НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОГО ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ
Д.И.МЕНДЕЛЕЕВА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
по теме:
“ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ М Е Х А Н И К А.”

Составители: Борщан В.С.Григорьев В.В.
Гукасов А.С.,Коняхин В.П.,
Логачева В.М.,Мягких Г.И.,
Семина Б.Г.,Сивкова О.Д.,
Подольский В.А.,Черков В.М.

Новомосковск - *1996 г.*

С О Д Е Р Ж А Н И Е

стр.

1. Кинематика 3

2. Динамика материальной точки (второй закон Ньютона)........................ 13

3. Работа, мощность, энергия (поступательное движение). Законы сохранения. 20

4. Динамика вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Работа, мощность, энергия при вращательном движении. Закон сохранения момента импульса 27

1. КИНЕМАТИКА

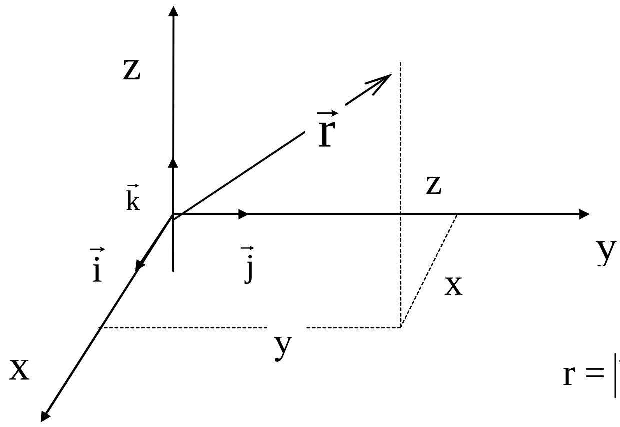
Основные формулы

1.1. Положение материальной точки в пространстве задается *радиус-вектором* $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы направлений (орты);

x, y, z - координаты точки.



$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

$$r = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Кинематические уравнения движения материальной точки в вектор-ной и координатной формах:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, где t - время.

1.2. Вектор средней скорости

$<\vec{v}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{r}$ - перемещение материальной точки за интервал времени Δt.

Средняя путевая скорость

$< v > = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, где ΔS - путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

В общем случае $< v > \neq \left|<\vec{v}>\right|$. При прямолинейном движении с неиз-менной по направлению скоростью $< v > = \left|<\vec{v}>\right|$.

Мгновенная скорость: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$,

где $v_x = \dfrac{dx}{dt}$; $v_y = \dfrac{dy}{dt}$; $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ - проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат.

Модуль скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Закон сложения скоростей $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{v}_i$,

где $\vec{v}$ - скорость результирующего движения; $\vec{v}_i$ - скорость i-ого движения.

1.3. Среднее ускорение: $<\vec{a}> = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$,

где $\Delta\vec{v}$ - приращение вектора скорости за интервал времени Δt.

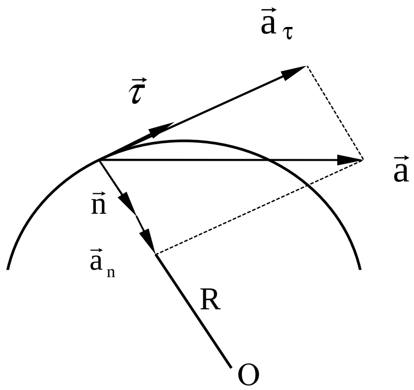
Мгновенное ускорение: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$,

где $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ - проекции ускорения $\vec{a}$ на оси координат.

Модуль ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной $\vec{a}_n$ и тангенциальной $\vec{a}_\tau$ составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$
$$\vec{a}_n = a_n\vec{n}$$
$$\vec{a}_\tau = a_\tau\vec{n}$$
$$|\vec{n}| = |\vec{\tau}| = 1$$



$\vec{\tau}$ - направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки, т.е. $\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}$. $\vec{n}$ - направлен по нормали к траектории в сторону вогнутости.

