.к. все точки физического маятника движутся по окружностям, то его движение описывается законом динамики вращательного движения:

$$M_z = I_z \varepsilon,$$

где $\varepsilon = d^2 \varphi / dt^2$ - угловое ускорение, I_z - момент инерции маятника относительно оси вращения. С учетом формулы (5.22) закон динамики вращательного движения принимает вид:

$$-mg \cdot L \cdot \sin \varphi = I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (5.22a)$$

Для малых углов отклонения ($\varphi < 0,1$ рад.) $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда для малых колебаний маятника из (5.22a) получим:

$$-mg \cdot L \cdot \varphi = I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgL}{I_z} \varphi = 0.$$

Обозначим
$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I_z}. \quad (5.23)$$

С учетом этого дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника имеет вид:

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0}, \quad (5.24)$$

Это значит, что маятник совершает гармонические колебания, **кинематическое уравнение** которых:

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha)},$$

где φ - угол отклонения маятника от положения равновесия в момент времени t , φ_m - амплитуда колебаний, т.е. максимальный угол отклонения от положения равновесия. **Циклическую частоту ω_0 и период T колебаний физического маятника** находим из (5.23):

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_z}} ; T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgL}}}, \quad (5.25)$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси вращения, L - расстояние от оси вращения до центра масс (точки C).

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Его можно рассматривать как частный случай физического маятника. Момент инерции материальной точки

$$I_z = mL^2,$$

где в случае математического маятника L - длина нити. Поэтому для такого маятника из (5.25) получим:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_z}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}}.$$

Откуда следует, что **циклическая частота ω_0 и период T колебаний математического маятника** соответственно равны:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} ; T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}. \quad (5.26)$$

5.5 Затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания

Рассмотрим колебания, при которых кроме квазиупругой силы

$F_x = -kx$ действует и сила трения F_{mp} (сопротивления). Во многих, практически важных случаях, действует сила вязкого трения, которая при небольших скоростях определяется формулой (2.14):

$$\vec{F}_{mp} = -r\vec{v},$$

где r - коэффициент сопротивления, v - скорость частицы. Для одномерного колебания вдоль оси x второй закон Ньютона в проекциях на ось x имеет вид:

$$F_x + F_{mp} = ma_x \Rightarrow -kx - rv_x = ma_x; v_x = \frac{dx}{dt}; a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$-kx - r \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Обозначим:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; 2\beta = \frac{r}{m}, \quad (5.27)$$

где β - коэффициент затухания. Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.28)$$

Это дифференциальное уравнение затухающих колебаний, где ω_0 - собственная частота незатухающих колебаний, т.е. частота, которую имела бы система в отсутствии сил трения. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний (5.28) необходимо рассмотреть для двух случаев.

1. $\beta < \omega_0$. Прямой подстановкой можно убедиться, что в этом случае решение уравнения (5.28) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.29)$$

где циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (5.30)$$

A_0 - начальная амплитуда, α - начальная фаза, $e = 2,7$ - экспонента (основание натурального логарифма).

Уравнение (5.29) - кинематическое уравнение затухающих колебаний. Из (5.29) видно, что амплитуда A затухающих колебаний в момент времени t

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (5.31)$$

где A_0 - начальная амплитуда (в момент времени $t=0$). Из формулы видно, что с течением времени амплитуда уменьшается (рис. 5.5).

На рис. 5.6 показан график затухающих колебаний. Колебания со временем постепенно затухают, т.к. полная механическая энергия вследствие действия сил трения переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде тепла). Скорость затухания определяется величиной β . За время $\tau=1/\beta$ амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} = A_0 e^{-\beta \frac{1}{\beta}} = A_0 e^{-1} = \frac{A_0}{e}.$$

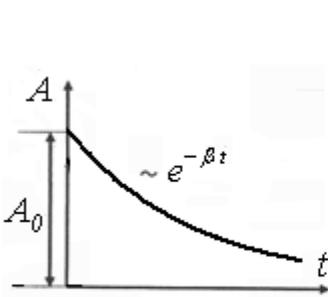


Рис. 5.5

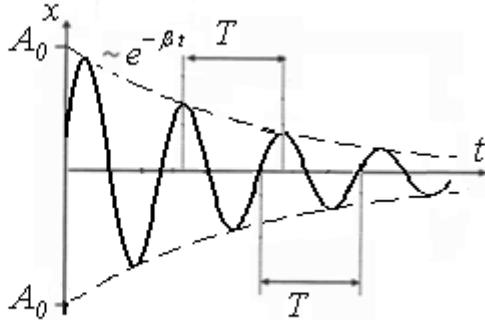


Рис. 5.6

На рис. 5.6 показан график затухающих колебаний. Колебания со временем постепенно затухают, т.к. полная механическая энергия вследствие действия сил трения переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде тепла). Скорость затухания определяется величиной β . За время $\tau=1/\beta$ амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} = A_0 e^{-\beta \frac{1}{\beta}} = A_0 e^{-1} = \frac{A_0}{e}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания** β - величина обратная времени релаксации τ - промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз. В этом состоит физический смысл коэффициента затухания. Чем больше β , тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний.

Отношение амплитуд, отличающимся по времени на период, называется **декрементом затухания**, а логарифм этой величины называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}.$$

Подставляя соотношение (5.31), получим:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} \Rightarrow \lambda = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \beta T}. \quad (5.32)$$

Уравнение (5.32) выражает **связь между величинами λ , β и T** .

Из (5.32) следует: $\beta = \frac{\lambda}{T}$; $A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$.

Здесь **T – период затухающих колебаний**, который с учетом (5.30) равен:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}.$$

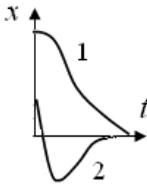


Рис.5.7

2. $\beta \geq \omega_0$. В этом случае сила трения настолько большая, что процесс носит неперiodический (аперiodический) характер. В зависимости от начальных условий (начального отклонения, начальной скорости и ее направления) зависимость $x(t)$ будет иметь вид, приблизительно представленный на рис.5.7 кривой 1 или 2.

Для затухающих колебаний физического маятника получится аналогичное уравнение. В этом случае в уравнение динамики вращательного движения маятника (5.22а) $M_Z = I_Z \varepsilon$ надо добавить момент силы трения $M_{mp} = -r_{sp} \omega$, где r_{sp} – коэффициент сопротивления при вращательном движении. Тогда закон динамики вращательного движения примет вид: $M_Z + M_{mp} = I_Z \varepsilon$. Обозначив $2\beta = r_{sp}/I_Z$, получим **дифференциальное уравнение затухающих колебаний физического маятника**:

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0},$$

где φ – угол отклонения маятника (рис. 5.4) от положения равновесия. Его решением является **кинематическое уравнение затухающих колебаний физического маятника**:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)},$$

где φ_0 – начальная амплитуда, остальные обозначения те же, что в (5.29).

5.6 Вынужденные колебания

Вынужденными называются колебания, происходящие под действием внешней периодической силы. Рассмотрим колебания системы, на которую кроме квазиупругой силы и силы трения, действует внешняя вы-

нуждающая сила, изменяющаяся с течением времени по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \Omega \cdot t, \quad (5.33)$$

где F_0 и Ω - амплитуда и частота вынуждающей силы. В этом случае система совершает собственные колебания (которые постепенно затухают) и вынужденные колебания. Установившиеся колебания будут иметь частоту Ω , равную частоте вынуждающей силы и называются вынужденными колебаниями.

Кинематическое уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$x = A \cos(\Omega \cdot t + \alpha).$$

Можно показать, что **амплитуда A и начальная фаза α** вынужденных колебаний определяются соотношениями:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}, \quad (5.34)$$

где ω_0 - собственная частота незатухающих колебаний системы, β - коэффициент затухания. Из уравнения (5.34) следует, что амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде F_0 вынуждающей силы и зависит от частоты этой силы Ω и коэффициента затухания β . На рис. (5.8) показана эта зависимость для двух различных значений β . Видно, что при некоторой частоте Ω_p амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум. *Явление резкого возрастания амплитуды колебаний при частоте вынуждающей силы Ω_p* называется **резонансом**, а частота Ω_p - *резонансной частотой*. Так как при Ω_p амплитуда $A(\Omega)$ имеет максимум, то

в этой точке производная от A по Ω должна равняться нулю: $\left. \frac{dA}{d\Omega} \right|_{\Omega_p} = 0$.

Поэтому, взяв производную от выражения (5.34) и приравняв ее к нулю, можно найти **резонансную частоту**:

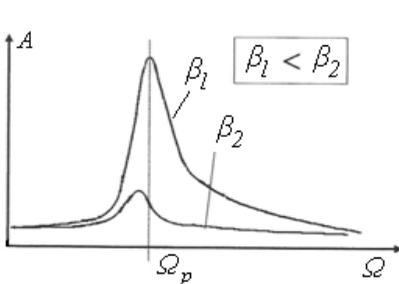


Рис. 5.8

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (5.36)$$

Чем больше β , тем меньше Ω_p . При небольших β (малое затухание) $\Omega_p \approx \omega_0$, т.е. резонанс наступает тогда, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте ω_0 .

Подставив (5.36) в (5.34), найдем резонансную амплитуду A_p :

$$A_p = \frac{F_0 / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (5.37)$$

5.7 Волны. Волны поперечные и продольные. Волновая поверхность, фронт волны. Уравнение плоской волны, длина волны, волновое число. Фазовая скорость

Если в среде возбудить колебания частиц, то вследствие взаимодействия между частицами, эти колебания будут передаваться от частицы к частице. *Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.* Волны, распространяющиеся в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной) называются *упругими*. Частицы среды, в которой распространяется волна, не увлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около положения равновесия. Волна называется *поперечной*, если частицы колеблются перпендикулярно направлению распространения волны. В *продольной волне* частицы колеблются вдоль направления распространения волны. В жидкостях и газах возникают только продольные волны, в твердых телах и продольные, и поперечные. Под частотой ν и периодом T волны понимают соответственно частоту и период колебаний частиц среды. В частности звук – это упругие волны с частотой от 16Гц до 20кГц. Упругие волны с частотой меньше 16Гц – инфразвук, больше 20кГц – ультразвук.

На рис. 5.9 показан процесс распространения поперечных колебаний вдоль цепочки частиц, вызванный колебанием первой из этих частиц (источник волны - первая частица). За время $T/4$ (T - период колебаний) первая частица A из положения равновесия сместится на расстояние, равное амплитуде колебаний. К концу этого промежутка времени в колебания вовлекутся все частицы вплоть до той, которая обозначена B (рис. 5.9а). Таким образом, частица B начнет колебания через время $T/4$ после начала колебаний первой частицы. Через время $T/2$ первая частица вернется в положение равновесия. Для частицы B время от начала ее колебаний составит $T/4$ и, следовательно, она будет в положении максимального отклонения. При этом в колебания вовлекутся все частицы до той, которая обозначена C (рис. 5.9б). Частица C начнет совершать колебания через время $T/2$ после начала колебаний частицы A . Рассматривая процесс дальше, увидим, что через время $t = T$ колебания дойдут до частицы E .

На рис. 5.9 показано распространение колебаний вдоль оси x . В действительности в колебания вовлекаются частицы расположенные в некотором объеме. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *волновым фронтом*. Геометрическое

место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Очевидно, что отклонения точек волновой поверхности от положения равновесия одинаковы, т.к. фаза колебаний этих точек одна и та же. Волновых поверхностей можно выделить сколь угодно много.

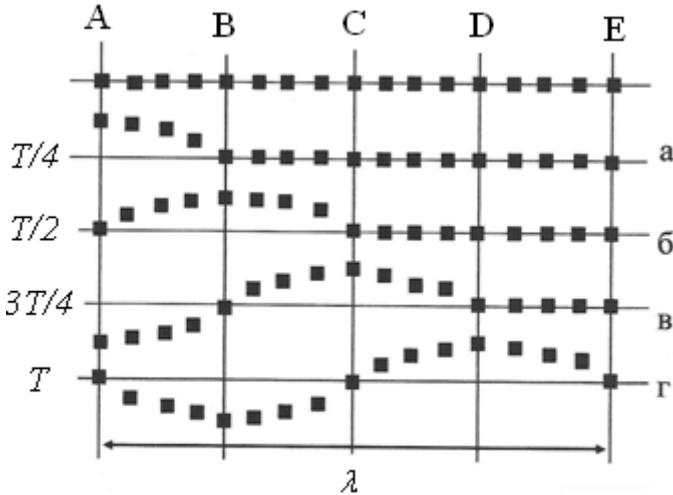


Рис. 5.9

По форме волновой поверхности различают *плоские волны* (волновая поверхность - плоскость), *сферические волны* (волновая поверхность - сфера) и т.п.

Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц, называется **длиной волны**. Так за время $t = T$ волна проходит расстояние равное длине волны λ , то **скорость**

распространения волны $\boxed{v = \lambda/T = \lambda\nu}$. (5.38)

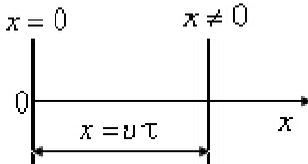


Рис. 5.10

Уравнением волны называется выражение, которое дает возможность рассчитать смещение y колеблющейся частицы от положения равновесия как функцию ее координаты x и времени t . Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль положительном направлении оси x (рис. 5.10). Если источник волн находится в плоскости $x=0$ и

совершает гармонические колебания по закону

$$y = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.39)$$

то колебания частиц среды в произвольной плоскости $x \neq 0$ будут отставать от колебаний источника на время $\tau = \frac{x}{v}$ – это время, за которое колебания доходят от источника до плоскости $x \neq 0$. Поэтому колебания частиц в этой плоскости будет иметь вид:

$$y(x, t) = A \cos [\omega(t - \tau) + \alpha]$$

или с учетом выражения для τ :

$$y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (5.40)$$

Это есть **уравнение плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси x , (если волна распространяется в противоположную сторону, то в уравнении (5.40) надо x заменить на $-x$).

Преобразуем уравнение (5.40), раскрыв скобки в его правой части:

$$y(x, t) = A \cos \left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{v} + \alpha \right).$$

Обозначим

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Эту величину называют **волновым числом** k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (5.41)$$

В общем случае используют **волновой вектор** \vec{k} – это вектор, направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны и численно равный $2\pi/\lambda$. Подставим (5.41) в (5.40):

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (5.42)$$

Это каноническая форма записи **уравнения плоской волны**

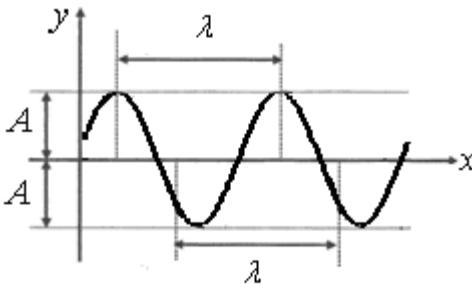


Рис. 5.11

Отклонение от положения равновесия $y(x, t)$ частиц в волне является функцией двух переменных x и t . Поэтому удобно строить график этой функции либо для некоторой фиксированной координаты $y(x_0, t)$, либо для некоторого фиксированного момента времени $y(x, t_0)$. В первом случае это будет график колебаний для частиц с координатой x_0 (см. раздел 5.1). Во втором случае полу-

ний для частиц с координатой x_0 (см. раздел 5.1). Во втором случае полу-

чим график, показывающий отклонение от положения равновесия частиц с разными координатами x в некоторый момент времени t_0 (рис. 5.11). Из рис. 5.11 видно, что *длина волны λ равна расстоянию между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.*

6 ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1 Принцип относительности Галилея

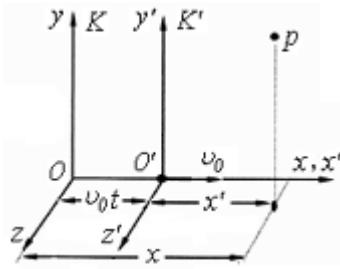


Рис. 6.1

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (рис. 6.1). Систему K будем считать неподвижной, систему K' - подвижной. Ее скорость \vec{v}_0 относительно неподвижной системы K постоянна и направлена вдоль оси x . Координатные оси систем выберем так, что бы они были параллельны друг другу; а в начальный момент времени начала координат систем совпадали. Такое расположение осей вы-

брано для упрощения вида нижеприведенных уравнений. (Результаты, которые будут получены в дальнейшем, можно обобщить для любого взаимного расположения систем K и K').

Найдем связь координат частицы P в системе K с ее координатами в системе K' . Из рис. (6.1) видно:

$$\boxed{x = x' + v_0 t; y = y'; z = z'; t = t'}. \quad (6.1)$$

Последнее из равенств (6.1) означает, что длительность некоторого события в системах K и K' одинакова. Уравнения (6.1) называются **преобразованиями Галилея**.

Найдем связь между скоростями \vec{v} и \vec{v}' частицы P в системах отсчета K и K' . Проекции этих скоростей на ось x в системах K и K' соответственно равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v'_x = \frac{dx'}{dt}.$$

Продифференцируем первое выражение из (6.1), получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_0 \Rightarrow v_x = v'_x + v_0.$$

Аналогично $v_y = v'_y$; $v_z = v'_z$.

После преобразований получим:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (6.2)$$

где \vec{v} - скорость частицы относительно неподвижной системы K , \vec{v}' - скорость частицы относительно подвижной системы K' , \vec{v}_0 - скорость подвижной системы K' относительно неподвижной системы K .

Соотношение (6.2) – это **закон сложения скоростей в классической механике**.

Найдем ускорение точки в системах K и K' :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}.$$

После дифференцирования (6.2) получим (учитывая, что $\vec{v}_0 = const \Rightarrow d\vec{v}_0/dt = 0$):

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что ускорение точки во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, одинаково. В частности, если одна из этих систем инерциальная, то и остальные системы будут инерциальными. Т.о., второй закон Ньютона в системах K и K' будет иметь вид:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \quad \vec{F}' = m\vec{a}'. \quad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует, что $\vec{F} = \vec{F}'$ - силы, действующие на частицу в системах K и K' тоже одинаковы. Следовательно, *законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета*. Это утверждение носит название **принцип относительности Галилея**. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета эквивалентны: все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, поэтому никакими механическими опытами нельзя установить, что данная система отсчета покоится или равномерно и прямолинейно движется. Величины, имеющие одно и то же числовое значение во всех системах отсчета, называются инвариантными (например, масса). В этом смысле говорят, что уравнения динамики инварианты по отношению к преобразованиям координат от одной инерциальной системы отсчета к другой.

6.2 Постулаты Эйнштейна.

Преобразования Лоренца и следствия из них

Специальная теория относительности Эйнштейна (релятивистская

механика) основана на двух постулатах (утверждениях), которые носят названия: **принцип относительности Эйнштейна** и **принцип постоянства скорости света**

Принцип относительности Эйнштейна является распространением принципа относительности Галилея (механического принцип относительности) на все физические явления. Согласно этому принципу **все законы природы одинаковы для всех инерциальных систем отсчета**. Следовательно, уравнения, выражающие законы природы, инварианты по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Принцип постоянства скорости света утверждает, что *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источников и приёмников света*

Возьмём две инерциальных системы отсчета, аналогичные тем, что рассмотрены на рис 6.1: система K неподвижная, система K' движется относительно системы K со скоростью \vec{v}_0 . Для того чтобы выполнялись постулаты Эйнштейна, переход от координат и времени, отсчитанных в системе K' , к координатам и времени, отсчитанных в системе K , должен выполняться согласно следующим соотношениям:

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + x' v_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (6.5)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме. Уравнения (6.5) называются **преобразованиями Лоренца**. При скоростях $v_0 \ll c$ величину v_0/c можно принять равной нулю. В таком случае преобразования Лоренца (6.5) переходят в преобразования Галилея (6.1). Следовательно, преобразования Галилея можно применять только при малых скоростях по сравнению со скоростью света (это же утверждение относится и ко всей нерелятивистской физике).

Рассмотрим следствия из преобразований Лоренца.

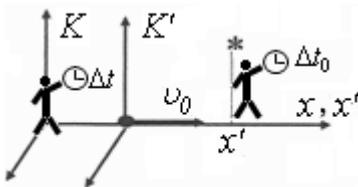


Рис. 6.2

1. Промежуток времени между событиями в различных системах отсчёта.

Пусть в системе отсчета K' (рис. 6.2), движущейся относительно системы K со скоростью v_0 , в одной и той же точке с координатой x' в моменты времени t'_1 и t'_2 происходят два каких-то события (например, две вспышки света). В системе

K' промежуток времени между этими событиями $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$.

Эти же события относительно системы отсчета K происходят соответственно в моменты времени t_1 и t_2 , которые можно выразить из преобразований Лоренца (6.5):

$$t_1 = \frac{t'_1 + x'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, t_2 = \frac{t'_2 + x'v_0/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \quad (6.6)$$

(Здесь учтено, что событие происходит в одной же точке с координатой x' , т.е. $x'=\text{const}$). Промежуток времени между этими событиями в системе K :

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (6.7)$$

Подставим в (6.7) выражения (6.6):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}}. \quad (6.8)$$

Здесь промежуток времени Δt_0 - это *собственное время*, измеренное по часам системы K' , движущимся со скоростью v_0 относительно системы K . Из (6.8) следует, что промежуток времени Δt , измеренный по неподвижным часам системы K , всегда больше собственного времени ($\Delta t > \Delta t_0$).

II. Длина тел в разных системах отсчета. Пусть имеется стержень, расположенный вдоль оси x и движущийся со скоростью v_0 . Аналогично пункту I можно показать, что длина стержня ℓ_0 , измеренная в системе K' , относительно которой он покоится (т.е. длина покоящегося стержня) и длина стержня ℓ в системе K (т.е. длина, измеренная в системе, относительно которой он движется) разная. Повторяя рассуждения пункта I, получим:

$$\boxed{\ell = \ell_0 \sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \quad (6.9)$$

Видно, что $\ell < \ell_0$. Этот результат называется *лоренцевым сокращением*.

III. Сложение скоростей. Для упрощения формул будем считать, что скорость частицы параллельна оси x . Тогда модули скоростей частиц в системах K и K' соответственно равны:

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}; v' = v'_x = \frac{dx'}{dt'}.$$

Учитывая преобразования (6.5) можно для рассматриваемого случая получить **релятивистский закон сложения скоростей**:

$$\boxed{v = \frac{v' + v_0}{1 + v'v_0/c^2}}. \quad (6.10)$$

В случае малых скоростей $v_0 \ll c$ формула (6.10) переходит в закон сложения скоростей классической (нерелятивистской) механики (6.2).

Пусть скорость $v' = c$. Из (6.10) получим:

$$v = \frac{c + v_0}{1 + cv_0/c^2} = c,$$

что согласуется со вторым постулатом Эйнштейна.

6.3 Основные понятия релятивистской динамики

Релятивистская динамика изучает движение частиц с большими скоростями, т.е. соизмеримыми со скоростью света.

Релятивистской импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.11)$$

где v - скорость частицы, m - масса частицы, не зависящая от ее скорости, инвариантная по отношению к выбору системы отсчета. (До недавнего времени массу m называли массой покоя и обозначали m_0 . Множитель в (6.11) $m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ называли релятивистской массой или массой движения. От понятия релятивистской массы, зависящей от скорости, сейчас отказываются.)

Релятивистское выражение **второго закона Ньютона** имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (6.12)$$

Известно, что работа силы равна приращению энергии частицы (см. раздел 3), т.е.

$$dA = \vec{F}d\vec{\ell} = dE. \quad (6.13)$$

Подставив в (6.13) уравнение (6.12) и проинтегрировав результат, можно получить энергию свободной частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.14)$$

которую **называют полной энергией**.

Если частица покоится ($v = 0$), получим **энергию покоя** E_0 :

$$E_0 = mc^2. \quad (6.15)$$

Энергия покоя, также как и масса m - инвариант в отличие от полной энергии, которая зависит от системы отсчета. Энергия покоя тела является его внутренней энергией. Она состоит из суммы энергий покоя всех частиц тела, кинетической энергии всех частиц и потенциальной энергии их взаимодействия. В нее не входит потенциальная энергия во внешнем силовом

поле. Энергия покоя тела не равна сумме энергий покоя частиц, из которых состоит тело. Это же относится и к массе (в прежней терминологии - массе покоя). Т.е. в релятивистской механике не выполняется закон сохранения массы. Например, масса покоя атомного ядра меньше суммы масс покоя частиц, входящих в ядро. Свойство аддитивности массы выполняется лишь в пределе, когда $v \ll c$.

Кинетическая энергия E_k равна разности полной энергии и энергии покоя:

$$E_k = E - E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (6.16)$$

При $v = c$ подкоренное выражение в знаменателе в уравнениях релятивистской динамики стремится к бесконечности. Если $m \neq 0$, то эти уравнения теряют смысл. Это означает, что частица с массой $m \neq 0$ не может двигаться со скоростью света.

Все вышеприведенные уравнения при $v \ll c$ переходят в уравнения классической физики.

Исключив из (6.11) и (6.14) скорость v , получим **связь между энергией и импульсом**:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (6.17)$$

Из этих же уравнений следует: $\vec{p} = E\vec{v}/c^2$. (6.18)

При $m = 0$ из (6.17) получим **связь энергии и импульса для частицы с нулевой массой** (безмассовая частица)

$$\boxed{E = cp}. \quad (6.19)$$

Это соотношение согласуется с (6.18) если, $v=c$. Следовательно, частица с массой, равной нулю, всегда движется со скоростью света. Импульс таких частиц может быть найден из соотношения (6.19). В частности такой частицей является квант света - фотон.

