

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации**

**Новомосковский институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Российский химико-технологический университет
имени Д.И. Менделеева»**

**МЕХАНИКА
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Теоретическая механика и сопротивление материалов

**Новомосковск
2020**

УДК 621.01
ББК 30.12
М 759

Рецензент:
доцент кафедры ЕНиМД, кандидат химических наук,
доцент Помогаев В.М.,
НИ РХТУ им. Д. И. Менделеева

Составители: А.Л. Суменков, А.И. Зимин

М 759 Механика, прикладная механика, техническая механика.
Учебно-методическое пособие. Часть 1. Теоретическая механика и сопротивление материалов. Под ред. А.Л. Суменкова / ФГБОУ ВО «РХТУ им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал). Сост.: А.Л. Суменков, А.И. Зимин. Новомосковск, 2020.- 53 с.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов – выполнению расчётных заданий и контрольных работ, предусмотренных учебными программами по дисциплинам «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика». Приведены краткие сведения из теории (теоретическая механика, сопротивление материалов) и примеры решения задач.

Ил. 16. Таблиц 5.

УДК 620.01
ББК 30.12

© ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»,
Новомосковский институт (филиал), 2020

Содержание

Предисловие	4
Введение	5
1 Вопросы из рабочей программы	6
2 Задачи к расчётным заданиям и контрольным работам	13
2.1 Задание 1	13
2.2 Задание 2	20
2.3 Задание 3	28
2.4 Задание 4	37
2.5 Задание 5	44

Предисловие

В Новомосковском институте РХТУ им. Д.И. Менделеева федеральными государственными образовательными стандартами по большинству направлений подготовки бакалавров предусмотрено изучение курсов «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика». Разделами этих курсов являются теоретическая механика и сопротивление материалов.

Учебные программы, разработанные на основании вышеуказанных федеральных государственных образовательных стандартов, предусматривают выполнение расчётных заданий студентами дневной формы обучения и контрольных работ студентами заочной формы обучения, что закреплено в рабочих программах курсов. В расчётные задания и контрольные работы первой части курса входят задачи по теоретической механике и сопротивлению материалов. В данном пособии предложено 5 заданий, представляющих все основные разделы курса.

Задания по теоретической механике, представленные в методических указаниях под редакцией профессора С.М. Тарга (1982 года выпуска), имеют более высокий уровень сложности. Методическое обеспечение, необходимое для выполнения трех заданий по сопротивлению материалов (в данном случае, как разделу курсов «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика»), в Новомосковском институте РХТУ им. Д.И. Менделеева на сегодняшний день отсутствует. Поэтому составители настоящего учебно - методического пособия, подготовленного на кафедре «Оборудование химических производств», пытаются восполнить этот пробел.

Каждое из заданий, предложенное в настоящем пособии, имеет следующую последовательность изложения: приводятся краткие сведения из теории, собственно методические указания по решению соответствующего задания, условия задания (многовариантные), примеры выполнения задания.

Учебно - методическое пособие, предлагаемое авторами, является пособием для самостоятельной работы студентов, содержит задания по пяти темам: равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил, равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил, растяжение – сжатие, кручение, плоский поперечный изгиб. Выбор тем обусловлен большим распространением этих видов равновесия тел и видов сопротивления материалов на практике.

Перед использованием настоящего пособия необходимо изучение соответствующего материала по учебникам. Без такого изучения выполнение расчётных заданий и контрольных работ смысла не имеет.

Введение

Дисциплины «Механика», «Прикладная механика» и «Техническая механика» являются комплексными, общетехническими дисциплинами для инженерно-технических направлений подготовки бакалавров.

Предмет курса - комплекс общетехнических дисциплин, позволяющих обоснованно выбрать, спроектировать и рассчитать, а также квалифицированно эксплуатировать технические средства промышленных производств с учетом специфики каждого направления.

Основные задачи курса: изучение основ прочности, освоение расчетов типовых элементов оборудования химической и других отраслей промышленности с учетом главных критериев работоспособности и их проектирования, ознакомление с основами стандартизации и взаимозаменяемости.

В результате изучения курса студент должен уметь выполнять необходимые расчеты и конструктивные разработки современных машин, способствующих улучшению производственных процессов.

Данный курс основан на общенаучных дисциплинах (математике, физике, вычислительной технике, инженерной графике и т. д.) и он полностью используется в последующих дисциплинах, изучающих аппараты, машины и другое оборудование с учетом специализации.

В настоящем учебно - методическом пособии представлено пять задач: две задачи по теоретической механике и три задачи по сопротивлению материалов. Задача 1 посвящена рассмотрению равновесия твердого тела под действием произвольной плоской системы сил, задача 2 - рассмотрению равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил, задача 3 - растяжению – сжатию, задача 4 - кручению, задача 5 - плоскому поперечному изгибу.

В учебно - методическом пособии имеются краткие сведения из теории, указания по выполнению каждой задачи, условия задач (собственно задания) и примеры выполнения задания.

В условиях каждой задачи даются 10 рисунков (расчётных схем) и таблица, содержащая индивидуальные данные к условию задачи. Нумерация рисунков в каждой задаче осуществлена римскими цифрами от I до X. Номера условий от 0 до 9 представлены в соответствующих столбцах таблицы.

Студент **выбирает номер рисунка (схемы) по последней цифре шифра (своего варианта), а номер условия в таблице - по предпоследней;** например, если шифр оканчивается числом 46 (вариант 46), то берётся рисунок (расчётная схема) VI и условия 4 из таблицы. Если последняя цифра шифра студента – нуль, то ему надо выполнить задачи типа X. Если предпоследняя цифра-нуль, студент должен выполнить задачи варианта 0 из таблицы.

При решении каждой задачи текст задачи переписывать не надо, а требуется записать, что дано и что требуется определить. При этом необ-

ходимо учитывать, что часть данных (общая для всех вариантов) выписывается из текста задачи, а часть - из таблицы. Чертёж необходимо выполнять сразу для своих данных.

Чертёж должен быть достаточно крупным, аккуратным, наглядным и выполнен карандашом с использованием чертежных инструментов.

*При выполнении задач сначала надо наметить ход решения и те допущения, которые могут быть положены в его основу, а затем провести расчет; причем все необходимые вычисления сначала проделать в общем виде, обозначая данные и искомые величины буквами, после чего вместо буквенных обозначений проставить их числовые значения и найти результат. Везде необходимо придерживаться стандартных обозначений. Расчеты должны быть выполнены в определенной последовательности, теоретически обоснованы и сопровождаются пояснительным текстом. При выполнении расчетов необходимо указывать литературу с отметкой страниц и таблиц, откуда взяты расчетные формулы, допускаемые напряжения и другие величины. Решение необходимо сопровождать краткими, последовательными и грамотными (без сокращения слов) объяснениями и чертежами, на которых для всех входящих в расчет величин даны числовые значения. **Указывать размерность получаемых величин нужно обязательно.** Не следует вычислять большое число значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности.*

Все расчеты должны производиться в системе СИ.

Для студентов – технологов заочной формы обучения в контрольную работу № 1 по прикладной механике входят все пять задач.

На обложке контрольной работы должны быть четко написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента (полностью), название направления, учебный шифр.

Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

Студентам - заочникам рекомендуется по возможности чаще консультироваться у преподавателя - как в явной форме, так и дистанционно (используя возможности электронных сетей).

1 Вопросы из рабочей программы

В программе дается перечень вопросов, составляющих основную часть курса, для студентов всех направлений. В зависимости от степени их актуальности для каждого направления, по решению кафедры, некоторые вопросы могут включаться в экзаменационные билеты не полностью или исключаться. В программу могут включаться и другие дополнительные вопросы, перечень которых должен быть сообщен студенту.

1.1 Введение в механические дисциплины

Предмет и задачи курса. Определяющая роль машиностроения в осуществлении научно-технической революции и материализации достижений науки и техники. Современные тенденции развития машиностроения. Исторические этапы становления курса. Связь курса с общеинженерными, общенаучными и специальными дисциплинами.

1.2 Статика твердого тела

Основные понятия и исходные положения статики. Абсолютно твердое тело, сила, задачи статики. Исходные положения статики. Связи и их реакции.

Сложение сил. Система сходящихся сил. Геометрический способ сложения сил. Равнодействующая сходящихся сил; разложение сил. Проекция силы на ось и на плоскость. Аналитический способ задания и сложения сил. Равновесие системы сходящихся сил.

Момент силы относительно центра. Пара сил. Момент силы относительно центра (или точки). Пара сил. Момент пары.

Приведение системы сил к центру. Условия равновесия. Теорема о параллельном переносе сил. Приведение системы сил к данному центру. Условия равновесия системы сил. Теорема о моменте равнодействующей.

Плоская система сил. Алгебраические моменты силы и пары. Приведение плоской системы сил к простейшему виду. Равновесие плоской системы сил. Случай параллельных сил. Равновесие системы тел.

Трение. Законы трения скольжения. Реакции шероховатых связей. Угол трения. Равновесие при наличии трения. Трение качения.

Пространственная система сил. Момент силы относительно оси. Вычисление главного вектора и главного момента системы сил. Равновесие произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил.

Центр тяжести. Центр параллельных сил. Силовое поле. Центр тяжести твердого тела. Координаты центров тяжести однородных тел. Способы определения координат центров тяжести тел. Центры тяжести некоторых однородных тел.

Вопросы для самопроверки:

1. Какое тело называется абсолютно твердым? 2. Какие системы сил называются уравновешенными? 3. Что такое равнодействующая заданной системы сил? 4. Перечислите аксиомы статики. 5. Являются ли условия равновесия абсолютно твердого тела необходимыми и достаточными для равновесия деформируемых тел? 6. Какие тела называются связями для данного тела? 7. Что такое заданные силы, реакции связи, давление на связь? 8. Как направлена реакция: а) гладкой поверхности; б) опоры на катках; в) цилиндрического шарнира и подшипника; г) невесомого стержня; д) сферического шарнира и подпятника; е) жесткой заделки; ж) нити, привязанной к телу и к опоре или перекинутой одним концом через блок? 9. Как определяется проекция силы на

ось? 10. Какие силы называются сходящимися? 11. Как складываются сходящиеся силы: а) графически; б) аналитически? 12. Запишите условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах. 13. Что называется парой сил? 14. Как подсчитать момент пары? Зависит ли действие пары сил на тело от ее места в плоскости? 15. В чем состоит условие эквивалентности двух пар? 16. Чему равен момент силы относительно точки? Как изобразить его в виде вектора-момента? Чем этот вектор отличается от вектора-момента пары? 17. Когда момент силы относительно точки равен нулю? 18. Как определить момент силы относительно оси? В каких случаях он равен нулю? 19. Какая зависимость существует между моментами силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку? 20. Как записать условия равновесия произвольной системы сил: а) на плоскости; б) в пространстве? 21. В каких случаях плоская система сил приводится: а) к паре сил; б) к равнодействующей? 22. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей заданной системы сил. 23. Какие задачи называются статически определенными? Какие - статически неопределимыми? 24. Что такое центр параллельных сил? Как найти координаты центра параллельных сил? 25. Напишите формулы для определения координат центра тяжести тела, центра тяжести объема, площади, линии. 26. Что называется трением скольжения при покое? 27. Каковы законы трения скольжения? 28. Что такое угол трения и как он связан с коэффициентом трения? 29. Чему равно максимальное значение момента трения качения? Что такое коэффициент трения качения?

1.3 Сопротивление материалов

Основные положения. Задачи сопротивления материалов. Допущения, принимаемые в сопротивлении материалов. Внешние силы (нагрузки). Деформации и перемещения. Метод сечений. Напряжения.

Растяжение и сжатие. Определение внутренних усилий. Определение напряжений. Определение деформаций и перемещений. Опытное изучение свойств материалов. Коэффициент запаса прочности. Выбор допускаемых напряжений. Основные типы задач при расчете на прочность растянутых, сжатых стержней. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии.

Вопросы для самопроверки:

1. Какие тела называют упругими и упругопластичными? 2. В чем сущность метода сечений? 3. Что называют напряжением в данной точке сечения? 4. Какие напряжения называют нормальными? 5. Какие деформации являются упругими, а какие остаточными (пластичными)? 6. Как формулируется закон Гука? 7. Как определяются допускаемые напряжения? 8. Что называют коэффициентом запаса прочности? 9. Каково условие прочности при растяжении? 10. Как строится диаграмма растяжения? 11. Почему диаграмма растяжения называется условной? 12. Что называют пределом прочности и пределом текучести материала? 13. Что называют относительным удлинением при разрыве?

14. Что называют истинной диаграммой растяжения? 15. Что называют коэффициентом Пуассона и чему он равен? 16. Какие системы называют статически неопределимыми? 17. Какие материалы называют хрупкими, а какие пластичными? 18. Как находят напряжения при изменении температуры?