Модули этих ускорений:

$$a_n = \frac{v^2}{R};\ a_\tau = \frac{dv}{dt};\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R - радиус кривизны в данной точке траектории.

1.4. Кинематическое уравнение равномерного прямолинейного движения ($a_\tau = a_n = a = 0$, v = const) материальной точки по оси OX

$x = x_0 + v_x t$,

где x_0 - начальная координата; x - координата точки в любой момент времени t; t - время движения.

$S = x - x_0 = v_x t$,

где S - длина пути, пройденного точкой.

Кинематическое уравнение равнопеременного прямолинейного движе-ния ($a_n = 0$, $a_\tau = a = \text{const}$)

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

где v_{ox} - проекция начальной скорости на ось X,

a_x - проекция ускорения на ось X.

$$S = x - x_o = v_{ox}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Скорость точки при равнопеременном прямолинейном движении изменяется по следующему закону:

$v_x = v_{ox} + a_x t$, где v_X - проекция скорости на ось X.

При описании свободного падения материальной точки необходимо в формулах п.1.4. ускорение a заменить на ускорение свободного падения g.

1.5. Положение твердого тела (при заданной оси вращения) определяется углом поворота φ.

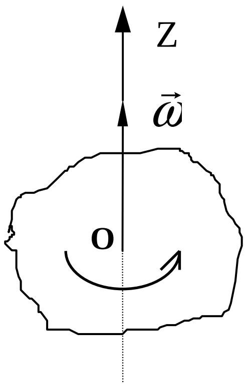
Кинематическое уравнение вращательного движения φ = f(t).

Средняя угловая скорость $< \omega >= \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$,

где Δ φ – угол поворота за интервал времени Δt.

Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\ ;\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$



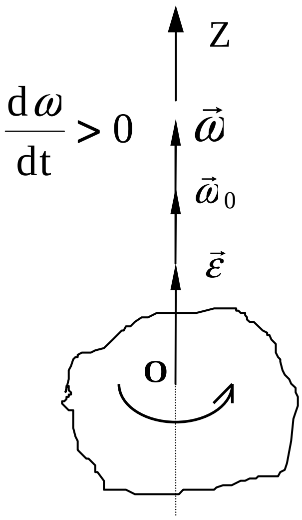
Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вра-щения. Направление вектора $\vec{\omega}$ связано с направлением вращения правилом буравчика.

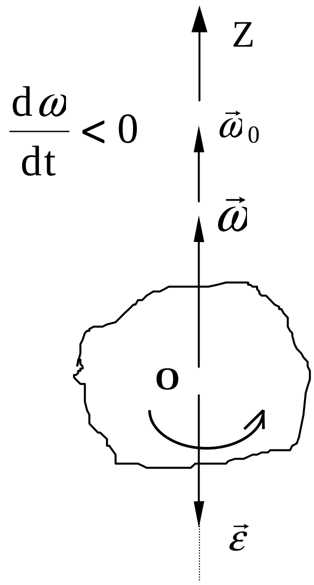
Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

В случае неподвижной оси вращения вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения.

$\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ при ускоренном вращении (dω/dt > 0). $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$ при замедленном вращении (dω/dt < 0).





Кинематическое уравнение равномерного вращения (ω = const, ε = 0). $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где φ_0 - начальная угловая координата.

Частота вращения (ω = const, ε = 0) $n = N/t$, или $n = 1/T$,
где N - число оборотов, совершаемых за время t ; T - период обращения (время одного полного оборота).

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi n$$

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε = const)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2},$$

где ω_{oz} - проекция начальной угловой скорости $\vec{\omega}_0$ на ось OZ, совпадающую с осью вращения; ε_z - проекция $\vec{\varepsilon}$ на ось OZ; t - время.

Угловая скорость при равнопеременном движении

$$\omega_z = \omega_{oz} + \varepsilon_z t,$$

где ω_z - проекция угловой скорости на ось OZ.