7 МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

7.1 Молекулярно-кинетические представления. Статический и термодинамический методы. Состояние системы. Обратимые и необратимые процессы

Молекулярная физика – раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из **молекулярно-кинетических представлений**. Согласно этим представлениям все тела (твердые, жидкие или газо-

образные) состоят из мельчайших обособленных частиц – молекул, находящихся в непрерывном хаотическом (беспорядочном) движении и взаимодействующих между собой. Правильность данных представлений доказывают следующие явления: броуновское движение, диффузия, сжимаемость газов и др.

В макроскопических телах (т.е. телах, состоящих из очень большого числа молекул) возникают качественно новые закономерности, называемые статистическими. Такие закономерности не выполняются для систем с малым числом частиц. Поэтому при рассмотрении движения молекул в макроскопических телах нельзя применять законы классической механики. Для описания процессов в таких телах используют два метода – статистический и термодинамический. **Статистический метод** рассматривает наблюдаемые свойства тел (например, такие как давление и температура) как суммарный результат действия всех молекул тела. **Термодинамический метод** используется для описания свойств тел небольшое число фундаментальных законов (называемых началами термодинамики), не вдаваясь в микроскопическую природу тел. Оба метода взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое.

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться энергией между собой и с внешней средой. **Параметрами состояния** называются физические величины, характеризующие состояние системы в целом. Так состояние газа в сосуде обычно задается такими параметрами состояния, как температура T , давление p и объем V .

Данная система может находиться в различных состояниях, различающихся температурой, давлением и т.п. Состояние системы называется **равновесным**, если все параметры состояния во всех частях системы имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени. **Неравновесным** называется состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения.

Термодинамическим процессом называется переход системы из одного состояния в другое. Такой переход связан с нарушением равновесного состояния системы. Следовательно, при протекании процесса система проходит через ряд неравновесных состояний.

Пример. Пусть в теплоизолированном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится в равновесном состоянии газ. Вдвинем резко на небольшое расстояние поршень. При этом газ будет сжиматься, повысится давление вблизи поршня - равновесие будет нарушено. Если двигать поршень очень медленно, то равновесие нарушается незначительно и давление в разных точках мало отличается от равновесного значения, соответствующего данному объему газа. В пределе при бесконечно медленном сжатии давление газа будет иметь в каждый момент времени определенное

значение. Следовательно, состояние газа все время будет равновесным, так что бесконечно медленный процесс окажется состоящим из последовательности равновесных состояний. Такой процесс называется **равновесным**.

Если нет изменений в окружающей среде, то при изменении направления равновесного процесса (замене сжатия газа расширением) система будет проходить через те же равновесные состояния, что и при прямом процессе, но в обратной последовательности. Поэтому равновесные процессы называются так же **обратимыми**. Процесс, состоящий из последовательности неравновесных состояний, называется **неравновесным** или **необратимым** процессом.

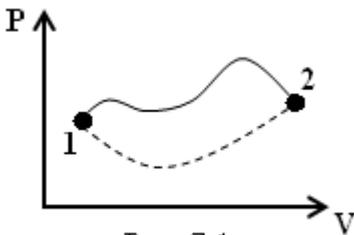


Рис. 7.1

Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров (например, p и V), то равновесное состояние системы можно изобразить точкой на координатной плоскости (рис.7.1, точки 1 и 2 изображают равновесные состояния системы), а обратимый процесс - сплошной линией. Неравновесные состояния и процессы так изображать нельзя. Необратимые процессы, протекающие между двумя равновесными состояниями, условно изображают штриховыми линиями (рис. 7.1).

7.2 Масса и размер молекул. Количество вещества

Для характеристики масс атомов и молекул применяются величины, получившие название **атомной массы** и **молекулярной массы**. **Относительной атомной массой** A_r химического элемента называется отношение массы атома этого элемента к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C (так обозначается изотоп углерода с массовым числом 12). **Относительной молекулярной массой** M_r вещества называется отношение массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы атома ^{12}C . Как следует из их определения, атомная и молекулярная масса — безразмерные величины. Относительные атомные массы элементов указаны в Периодической системе элементов Д.И. Менделеева. Например, для гелия (He) $A_r = 4$. Относительная молекулярная масса равна сумме относительных атомных масс атомов в данной молекуле: $M_r = \sum A_r$. Например, для воды (H_2O) $M_r = 2 \cdot 1 + 16 = 18$. Единица массы, равная $1/12$ массы атома ^{12}C , называется **атомной единицей массы** (а.е.м.):

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (7.1)$$

Массы атомов и молекул m_0 , выраженные в а.е.м., численно равны их относительным атомным и молекулярным массам соответственно: $m_0 = A_r$ (а.е.м.) или $m_0 = M_r$ (а.е.м.). Например, масса молекулы воды $m_0 = 18$ а.е.м. $= 18 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг $= 2,99 \cdot 10^{-26}$ кг. Как видно из этого примера, массы атомов и молекул очень малы. Для различных веществ они составляют величины порядка $10^{-27} \div 10^{-25}$ кг. Размеры атомов и молекул также малы, порядка $10^{-11} \div 10^{-10}$ м.

Количество вещества ν в системе измеряется в молях. **Моль** – это количество вещества, в котором содержится число частиц, равное числу атомов в 12 г углерода ^{12}C . Число частиц, содержащихся в одном моле вещества, называется **постоянной Авогадро**:

$$\boxed{N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}. \quad (7.2)$$

Массу одного моля вещества называют **молярной массой** M . Молярная масса, выраженная в г/моль, численно равна относительной молекулярной массе. Например, молярная масса воды $M = 18$ г/моль $= 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (в СИ масса измеряется в килограммах). В общем случае молярная масса $M = M_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Т.к. в моле вещества содержится N_A молекул одинаковой массы m_0 каждая, то молярная масса равна произведению постоянной Авогадро на массу m_0 молекулы: $M = N_A m_0$, (7.3) где масса m_0 должна быть выражена в кг.

Масса всего вещества m равна произведению числа N молекул данного вещества на массу m_0 одной молекулы: $m = N m_0$. (7.4) Следовательно, с учетом (7.3) и (7.4), данная масса m вещества содержит

количество вещества
$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}. \quad (7.5)$$

7.3 Давление газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

В молекулярно-кинетической теории (МКТ) часто пользуются моделью идеального газа. Газ можно считать идеальным, если: 1) собственный объем молекул газа очень мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находится газ (атомы и молекулы газа можно принять за материальные точки); 2) силы взаимодействия между молекулами газа настолько малы, что ими можно пренебречь (молекулы находятся на большом расстоянии друг от друга); 3) столкновение молекул между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими. Реальный газ можно считать идеальным, если давление газа невелико, а температура не очень низкая (при низких температурах газ превращается в жидкость).

Молекулы газа движутся хаотически; все направления их движения равновероятны. Скорости молекул различны по величине. Давление газа

обусловлено ударами молекул о стенки сосуда. Вычислим давление идеального газа.

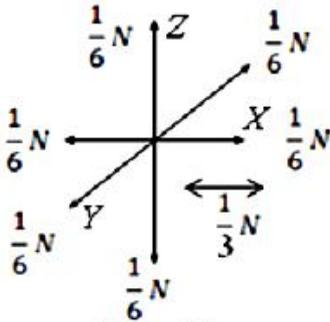


Рис. 7.2

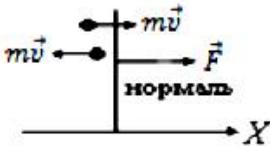


Рис. 7.3

Для облегчения решения этой задачи введем некоторые упрощения: будем считать, что молекулы движутся только вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений (например, осей X, Y, Z) с одинаковыми по величине скоростями. Если газ в сосуде содержит N молекул, то в любой момент времени вдоль каждого из трех направлений будут двигаться $N/3$ молекул, причем половина из них (т.е. $N/6$) движутся вдоль данного направления в одну сторону, а половина в противоположную (рис.7.2). Это является следствием того, что все направления движения молекул равновероятны. При упругом ударе о стенку направление скорости молекулы изменяется на противоположное, а модули скорости v и импульса mv не изменяются (рис. 7.3). В дальнейшем импульс будем обозначать

буквой K , а давление p . Пусть за время Δt о стенку сосуда ударилось N_0 молекул. Модули суммарного импульса этих N_0 молекул до удара и после удара одинаковы: $K_1 = K_2 = N_0 \cdot mv$, (7.6)

где m и v - масса и скорость молекулы. Второй закон Ньютона для N_0 молекул:

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t}, \quad (7.7)$$

где \vec{F}_1 - сила, действующая на молекулы со стороны стенки, $\Delta \vec{K}$ - приращение импульса N_0 молекул за время Δt . По III закону Ньютона сила \vec{F} , действующая на стенку со стороны молекул: $\vec{F} = -\vec{F}_1$. (7.8)

Поэтому из равенств (7.7) и (7.8) получаем:

$$\vec{F} = -\frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t} = -\frac{\vec{K}_2 - \vec{K}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{K}_1 - \vec{K}_2}{\Delta t}.$$

Перепишем последнее равенство в проекциях на ось x с учетом соотношения (7.6). Тогда проекция F_x силы на ось x :

$$F_x = \frac{K_{1x} - K_{2x}}{\Delta t} = \frac{N_0 mv + N_0 mv}{\Delta t} = \frac{2N_0 mv}{\Delta t},$$

т.к. проекции импульсов на ось x $K_{1x} = N_0 m v$ и $K_{2x} = -N_0 m v$. Поскольку сила \vec{F} направлена вдоль оси x , то модуль силы $F = F_x = \frac{2N_0 m v}{\Delta t}$. (7.9)

Найдем число молекул N_0 , достигших стенки за время Δt . За время Δt до элемента стенки площадью ΔS долетят все молекулы, движущиеся к стенке, заключенные в объеме цилиндра с основанием ΔS и длиной $L = v\Delta t$ (рис. 7.4). Объем этого цилиндра равен $v\Delta t\Delta S$, Число молекул в этом цилиндре $nv\Delta t\Delta S$ (n - объемная концентрация молекул, т.е. число молекул в единице объема). К стенке движется $\frac{1}{6}$ часть этих молекул, поэто-

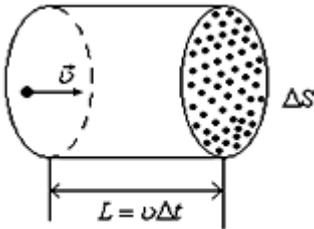


Рис. 7.4

му число молекул, ударившихся о стенку за время Δt , определяется по формуле

$$N_0 = \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S. \quad (7.10)$$

Подставим (7.10) в (7.9):

$$F = \frac{2 \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S m}{\Delta t}, \quad F = \frac{1}{3} n m v^2 \Delta S \quad (7.11)$$

В данном случае давление p , возникающее в результате ударов молекул о стенку сосуда, с учетом (7.11) определяется выражением:

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{n m v^2 \Delta S}{3 \Delta S} = \frac{n m v^2}{3}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части этого равенства на 2:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m v^2}{2}.$$

Учитывая, что $E = \frac{m v^2}{2}$ представляет собой кинетическую энергию поступательного движения молекулы, последняя формула принимает вид:

$$p = \frac{2}{3} n E. \quad (7.12)$$

Если учесть, что молекулы имеют самые разные по величине и направлению скорости, то вместо одинаковой для всех молекул энергии E в (7.12) войдет средняя кинетическая энергия $\langle E \rangle$ поступательного движения молекул:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle. \quad (7.13)$$

Выражение (7.13) называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа**. Согласно этому уравнению давление газа равно двум третям суммарной кинетической энергии поступательного движения молекул, заключенных в единице объема.

7.4 Уравнение состояния идеального газа

Уравнением состояния системы называется соотношение, связывающее параметры состояния этой системы. В простейшем случае равновесное состояние системы определяется значениями трех параметров состояния: давления p , объема V и температуры T (масса системы предполагается известной). Связь между этими параметрами может быть выражена некоторой функцией $f(p, V, T) = 0$. (7.14)

Выражение (1.4) является **уравнением состояния** данной системы.

Для идеального газа уравнение состояния имеет вид:

$$\frac{pV}{T} = B, \quad (7.15)$$

где B – константа пропорциональная массе газа.

Уравнение состояния идеального газа также можно записать в

виде: $PV = \frac{m}{M} RT$ или $PV = \nu RT$ (7.16)

где p , V , m , M - давление, объем, масса, молярная масса газа; $\frac{m}{M} = \nu$ -

количество вещества; $T = (273 + t^\circ \text{C}) \text{ K}$ - термодинамическая температура; $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$ - молярная газовая постоянная. Соотношение (7.16) называют также **уравнением Менделеева-Клапейрона**.