Сдвиг. Основные понятия. Напряженное состояние при чистом сдвиге. Потенциальная энергия при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными E , G , μ . Практические расчеты при сдвиге.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется абсолютным и относительным сдвигом? 2. Что называется законом парности касательных напряжений при сдвиге? 3. Как формулируется закон Гука при сдвиге? 4. Как связаны между собой модуль продольной упругости E и модуль сдвига G ? 5. Как производится расчет на прочность при сдвиге (срезе)? 6. Как распределены напряжения в поперечном сечении при сдвиге? 7. Как рассчитывают на срез заклепочные и сварные соединения?

Геометрические характеристики сечений. Статический момент сечения. Моменты инерции сечения. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Моменты инерции простых сечений. Моменты инерции сложных фигур. Изменение моментов инерции при повороте осей. Главные оси инерции и главные моменты инерции.

Вопросы для самопроверки:

1. Как определить координаты центра тяжести плоской фигуры? 2. Чему равна сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей? 3. Какие оси называют главными? 4. Для каких фигур можно без вычислений определить положение главных центральных осей? 5. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения.

Кручение. Построение эпюр крутящих моментов. Определение напряжений в стержнях круглого сечения. Построение эпюр угловых перемещений при кручении. Потенциальная энергия при кручении. Статически неопределимые задачи. Рациональные формы сечений при кручении.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется кручением? 2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении? 3. Как определить величину напряжения при кручении? 4. Как определить допускаемые напряжения при кручении? 5. Как определить полярный момент инерции и полярный момент сопротивления при кручении? Какова их размерность? 6. Как определить угол закручивания стержня? 7. Как записать условие прочности при кручении? 8. В чем заключается расчет вала на прочность?

Изгиб. Определение напряжений. Общие понятия о деформации изгиба. Типы опор балок. Определение внутренних усилий при изгибе. Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил. Зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Определение нормальных напряжений. Условия прочности по нормальным напряжениям. Определение касательных напряжений. Напряжения в наклонных сечениях балки. Главные напряжения. Потенциальная энергия деформации при изгибе.

Вопросы для самопроверки:

1. Какой изгиб называют чистым, а какой - поперечным? 2. Какие балки называют статически определимыми? 3. Как определить изгибающий момент и поперечную силу в каком-либо сечении балки? 4. Как формулируются правила знаков при определении величин изгибающих моментов и поперечных сил? 5. Какие допущения принимаются при изгибе? 6. Какая зависимость имеется между моментом и поперечной силой? 7. Как определить максимальный изгибающий момент? 8. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях балки? 9. Чему равны напряжения изгиба? 10. Что называют нейтральным слоем и где он расположен? 11. Что называют моментом инерции при изгибе? 12. В каких плоскостях возникают касательные напряжения при изгибе? 13. По какой формуле определяют величину касательных напряжений? 14. Что называют осевым моментом сопротивления или моментом сопротивления при изгибе? 15. Как выгоднее нагрузить балку прямоугольного сечения?

Изгиб. Определение перемещений. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Определение перемещений при нескольких участках нагружения. Универсальные уравнения. Определение перемещений методом Мора. Правило Верещагина. Рациональное размещение опор балок. Рациональные формы сечения балок.

Вопросы для самопроверки:

1. Как запишется дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в общем виде? 2. Как найти постоянные интегрирования и что они обозначают? 3. Как найти наибольшее значение прогиба?

Напряженное и деформированное состояние в точке. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении (сжатии) в одном направлении. Закон парности касательных напряжений. Определение напряжений в наклонных сечениях при растяжении (сжатии) в двух направлениях. Определение главных напряжений и положения главных площадок. Зависимость между деформациями и напряжениями при плоском и объемном напряженных состояниях (обобщенный закон Гука). Работа внешних и внутренних сил при растяжении

(сжатию). Потенциальная энергия деформации. Свойства механической энергии.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется напряженным состоянием в точке? 2. Какие виды напряженного состояния встречаются? 3. Какие площадки называются главными? 4. Какие напряжения называют главными? 5. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам? 6. Сущность закона парности касательных напряжений. 7. Чему равны наибольшие касательные напряжения и где они действуют? 8. Что называется обобщенным законом Гука? 9. Чему равна удельная работа деформаций при объемном напряженном состоянии?

Гипотезы прочности. Назначение гипотез прочности. Первая гипотеза прочности. Вторая и третья гипотеза прочности. Энергетическая гипотеза прочности. Краткие сведения о других гипотезах прочности.

Вопросы для самопроверки:

1. В чем задачи теорий прочности? 2. Какие теории прочности существуют? 3. Как в случае плоского напряженного состояния найти эквивалентные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности? 4. Почему существуют несколько теорий прочности?

Сложное сопротивление. Основные понятия. Изгиб в двух плоскостях (косой изгиб). Изгиб с растяжением (сжатием). Внецентренное сжатие (растяжение). Кручение с изгибом. Кручение с растяжением (сжатием). Расчет тонкостенного сосуда.

Вопросы для самопроверки:

1. Какой случай изгиба называют косым изгибом? 2. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе? 3. Как находят положение нейтральной линии при косом изгибе? 4. Как проходит нейтральная линия, если плоскость действия сил совпадает с диагональной плоскостью балки прямоугольного сечения? 5. Как определить деформации при косом изгибе? 6. Как определить суммарное напряжение в любой точке при изгибе с растяжением (сжатием)? 7. Как записать условие прочности при изгибе с растяжением (сжатием) для стержней, одинаково работающих на растяжение и сжатие? 8. Как определить напряжения в случае сочетания растяжения с косым изгибом? 9. Как записать условие прочности при растяжении с косым изгибом для стержней из материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие с поперечными сечениями, имеющими угловые точки (типа прямоугольника, двутавра и т.д.)? 10. Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии? 11. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии? 12. Какое положение занимает нейтральная

линия, когда продольная сила приложена в вершине ядра сечения? 13. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением? 14. Как находят опасные сечения стержня при изгибе с кручением? 15. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением? 16. Как находится числовое значение расчетного момента при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения? 17. Как записать условие прочности для кручения с растяжением (сжатием) по третьей и по четвертой теориям прочности? 18. Как записать условие прочности для случая одновременного сочетания изгиба, кручения и растяжения (сжатия)? 19. Что называют оболочкой, срединной поверхностью, осесимметричной оболочкой? 20. От чего зависят внутренние силы в оболочке? 21. На чем основана безмоментная теория оболочек? 22. Какие напряжения возникают на гранях элемента, выделенного из оболочки? 23. Как записать уравнение Лапласа? 24. Как составить уравнение равновесия отсеченной части сосуда, находящегося под действием внутреннего давления газа? 25. Как составить уравнение равновесия отсеченной части сосуда для случая гидростатического нагружения?

Расчет сжатых стержней на устойчивость (продольный изгиб). Устойчивые и неустойчивые формы равновесия. Формула Эйлера для критической силы. Влияние способа закрепления концов стержня на критическую силу. Пределы применимости формулы Эйлера. Эмпирические формулы для определения критических напряжений. Практическая формула для расчета на устойчивость. Рациональные формы сечений сжатых стержней.

Вопросы для самопроверки:

1. Какая система называется устойчивой? 2. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня? 3. Что называют критической силой? 4. По какой формуле следует определять критическую силу для стержней большой гибкости? 5. Для каких стержней применима формула Ясинского? 6. Какие параметры влияют на величину критической силы? 7. Что называется гибкостью стержня? 8. Для каких значений гибкости стержня применима формула Эйлера? 9. Как учитывается влияние способа закрепления концов стержня? 10. Что такое коэффициент φ и от чего зависит его числовое значение? 11. Как производится проверка стержня на устойчивость? 12. Как производится выбор типа сечения для обеспечения устойчивости сжатого стержня?

Концентрация напряжений в элементах конструкций. Местные напряжения. Концентрация напряжений. Концентрация напряжений при растяжении (сжатии). Концентрация напряжений при изгибе. Концентрация напряжений при кручении. Контактные напряжения.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое концентратор напряжения? 2. Какие напряжения называют местными и как их определяют? 3. Что называют теоретическим коэффициентом концентрации напряжения? 4. Что называется эффективным коэффициентом концентрации напряжений? 5. Какие напряжения называют контактными и как определить их величину?

Понятия об усталости материала. Основные определения. Кривая усталости при симметричном цикле. Предел выносливости. Диаграмма предельных напряжений. Факторы, влияющие на величину предела выносливости. Определение коэффициента запаса прочности при симметричном цикле. Определение коэффициента запаса прочности при несимметричном цикле напряжений. Практические меры повышения сопротивления усталости.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называют пределом выносливости материала? 2. Как предел выносливости связан с пределом прочности? 3. Как строится кривая усталости материала? 4. Что называют коэффициентом асимметрии цикла? 5. Что влияет на предел выносливости? 6. Какие мероприятия проводятся для повышения сопротивления усталости проектируемых деталей? 7. В чем заключается расчет деталей на сопротивление усталости?

2 Задачи к расчётным заданиям и контрольным работам

2.1 Задание 1

2.1.1 Краткие сведения из теории

Моментом силы относительно центра (точки) называют взятое с соответствующим знаком произведение величины (модуля вектора) силы на плечо. **Плечом силы** называют расстояние моментной точки (геометрической точки, относительно которой вычисляется момент) от линии действия силы - иными словами, длину перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы. **Правило знаков:** если сила стремится повернуть тело относительно моментной точки против хода часовой стрелки, момент силы принято считать положительным, в противном случае – отрицательным.

Парой сил называют систему двух равных по величине антипараллельных сил. **Моментом пары** называют взятое с соответствующим знаком произведение одной из сил пары на плечо. **Плечом пары** называют расстояние между линиями действия сил пары. **Правило знаков:** если пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, момент пары принято считать положительным, в противном случае - отрицательным.

Произвольной плоской называется система сил, как угодно расположенных в плоскости. Для тела, находящегося в равновесии под действием

произвольной плоской системы сил, можно составить три независимых уравнения равновесия, например:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum m_A(\vec{F}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

При составлении уравнений равновесия следует иметь в виду, что пара сил (или момент пары) на ось не проецируется (поскольку сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю), а входит лишь в уравнение моментов.

Последовательность решения задач статики:

- 1 Уяснить условие задачи, выполнить чертеж (рисунок).
- 2 Выбрать тело (систему тел), равновесие которого (которой) будет рассматриваться.
- 3 Изобразить силы, действующие на выбранное тело (систему тел): активные и реакции связей. Установить вид полученной системы сил.
- 4 Выбрать удобные оси координат (и центры моментов – если это нужно).
- 5 Записать соответствующие полученной системе сил (см. п.3) уравнения равновесия и решить их.
- 6 Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.1.2 Указания по выполнению задания

Для вычисления момента силы относительно центра иногда бывает удобно разложить силу на составляющие и определить, в соответствии с теоремой Вариньона, сумму моментов составляющих относительно этого центра.

Заканчивая решение, необходимо сделать проверку. Для этого, например, можно составить уравнение моментов для всей конструкции, взяв в качестве центра моментов новую точку.

2.1.3 Условие задания 1

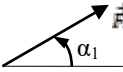
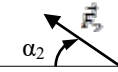
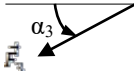
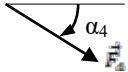
Жесткая рама (рисунок 1.1) прикреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню ВВ₁ или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

На раму действует пара сил с моментом $M=100$ Н·м и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в табл.1 (например, в условиях номер один на раму действуют сила $F_1=10$ Н под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке К, и сила $F_4=40$ Н под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке Н).

Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять $l = 0,5$ м.

Указания. Эта задача на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При её решении необходимо учесть, что реакция неподвижного цилиндрического шарнира (подшипника) имеет две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, реакция подвижного цилиндрического шарнира перпендикулярна плоскости перемещения катков, реакция невесомого стержня – по стержню.