1.6. Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

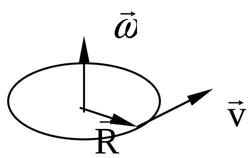
путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R:

$S = \varphi R$ (φ – угол поворота тела);

линейная скорость точки:

$v = \omega R$;

$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]$;



ускорение точки:

тангенциальное $a_\tau = \varepsilon R$; $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\ \vec{R}]$;

нормальное $a_n = \omega^2 R$; $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

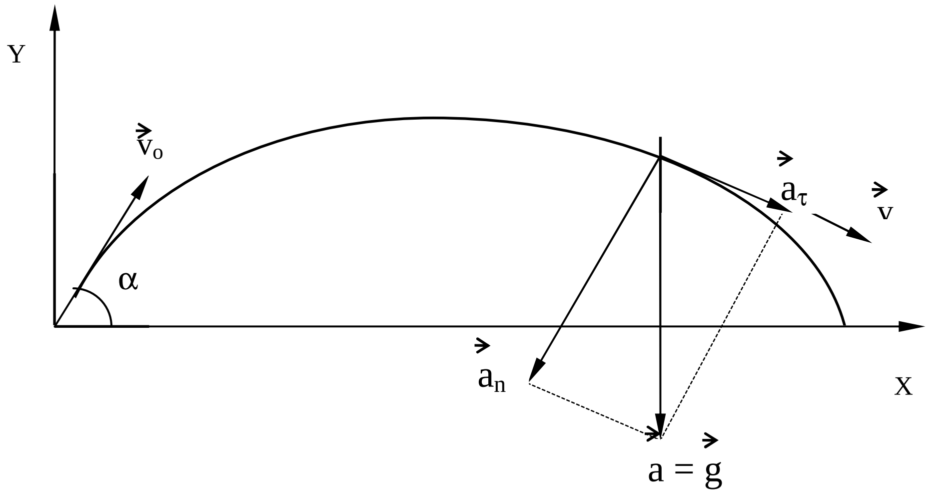
Задача 1.1.

Тело брошено со скоростью v_0 = 14,7 м/с под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n ускорения тела и радиус кривизны R траектории через время t = 1,25 с после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

1 метод решения

Дано:
$v_0 = 14{,}7$ м/с
$\alpha = 30^0$
t = 1,25 с
----
a_τ -?, a_n-?, R-?



1. При полете на тело действует только сила тяжести, поэтому полное ускорение $\vec{a}$ тела будет равно ускорению свободного падения $\vec{g}$. Запишем кинематические уравнения движения в координатной форме:

$$x = x_0 + v_{0X}t + \frac{g_x t^2}{2}, \qquad (1.1)$$

где x_0 - начальная координата тела,
v_{0X} - проекция начальной скорости тела на ось X,
g_X - проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на ось X,
t - время движения тела.
$x_0 = 0$; $v_{0X} = v_0 \cdot \cos\alpha$; $g_X = g \cdot \cos 90^0 = 0$

Формула (1.1) с учетом трех последних равенств примет вид:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad (1.2)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}, \qquad (1.3)$$

где y_0 - начальная координата тела;
$v_{0У}$ - проекция начальной скорости $\vec{v}_0$ тела на ось У;
g_y - проекция ускорения свободного падения $\vec{g}$ на ось У.
$y_0 = 0$; $v_{0У} = v_0 \cdot \cos(90^0 - \alpha) = v_0 \cdot \sin\alpha$; $g_У = g \cdot \cos 180^0 = - g$.

Формула (1.3) с учетом трех последних равенств примет вид:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \qquad (1.4)$$

$v_X = dx/dt$, где v_X - проекция скорости тела $\vec{v}$ на ось X через время t после начала движения.