Представим уравнение состояния в другой форме. Для этого подставим в (7.16) количества вещества $\nu = N/N_A$ из (7.5):

$$pV = \frac{N}{N_A} RT \Rightarrow p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} RT. \quad (7.17)$$

Отношение $n = \frac{N}{V}$ - есть **объемная концентрация** молекул, (7.18)

т.е. на число молекул в единице объема. Обозначим $k = \frac{R}{N_A}$, (7.19)

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{K}}$ - постоянная Больцмана. Учитывая соотношения (7.18) и (7.19), из выражения (7.17) получим другую форму записи

уравнение состояния идеального газа:

$$p = nkT \quad (7.20)$$

7.5 Изопроцессы. Закон Авогадро. Закон Дальтона

Получим ряд частных закономерностей, вытекающих из уравнения состояния идеального газа (7.16). В частности, это так называемые уравнения изопроцессов - процессов, в которых один из термодинамических параметров не изменяется.

Изотермический процесс протекает при постоянной температуре

T и постоянной массе m газа.

Если $T=const$ и $m=const$, то из выражения

(7.16) следует, что

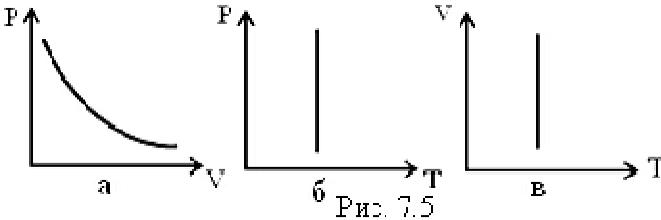


Рис. 7.5

$$pV = const \quad \text{или} \quad p_1V_1 = p_2V_2. \quad (7.21)$$

Это **уравнение изотермического процесса** (закон Бойля-Мариотта).

На рис. 7.5 а,б,в показаны графики изотермического процесса в координатах (p, V) , (p, T) , (V, T) соответственно, построенные согласно уравнению (7.21) и условию $T=const$.

Изобарный процесс протекает при постоянном давлении p и постоянной массе m газа. Если $p=const$ и $m=const$, то из выражения (7.16)

следует, что $\frac{V}{T} = \frac{mR}{pM} = const$, (7.22) т.е. **уравнение изобарного процесса**

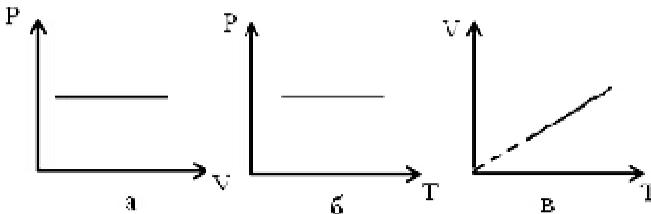


Рис. 7.6

(закон Гей-Люссака) имеет вид:

$$\frac{V}{T} = const \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (7.23)$$

На рис. 7.6 а,б,в показаны графики изобарного процесса в координатах (p, V) , (p, T) , (V, T) соответственно, построенные согласно уравнению (7.23) и условию $p=const$.

Изохорный процесс протекает при постоянном объеме V и постоянной массе m газа. Если $V=const$ и $m=const$, то из равенства (7.16) следует, что $\frac{p}{T} = \frac{mR}{VM} = const$, т.е. **уравнение изохорного процесса** (закон Шарля)

имеет вид:

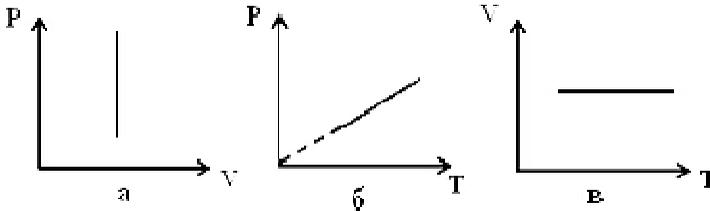
$$\boxed{\frac{p}{T} = const} \text{ или } \boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}} \quad (7.24)$$


Рис. 7.7

На рис. 7.7 а,б,в показаны графики изохорного процесса в координатах (p, V) , (p, T) , (V, T) соответственно, построенные согласно уравнению (7.24) и условию $V=const$.

Из уравнения (7.15) при условии $m = const$ вытекает **объединенный газовый закон** (уравнение Клапейрона):

$$\boxed{\frac{pV}{T} = const} \text{ или } \boxed{\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}} \quad (7.25)$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона (7.16) для количества вещества $\nu = 1$ моль: $pV_m = RT$. Откуда следует, что объем одного моля идеального газа $V_m = \frac{RT}{p}$. Из последней формулы вытекает **закон Авога-**

дро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. В частности, при нормальных условиях, т.е. при $T=273$ К и $p=1,01 \cdot 10^5$ Па, объем одного моля любого газа равен $22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль = 22,4 л/моль.

Найдем давление смеси N различных химически невзаимодействующих газов, содержащихся в сосуде объемом V . Концентрация n смеси газов равна сумме концентраций всех N компонентов данной смеси:

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots + n_N$. Подставим это выражение в уравнение состояния (7.20) $p = nkT$:

$$p = n_1 kT + n_2 kT + \dots + n_i kT + \dots + n_N kT. \quad (7.26)$$

Обозначим $p_1 = n_1 kT$, $p_2 = n_2 kT$, ..., $p_i = n_i kT$, ..., $p_N = n_N kT$

и перепишем (1.26) в виде: $p = p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_N$ или

$$p = \sum_{i=1}^N p_i, \quad (7.27)$$

где p_i - парциальное давление i -ого компонента смеси, т.е. давление, которое производил бы этот газ, если бы он один занимал весь объем сосуда при той же температуре. Выражение (7.27) есть математическое выражение **закона Дальтона**: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, входящих в нее газов.

8 ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

8.1 Распределение Максвелла

Рассмотрим идеальный газ, находящийся в равновесном состоянии. Молекулы газа движутся с различными (от 0 до ∞) скоростями. Скорость v каждой молекулы непрерывно изменяется из-за соударений с другими молекулами, как по величине, так и по направлению.

Пусть N молекул данного газа находятся в сосуде объемом V . Число dN молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, прямо пропорционально общему числу молекул N , ширине интервала dv и зависит от величины скорости v :

$$dN = f(v)Ndv, \quad (8.1)$$

где $f(v)$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от v . Этот коэффициент называется функцией распределения молекул газа по скоростям. Из равенства (8.1) получаем, что

$$f(v)dv = \frac{dN}{N}, \quad (8.2)$$

где $\frac{dN}{N}$ - доля молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, или вероятность того, что скорость молекулы лежит в интервале от v до $v+dv$. Выразим функцию распределения $f(v)$ из (8.2):

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv}. \quad (8.3)$$

Таким образом, **функция распределения** равна доле молекул, скорости которых лежат в единичном интервале скоростей.

Проинтегрируем соотношение (8.2) по всему интервалу скоростей от нуля до бесконечности:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^N \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_0^N dN = \frac{1}{N} \cdot N = 1.$$

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

(8.4)

Выражение (8.4) называют **условием нормировки** функции распределения молекул газа по скоростям. Оно означает, что вероятность того, что молекула газа имеет какое-то значение скорости в интервале от 0 до ∞ равна 1.

Применяя методы теории вероятности, Максвелл получил аналитическое выражение для функции распределения $f(v)$ молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}},$$

(8.5)

где m_0 и v - масса и скорость молекулы, k - постоянная Больцмана, T - термодинамическая температура газа. Выражение (8.5) называется **распределением Максвелла**. График функции распределения $f(v)$ Максвелла приведен на рис. 8.1. Площадь под графиком функции $f(v)$ в соответствии с выражением (2.4) равна единице. Соотношение (8.1) с учетом (2.5) примет вид:

$$dN = N \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv \quad (8.6)$$

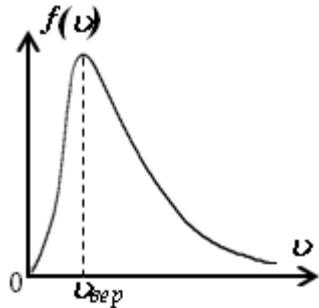


Рис. 8.1

Чтобы найти число молекул ΔN , имеющих скорости в интервале от v_1 до v_2 , необходимо равенство (8.6) проинтегрировать:

$$\Delta N = N \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_{v_1}^{v_2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv. \quad (8.7)$$

Установленный Максвеллом закон распределения молекул по скоростям (8.5) и все вытекающие из него следствия справедливы только для газа, находящегося в равновесном состоянии, а число молекул N должно быть достаточно велико.

8.2 Характеристические скорости молекул газа

Наиболее вероятной скоростью $v_{вер}$ называют скорость, для которой число молекул со скоростями в интервале от v до $v + dv$ максимально. Из формулы (8.1) следует, что при неизменном количестве молекул N и фиксированном интервале скоростей ($dv = \text{const}$) число молекул dN будет иметь максимальное значение, если функция распределения $f(v)$ примет максимальное значение. В максимуме (экстремуме) производная от функции распределения $f(v)$ по скорости v равна нулю:

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_{вер}} = 0. \quad (8.8)$$

Возьмем производную от функции (8.5) и приравняем ее к нулю::

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT}\right) = 0$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения $v = 0$ и $v = \infty$ соответствуют минимумам $f(v)$ (см. рис. 8.1). Значение v , обращающее в нуль выражение, стоящее в скобках, представляет собой искомую $v_{вер}$.

$$2 - \frac{m_0 v_{вер}^2}{kT} = 0 \Rightarrow \frac{m_0 v_{вер}^2}{kT} = 2$$

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad (8.9)$$

Формула (8.9) позволяет вычислить **наиболее вероятную скорость** молекул данного газа при любой температуре T . Это значение скорости соответствует максимуму на графике функции $f(v)$ распределения Максвелла (рис. 8.1). Для удобства вычислений в выражении (2.9) можно перейти от молекулярной массы m_0 к молярной массе M газа. Преобразуем формулу (8.9), воспользовавшись соотношениями (7.3) и (7.19):

$$m_0 = \frac{M}{N_A}, \quad k = \frac{R}{N_A} \Rightarrow \frac{k}{m_0} = \frac{R}{M} \quad (8.10)$$

Подставив (8.10) в формулу (8.9), получим:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (8.11)$$

где R - молярная газовая постоянная; M - молярная масса газа.

Распределение Максвелла (8.5) можно значительно упростить, если перейти к **относительной скорости**

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}} \Rightarrow v = uv_{\text{вер}}. \quad (8.12)$$

Учитывая эти соотношения и формулу для $v_{\text{вер}}$, выражение (8.6) преобразуется к виду:

$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \cdot u^2 \cdot e^{-u^2} \cdot du,$$

где dN - число молекул, относительные скорости которых заключены в интервале от u до $u+du$. Поэтому функция распределения Максвелла молекул по относительным скоростям будет иметь вид:

$$f(u) = \frac{dN}{N \cdot du} \Rightarrow f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot u^2 \cdot e^{-u^2} \quad (8.13)$$

Средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$ равна среднему значению модуля скорости. Для ее нахождения нужно сумму модулей скоростей

$\sum_{i=1}^N v_i$ всех молекул газа разделить на число N молекул:

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N} = \frac{\int_0^{\infty} v dN}{N} = \frac{\int_0^{\infty} v f(v) N dv}{N} = \frac{N \int_0^{\infty} v f(v) dv}{N}.$$

Сократив последнее выражение на N , имеем:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) dv. \quad (8.14)$$

После подстановки в (8.14) выражения для функции распределения (8.5) и вычисления получившегося при этом интеграла получим формулу для **средней арифметической скорости**:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (8.15)$$

Вторая из этих формул получена из первой с помощью равенства (8.10). Обозначения величин здесь те же, что в формулах (8.9) и (8.11).

Средняя квадратичная скорость $v_{кв}$ равна корню квадратному из среднего значения квадрата скорости: $v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. (8.16)

Для нахождения среднего значения квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ нужно сумму квадратов скоростей $\sum v_i^2$ всех молекул разделить на их число N :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 dN}{N} = \frac{N \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv}{N}.$$

Сократив последнее выражение на N , имеем:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv. \quad (8.17)$$

После подстановки в (8.17) выражения для функции распределения (8.5) и вычисления получившегося при этом интеграла получим

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}. \quad (8.18)$$

Воспользовавшись равенствами (8.16) и (8.18) приходим к формуле для нахождения средней квадратичной скорости:

$$\boxed{v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}} \quad \text{или} \quad \boxed{v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}. \quad (8.19)$$

Вторая из этих формул получена из первой с помощью равенства (8.10).