Таблица 1

Сила								
	$F_1=10$ Н	$F_2=20$ Н	$F_3=30$ Н	$F_4=40$ Н				
Номер условия	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°
	0	-	-	D	60	E	45	-
1	K	30	-	-	-	-	H	60
2	-	-	H	45	K	30	-	-
3	D	60	-	-	-	-	E	30
4	-	-	K	30	E	60	-	-
5	H	60	-	-	D	30	-	-
6	-	-	E	30	-	-	K	45
7	D	45	-	-	H	60	-	-
8	-	-	H	60	-	-	D	30
9	E	30	-	-	-	-	K	60

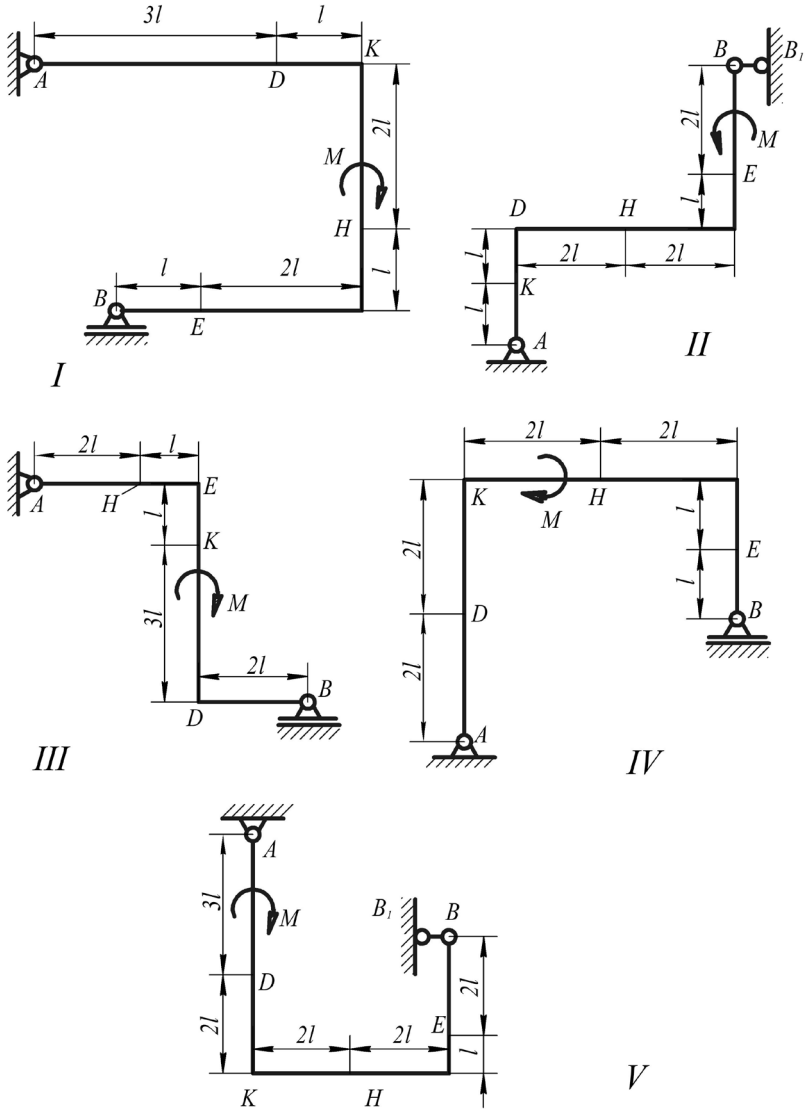


Рисунок 1.1

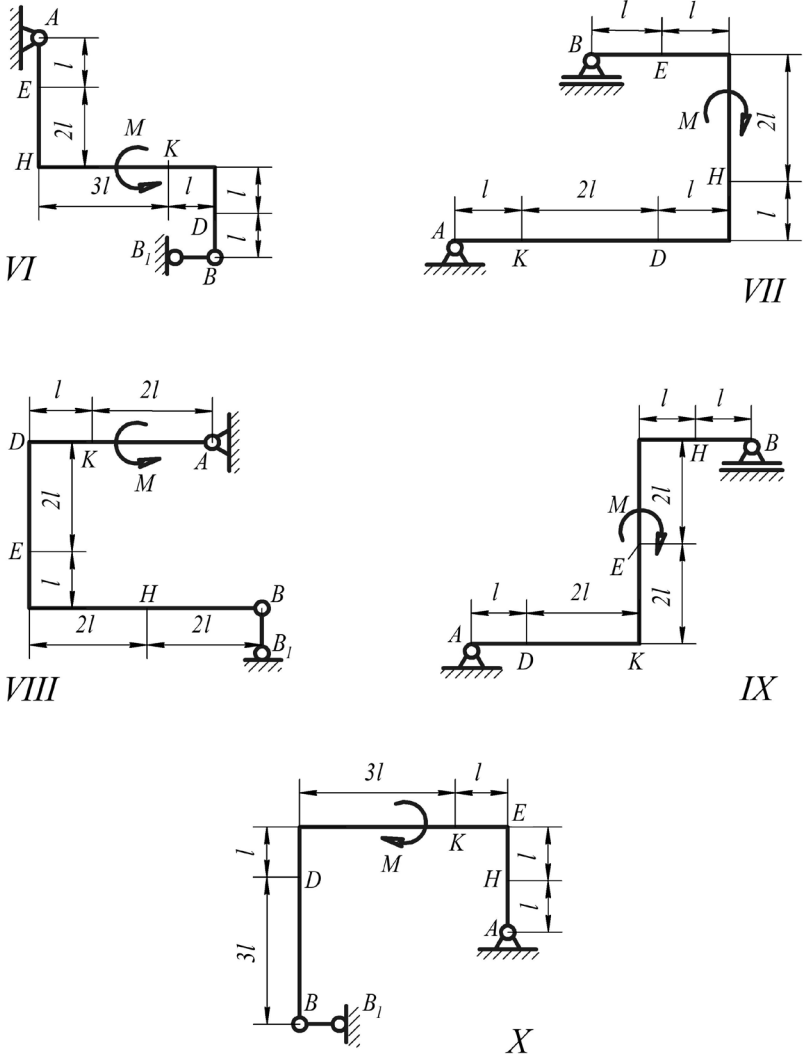


Рисунок 1.1 (продолжение)

2.1.4 Пример выполнения задания

Жесткая рама расположена в вертикальной плоскости, закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена к невесомому стержню ВВ₁ с шарнирами на концах. На раму действуют: пара сил с моментом М и силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , показанные на рисунке 1.2. Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками, если $F_1=10$ Н; $\alpha_1=60^\circ$; $F_2=12$ Н; $\alpha_2=30^\circ$; $M=20$ Н·м; $l=1$ м.

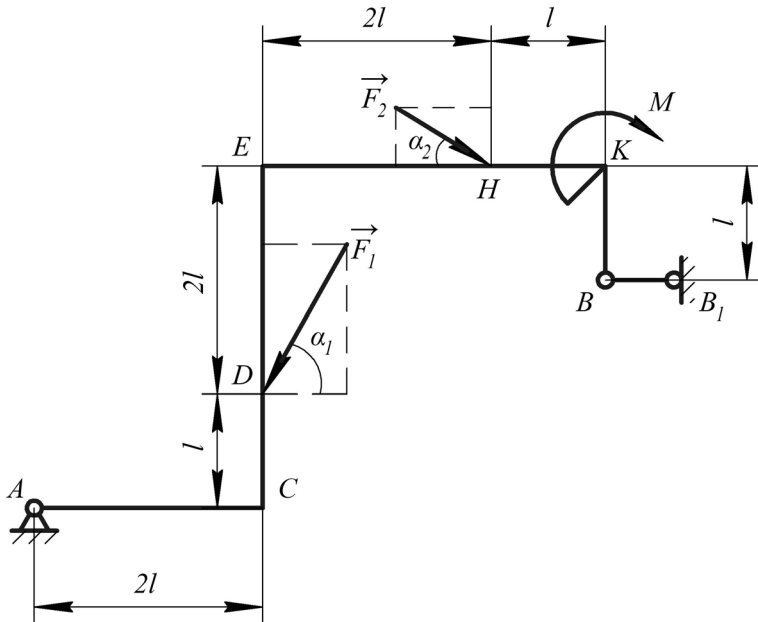


Рисунок 1.2

Решение:

1 Рассмотрим равновесие рамы.

2 На раму действуют активные силовые факторы: силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , пара сил с моментом M . Связями для рамы являются неподвижный шарнир в точке

А и невесомый стержень BB_1 . Покажем две составляющие реакции \vec{X}_A и \vec{Y}_A неподвижного шарнира А и реакцию \vec{R}_B стержня BB_1 (рис. 1.3).

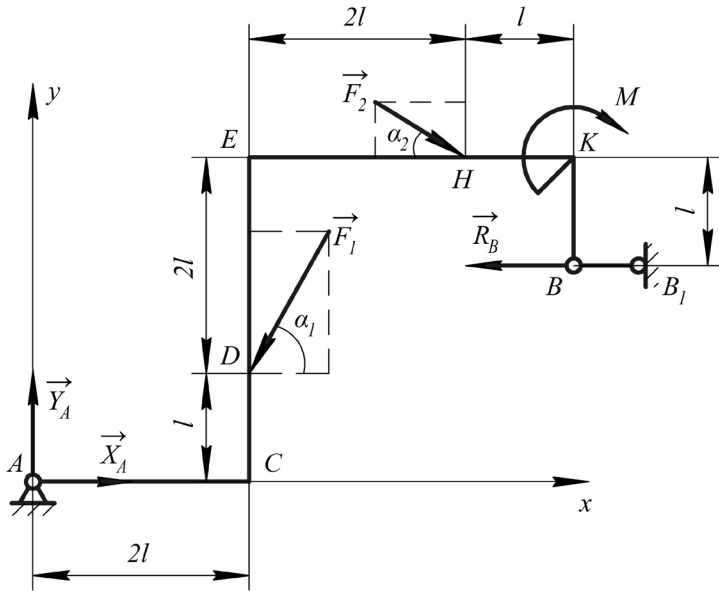


Рисунок 1.3

3. На раму действует произвольная плоская система сил.

Запишем три независимых уравнения равновесия:

$$\sum F_x=0: X_A - F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 - R_B=0, \quad (1)$$

$$\sum F_y=0: Y_A - F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2=0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F})=0:$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot l - F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 2l - F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot 3l - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot 4l - M + R_B \cdot 2l=0 \quad (3)$$

Из(3):

$$R_B = \frac{-F_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot l + F_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 2l + F_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 3l + F_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 4l + M}{2l} =$$

$$= \frac{-10 \cdot 0,5 \cdot 1 + 10 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 0,866 \cdot 3 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 1 + 20}{2 \cdot 1} = 43,75 \text{Н}$$

$$\text{Из (1): } X_A = F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ + R_B = 10 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,866 + 43,75 = 38,36 \text{Н}$$

$$\text{Из (2): } Y_A = F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,866 + 12 \cdot 0,5 = 14,66 \text{Н}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{38,36^2 + 14,66^2} = 47,07 \text{Н}$$

Проверка:

$$\Sigma M_D(\vec{F}) = -Y_A \cdot 2l + X_A \cdot l - F_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot 2l - F_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot 2l - M + R_B \cdot l =$$

$$= -14,66 \cdot 2 \cdot 1 + 38,36 \cdot 1 - 12 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 1 - 12 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 1 - 20 + 43,75 \cdot 1 = 0$$

Ответ: $R_A = 47,07 \text{Н}$; $R_B = 43,75 \text{Н}$.

2.2 Задание 2

2.2.1 Краткие сведения из теории

Произвольной пространственной системой сил называют систему сил, как угодно расположенных в пространстве, то есть не лежащих в одной плоскости, не параллельных между собой, не пересекающихся в одной точке. Для тела, находящегося в равновесии под действием такой системы сил, можно составить шесть независимых уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0, \\ \Sigma F_y &= 0, \\ \Sigma F_z &= 0, \\ \Sigma m_x(\vec{F}) &= 0, \\ \Sigma m_y(\vec{F}) &= 0, \\ \Sigma m_z(\vec{F}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. Из этого определения следует, что момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях: если линия действия силы па-

параллельна оси, либо пересекает эту ось (т.е. сила и ось лежат в одной плоскости).

Применительно к данному заданию *теорема Вариньона* может быть сформулирована следующим образом: **момент равнодействующей системы сил относительно некоторой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.**

2.2.2 Указания по выполнению задания

При выполнении задания можно использовать следующие методические приемы:

- при составлении уравнений равновесия, особенно при записи уравнений моментов, существенную помощь могут оказать дополнительные виды – проекции конструкции на координатные плоскости;
- при вычислении моментов сил относительно данной оси нужно сразу мысленно отбросить силы, параллельные данной оси или пересекающие ее, поскольку они не дают момента относительно оси;
- в некоторых случаях при вычислении момента силы относительно оси бывает удобно применить теорему Вариньона: разложить силу на составляющие и подсчитать сумму моментов этих составляющих относительно оси.

2.2.3 Условие задания 2

Однородная прямоугольная плита весом $P=5$ кН со сторонами $AB = 3\ell$, $BC = 2\ell$ закреплена в точке А сферическим шарниром, а в точке В цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (рис.2.1).

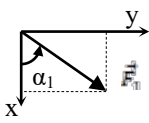
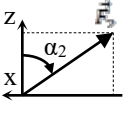
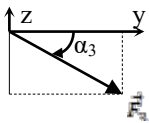
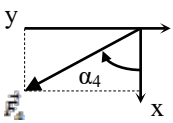
На плиту действуют пара сил с моментом $M=6$ кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице 2; при этом силы \vec{F}_1 и \vec{F}_4 лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy , сила \vec{F}_2 - в плоскости, параллельной xz , а сила \vec{F}_3 - в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D,E,H) находятся в серединах сторон плиты.

Определить реакции связей в точках А, В и С. При подсчетах принять $\ell = 0,8$ м.

Указание. Эта задача на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При её решении необходимо учесть, что реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) - две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

При вычислении моментов силы \vec{F} тоже часто удобно разложить её на составляющие \vec{F}' и \vec{F}'' , параллельные координатным осям; тогда по теореме Вариньона $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$ и т.д.