Учитывая равенство (1.2) получаем:

$$v_x = \frac{d(v_0 \cos\alpha \cdot t)}{dt} = v_0\cos\alpha\frac{dt}{dt} = v_0\cos\alpha.$$

$v_X = v_0 \cdot \cos\alpha$ (1.5)

$v_Y = dy/dt$

Учитывая равенство (1.4) получаем:

$$v_y = \frac{d\left(v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right)}{dt} = v_0\sin\alpha\frac{dt}{dt} - \frac{g}{2}\cdot\frac{d(t^2)}{dt} = v_0\sin\alpha - \frac{g}{2}2t = v_0\sin\alpha - gt$$

$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$ (1.6)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Последняя формула с учетом равенств (1.5) и (1.6) примет вид:

$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} \quad (1.7)$$

$a_\tau = dv/dt$. Учитывая равенство (1.7), получаем:

$$a_\tau = \frac{d\left[(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(v_0\sin\alpha - gt)\cdot(-g) =$$

$$= \left[(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot (gt - v_0\sin\alpha)\cdot g \quad =>$$

$$=> \quad a_\tau = \frac{g(gt - v_0\sin\alpha)}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}}$$

$$a_\tau = \frac{9,8(9,8\cdot 1,25 - 14,7\cdot 0,5)}{\sqrt{(14,7\cdot 0,866)^2 + (14,7\cdot 0,5 - 9,8\cdot 1,25)^2}} = 3,5 \text{ м/с}^2$$

$a_\tau = 3,5$ м/с^2.

2. $\vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где a_n - нормальное ускорение тела.

$g^2 = a_n^2 + a_\tau^2$

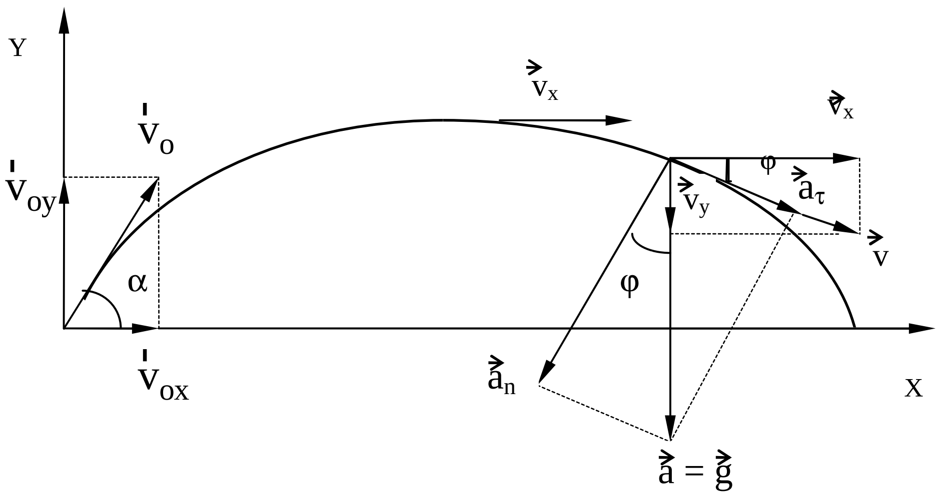
$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$; $a_n = \sqrt{(9,8)^2 - (3,5)^2} = 9,2$ м/с^2; $a_n = 9,2$ м/с^2.

3. $a_n = v^2/R$; $R = v^2/a_n$. С учетом формулы (1.7) последнее равенство примет вид:

$$R = \frac{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2}{a_n}$$

$$R = \frac{\left(14{,}7 \cdot 0{,}866\right)^2 + \left(14{,}7 \cdot 0{,}50 - 9{,}8 \cdot 1{,}25\right)^2}{9{,}2} = 20 \text{ м}; \;\; R = 20 \text{ м}$$

2 метод решения



Найдем время t, за которое тело поднимется до верхней точки траектории

$$v_y = v_{0y} - gt_1; \;\; v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

Из этих уравнений получаем : $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt_1$.