8.3 Барометрическая формула

Известно, что атмосферное давление убывает с высотой. Найдем зависимость атмосферного давления p от высоты h над поверхностью Земли. Атмосферное давление p_0 у поверхности Земли (на высоте $h=0$) создается весом всей земной атмосферы. Атмосферное давление p на высоте h обусловлено весом слоев воздуха, расположенных выше этой высоты. Выделим на высоте h столб воздуха высотой dh (рис. 8.2). Разность давлений p и $p+dp$ на высотах h и $h+dh$ определяется весом столба высоты dh и равно гидростатическому давлению $\rho g dh$ этого столба: $p - (p+dp) = \rho g dh$, где ρ - плотность воздуха на высоте h (высота dh столба очень мала и плотность

воздуха в его пределах можно считать постоянной). Из последнего равенства получаем: $-dp = \rho g dh$ или $dp = -\rho g dh$ (8.20)

Здесь знак минус в показывается, что с увеличением высоты давление уменьшается (если приращение высоты $dh > 0$, то приращение давления $dp < 0$).

Уравнение (8.20) содержит три переменные величины: p , ρ и h . Чтобы можно было его решить, выразим плотность ρ через давление p с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \quad (8.21)$$

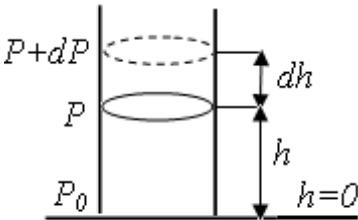


Рис . 8.2

Формула (8.20) с учетом равенства (8.21) примет вид:

$$dp = -\frac{pMg}{RT} dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh. \quad (8.22)$$

Будем считать, что температура, молярная масса воздуха и ускорение свободного падения не зависят от высоты ($T = const$, $M = const$, $g = const$). Тогда, интегрируя равенство (8.22), получим:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh, \Rightarrow \ln p \Big|_{p_0}^p = -\frac{Mg}{RT} h \Big|_0^h \Rightarrow$$

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{Mgh}{RT} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mgh}{RT}.$$

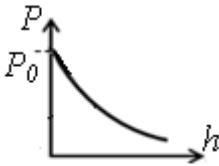


Рис . 8.3

Потенцируем последнее равенство: $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$.

Откуда получаем **барометрическую формулу**:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (8.23)$$

где p – давление на высоте h , p_0 – давление на высоте $h=0$, принятой за ноль. Из (8.23) следует, что атмосферное давление убывает с высотой по экспоненциальному закону (рис.8.3).

8.4 Распределения Больцмана

Преобразуем барометрическую формулу (8.23), подставив в неё соотноше-

ние (8.10) $\frac{k}{m_0} = \frac{R}{M}$ и (7.21) $p = nkT$, $p_0 = n_0 kT$:

$$nkT = n_0 kT e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}.$$

Сократив обе части равенства на kT , получим закон распределения концентрации молекул по высоте:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \quad (8.24)$$

где n - концентрация молекул на высоте h , n_0 - концентрация молекул на высоте $h=0$, m_0 - масса молекулы.

В показателе экспоненты формулы (8.24) стоит потенциальная энергия молекулы в поле силы тяжести $E_i = m_0 gh$. Поэтому формулу (8.24) можно написать следующим образом:

$$n = n_0 e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (8.25)$$

Здесь n_0 - концентрация молекул в том месте, для которого E_n принята равной нулю, n - концентрация молекул в том месте, где потенциальная энергия молекулы равна E_n . Из формулы (8.25) следует, что концентрация молекул больше там, где меньше их потенциальная энергия. Больцман доказал, что распределение (8.25) справедливо не только в случае поля силы тяжести, но и в любом потенциальном силовом поле для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. Поэтому функцию (8.25) называют **распределением Больцмана**.

9 ТЕРМОДИНАМИКА

9.1 Степени свободы. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

Числом степеней свободы i механической системы называется количество независимых величин (координат), с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве, или число независимых возможных перемещений системы. Свободная материальная точка может двигаться поступательно по трем взаимно перпендикулярным направлениям (вдоль координатных осей x, y, z). При этом положение материальной точки определяется тремя ее координатами x, y, z (рис. 9.1a). Следовательно, свободная материальная точка имеет три поступательные степени свободы. Молекулу **одноатомного газа** можно считать материальной точкой,

поэтому она имеет три степени свободы ($i=3$).

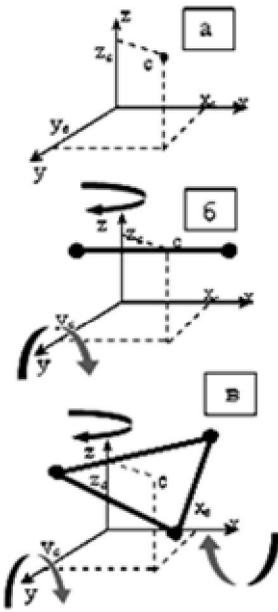


Рис. 9.1

Молекула двухатомного газа в первом приближении представляет собой два атома, жестко связанных между собой (рис. 9.1б). Кроме трех степеней свободы поступательного движения (трех координат центра масс С молекулы), такая молекула имеет еще две степени свободы вращательного движения относительно осей z и y. Вращение относительно третьей оси x не вносит вклада в энергию молекулы, так как ее момент инерции относительно этой оси равен нулю. Таким образом, **двухатомная молекула** с жесткой связью между атомами имеет 5 степеней свободы ($i=5$). Если в многоатомной молекуле атомы образуют линейную цепочку и связь между атомами жесткая, то такая молекула имеет так же 5 степеней свободы (три поступательных и две вращательных).

Многоатомная молекула с жесткой связью между атомами, состоящая из трех (рис. 9.1в) или более атомов (не расположенных на одной прямой), имеет 6 степеней свободы

($i=6$): три поступательных (три координаты центра масс С) и три вращательных (возможны вращения относительно трех осей x,y,z). Такие же степени свободы имеет и абсолютно твердое тело, для которого также $i=6$.

Для определения числа степеней свободы молекул, атомы которых могут смещаться друг относительно друга, вводятся дополнительные степени свободы колебательного движения.

При любом числе степеней свободы молекулы три из них поступательные. Чтобы найти среднюю энергию поступательного движения молекул, приравняем правые части формул (7.13) и (7.21): $p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle$ и

$$p = nkT: \quad \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle = nkT. \text{ Откуда следует, что средняя кинетическая}$$

энергия поступательного движения

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (9.1)$$

Т.к. любая молекула имеет три поступательные степени свободы и ни одна из них не имеет преимуществ перед другими, то энергия $\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2}kT$ поровну распределяется между всеми тремя степенями свободы. Поэтому на каждую из поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. В классической статистической физике выводится **закон равнораспределения энергии по степеням свободы**: на каждую степень свободы (поступательную или вращательную) молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия равная $\frac{1}{2}kT$.

Из закона равнораспределения энергии по степеням свободы следует, что **средняя кинетическая энергия** молекул определится по формуле:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (9.2)$$

где i - число степеней свободы молекулы, k - постоянная Больцмана.

Модель молекулы в виде системы жестко связанных между собой атомов является весьма приближенной. Во многих случаях необходимо принимать во внимание возможность относительных смещений атомов в молекуле, т.е. вводить в рассмотрение колебательные степени свободы молекулы. Колебательная степень свободы должна обладать в двое большей энергетической емкостью по сравнению с поступательной и вращательной. Это объясняется тем, что поступательное и вращательное движение молекулы связано с наличием только кинетической энергии, в то время как колебательное движение связано с наличием и кинетической, и потенциальной энергий, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Поэтому на каждую колебательную степень свободы должны приходиться в среднем энергия равная kT ($\frac{1}{2}kT$ в виде кинетической энергии и $\frac{1}{2}kT$ - в виде потенциальной). Поэтому для определения энергии молекулы по формуле (8.31) необходимо считать, что

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

Здесь $i_{\text{пост}}, i_{\text{вр}}, i_{\text{кол}}$ - число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы.

9.2. Внутренняя энергия. Внутренняя энергия идеального газа

Внутренняя энергия U тела складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул, потенциальной энергии взаимодействия

между молекулами и внутримолекулярной энергии (энергии электронных оболочек атомов и внутриядерной энергии).

Внутренняя энергия - однозначная функция состояния системы.

Это означает, что в каждом определенном состоянии система имеет определенное значение внутренней энергии, и это значение не зависит от того, посредством каких процессов система пришла в это состояние. Следовательно, и **приращение внутренней энергии** ΔU не зависит от вида процесса перехода:

$$\Delta U = U_2 - U_1, \quad (9.3)$$

где U_1 и U_2 - внутренняя энергия в начальном и конечном состоянии. Если в результате каких-либо процессов система возвращается в исходное состояние, то полное приращение внутренней энергии равно нулю. Во все термодинамические формулы входит не сама внутренняя энергия U системы, а ее приращение ΔU при изменении состояния системы. Поэтому внутренняя энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. В частности, в термодинамике изучаются процессы, в которых внутримолекулярная энергия не изменяется, поэтому эту энергию можно не включать во внутреннюю энергию.

Для идеального газа можно также пренебречь силами межмолекулярного взаимодействия. Поэтому **внутренняя энергия идеального газа** равна сумме кинетических энергий хаотического движения всех его молекул:

$$U = \sum E_{ki}, \quad (9.4)$$

где E_{ki} - кинетическая энергия i -ой молекулы. Средняя кинетическая энергия молекул

$$\langle E \rangle = \frac{\sum E_{ki}}{N},$$

где N - число молекул в данном объеме газа. Откуда с учетом (9.4):

$$U = \sum E_{ki} = N \cdot \langle E \rangle.$$

Подставим в это выражение среднюю кинетическую энергию молекул,

которая определяется по формуле (9.2): $\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT$.

Получим, что
$$U = N \cdot \frac{i}{2} kT. \quad (9.5)$$

Число молекул найдем из (7.5): $N = N_A \nu$, где N_A - постоянная Авогадро, и подставим в (9.5):

$$U = N_A \frac{i}{2} \nu kT$$

Но $kN_A = R$ и выражение для **внутренней энергии** U идеального газа

примет вид:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT, \quad (9.6)$$

где i – число степеней свободы молекулы, $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества, m и M – масса и молярная масса газа, R – молярная газовая постоянная, T – термодинамическая температура.

Дифференцируя равенство (9.6), получим выражение для элементарного (бесконечно малого) **приращения внутренней энергии идеального газа**:

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT = \frac{i}{2} \nu R dT. \quad (9.7)$$

Пусть температура идеального газа изменилась от T_1 до T_2 . При этом в соответствии с формулой (9.6) его внутренняя энергия изменится от

$$U_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 \text{ до } U_2 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_2, \text{ а приращение внутренней энергии:}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_2 - \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1),$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T, \quad (9.8)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ – приращение температуры – разность между конечной T_2 и начальной T_1 температурами.

9.3 Работа при изменении объема

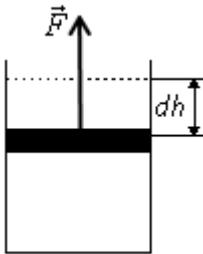


Рис. 9.2

Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем (рис. 9.2). Пусть газ очень медленно (обратимо) начинает расширяться и перемещает поршень на расстояние dh , настолько малое, что давление газа p можно считать в течение процесса расширения неизменным. Газ, действуя на поршень с силой $F = pS$, совершает при расширении над поршнем элементарную работу:

$$dA = F dh \cos 0^\circ = p S dh,$$

где $\alpha = 0^\circ$ – угол между силой \vec{F} и перемещением $d\vec{h}$ поршня, $S dh = dV$ – элементарное приращение объема газа. Поэтому **элементарная работа при изменении объема** $dA = p dV$. (9.9)

Работа при конечном изменении объема вычисляется как сумма элементарных работ вида (9.9), т.е. путем интегрирования:

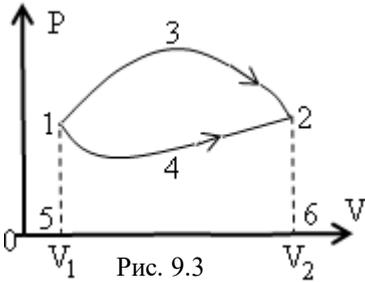


Рис. 9.3

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (9.10)$$

где V_1 и V_2 - начальный и конечный объемы. Выражения для работы (9.9) и (9.10) справедливы при изменении объема твердых, жидких и газообразных тел.

Сравним работы при протекании двух различных процессов 132 и 142 (рис.9.3), начальные и конечные состояния системы в которых одинаковы. Обе работы A_{132} и A_{142} находятся по формуле (9.10), в которую нужно подставить зависимости давления от объема для соответствующих процессов. Т.к. в формуле для работы (9.10) стоит определенный интеграл, который численно равен площади под графиком процесса на рис. 9.3, то работа A_{132} численно равна площади криволинейной трапеции 513265, а работа A_{142} - площади криволинейной трапеции 514265. Следовательно, эти работы различны: $A_{132} \neq A_{142}$, причем $A_{132} > A_{142}$. Т.о., **работа A есть функция процесса.**

Из формулы (9.9) следует, что при расширении тела совершается положительная работа, т.к. в этом случае приращение dV объема положительно ($dV > 0$, $dA > 0$). Поэтому работы A_{132} и A_{142} положительны (рис. 9.3). При сжатии тела приращение dV объема отрицательно, и работа тоже отрицательна ($dV < 0$, $dA < 0$). Поэтому, если провести процесс 231, то работа в этом процессе будет равна по величине и противоположна по знаку работе в процессе 132: $A_{231} = -A_{132}$.