Таблица 2

Сила								
	F ₁ =4 кН		F ₂ =6 кН		F ₃ =8 кН		F ₄ =10 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°
0	D	60	-	-	E	0	-	-
1	H	90	D	30	-	-	-	-
2	-	-	E	60	-	-	D	90
3	-	-	-	-	E	30	H	0
4	E	0	-	-	H	60	-	-
5	-	-	D	60	H	0	-	-
6	-	-	H	30	-	-	D	90
7	E	30	H	90	-	-	-	-
8	-	-	-	-	D	0	E	60
9	-	-	E	90	D	30	-	-

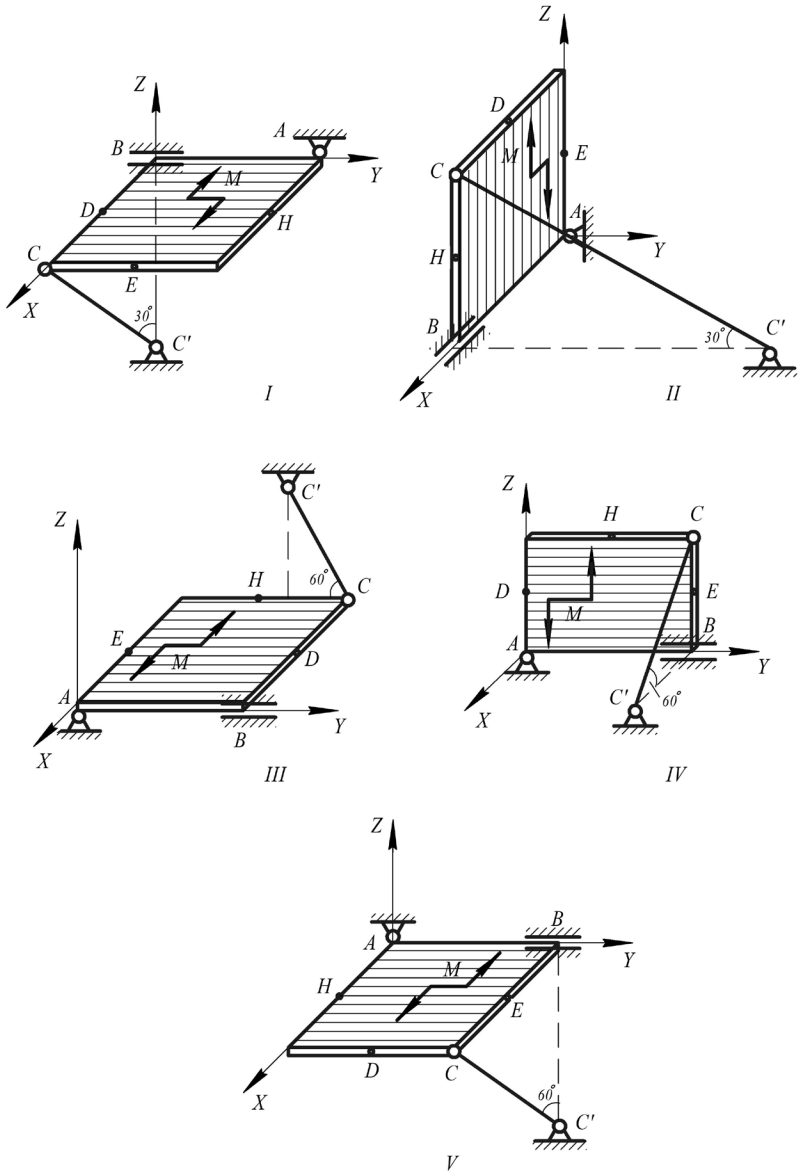


Рисунок 2.1

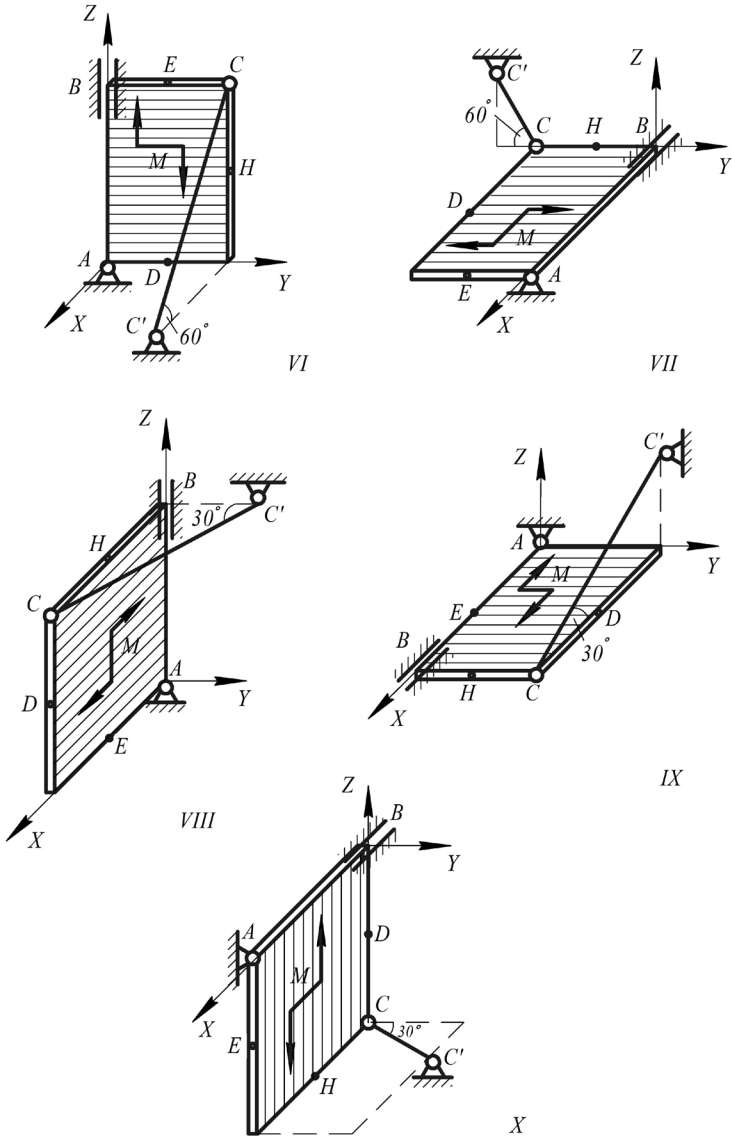


Рисунок 2.1 (продолжение)

2.2.4 Пример выполнения задания

Однородная прямоугольная плита весом $P=5$ кН со сторонами $AB=3l$, $BC=2l$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC_1 . На плиту действует пара сил с моментом M и две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Точки приложения сил находятся в серединах сторон плиты. Определить реакции связей в точках A , B , C , приняв $l=0,8$ м, $M=6$ кН·м, $F_1=4$ кН, $F_2=6$ кН, $AE=BE$, $AK=KD$, $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$ (рисунок 2.2).

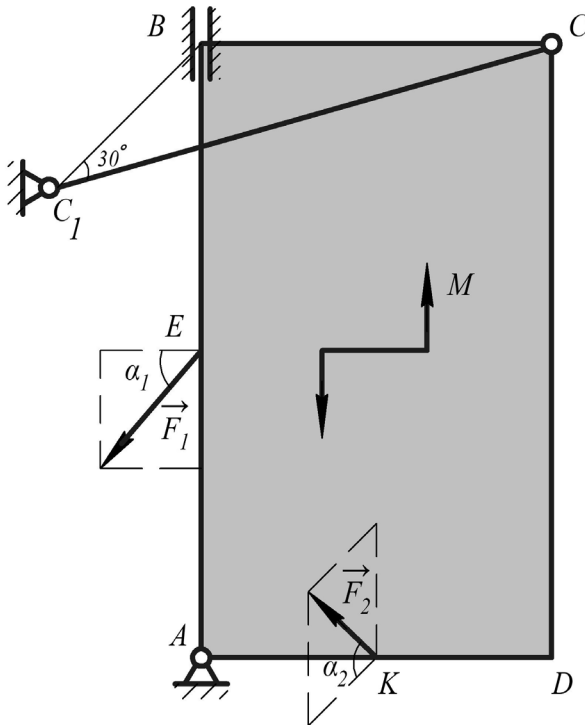


Рисунок 2.2

Решение:

1 Рассмотрим равновесие плиты $ABCD$.

2 На нее действуют активные силовые факторы: силы \vec{P} , \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и пара сил с моментом M .

3 Связями являются: сферический шарнир А, неподвижный цилиндрический шарнир В, стержень СС₁. Покажем составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ реакции сферического шарнира; \vec{X}_B, \vec{Y}_B - неподвижного цилиндрического шарнира и реакцию \vec{N} стержня СС₁ (рисунок 2.3).

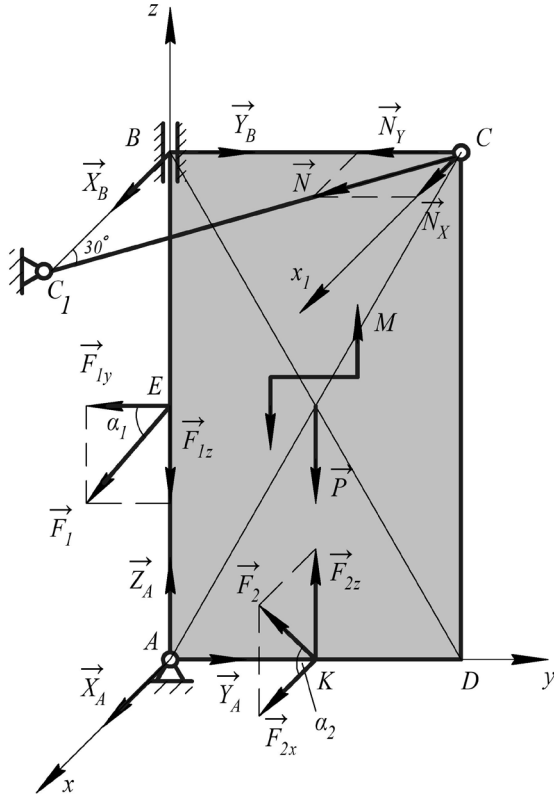


Рисунок 2.3

4 На плиту действует произвольная пространственная система сил. Запишем 6 независимых уравнений равновесия:

$$\Sigma F_x = 0: X_A + X_B + N \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0: Y_A + Y_B - F_1 \cdot \cos \alpha_1 - N \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0: Z_A + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - P - F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\vec{F}) = 0: F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 1,5l - Y_B \cdot 3l + N \cdot \sin 30^\circ \cdot 3l + M - P \cdot l + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot l = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma m_y(\vec{F})=0: X_B \cdot 3l + N \cdot \cos 30^\circ \cdot 3l = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\vec{F})=0: -F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot l - N \cdot \cos 30^\circ \cdot 2l = 0 \quad (6)$$

Для того, чтобы проще составить уравнения моментов, выполним проекции плиты с действующими на нее силами на три плоскости (три вида плиты со стороны положительного направления осей), показанные на рисунке 2.4.

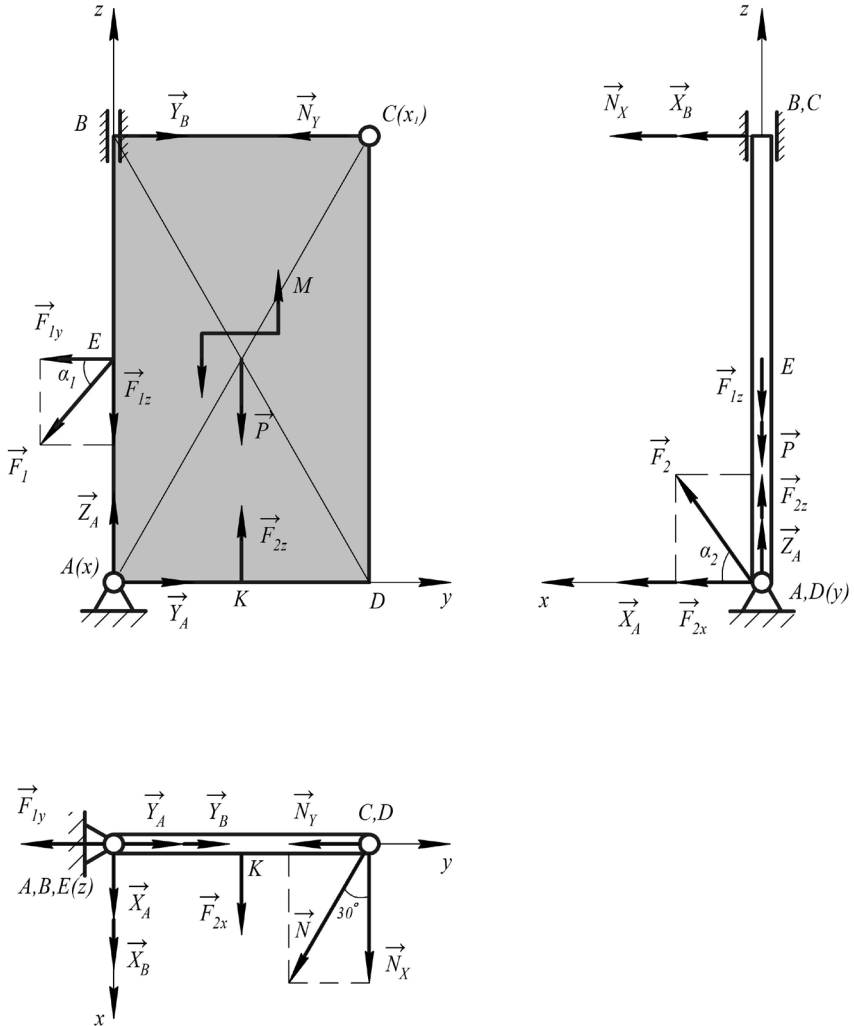


Рисунок 2.4

Находим из (3): $Z_A = P + F_1 \cdot \sin \alpha_1 - F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 5 + 4 \cdot 0,866 - 6 \cdot 0,707 = 4,221 \text{ кН}$