В верхней точке траектории $v_y = 0$

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha - gt_1 ; \;\; t_1 = v_0 \cdot \sin\alpha / g , \; t_1 = 14{,}7 \cdot 0{,}50/9{,}8 = 0{,}75 \text{ с}$$

Следовательно, к моменту времени t = 1,25 с тело будет находиться уже на нисходящей ветви траектории. От момента прохождения телом верхней точки траектории до момента, в который необходимо найти a_τ, a_n и R пройдет время

$$t' = t - t_1 , \; t' = 1{,}25 - 0{,}75 = 0{,}50 \text{ с.}$$

1. Из рисунка видно, что $\sin\varphi = \dfrac{v_y}{v} = \dfrac{a_\tau}{a} = \dfrac{a_\tau}{g}$

$$a_\tau = \frac{g v_y}{v} \qquad (1.8)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (1.9)$$

По оси У тело движется с ускорением g и в верхней точке траектории скорость вдоль оси У равна нулю, поэтому

$$v_y = gt' \qquad (1.10)$$

По оси X тело движется равномерно, т.к. проекция силы тяжести на ось X равна нулю, поэтому

$$v_X = v_{0X} = v_0\cos\alpha \qquad (1.11)$$

Из равенств (1.9), (1.10) и (1.11) получаем

$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (gt')^2} \qquad (1.12)$$

Равенство (1.8) с учетом формул (1.10) и (1.12) примет вид

$$a_\tau = \frac{g^2 t'}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (gt')^2}}$$

$$a_\tau = \frac{(9{,}8)^2 \cdot 0{,}50}{\sqrt{(14{,}7 \cdot 0{,}866)^2 + (9{,}8 \cdot 0{,}50)^2}} = 3{,}5 \text{ м} / \text{с}^2$$

$a_\tau = 3{,}5$ м/с^2.

2. Из рисунка имеем: $\cos\varphi = \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{a_n}{a} = \dfrac{a_n}{g}$

$$a_n = \frac{g v_x}{v} \qquad (1.13)$$

Равенство (1.13) с учетом формул (1.11) и (1.12) примет вид

$$a_n = \frac{g v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (gt')^2}}$$

$$a_n = \frac{9{,}8 \cdot 14{,}7 \cdot 0{,}866}{\sqrt{(14{,}7 \cdot 0{,}866)^2 + (9{,}8 \cdot 0{,}50)^2}} = 9{,}2 \text{ м} / \text{с}^2$$

$a_n = 9{,}2$ м/с^2.

3. Нормальное ускорение определяется по формуле

$$a_n = v^2/R \qquad (1.14)$$

Из равенств (1.12) и (1.14) получаем; $a_n = \dfrac{(v_0\cos\alpha)^2 + (gt')^2}{R}$

$$R = \frac{(v_0\cos\alpha)^2 + (gt')^2}{a_n}$$

$$R = \frac{(14{,}7 \cdot 0{,}866)^2 + (9{,}8 \cdot 0{,}50)^2}{9{,}2} = 20 \text{ м}$$

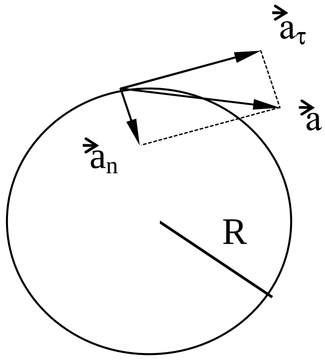
$R = 20$ м

Задача 1.2

Движение частицы по окружности радиусом R = 30 см описывается уравне-нием $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где A = 2,0 рад; B = - 0,50 рад/с^2; C = 0,40 рад/с^3. Определить для частицы в момент времени t = 2,0 с: 1. Угловую скорость ω;
2. Угловое ускорение ε ; 3. Тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

РЕШЕНИЕ

Дано:
R = 30 см = 0,30 м
A = 2,0 рад
B = - 0,50 рад/с^2
C = 0,40 рад/с^3
t = 2,0 с
----
1. ω - ? ; 2. ε - ?
3. a_τ - ? a_n - ? a - ?