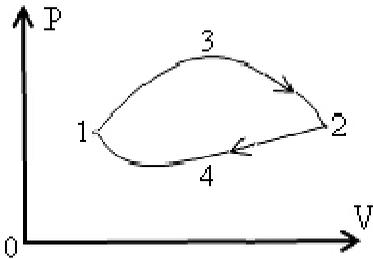


Рис. 9.4

Рассмотрим замкнутый круговой процесс (цикл) 1324 (рис. 9.4). Из геометрической интерпретации формулы (9.10) следует, что работа A_{132} положительна и численно равна площади под кривой 132, работа A_{241} отрицательна и равна площади под кривой 241, а вся работа за цикл $A = A_{132} + A_{241}$ положительна и равна

площади, охватываемой кривой 1324, изображающей цикл.

Совершение работы системой сопровождается перемещением внешних тел (например, поршня), воздействующих на систему. Работа A , совершаемая системой над внешними телами, и работа A' , совершаемая внешними телами над системой в ходе того же процесса, отличаются лишь знаком: $A = -A'$.

9.4 Теплопередача. Количество теплоты. Теплоемкость. Первое начало термодинамики

Сообщение телу тепла не связано с перемещением внешних тел. В этом случае молекулы более нагретого тела передают энергию молекулам менее нагретого тела (т.е. совершается микроскопическая работа). Передача энергии происходит при этом также через излучение. Совокупность микроскопических процессов, приводящих к передаче энергии от одного тела к другому, называется **теплопередачей**. Количество энергии, переданное от одного тела к другому посредством теплопередачи, характеризуется **количеством теплоты** Q (теплотой). Если система получает тепло, то $Q > 0$; если отдает, то $Q < 0$.

Теплоемкость тела равна количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}, \quad (9.11)$$

где dQ – количество теплоты, сообщение которого повышает температуру тела на dT .

Теплоемкость одного моля вещества называется **молярной теплоемкостью**, она равна количеству теплоты, которое нужно сообщить одному молю вещества, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C_M = \frac{dQ}{\nu \cdot dT} = \frac{C_{\text{тела}}}{\nu}, \quad (9.12)$$

где dQ – количество теплоты, сообщение которого повышает температуру ν молей вещества на dT .

Теплоемкость одного килограмма вещества называется **удельной теплоемкостью**, она равна количеству теплоты, которое нужно сообщить одному килограмму вещества, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C_{\text{уд}} = \frac{dQ}{m dT} = \frac{C_{\text{тела}}}{m}, \quad (9.13)$$

где dQ – количество теплоты, сообщение которого повышает температуру массы m вещества на dT .

Сравнение формул (9.12) и (9.13) с учетом того, что $v = \frac{m}{M}$, дает

связь между удельной и молярной теплоемкостями:

$$\boxed{C_{уд} = \frac{C_M}{M}} \quad (9.14)$$

Так как при сообщении системе тепла изменяется внутренняя энергия системы и система совершает работу, то закон сохранения энергии для тепловых процессов может быть записан следующей форме:

$$\boxed{Q = \Delta U + A}, \quad (9.15)$$

где Q - количество теплоты, сообщенное системе, $\Delta U = U_2 - U_1$ - приращение внутренней энергии системы, A - работа, совершенная системой. Закон сохранения энергии в виде (9.15) называют первым **началом термодинамики**: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.

При вычислении работы и теплоты приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, соответствующих бесконечно малому изменению параметров системы. Первое начало термодинамики для элементарного процесса имеет вид:

$$\boxed{dQ = dU + dA}. \quad (9.16)$$

Здесь dQ - элементарное количество теплоты, dA - элементарная работа, dU - приращение внутренней энергии системы в ходе данного элементарного процесса.

Т.к. работа - функция процесса, то из равенства (9.14) следует, что **количество теплоты Q также является функцией процесса.**

9.5 Теплоемкость идеального газа. Уравнение Майера

Так как количество теплоты Q является функцией процесса, то из (9.11) следует, что величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание. Найдем теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении. В первом случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме (обозначается C_V), во втором случае теплоемкостью при постоянном давлении (C_P). Найдем молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме ($V = const$) и постоянном давлении ($p = const$).

а) $V = const$.

Молярная теплоемкость определяется по формуле (9.12):

$$C_V = \frac{dQ}{v dT}. \quad (9.17)$$

Запишем первое начало термодинамики (9.16): $dQ=dU+dA$. Т. к. $V = const$, то приращение объема $dV=0$, и элементарная работа газа (9.9) $dA=pdV = 0$, а первое начало термодинамики примет вид: $\boxed{dQ = dU}$, (9.18) т.е. все тепло, сообщенное газу в изохорном процессе, идет на увеличение его внутренней энергии. Приращение внутренней энергии (9.7): $dU = \frac{i}{2} \nu R dT$, подстановка которой в (9.18) дает: $dQ = \frac{i}{2} \nu R dT$. С учетом этого выражения равенство (9.17) принимает вид:

$$C_V = \frac{\frac{i}{2} \nu R dT}{\nu dT} \Rightarrow \boxed{C_V = \frac{i}{2} R}, \quad (9.19)$$

где i – число степеней свободы молекулы идеального газа, R – молярная газовая постоянная. Т.о., **молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме** (9.19) зависит только от числа степеней свободы.

б) $p = const$

Молярная теплоемкость определяется по формуле (9.12):

$$C_P = \frac{dQ}{\nu dT}. \quad (9.20)$$

Подставим в первое начало термодинамики (9.16) $dQ=dU+dA$ равенства (9.7) и (9.9):

$$dQ = \frac{i}{2} \nu R dT + p dV. \quad (9.21)$$

Выразим в этом выражении dV через dT . Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона (7.16): $pV = \nu RT$. Продифференцируем это равенство при $p = const$, учитывая, что m , M и R - постоянные величины: $p dV = \nu R dT$. (9.22)

Формула (9.21) с учетом равенства (9.22) примет вид:

$$dQ = \frac{i}{2} \nu R dT + \nu R dT = \nu R dT \left(\frac{i+2}{2} \right). \quad (9.23)$$

Подставив (9.23) в (9.20) получим:

$$C_P = \frac{\nu R dT \left(\frac{i+2}{2} \right)}{\nu dT}; \quad \boxed{C_P = \frac{i+2}{2} R}. \quad (9.24)$$

Т.о. **молярная теплоемкость идеального газа** (9.24) определяется только числом степеней свободы i . Как следует из выражений (9.19) и (9.24), молярные теплоемкости C_V и C_P данного идеального газа являются посто-

янными величинами, не зависящими от параметров состояния газа, в частности от температуры.

Найдем разность выражений (9.24) и (9.19):

$$C_p - C_V = \frac{i+2}{2} R - \frac{i}{2} R = \frac{i}{2} R + R - \frac{i}{2} R,$$

$$\boxed{C_p - C_V = R}. \quad (9.25)$$

Равенство (9.25) называется **уравнением Майера**. Оно показывает, что разность молярных теплоемкостей идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме равна молярной газовой постоянной.

9.6 Адиабатный процесс. Уравнение адиабаты идеального газа

Адиабатным называется процесс, происходящий без теплообмена с внешней средой ($dQ = 0$). Близки к адиабатным все быстро протекающие процессы.

Запишем первое начало термодинамики (9.16): $dQ = dU + dA$. Т.к. при адиабатном процессе $dQ = 0$, то **первое начало термодинамики для адиабатного процесса** принимает вид: $\boxed{dU + dA = 0}$. (9.26)

Получим уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатном процессе. Подставим в (9.26) выражения для работы (9.9) $dA = pdV$ и приращения внутренней энергии (9.7) $dU = \frac{i}{2} \nu R dT = \nu C_V dT$, в котором

$$\text{учли (9.19), что } C_V = \frac{i}{2} R: \quad \nu C_V dT + pdV = 0. \quad (9.27)$$

Соотношение (9.27) содержит три параметра состояния p , V и T , причем все они меняются при протекании адиабатного процесса. Чтобы уменьшить число переменных величин в (9.27), воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона (7.16): $pV = \nu RT$. Дифференцирование этого уравнения при постоянных ν и R дает:

$$Vdp + pdV = \nu R dT \Rightarrow dT = \frac{Vdp + pdV}{\nu R}. \quad (9.28)$$

Подставляя в (9.27) выражение (9.28) для dT , получим:

$$\nu C_V \frac{Vdp + pdV}{\nu R} + pdV = 0. \quad (9.29)$$

Проведем в (9.29) сокращения и учтем уравнение Майера (9.25):

$$\frac{C_V(Vdp + pdV)}{C_P - C_V} + pdV = 0. \quad (9.30)$$

Приведем равенство (9.30) к общему знаменателю, который можно отбросить, а затем выполним алгебраические преобразования:

$$C_V(Vdp + pdV) + (C_P - C_V)pdV = 0,$$

$$C_VVdp + C_VpdV + C_PpdV - C_VpdV = 0, \quad C_VVdp + C_PpdV = 0.$$

Разделим последнее соотношение на произведение pVC_V :

$$\frac{dp}{p} + \frac{C_P dV}{C_V V} = 0. \quad (9.31)$$

Преобразуем (9.31), обозначив $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, (9.32)

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \quad (9.33)$$

Дифференциальное уравнение (9.33) можно решить методом разделения переменных. Для этого перенесем слагаемое, содержащее V , в правую часть, а затем проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}, \quad \int \frac{dp}{p} - \gamma \int \frac{dV}{V}, \quad \ln p = -\gamma \ln V + \ln const,$$

где постоянную интегрирования обозначили $\ln const$. Проведем дальнейшие алгебраические преобразования:

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln const, \quad \ln p + \ln V^\gamma = \ln const, \quad \ln pV^\gamma = \ln const.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\boxed{pV^\gamma = const} \quad \text{или} \quad \boxed{p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma} \quad (9.34)$$

Равенство (9.34) называют **уравнением адиабатного процесса в переменных p и V** или **уравнением Пуассона**. В этом уравнении согласно

формуле (9.32) (9.35)

$$\boxed{\gamma = \frac{C_P}{C_V}}$$

есть **коэффициент Пуассона**, который равен отношению теплоемкости C_P при постоянном давлении к теплоемкости C_V при постоянном объеме. Подставляя в (9.35) выражения (9.24) и (9.19) можно выразить **коэффициент Пуассона через число степеней свободы i** :

$$\boxed{\gamma = \frac{i+2}{i}}. \quad (9.36)$$

Получим уравнение адиабатного процесса в переменных V и T . Для этого перепишем уравнение Пуассона (9.34) в виде $pV \cdot V^{\gamma-1} = const$ и заменим в нем первый сомножитель правой частью уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$:

$$\nu RT \cdot V^{\gamma-1} = const \quad \text{или} \quad T \cdot V^{\gamma-1} = \frac{const}{\nu R}.$$

Т.к. в правой части последнего равенства содержатся только постоянные величины, то их можно заменить одной постоянной:

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = const} \quad \text{или} \quad \boxed{T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}}. \quad (9.37)$$

Выражение (3.35) представляет собой **уравнение адиабатного процесса в переменных V и T** . Т.к. в константу этого уравнения мы включили νR , то константы в формулах (3.32) и (3.35) имеют неодинаковые значения. Если выразить объем V из уравнения Менделеева-Клапейрона и подставить полученное выражение в уравнение Пуассона (3.32), то, проведя некоторые алгебраические преобразования, можно получить **уравнение адиабатного процесса в переменных p и T** :

$$\boxed{TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const} \quad \text{или} \quad \boxed{T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \quad (9.38)$$



Рис. 9.5

На рис. 9.5 представлены графики изотермического и адиабатного процессов, построенные согласно уравнениям (7.22) $pV = const$ и (9.34) $pV^\gamma = const$. Соответствующие этим графикам кривые называются изотермой и адиабатой. Видно, что адиабата идет круче, чем изотерма

9.7 Работа и первое начало термодинамики при различных процессах

Изохорный процесс протекает при постоянном объеме ($V = const$). Поэтому при этом процессе приращение объема $dV=0$, а следовательно и элементарная работа $dA = pdV = 0$. Работа A при конечном изменении объема равна сумме элементарных работ и тоже равна нулю. Таким образом, **работа при изохорном процессе $A=0$** . С учетом этого **первое начало термодинамики $dQ=dU+dA$ или $Q=\Delta U+A$ для изохорного процесса** принимает вид: $\boxed{dQ = dU}$ и $\boxed{Q = \Delta U}$. (9.39)

Выражения (9.30) показывают, что **при изохорном процессе** все тепло, сообщенное системе, идет на приращение ее внутренней энергии.