$$\text{Из (6): } N = \frac{-F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot l}{\cos 30^\circ \cdot 2l} = \frac{-6 \cdot 0,707 \cdot 0,8}{0,866 \cdot 2 \cdot 0,8} = -2,450 \text{ кН}$$

$$\begin{aligned} \text{Из (4) } Y_B &= \frac{F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 1,5l + N \cdot \sin 30^\circ \cdot 3l + M - P \cdot l + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot l}{3l} = \\ &= \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 0,8 - 2,450 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,8 + 6 - 5 \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,707 \cdot 0,8}{3 \cdot 0,8} = 2,023 \text{ кН} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \Sigma m_{x_1}(\vec{F}) &= -F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 1,5l + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 2l - Z_A \cdot 2l + Y_A \cdot 3l + P \cdot l - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot l + M = \\ &= -4 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,8 - 4,221 \cdot 2 \cdot 0,8 + (-1,248) \cdot 3 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,707 \cdot 0,8 + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{-4,243^2 + (-1,248)^2 + 4,221^2} = 6,120 \text{ Н}$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{2,122^2 + 2,023^2} = 2,932 \text{ Н}$$

Ответ: $R_A = 6,120 \text{ Н}$, $R_B = 2,932 \text{ Н}$, $N = -2,450 \text{ Н}$.

2.3 Задание 3

2.3.1 Краткие сведения из теории

Растяжением (или сжатием) называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – продольная (нормальная) сила N , а остальные внутренние силовые факторы равны нулю. Растягивающие продольные усилия считают положительными, а сжимающие – отрицательными.

Для определения внутренних сил используют метод сечений.

Закон изменения продольной силы по длине бруса целесообразно представлять в виде графика – эпюры продольных сил. Аргументом на эпюре является координата поперечного сечения z (м), а функцией – продольная сила N (Н).

Нормальные напряжения при растяжении и сжатии определяют по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.1)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса, м².

Закон изменения нормальных напряжений по длине бруса также представляют в виде эпюры.

Абсолютная продольная деформация (удлинение или укорочение) бруса длиной l , имеющего постоянное поперечное сечение, при условии, что продольная сила во всех сечениях одинакова, определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}, \quad (3.2)$$

где E – модуль продольной упругости, Па.

Относительная продольная деформация участка бруса:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.3)$$

В известных пределах, зависящих от свойств материала, при растяжении и сжатии выполняется закон Гука, т.е. прямопропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} \quad (3.4)$$

Кроме эпюр N и σ также строят эпюру продольных перемещений поперечных сечений бруса u .

2.3.2 Указания по выполнению задания

Для построения эпюры продольных сил N необходимо использовать метод сечений. С этой целью:

а) брус мысленно разбивается на участки, в пределах которых скачкообразно не меняются внешняя нагрузка и площадь поперечного сечения; не меняется также материал бруса на участке;

б) в пределах участка выбирается плоское поперечное сечение, которым брус мысленно рассекается на две части;

в) рассматривается равновесие одной из полученных частей бруса, на которую действует та же внешняя нагрузка, которая действовала до рассечения бруса, а также внутренний силовой фактор – продольная сила N (эта сила заменяет действие отброшенной части). Силу N направляем от сечения, предполагая, что участок растянут;

г) составляется уравнение равновесия рассматриваемой части бруса: уравнение суммы проекций всех сил на продольную ось бруса z , из которого находится сила N .

Эпюру продольных перемещений поперечных сечений бруса *и* начинают строить от сечения, продольное перемещение которого известно (чаще всего – это заделка, которая не может перемещаться, т.е. её перемещение равно нулю).

Для контроля правильности построения эпюры продольных сил при растяжении и сжатии используется следующее правило: если в каком-то сечении балки приложена **внешняя сила**, то в соответствующем сечении на эпюре **внутренней силы N** будет «скачок» на величину этой внешней силы.

2.3.3 Условие задания 3

Двухступенчатый стальной брус, длины ступеней которого указаны на рисунке 3.1, нагружен силами F_1 , F_2 , F_3 . Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений по длине бруса, приняв $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Числовые значения F_1 , F_2 , F_3 , а также площади поперечных сечений ступеней A_1 и A_2 взять из таблицы 3.

Таблица 3

Вариант	F_1	F_2	F_3	A_1	A_2
	кН			$10^{-4}, \text{м}^2$	
0	29	2	54	1,9	1,4
1	30	10	5	1,8	2,6
2	20	8	14	1,2	1,8
3	16	25	28	1,2	1,8
4	26	9	10	1,9	1,6
5	14	16	10	2,1	1,9
6	28	22	12	2,8	2,6
7	17	13	6	1,1	1,5
8	10	12	13	0,9	0,7
9	40	55	24	2,8	3,4

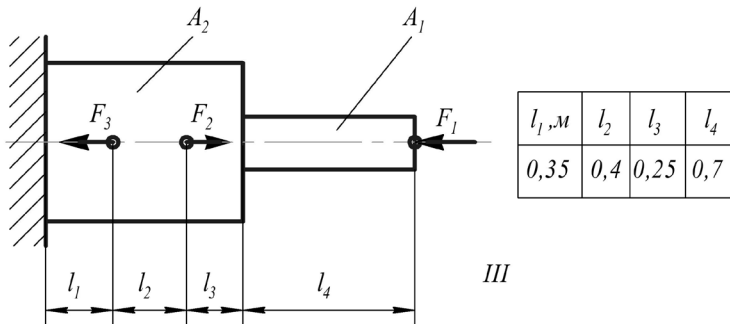
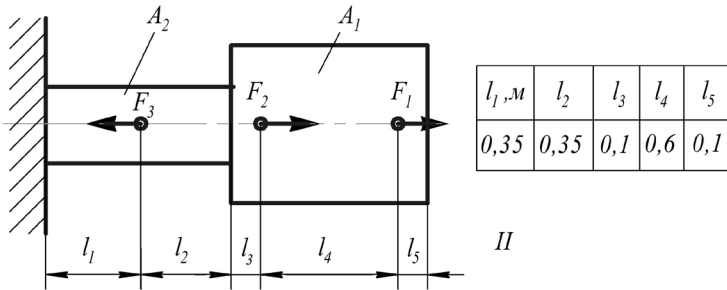
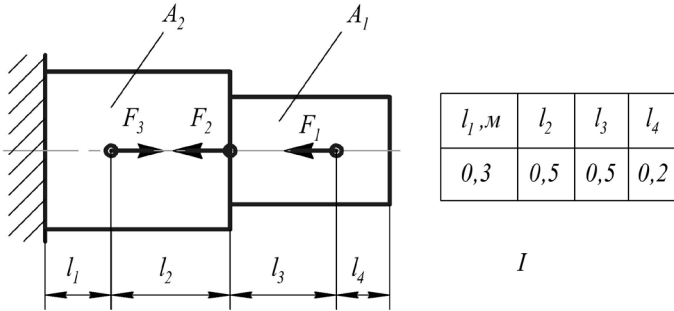
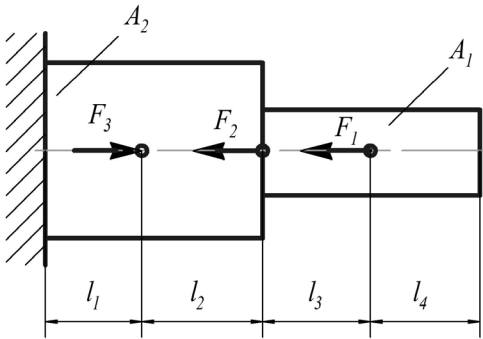
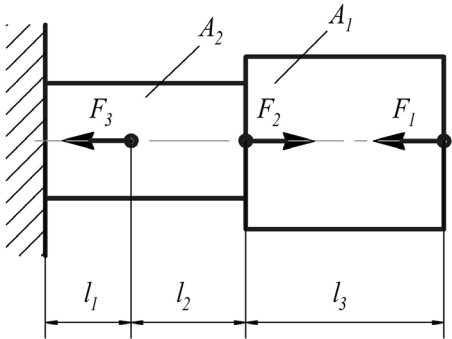


Рисунок 3.1



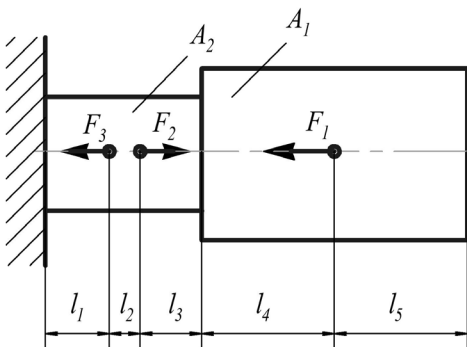
l_1, \mathcal{M}	l_2	l_3	l_4
0,3	0,5	0,4	0,4

IV



l_1, \mathcal{M}	l_2	l_3
0,3	0,4	0,8

V



l_1, \mathcal{M}	l_2	l_3	l_4	l_5
0,2	0,1	0,2	0,5	0,5

VI

Рисунок 3.1 (продолжение)

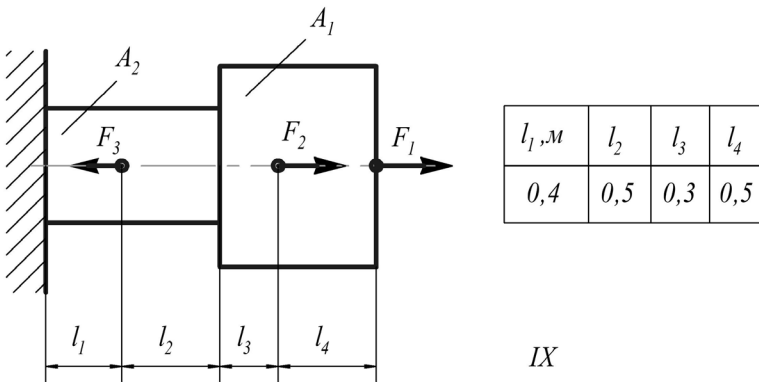
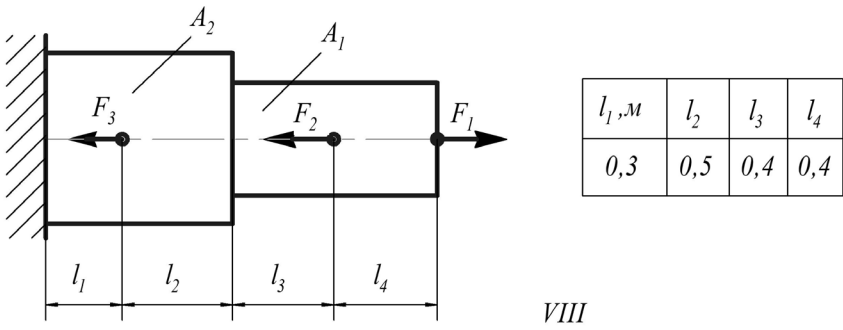
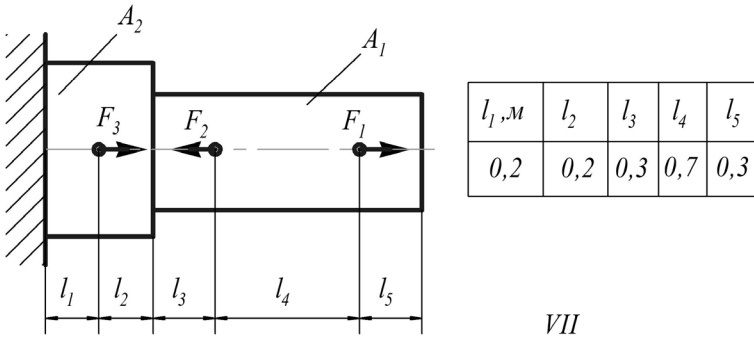


Рисунок 3.1 (продолжение)

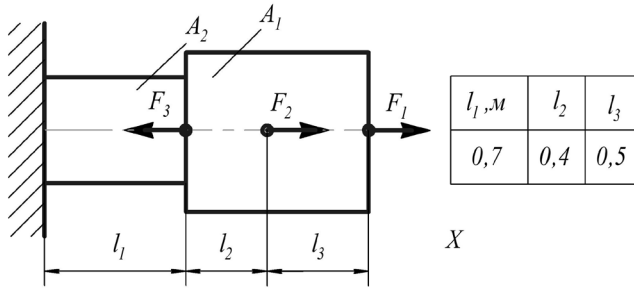


Рисунок 3.1 (продолжение)

2.3.4 Пример выполнения задания

Для бруса, показанного на рисунке 3.2, построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений по длине бруса u . Исходные данные: $F_1=20$ кН, $F_2=60$ кН, $F_3=70$ кН, $A_1=1$ см², $A_2=2$ см², $a=3$ м, $b=4$ м, $c=3$ м, $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

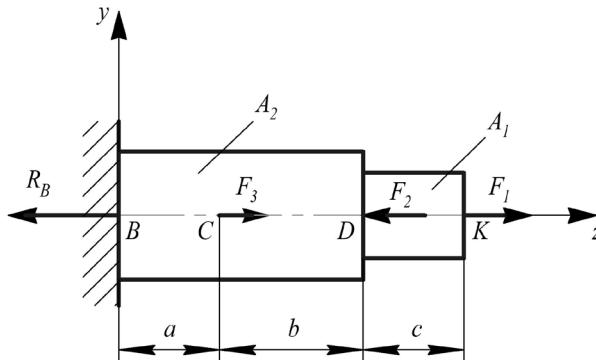
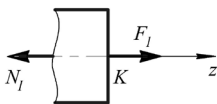


Рисунок 3.2

Решение

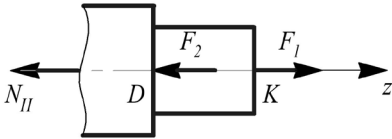
1. Строим эпюру нормальных сил N , используя метод сечений (рисунок 3.3). Предварительно покажем реакцию заделки R_B , направив её от сечения В, однако определять её величину не будем.