1. Угловая скорость ω есть первая производная от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(A + Bt^2 + Ct^3\right)}{dt} = \frac{dA}{dt} + B\frac{dt^2}{dt} + C\frac{dt^3}{dt} = 2Bt + 3Ct^2$$

$$\omega = 2\cdot(-0{,}50)\cdot 2{,}0 + 3\cdot 0{,}40\cdot 4{,}0 = 2{,}8 \text{ рад/с}$$

$$\omega = 2{,}8 \text{ рад/с}$$

2. Угловое ускорение ε есть первая производная от угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(2Bt + 3Ct^2\right)}{dt} = 2B\frac{dt}{dt} + 3C\frac{dt^2}{dt} = 2B + 6Ct$$

$$\varepsilon = 2\cdot(-0{,}50) + 6\cdot 0{,}40\cdot 2{,}0 = 3{,}8 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon = 3{,}8 \text{ рад/с}^2$$

3. Тангенциальное a_τ и угловое ε ускорения связаны соотношением:

$$a_\tau = \varepsilon R ; \quad a_\tau = 3{,}8\cdot 0{,}30 = 1{,}1 \text{ м/с}^2$$

$$a_\tau = 1{,}1 \text{ м/с}^2$$

Нормальное ускорение и угловая скорость связаны соотношением:

$$a_n = \omega^2 R ; \quad a_n = (2{,}8)^2\cdot 0{,}30 = 2{,}6 \text{ м/с}^2$$

$$a_n = 2{,}6 \text{ м/с}^2$$

Полное ускорение $\vec{a}$ равно сумме $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории движения, нормальное ускорение $\vec{a}_n$ направлено вдоль радиуса кривизны траектории и к центру кривизны, следовательно угол между $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ равен 90^0. Поэтому модуль полного ускорения a можно найти по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad a = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}6^2} = 2{,}8 \text{ м/с}^2$$

$$a = 2{,}8 \text{ м/с}^2$$

Задача 1.3.

Движение частицы по кривой задано уравнениями $x = A_1t^3$ и $y = A_2t$, где $A_1 = 1$ м/с^3, $A_2 = 2$ м/с. Найти уравнение траектории частицы, её скорость v и полное ускорение a в момент времени t = 0,80 с.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$x = A_1t^3$
$y = A_2t$
$A_1 = 1{,}0$ м/с^3
$A_2 = 2{,}0$ м/с
t = 0,80 с
----
y = f(x) - ?
v - ? a - ?

1. $x = A_1t^3$ (1.15)
$y = A_2t$ (1.16)

Из уравнения (1.16) получаем $t = y/A_2$. Тогда уравнение (1.15) с учетом последнего равенства примет вид:

$$x = A_1\frac{y^3}{A_2^3}$$

$$y^3 - \frac{A_2^3}{A_1}x = 0; \qquad y^3 - 8x = 0$$ - уравнение траектории частицы

2. $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$ (1.17)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A_1\frac{d\left(t^3\right)}{dt} = 3A_1t^2 \qquad v_x = 3A_1t^2$$ - (1.18)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A_2\frac{d(t)}{dt} = A_2 \qquad v_y = A_2$$ - (1.19)

Равенство (1.17) с учетом формул (1.18) и (1.19) примет вид:

$$v = \sqrt{9A_1^2t^4 + A_2^2}$$

$$v = \sqrt{9\cdot 1{,}0\cdot 0{,}410 + 4{,}0} = 2{,}7 \text{ м/с}, \quad v = 2{,}7 \text{ м/с}.$$

3. $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$ (1.20)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3A_1\frac{d\left(t^2\right)}{dt} = 6A_1t \qquad a_x = 6A_1t$$ - (1.21)

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(A_2\right)}{dt} = 0 \qquad a_y = 0$$ - (1.22)

Равенство (1.20) с учетом формул (1.21) и (1.22) примет вид:

$$a = 6A_1t_1$$

$$a = 6\cdot 1{,}0\cdot 0{,}80 = 4{,}8 \text{ м/с}^2$$

$$a = 4{,}8 \text{ м/с}^2.$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА)