Изобарный процесс протекает при постоянном давлении ($p=const$). Поэтому в формуле (9.9) для работы давление p можно вынести за знак интеграла:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = pV \Big|_{V_1}^{V_2} = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Т.о., **работа при изобарном процессе** равна произведению давления p на приращение объема ΔV : $A = p\Delta V$, (9.40)

где приращение объема $\Delta V = V_2 - V_1$ равно разности между конечным и начальным объемами.

Изотермический процесс протекает при постоянной температуре ($T = const$). Зависимость давления газа от его объема для этого процесса можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}$.

Подставляя последнее равенство в формулу (9.10) и интегрируя, получим:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

В последнем выражении количество вещества $\nu = \frac{m}{M}$. Поэтому формулу для **работы при изотермическом процессе** можно записать в виде

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (9.41)$$

Т.к. рассматриваемый процесс протекает при постоянной температуре, то приращения температуры $dT=0$ и $\Delta T=0$, а следовательно равны нулю и приращения внутренней энергии (9.7) $dU = \frac{i}{2} \nu R dT = 0$ и (9.8)

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = 0. \text{ Т.о. при изотермическом процессе приращение}$$

внутренней энергии равно нулю: $dU=0$ и $\Delta U=0$. (9.42)

Поэтому **первое начало термодинамики** $dQ=dU+dA$ или $Q=\Delta U+A$ для **изотермического процесса** принимает вид: $dQ=dA$ и $Q=A$. (9.43)

Выражения (9.43) показывают, что при изотермическом процессе все тепло, сообщенное системе, идет на совершение системой работы.

Адиабатный процесс протекает без теплообмена с окружающей средой ($dQ=0$ и $Q=0$). Для **адиабатного процесса** первое начало термодинамики принимает вид: $dU+dA=0$ и $\Delta U+A=0$. (9.44)

Выразим из (9.44) работу:

$$\boxed{dA = -dU} \text{ и } \boxed{A = -\Delta U}. \quad (9.45)$$

Из (9.45) следует, что при адиабатном расширении газ совершает работу за счет убыли внутренней энергии ($A > 0$, $\Delta U < 0$, $\Delta T < 0$), а его температура уменьшается. При сжатии газа внешними силами (самопроизвольно газ сжиматься не может) работа газа отрицательна, а его внутренняя энергия и температура увеличиваются ($A < 0$, $\Delta U > 0$, $\Delta T > 0$). Чтобы получить формулу для нахождения работы при адиабатном процессе подставим в (9.45) формулу (9.8):

$$A = -\Delta U = -\frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = -\frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2).$$

Таким образом, **работа идеального газа при адиабатном процессе**

$$\boxed{A = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2)}. \quad (9.46)$$

9.8 Понятие об энтропии. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики не позволяют судить о направленности процессов. Очевидно, что должны существовать общие закономерности, указывающие направленность этих процессов. Эти закономерности должны быть связаны с качественными особенностями хаотического (теплого) движения молекул.

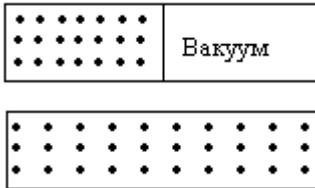


Рис. 9.6

Рассмотрим расширение газа в пустоту (рис. 3.5). Пусть в одной из половин разделенного перегородкой сосуда имеется газ, а в другой половине – вакуум. Если убрать перегородку, газ заполнит весь сосуд. Обратный процесс невозможен – молекулы газа самопроизвольно никогда не соберутся в левой половине сосуда. Следовательно, процесс расширения газа в

пустоту является необратимым. В этом процессе начальное состояние, когда газ находится в левой половине сосуда в первый момент после удаления перегородки, является неравновесным, а конечное, когда газ заполняет весь сосуд – равновесным. В начальном состоянии степень упорядоченности молекул больше, а в конечном – меньше: в начальном состоянии любую молекулу можно обнаружить только в левой половине сосуда, а в конечном – состоянии или в левой или в правой. Таким образом, в изолированной системе процесс идет от более упорядоченного состояния к менее упорядоченному.

Энтропия (S) - функция состояния системы, пропорциональная степени беспорядка системы (чем выше степень беспорядка, тем больше энтропия). Из приведенного примера следует, что в изолированной системе процесс протекает так, что энтропия либо увеличивается (необратимый процесс), либо не меняется (равновесное состояние, либо обратимый процесс).

Второе начало термодинамики утверждает, что энтропия изолированной системы не может убывать:

$$\boxed{dS \geq 0} \quad (9.47)$$

где dS – бесконечно малое приращение энтропии. Знак «>» соответствует необратимому процессу и означает увеличение энтропии; «=» - обратимому процессу и равновесному состоянию, когда энтропия изолированной системы остается постоянной ($S=const$).

Если неизолированной системе, имеющей температуру T , сообщить некоторое количество теплоты dQ , то скорости хаотического движения молекул увеличатся и степень беспорядка (энтропия) возрастет. Поэтому можно сделать вывод, что приращение энтропии dS прямо пропорционально количеству теплоты dQ : $dS \sim dQ$. Когда температура T системы мала (интенсивность хаотического движения тоже мала), то сообщение количества теплоты dQ значительно увеличит скорости хаотического движения молекул, существенно возрастет степень беспорядка, а, следовательно, и энтропия. Если же температура большая, то сообщение тепла dQ в малой степени изменит скорости хаотического движения молекул и незначительно увеличит энтропию. Из этих рассуждений следует, что приращение энтропии dS обратно пропорционально температуре T : $dS \sim \frac{1}{T}$.

В термодинамике доказывается, что для неизолированной системы справедливо следующее соотношение:

$$\boxed{dS \geq \frac{dQ}{T}}. \quad (9.48)$$

Здесь знак «>» - для необратимого процесса, «=» - для обратимого процесса. Для изолированной системы $dQ = 0$ и из формулы (9.48) вытекает второе начало термодинамики (9.47).

Из соотношения (9.48) следует, что, т.к. для адиабатного процесса $dQ = 0$, то для **обратимого адиабатного процесса** $\boxed{dS = 0}$ и $\boxed{S = const}$. Поэтому обратимый адиабатный процесс называют изэнтропийным.

Найдем приращение ΔS энтропии в обратимом изотермическом процессе, для которого из (9.48) имеем: $dS = \frac{dQ}{T}$. Тогда конечное прира-

значение ΔS энтропии можно найти путем интегрирования последнего равенства с учетом того, что $T = \text{const}$:

$$\Delta S = \int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_0^Q dQ = \frac{Q}{T}.$$

Таким образом, при **обратимом изотермическом процессе приращение** ΔS энтропии равно отношению количества теплоты Q , полученного системой, к ее температуре T :

$$\Delta S = \frac{Q}{T}. \quad (9.49)$$

9.9 Принцип действия и КПД тепловой машины. КПД цикла Карно

Если система, проходя через ряд состояний, возвращается в начальное состояние, то система совершает круговой процесс или **цикл**. Периодически действующее устройство (т.е. работающее циклически), совершающее работу за счет получаемого извне количества теплоты, называется **тепловой машиной**. **Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины**

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (9.50)$$

где A - работа, совершаемая машиной за один цикл; Q_1 - количество теплоты, сообщенное рабочему телу за один цикл. Рабочее тело - термодинамическая система, совершающая круговой процесс и обменивающая энергией с другими телами.

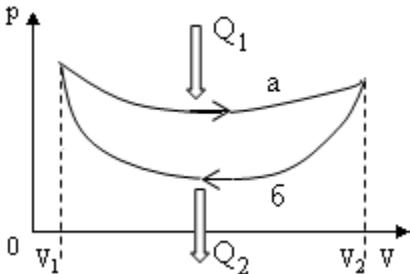


Рис .9.7

Обычно в тепловых машинах в качестве рабочего тела используют газ. На рис. (9.7) изображен цикл, в ходе которого рабочее тело (газ) сначала расширяется до объема V_2 , а затем снова сжимается до первоначального объема V_1 .

Для того чтобы совершаемая за цикл работа A была больше нуля, давление (а следовательно, и температура) при расширении должно быть больше, чем при сжатии (см. формулу для работы (9.10) и геометрический смысл определенного интеграла). Для этого рабочему телу в процессе расширения нуж-

но сообщить теплоту, а в процессе сжатия отнимать от него теплоту. Следовательно, должно быть два внешних тела, от одного из которых (теплотодатчика или нагревателя) рабочее тело получает теплоту, а другому (холодильнику или теплоприемнику) отдает тепло. Сообщенное рабочему телу количество теплоты Q_1 считается положительным, а отданное рабочим телом количество теплоты Q_2 - отрицательным (отдача количества теплоты Q_2 эквивалентно получению количества теплоты $-Q_2$). Запишем первое начало термодинамики для процессов а и б соответственно:

$$\begin{aligned} Q_1 &= U_2 - U_1 + A_1, \\ -Q_2 &= U_1 - U_2 + A_2. \end{aligned}$$

Сложим почленно левые и правые части этих равенств:

$$Q_1 - Q_2 = A_1 + A_2, \quad (9.51)$$

где $A_1 + A_2 = A$ - работа, совершаемая за один цикл. С учетом этого обозначения формула (3.49) принимает вид: $A = Q_1 - Q_2$. (9.52)

Таким образом, работа, совершаемая рабочим телом за цикл, равна суммарному количеству теплоты, полученному им за цикл. С учетом (9.52) формула (9.50) для КПД тепловой машины примет вид:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (9.53)$$

Здесь Q_1 - количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику.

Установлено, что единственный обратимый цикл, совершаемый в тепловой машине рабочим телом, вступающим в теплообмен с двумя резервуарами, может состоять только из двух изотерм и двух адиабат. Такой обратимый цикл впервые теоретически проанализирован С. Карно в 1824 г. и носит название цикла Карно. На рис. 9.8 изображен график цикла Карно, где процесс 1-2 - изотермическое расширение, 2-3 адиабатное расширение, 3-4 - изотермическое сжатие, 4-1 - адиабатное сжатие.

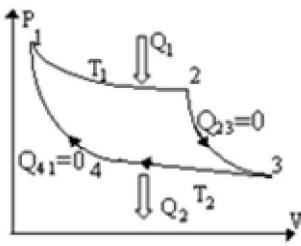


Рис. 9.8

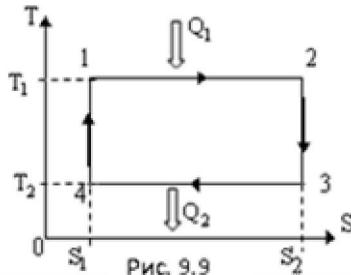


Рис. 9.9

Изобразим график цикла Карно в осях температура T и энтропия S . На диаграмме T, S (рис. 9.9) цикл Карно независимо от природы рабочего тела изображается в виде прямоугольника, стороны которого параллельны осям, где представлены те же процессы, что и на рис. 9.8. Т.к. энтропия S – функция состояния системы, а после совершения цикла система возвращается в исходное состояние, то приращение энтропии за цикл равно нулю: $\Delta S_{12341} = 0$. Приращение энтропии за цикл равно сумме приращений энтропии для каждого процесса цикла: $\Delta S_{1234} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$. Для обратимого адиабатного процесса энтропия постоянна ($S = const$), а приращения энтропии $\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0$. С учетом этого приращение энтропии за цикл: $\Delta S_{1234} = \Delta S_{23} + \Delta S_{41} = 0$. Подставим в это выражение приращения энтропии в изотермических процессах 2-3 и 3-4, найденные по формуле (9.49):

$$\Delta S_{1234} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

где минус перед Q_2 показывает, что в процессе 3-4 рабочее тело отдает тепло. Из последнего равенства следует, что $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Подставим это соотношение в формулу (9.53) для КПД, преобразовав ее следующим образом:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следовательно, **КПД цикла Карно** определяется выражением:

$$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}, \quad (9.54)$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя (теплоотдатчика) и холодильника (теплоприемника).

При выводе формулы (9.54) не делалось никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Поэтому, можно утверждать, что КПД всех обратимых машин (КПД цикла Карно) работающих в одинаковых условиях (т.е. при одинаковой температуре нагревателя и холодильника) одинаковы и определяется только температурами нагревателя и холодильника (это утверждение носит название теоремы Карно). Можно доказать, что коэффициент полезного действия необратимой машины (хотя бы один из процессов цикла необратим) всегда меньше, чем обратимой машины (цикл состоит из обратимых процессов), работающей в аналогичных условиях (т.е. с теми же нагревателем и холодильником): $\eta_{необ} < \eta_{об}$.

Формулы (9.50) и (9.53) справедливы для любых тепловых машин, формула (9.54) справедлива только для обратимых тепловых машин. Реальные тепловые машины (паровая машина, двигатель внутреннего сгорания и другие) являются необратимыми. Из вышеизложенного следует, что КПД, определяемое формулой (9.54), является предельно допустимым. Нельзя получить КПД, превышающий это значение. Поэтому КПД реальных тепловых машин всегда меньше, чем КПД цикла Карно.