I участок



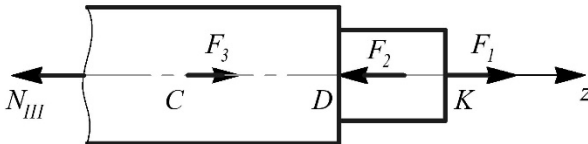
$$\Sigma F_z=0, -N_1+F_1=0 \rightarrow N_1= F_1=20 \text{ кН}$$

II участок



$$\Sigma F_z = -N_{II} - F_2 + F_1 = 0 \rightarrow N_{II} = F_1 - F_2 = 20 - 60 = -40 \text{ кН}$$

III участок



$$\Sigma F_z = 0, -N_{III} + F_3 - F_2 + F_1 = 0 \rightarrow N_{III} = F_1 - F_2 + F_3 = 20 - 60 + 70 = 30 \text{ кН}$$

2. Строим эпюру σ (рисунок 3.3).

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{20 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па} = 200 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -200 \cdot 10^6 \text{ Па} = -200 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 150 \cdot 10^6 \text{ Па} = 150 \text{ МПа}$$

3. Строим эпюру перемещений поперечных сечений бруса u (рисунок 3.3).

$u_B = 0$, т.к. в сечении В – заделка.

$$u_C = u_B + u_{CB} = 0 + \frac{N_{III} \cdot a}{E \cdot A_{III}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$u_D = u_C + u_{DC} = u_C + \frac{N_{II} \cdot b}{E \cdot A_{II}} = 2,25 \cdot 10^{-3} + \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -1,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$u_K = u_D + u_{KD} = u_D + \frac{N_I \cdot c}{E \cdot A_I} = -1,75 \cdot 10^{-3} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

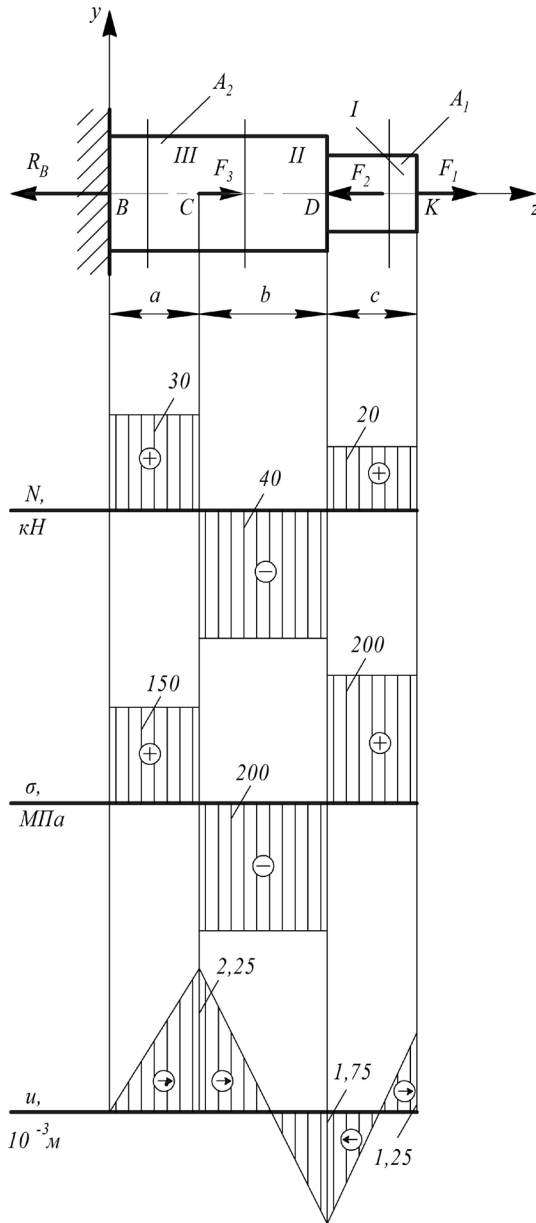


Рисунок 3.3

2.4 Задание 4

2.4.1 Краткие сведения из теории

Кручением называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент T , а остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Для определения внутренних моментов используют метод сечений.

Закон изменения крутящего момента по длине бруса принято также представлять в виде графика – эпюры T . Аргументом на эпюре является координата поперечного сечения z (м), а функцией – крутящий момент T .

Наибольшие касательные напряжения при кручении определяют по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}}, \quad (4.1)$$

где W_{ρ} – полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса, м^3 .

Закон изменения наибольших касательных напряжений по длине бруса также представляют в виде эпюры. Для определения размеров (диаметров) поперечных сечений бруса (вала) используют условие прочности на кручение:

$$\tau_{\max} = \left| \frac{T}{W_{\rho}} \right|_{\max} = \left| \frac{16T}{\pi d^3} \right|_{\max} \leq [\tau], \quad (4.2)$$

где d – диаметр вала,

$[\tau]$ – допускаемое напряжение на кручение.

Угол закручивания (угол поворота поперечного сечения):

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_{\rho}} \quad (4.3)$$

где G – модуль сдвига, Па.

I_{ρ} – полярный момент инерции поперечного сечения бруса, м^4 .

Кроме эпюр T и τ_{\max} также строят эпюру углов закручивания поперечных сечений бруса φ .

2.4.2 Указания по выполнению задания

Для построения эпюры крутящих моментов T необходимо использовать метод сечений. Эпюра строится аналогично эпюре N при растяжении и сжатии.

Для упрощения процесса определения величины и знака внутреннего момента T часто вместо аксонометрического изображения применяют плоское, как более простое [7, с.109-110]. При этом можно использовать упрощен-

ное правило знаков: внутренний момент T считается положительным, если при рассмотрении равновесия правой отсеченной части бруса внешний вращающий момент имеет вверху «крестик». При рассмотрении равновесия левой отсеченной части бруса правило знаков меняется на противоположное.

Эпюры углов закручивания поперечных сечений бруса ϕ начинают строить от сечения, угол поворота которого известен (чаще всего – это заделка, которая не может «поворачиваться», т.е. её угловое перемещение равно нулю). Здесь наблюдается аналогия с построением эпюры u при растяжении и сжатии.

Для контроля правильности построения эпюры крутящих моментов при кручении используется следующее правило: если в каком-то сечении балки приложен **внешний момент**, то в соответствующем сечении на эпюре **внутреннего момента T** будет «скачок» на величину этого внешнего момента.

2.4.3 Условие задания 4

К стальному ступенчатому брусу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента (рис.4.1). Левый конец бруса жестко закреплён в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца. Требуется:

- построить эпюру крутящих моментов по длине бруса;
- при заданном значении допускаемого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 бруса из расчёта на прочность, полученные значения округлить;
- построить эпюру действительных напряжений кручения по длине бруса;
- построить эпюру углов закручивания, приняв $G=0.4E$.

Данные взять из таблицы 4.

Таблица 4

Вариант	Расстояние, м			Моменты, кН·м				[τ], МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	M_4	
0	1,9	1,9	1,9	6,0	3,0	2,0	1,0	50
1	1,0	1,0	1,0	5,1	2,1	1,1	0,1	30
2	1,1	1,1	1,1	5,2	2,2	1,2	0,2	30
3	1,2	1,2	1,2	5,3	2,3	1,3	0,3	35
4	1,3	1,3	1,3	5,4	2,4	1,4	0,4	35
5	1,4	1,4	1,4	5,5	2,5	1,5	0,5	40
6	1,5	1,5	1,5	5,6	2,6	1,6	0,6	40
7	1,6	1,6	1,6	5,7	2,7	1,7	0,7	45
8	1,7	1,7	1,7	5,8	2,8	1,8	0,8	45
9	1,8	1,8	1,8	5,9	2,9	1,9	0,9	50

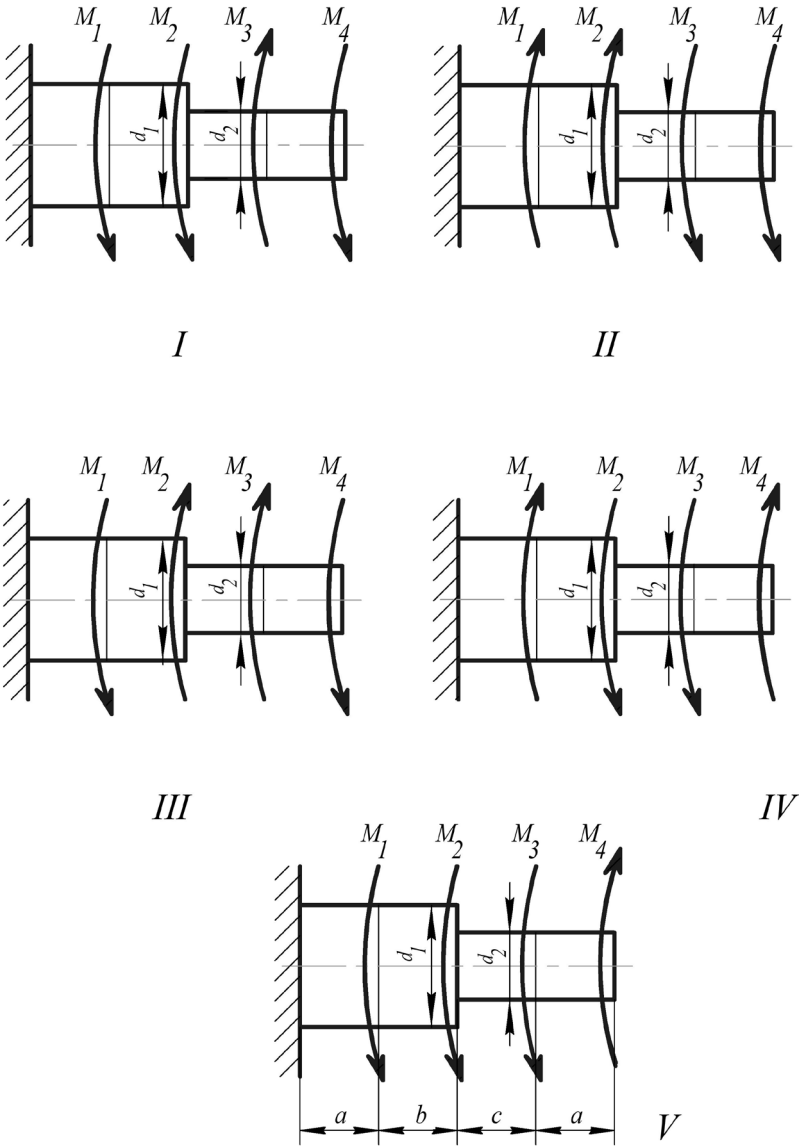
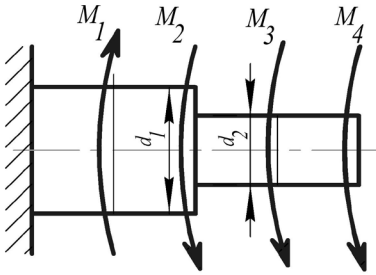
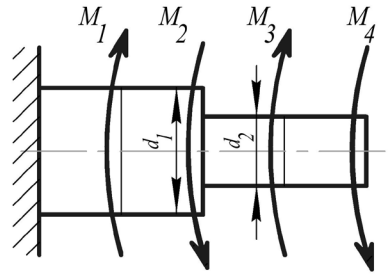


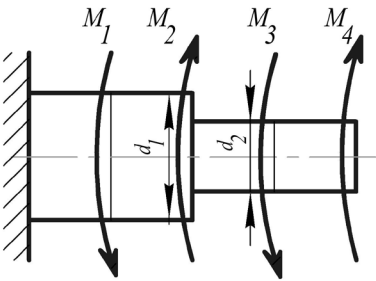
Рисунок 4.1



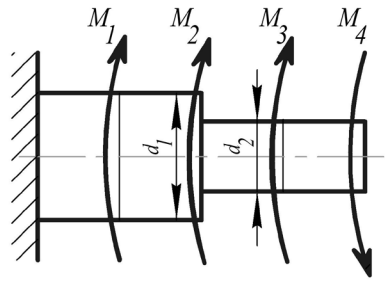
VI



VII



VIII



IX

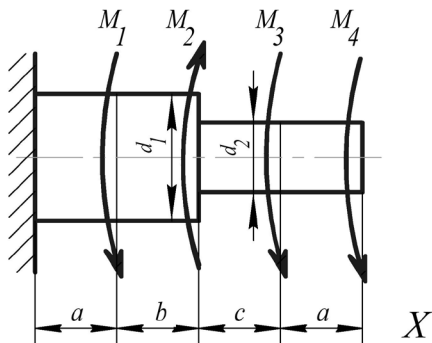


Рисунок 4.1 (продолжение)

2.4.4 Пример выполнения задания

К стальному ступенчатому брусу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента (рисунок 4.2). Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов по длине бруса;
- 2) при заданном значении допускаемого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 бруса из расчета на прочность, полученные значения округлить;

3) построить эпюру действительных напряжений кручения по длине бруса;

4) построить эпюру углов закручивания, приняв $G=0,4E$.