О с н о в н ы е   ф о р м у л ы

2.1. Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

в векторной форме

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad \text{или, если } v \ll c \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

где $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ - векторная сумма сил, действующих на материальную точку; m - масса; $\vec{a}$ - ускорение; $\vec{P} = m\vec{v}$ - импульс; **c** - скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; N - число сил, действующих на точку;

в координатной форме (скалярной)

$$ma_x = \sum F_{xi},\ \ ma_y = \sum F_{yi},\ \ ma_z = \sum F_{zi}, \text{ или}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{xi},\ \ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{yi},\ \ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $\vec{F}_i$ на соответствующие оси координат.

2.2. Третий закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,

где $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первое тело со стороны второго; $\vec{F}_{21}$ - сила, действующая на второе тело со стороны первого. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ приложены к разным телам и потому не уравновешивают друг друга.

2.3. Сила упругости (закон Гука): Fупр = - кх,

где к - коэффициент упругости (жесткость в случае пружины); х - абсолютная деформация.

2.4. Сила гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G - гравитационная постоянная; m_1 и m_2 - массы материальных точек; r - расстояние между ними.

2.5. Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ - коэффициент трения скольжения; N - сила нормального давления.

2.6. Радиус-вектор $\vec{r}_c$ центра масс системы материальных точек.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - масса и радиус-вектор i-й материальной точки.

Координаты центра масс системы материальных точек

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\ \ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\ \ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где x_i, y_i, z_i - координаты i-й материальной точки.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

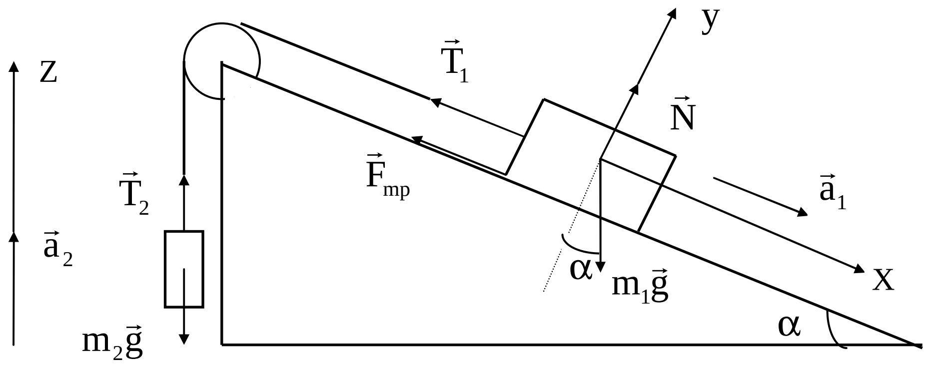
Задача 2.1.

Груз массой m_1 = 5,0 кг, связанный нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой m_2 = 2,0 кг, скользит вниз вдоль наклонной плоскости. Найти натяжение нити и ускорение грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью μ = 0,10, а угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^0$. Нить и блок невесомы. Трением в блоке пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m_1 = 5,0 кг
m_2 = 2,0 кг
μ = 0,10
g = 9,8 м/с^2
$\alpha = 30^0$

T - ? a - ?



Для решения задачи используем 2-ой закон Ньютона, согласно которому произведение массы m тела на его ускорение $\vec{a}$ равно векторной сумме всех сил $\vec{F}$, действующих на это тело.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

На первое тело действуют четыре силы:

$m_1\vec{g}$ - сила тяжести, направленная вертикально вниз;

$\vec{N}$ - сила реакции опоры, направленная перпендикулярно к наклонной плоскости и равная по модулю силе нормального давления;

$\vec{T}_1$ - сила натяжения нити, направленная вдоль нити;

$\vec{F}_{тр}$ - сила трения, направленная вдоль наклонной плоскости в сторону, противоположную движению тела.

На второе тело действуют 2 силы:

$m_2\vec{g}$ - сила тяжести, направленная вертикально вниз;

$\vec{T}_2$ - сила натяжения нити, направленная вдоль нити вертикально вверх.