10 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

10.1 Длина свободного пробега молекул газа

Молекулы газа при своем движении сталкиваются друг с другом. При этом изменяются направление движения и модуль скорости молекулы. **Эффективный диаметр молекулы** d – это минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении (рис. 10.1). **Длиной свободного пробега** L называется расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами. Эти расстояния могут быть самыми разными (рис. 10.2). Поэтому найдем среднюю длину свободного пробега молекул $\langle L \rangle$, которая является характеристикой всей совокупности молекул газа при данных значениях давления и температуры.

Т. к. за 1 секунду молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$, и совершает в среднем число столкновений $\langle Z \rangle$, то средняя длина свободного пробега: $\langle L \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle Z \rangle}$ (10.1)

Найдем среднее число столкновений $\langle Z \rangle$ за единицу времени. Для упрощения расчетов предположим, что движется только одна молекула, а все остальные молекулы неподвижны. Пусть при этом скорость движущейся молекулы равна средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. При своем движении молекула будет сталкиваться с молекулами, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояниях, меньших или равных эффективному диаметру молекул d . За единицу времени рассматриваемая молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра длиной $\langle v \rangle$ и радиусом основания d (рис. 10.3). Объем этого цилиндра равен $\langle v \rangle \pi d^2$ (т.е. произведению площади основания πd^2 на высоту $\langle v \rangle$). Умножив объем этого цилиндра на число молекул в

единице объема n , найдем число молекул в этом цилиндре, равное числу столкновений $\langle Z \rangle$ за единицу времени: $\langle Z \rangle = \langle v \rangle \pi d^2 n$ (10.2)

На самом деле все молекулы движутся, вследствие чего число столкновений определяется средней скоростью $\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$ относительного движения молекул. Заменяя в формуле (10.2) $\langle v \rangle$ на $\langle v_{\text{отн}} \rangle$, получим

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (10.3)$$

Подставив равенство (10.3) в (10.1), получаем формулу для **средней длины свободного пробега молекул**:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (10.4)$$

Т.о. средняя длина свободного пробега молекул газа зависит от эффективного диаметра d и концентрации n молекул.

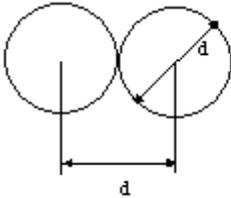


Рис. 10.1

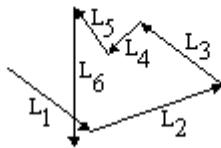


Рис. 10.2

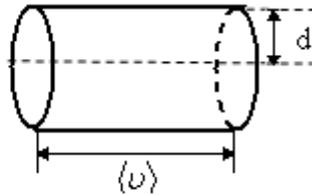


Рис. 10.3

10.2 Понятие о явлениях переноса. Теплопроводность. Диффузия. Внутреннее трение

Напомним, что равновесным является состояние системы, в котором параметры состояния одинаковы во всех точках системы. Если нарушить равновесие в системе, а затем предоставить ее самой себе, то в системе возникает процесс релаксации и она возвращается в равновесное состояние. **Явлениями переноса** называются явления, возникающие при переходе системы из неравновесного в равновесное состояние. При этом происходит перенос вещества или энергии из одной части системы в другую.

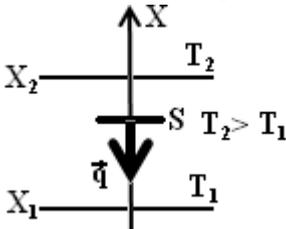


Рис. 10.4

Теплопроводностью называется явление выравнивания температур в различных частях системы. При этом молекулы в разных частях системы имеют разные средние кинетические энергии, и хаотическое тепловое движение молекул приводит к направленному

переносу тепловой энергии. Это явление наблюдается твердых, жидких и газообразных средах.

Пусть в некоторой среде в плоскостях x_1 и x_2 , расположенных перпендикулярно оси x , поддерживаются температуры T_1 и T_2 соответственно (рис. 10.4). Тогда через площадку S , перпендикулярную оси x , за время dt будет переноситься количество теплоты dQ :

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} S dt, \quad (10.5)$$

где λ - теплопроводность, коэффициент, зависящий от свойств среды; $\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры. Знак минус в уравнении (10.5) показывает, что тепло переносится в направлении убывания температуры.

Поток тепла q равен количеству теплоты, переносимому через поверхность S за единицу времени: $q = \frac{dQ}{dt}$. Подставляя в эту формулу равенство (10.5), получим **уравнение теплопроводности**:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} S. \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) показывает, что поток тепла прямо пропорционален градиенту температуры.

Диффузией называется явление выравнивания концентраций в веществе или смеси веществ. Наблюдается в твердых, жидких и газообразных средах.

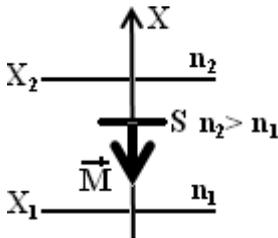


Рис. 10.5

Пусть в некоторой среде концентрация n молекул вещества изменяется вдоль оси x . А в плоскостях x_1 и x_2 , расположенных перпендикулярно оси x , концентрации равны n_1 и n_2 соответственно (рис. 10.5). Тогда через площадку S , перпендикулярную оси x , за время dt будет переноситься масса вещества dm :

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} S dt, \quad (10.7)$$

где D - коэффициент диффузии, зависящий от свойств среды; $\frac{d\rho}{dx}$ - градиент плотности. Знак минус в уравнении (10.7) показывает, что масса переносится в направлении убывания концентрации.

Поток массы M равен массе, переносимой через поверхность S за единицу времени: $M = \frac{dm}{dt}$. Подставляя в эту формулу равенство (10.7),

получим **уравнение диффузии**:
$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S. \quad (10.8)$$

Уравнение (10.8) показывает, что поток массы прямо пропорционален градиенту плотности.

Явление внутреннего трения (вязкости) возникает в жидкостях или газах при их относительном движении. Пусть параллельные слои газа движутся с различными скоростями v_1 и v_2 (рис. 10.6). Тогда через площадку S , перпендикулярную оси x , за время dt будет переноситься импульс

$$dp = -\eta \frac{dv}{dx} S dt, \quad (10.9)$$

где η – вязкость – коэффициент, зависящий от свойств среды; $\frac{dv}{dx}$ – градиент скорости. Знак минус в уравнении (10.9) показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

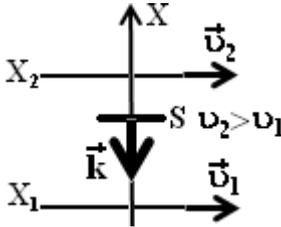


Рис .10.6

Поток импульса K равен импульсу, переносимому через поверхность S за единицу времени: $K = \frac{dp}{dt}$. Подставляя в эту формулу равенство (10.9), получим **уравнение внутреннего трения**:

$$K = -\eta \frac{dv}{dx} S. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.10) показывает, что поток импульса прямо пропорционален градиенту скорости.

Согласно второму закону Ньютона сила $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, т.е. определяется той же формулой, что и поток импульса K . Поэтому можно сделать вывод, что между движущимися с различными скоростями слоями газа или жидкости возникает **сила внутреннего трения**, модуль которой определяется формулой (10.11):

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S. \quad (10.11)$$

Механизм возникновения этой силы состоит в том, что вследствие теплового движения молекулы переходят из «быстрого» слоя в «медленный» и наоборот. Попав в другой слой, молекула сталкивается с молекулами этого слоя и либо передает избыток импульса другим молекулам (если прилетела из «быстрого» слоя), либо увеличивает свой импульс (если прилетела из «медленного» слоя). В итоге импульс «медленного» слоя увеличивается, а «быстрого» уменьшается. Следовательно, сила внутреннего трения ускоряет «медленные слои» и направлена также, как скорость этого слоя, и замедляет «быстрые» слои, будучи направленной противоположно их скорости.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс физики: Учеб. В 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М.: Лань, 2016.- 352с.
2. Трофимова Т.И. Физика. Учебник для бакалавров. М.: Академия. 2012. -320с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. Учеб. Пособие для студ. Вузов. М.: Академия. 2015. -720с.
4. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спиринов Г.Г. Курс общей физики. Книга 1: Механика. Учебник для бакалавров. М.: Юрайт. 2015. -353с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа. 2003. – 541с.
6. Матвеев А.М. Молекулярная физика. Учебное пособие для спецвузов. М: Высшая школа. 1987. – 360с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. КИНЕМАТИКА.....	5
1.1 Механическое движение. Материальная точка. Абсолютно твердое тело. Система отсчета. Радиус - вектор. Траектория. Путь. Перемещение	5
1.2 Средняя и мгновенная скорости. Модуль скорости. Проекция скорости. Уравнение пути	6
1.3 Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения.....	9
1.4 Вращательное движение. Угловая скорость. Угловое ускорение. Период, частота. Связь между линейными и угловыми величинами.....	12
2 ДИНАМИКА	15
2.1 Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Сила. Масса. Второй закон Ньютона. Импульс. Третий закон Ньютона. Понятие состояния	15
2.2 Силы в механике	18
2.3 Второй закон Ньютона для системы частиц и твердого тела. Центр масс системы. Импульс системы.....	21
2.4 Момент силы и момент импульса относительно точки и оси.....	23
2.5 Момент импульса и момент инерции твердого тела относительно оси. Теорема Штейнера	26
2.6 Закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Уравнение моментов	28
3 РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ	31
3.1 Работа. Мощность	31
3.2 Кинетическая энергия. Связь работы и кинетической энергии	32
3.3 Кинетическая энергия и работа при вращательном движении твердого тела	34
3.4 Поле сил. Консервативные силы. Потенциальная энергия и работа консервативной силы. Потенциальная энергия в поле сил тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации	37
3.5 Связь между консервативной силой и потенциальной энергией.....	40
3.6 Работа неконсервативных сил и механическая энергия.....	42
4 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ.....	43
4.1 Закон сохранения импульса.....	43
4.2 Закон сохранения момента импульса	44
4.3 Закон сохранения механической энергии.....	45
5 КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ.....	46

5.1	Колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Кинематическое уравнение гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, частота, период колебаний.....	46
5.2	Скорость, ускорение и энергия при гармонических колебаниях.....	49
5.3	Сложение одинаково направленных колебаний.....	51
5.4	Пружинный, физический и математический маятники	52
5.5	Затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания....	54
5.6	Вынужденные колебания.....	57
5.7	Волны. Волны поперечные и продольные. Волновая поверхность, фронт волны. Уравнение плоской волны, длина волны, волновое число. Фазовая скорость	59
6	ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	62
6.1	Принцип относительности Галилея.....	62
6.2	Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца и следствия из них.....	63
6.3	Основные понятия релятивистской динамики	66
7	МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.....	67
7.1	Молекулярно-кинетические представления. Статический и термодинамический методы. Состояние системы Обратимые и необратимые процессы.....	67
7.2	Масса и размер молекул. Количество вещества.....	69
7.3	Давление газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	70
7.4	Уравнение состояния идеального газа	73
7.5	Изопроцессы. Закон Авогадро. Закон Дальтона	74
8	ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	76
8.1	Распределение Максвелла	76
8.2	Характеристические скорости молекул газа	78
8.3	Барометрическая формула	80
8.4	Распределения Больцмана	81
9	ТЕРМОДИНАМИКА	82
9.1	Степени свободы. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы.....	82
9.2	Внутренняя энергия. Внутренняя энергия идеального газа.....	84
9.3	Работа при изменении объема	86
9.4	Теплопередача. Количество теплоты. Теплоемкость. Первое начало термодинамики	88
9.5	Теплоемкость идеального газа. Уравнение Майера.....	89
9.6	Адиабатный процесс. Уравнение адиабаты идеального газа.....	91
9.7	Работа и первое начало термодинамики при различных процессах	93
9.8	Понятие об энтропии. Второе начало термодинамики	95

9.9 Принцип действия и КПД тепловой машины. КПД цикла Карно	97
10 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА	100
10.1 Длина свободного пробега молекул газа	100
10.2 Понятие о явлениях переноса. Теплопроводность. Диффузия. Внутреннее трение.....	101
Библиографический список	104

Учебное издание

ФИЗИКА. ЧАСТЬ 1.

Конспект лекций для бакалавров

Составители:

Подольский В.А., Логачева В.М., Резвов Ю.Г., Сивкова О.Д.

М 55 Конспект лекций для бакалавров,

/ ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Новомосковск, 2021. - 108 с.

Составители:

СИВКОВА Ольга Дмитриевна

ПОДОЛЬСКИЙ Вадим Александрович

ЛОГАЧЕВА Валентина Михайловна

РЕЗВОВ Юрий Герасимович

Редактор Туманова Е.М.

Подписано к печати . Формат 60x80^{1/16}

Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.

Усл.печ.л. 5,05. Уч.-изд.л. 4,1.

Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»,
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр

Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл.,9

Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы,8