Исходные данные: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0,4E = 8 \cdot 10^4$ МПа, $M_1 = 5$ кН·м, $M_2 = 2$ кН·м, $M_3 = 1$ кН·м, $M_4 = 0,2$ кН·м, $a = b = c = d = 1$ м, $[\tau] = 50$ МПа.

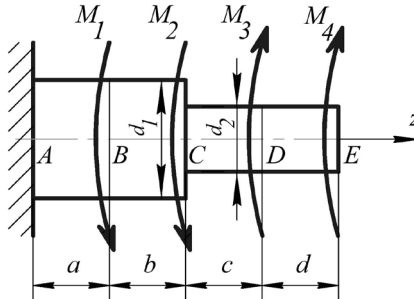


Рисунок 4.2

Решение

1. Строим эпюру крутящих моментов (рисунок 4.3)

$$T = \sum_{\text{отс}} m_z (F^{\text{внеш}})$$

$$T_I = +M_4 = 0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$T_{II} = M_4 + M_3 = 0,2 + 1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$T_{III} = M_4 + M_3 - M_2 = 0,2 + 1 - 2 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$T_{IV} = M_4 + M_3 - M_2 - M_1 = 0,2 + 1 - 2 - 5 = -5,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

2. Определяем диаметры d_1 и d_2 из условия прочности бруса на кручение

$$\tau_{\text{max}} = \left| \frac{T}{W_{\rho}} \right|_{\text{max}} = \left| \frac{16T}{\pi d^3} \right|_{\text{max}} \leq [\tau]$$

Для участков I и II: $T_{\text{max}} = T_{II} = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$$\frac{16T_{II}}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 4,964 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 49,64 \text{ мм}$$

Принимаем $d_2 = 50$ мм.

Для участков III и IV:

$T_{\max} = |T_{IV}| = 5,8$ кН·м, тогда

$$\frac{16|T_{IV}|}{\pi \cdot d_1^3} \leq [\tau];$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |T_{IV}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 8,392 \cdot 10^2 \text{ м} = 83,92 \text{ мм}$$

Принимаем $d_1 = 85$ мм.

3. Строим эпюру действительных касательных напряжений (рисунок 4.3)

$$\tau_{\max, I} = \frac{T_I}{W_{\rho I}} = \frac{16 \cdot T_I}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3} = 8,15 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,15 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max, II} = \frac{16 \cdot T_{II}}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3} = 48,92 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,92 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max, III} = \frac{16 \cdot T_{III}}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot (-0,8 \cdot 10^3)}{3,14 \cdot (8,5 \cdot 10^{-2})^3} = -6,64 \cdot 10^6 \text{ Па} = -6,64 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max, IV} = \frac{16 \cdot T_{IV}}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot (-5,8 \cdot 10^3)}{3,14 \cdot (8,5 \cdot 10^{-2})^3} = -48,12 \cdot 10^6 \text{ Па} = -48,12 \text{ МПа}$$

4. Строим эпюру углов закручивания φ (рисунок 4.3)

$\varphi_A = 0$, т.к в сечении А заделка

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{BA} = 0 + \frac{T_{IV} \cdot a}{G \cdot I_{\rho IV}} = \frac{-5,8 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,122 \cdot 10^{-6}} = -1,415 \cdot 10^{-2} \text{ рад,}$$

$$\text{где: } I_{\rho IV} = I_{\rho III} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (8,5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 5,122 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{CB} = \varphi_B + \frac{T_{III} \cdot b}{G \cdot I_{\rho III}} = -1,415 \cdot 10^{-2} + \frac{-0,8 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,122 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= -1,610 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{DC} = \varphi_C + \frac{T_{II} \cdot c}{G \cdot I_{\rho II}} = -1,610 \cdot 10^{-2} + \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,613 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 0,837 \cdot 10^{-2} \text{ рад,}$$

$$\text{где } I_{\rho I} = I_{\rho II} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 0,613 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{ED} = \varphi_D + \frac{T_1 \cdot d}{G \cdot I_{p1}} = 0,837 \cdot 10^{-2} + \frac{0,2 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,613 \cdot 10^{-6}} = 1,245 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

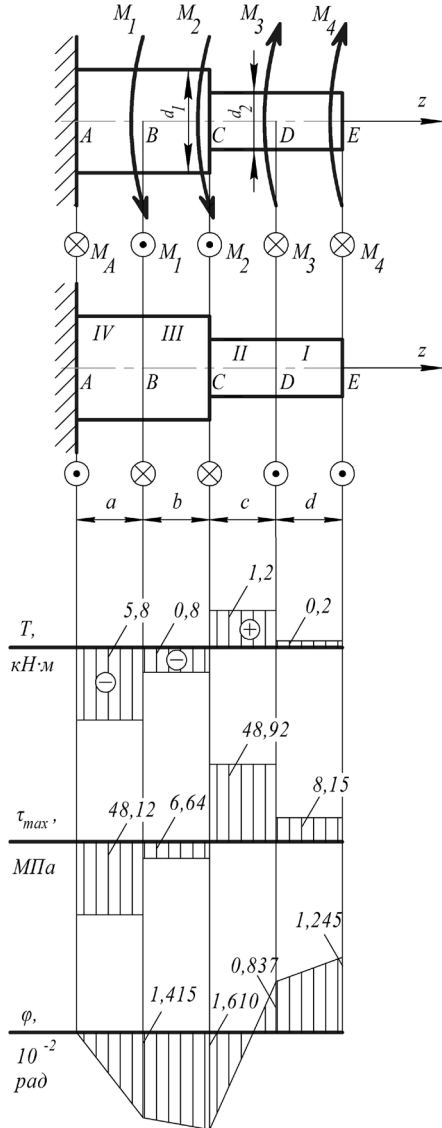


Рисунок 4.3

2.5 Задание 5

2.5.1 Краткие сведения из теории

Чистым изгибом называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент M_x , а остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

При плоском **поперечном изгибе** в поперечных сечениях бруса возникают два внутренних силовых фактора – изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y , остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Для определения изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_y используют метод сечений.

Законы изменения изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_y по длине бруса представляют в виде эпюр. Аргументом на эпюре является координата поперечного сечения z (м), а функцией – изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y .

Наибольшие нормальные напряжения при изгибе определяют по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (5.1)$$

где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения бруса, м³.

Для определения размеров поперечного сечения бруса используют условие прочности на изгиб:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|^{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение на изгиб, Па.

2.5.2 Указания по выполнению задания

Для построения эпюры изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_y необходимо использовать метод сечений. Эпюры строятся аналогично эпюре N при растяжении и сжатии и эпюре T при кручении.

Сила Q_y считается положительной, если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть балки относительно выбранного сечения по ходу часовой стрелки, и отрицательной, - если против хода.

Момент M_x считается положительным, если внешняя нагрузка стремится деформировать балку выпуклостью вниз; момент отрицателен, если внешняя нагрузка стремится деформировать балку выпуклостью вверх.

Существуют правила, позволяющие проконтролировать верность построения эпюр Q_y и M_x . Это, прежде всего, дифференциальные зависимости при поперечном изгибе (Журавского), а также «производные» из них:

1. Порядок уравнения кривой, ограничивающей эпюру M_x всегда на единицу выше порядка уравнения кривой, ограничивающей эпюру Q_y .
2. Если прямая, ограничивающая эпюру Q_y , пересекает в каком-то сечении ось абсцисс, то в этом сечении на эпюре M_x будет экстремум (максимум или минимум).
3. Парабола, ограничивающая эпюру M_x , будет направлена своей выпуклостью навстречу «стрелкам» распределенной нагрузки («правило зонтика»).
4. «Правило скачков»: если в каком-то сечении балки приложена **внешняя сила**, то в соответствующем сечении на эпюре **внутренней силы** Q_y будет «скачок» на величину этой внешней силы; если в каком-то сечении балки приложен **внешний момент**, то в соответствующем сечении на эпюре **внутреннего момента** M_x будет «скачок» на величину этого внешнего момента.

2.5.3 Условие задания 5

Для заданной схемы балки (рисунок 5.1) требуется написать выражения Q_y и M_x для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q_y и M_x , найти M_{max} и подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma]=160$ МПа.

Данные взять из таблицы 5.

Таблица 5

Ва- риант	Данные величины						
	a , м	b , м	c , м	ℓ , м	Изгибаю- щий момент M , кН·м	Сосредо- точная сила F , кН	Равномерно распреде- ленная нагрузка q , кН/м
0	3,8	5,0	2,7	14	11	10	13
1	2,0	3,2	1,8	10	7	20	22
2	2,2	3,4	1,9	10	7	19	21
3	2,4	3,6	2,0	11	8	18	20
4	2,6	3,8	2,1	11	8	16	19
5	2,8	4,0	2,2	12	9	15	18
6	3,0	4,2	2,3	12	9	14	17
7	3,2	4,4	2,4	13	10	13	16
8	3,4	4,6	2,5	13	10	12	15
9	3,6	4,8	2,6	14	11	11	14

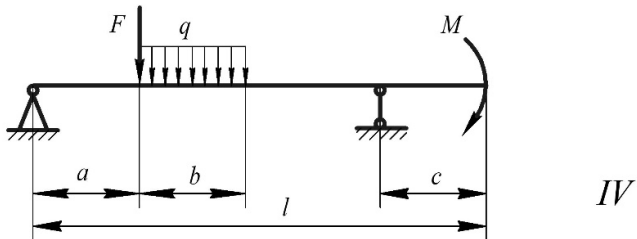
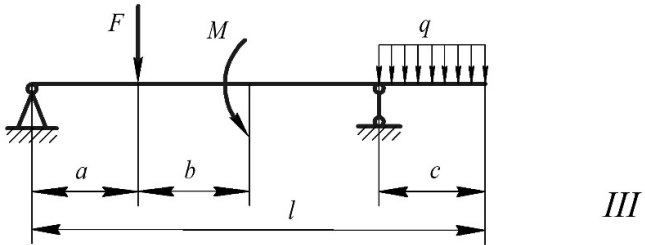
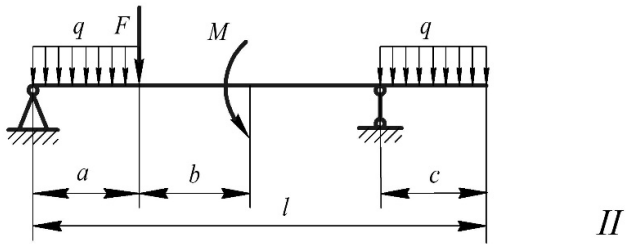
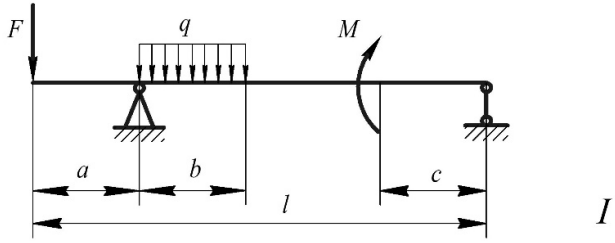
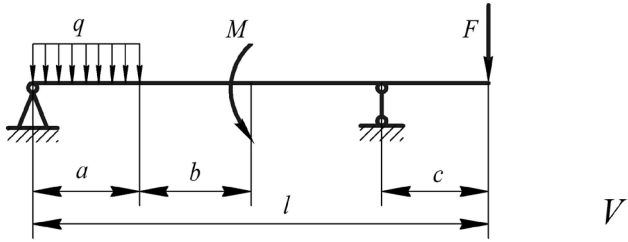
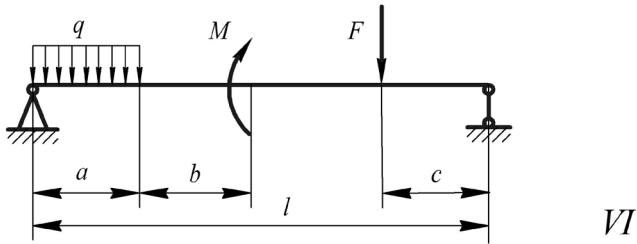


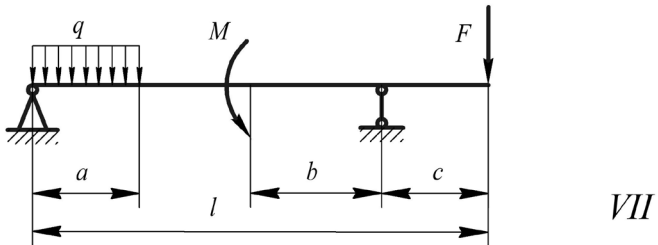
Рисунок 5.1



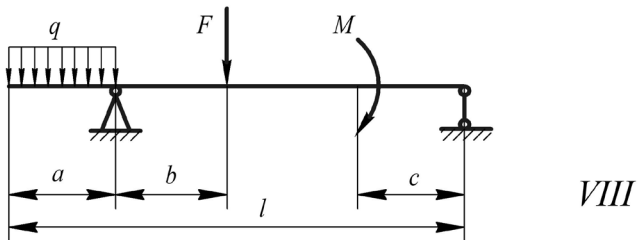
V



VI



VII



VIII

Рисунок 5.1 (продолжение)

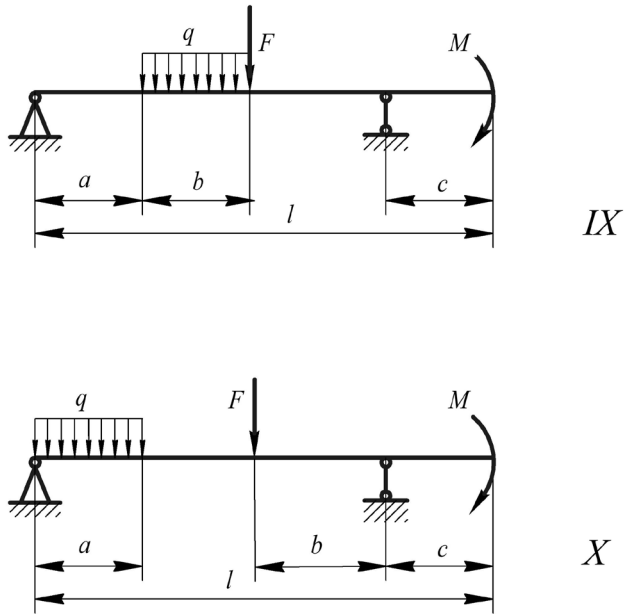


Рисунок 5.1(продолжение)

2.5.4 Пример выполнения задания

Для заданной схемы балки (рисунок 5.2) требуется написать выражения Q_y и M_x для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q_y и M_x , найти M_{\max} и подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения.

Исходные данные: $F = 10$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $l = 12$ м, $[\sigma] = 160$ МПа.

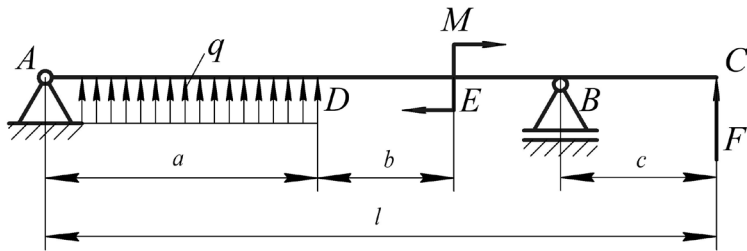


Рисунок 5.2

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки АС, на которую действуют: сила F , пара сил с моментом M , равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Обозначим на рисунке d , равное:

$$d = l - a - b - c = 12 - 4 - 3 - 2 = 3 \text{ м}$$

2. Связями для балки АС являются: неподвижный шарнир А и подвижный шарнир в точке В. Покажем составляющие реакции неподвижного шарнира \vec{Z}_A , \vec{Y}_A и реакцию подвижного шарнира \vec{R}_B .

3. На балку действует произвольная плоская система сил. Запишем три независимых уравнения равновесия.

$$\sum F_Z = 0, Z_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0: Y_A + q \cdot a + R_B + F = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(F) = 0: q \cdot a \cdot a / 2 - M + R_B \cdot (a + b + d) + F \cdot l = 0 \quad (3)$$

$$\text{Из (3): } R_B = \frac{-q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M - F \cdot l}{a + b + d} = \frac{-5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 10 - 10 \cdot 12}{4 + 3 + 3} = -15 \text{ кН}$$

$$\text{Из (2): } Y_A = -q \cdot a - R_B - F = -5 \cdot 4 + 15 - 10 = -15 \text{ кН}$$

Проверка

$$\sum m_B(F) = F \cdot c - M - q \cdot a \cdot (b + d + \frac{a}{2}) - Y_A \cdot (a + b + d) = 10 \cdot 2 - 10 - 5 \cdot 4 \cdot (3 + 3 + 2) + 15 \cdot (4 + 3 + 3) = 0$$

4. Строим эпюры Q_y и M_x (рисунок 5.3).

$$\text{I участок: } 0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q_y = Y_A + q \cdot z_1$$

$$M_x = Y_A \cdot z_1 + (q \cdot z_1) \cdot \frac{z_1}{2} = Y_A \cdot z_1 + q \cdot z_1^2 / 2$$

$$\text{При } z_1 = 0: Q_y = Y_A = -15 \text{ кН}$$

$$M_x = 0$$

$$\text{При } z_1 = a: Q_y = Y_A + q \cdot a = -15 + 5 \cdot 4 = 5 \text{ кН}$$

$$M_x = Y_A \cdot a + q \cdot a^2 / 2 = -15 \cdot 4 + 5 \cdot (4)^2 / 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $z_1 = z_{10}$: $Q_y = 0$, $M_x = M_x^{\max}$ (сила равна 0, а момент принимает экстремальное значение)

$$Q_y = Y_A + q \cdot z_{10} = 0$$

$$z_{10} = \frac{-Y_A}{q} = -\frac{(-15)}{5} = 3 \text{ м}$$

$$M_x^{\max} = Y_A \cdot z_{10} + q \cdot z_{10}^2/2 = -15 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2/2 = -22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

II участок: $0 \leq z_2 \leq b$

$$Q_y = Y_A + q \cdot a = -15 + 5 \cdot 4 = 5 \text{ кН}$$

$$M_x = Y_A \cdot (a + z_2) + (q \cdot a) \cdot (z_2 + \frac{a}{2})$$

$$\text{При } z_2 = 0: M_x = Y_A \cdot a + q \cdot a^2/2 = -15 \cdot 4 + 5 \cdot (4)^2/2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\text{При } z_2 = b: M_x = Y_A \cdot (a + b) + q \cdot a \cdot (b + a/2) = -15 \cdot (4 + 3) + 5 \cdot 4 \cdot (3 + 4/2) = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

III участок: $0 \leq z_3 \leq d$

$$Q_y = -R_B - F = 15 - 10 = 5 \text{ кН}$$

$$M_x = F \cdot (z_3 + c) + R_B \cdot z_3$$

$$\text{При } z_3 = 0: M_x = F \cdot c = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\text{При } z_3 = d: M_x = F \cdot (d + c) + R_B \cdot d = 10 \cdot (3 + 2) + (-15) \cdot 3 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

IV участок: $0 \leq z_4 \leq c$

$$Q_y = -F = -10 \text{ кН}$$

$$M_x = F \cdot z_4$$

$$\text{При } z_4 = 0: M_x = 0$$

$$\text{При } z_4 = c: M_x = F \cdot c = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

5. Подбираем двутавровую балку из расчета на прочность при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|^{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{|M_x|^{\max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 140,6 \cdot 10^{-6} = 140,6 \text{ см}^3$$

Выбираем по сортаменту двутавр №18 с величиной $W_x = 143,0 \text{ см}^3$

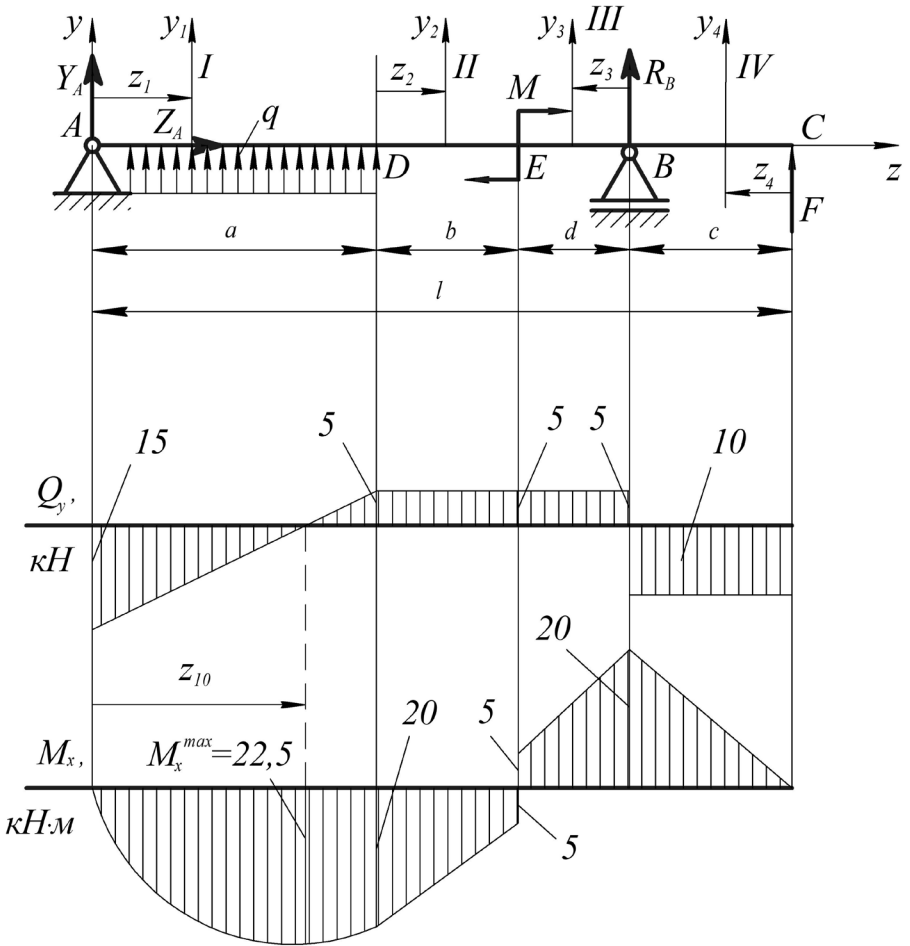


Рисунок 5.3

Библиографический список

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие для студентов, обучающихся по техническим специальностям. Сборник задач по теоретической механике. Санкт-Петербург. Лань, 2008. - 448 с.
3. Сигаев Н.П., Бегова А.В., Зимин А.И., Суменков А.Л. Сборник расчетных заданий по теоретической механике. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов. Новомосковск, 2011. - 109 с.
4. Сигаев Н.П., Зимин А.И., Лукиенко Л.В., Суменков А.Л. Теоретическая механика. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов. Часть 1 / ГОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал); Новомосковск, 2010.- 92 с.
5. Сигаев Н.П., Бегова А.В., Зимин А.И., Суменков А.Л. Сборник расчетных заданий по теоретической механике. Часть 1. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов / ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Новомосковск, 2016.- 112 с.
6. Н.М.Беляев, и др.; под. ред. Л.К.Паршина. Сборник задач по сопротивлению материалов. Санкт-Петербург, 2003 -432 с.
7. Степин П. А. Сопротивление материалов. - СПб.: М.: Краснодар: Лань, 2014. – 320 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. – 542 с.
9. Прикладная механика, техническая механика, механика. Учебно-методическое пособие. Часть 1. Сопротивление материалов. Лабораторно - практические работы / ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал). Сост.: А.Л. Суменков, И.И. Семочкин, Л.В. Лукиенко, А.Н. Афросин, В.Я. Цыцора. Новомосковск, 2013.- 48 с.

Учебное издание

**МЕХАНИКА
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Теоретическая механика и сопротивление материалов

Составители:

СУМЕНКОВ Александр Леонидович

ЗИМИН Анатолий Игоревич

Редактор

Подписано в печать

Формат 60×84^{1/16}

Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.

Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л.

Тираж 50 экз. Заказ № 1974/1591 от 23.12.2020 г.

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»,

Новомосковский институт (филиал). Издательский центр

Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9

Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы, 8