Запишем 2-й закон Ньютона для каждого тела в отдельности:

Для первого тела: $m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр} = m_1\vec{a}_1$ (2.1)

Для второго тела: $m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$ (2.2)

Так как оба тела связаны нерастяжимой нитью, то они двигаются с одинаковым ускорением, т.е. $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Так как блок и нить невесомы и трением в блоке пренебрегаем, то $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Введем координатные оси: ось X - по направлению движения первого тела, ось У - перпендикулярно к нему, ось Z - по направлению движения второго тела.

Спроецировав уравнения (2.1) и (2.2) на оси X,У,Z, получим следующие три уравнения:

$m_1 g\sin\alpha - T - F_{тр} = m_1 a$ - по оси X (2.3)

$N - m_1 g\cos\alpha = 0$ - по оси У (2.4)

$T - m_2 g = m_2 a$ - по оси Z (2.5)

Сила трения скольжения $F_{тр}$ равна произведению коэффициента трения μ на силу нормального давления N: $N = m_1 g\cos\alpha$.

Тогда $F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha$ (2.6)

Уравнение (2.3) после подстановки в него выражения (2.6) принимает вид:

$$m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - T = m_1 a$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (2.5), получим:

$$m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - m_2 g = a(m_1 + m_2)$$

Отсюда находим ускорение a, с которым двигаются грузы.

$$a = g\frac{m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha - m_2}{m_1 + m_2};\ a = 9{,}8\frac{5\cdot 0{,}5 - 0{,}1\cdot 5\cdot 0{,}86 - 2}{5+2} = 0{,}10\ \text{м/с}^2.$$

Из уравнения (2.5) находим силу T натяжения нити.

$T = m_2(a + g)$; $T = 2 \cdot (0{,}10 + 9{,}8) = 20$ Н.

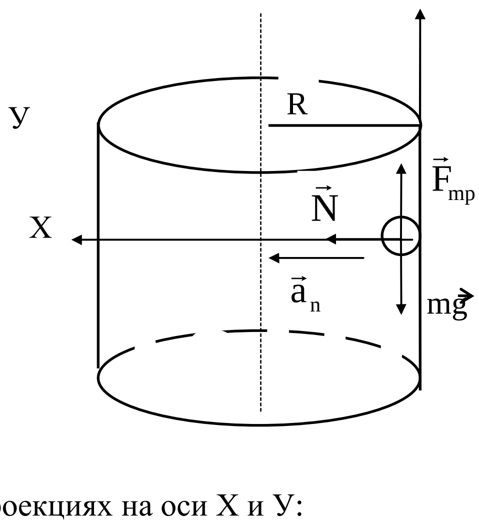
Задача 2.2

В известном аттракционе “мотоцикл на вертикальной стене” мотоциклист движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R = 10 м по горизонтальному кругу. Какова должна быть при этом минимальная скорость Vmin движения мотоцикла, если коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра равен $\mu = 0{,}24$. Мотоцикл с человеком принять за материальную точку.

РЕШЕНИЕ

Дано:
R = 10 м
$\mu = 0{,}24$

Vmin - ?



Запишем II закон Ньютона в проекциях на оси X и У:

У: $F_{тр} - mg = 0$, (2.7)

где $F_{тр}$ - сила трения, действующая на мотоцикл, m - масса мотоцикла с человеком.

X: $N = ma_n$, $a_n = \dfrac{v_{min}^2}{R}$ => $N = m\dfrac{v_{min}^2}{R}$ (2.8)

$F_{тр} = \mu N$. (2.9) Из равенств (2.7) и (2.9) получаем $\mu N - mg = 0$

$N = mg/\mu$ (2.10)

Из равенств (2.8) и (2.10) получаем:

$$\frac{mv_{min}^2}{R} = \frac{mg}{\mu} \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}\ ;\ v_{min} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}8}{0{,}24}} = 20\ м/с$$

$$v_{min} = 20\ м/с.$$

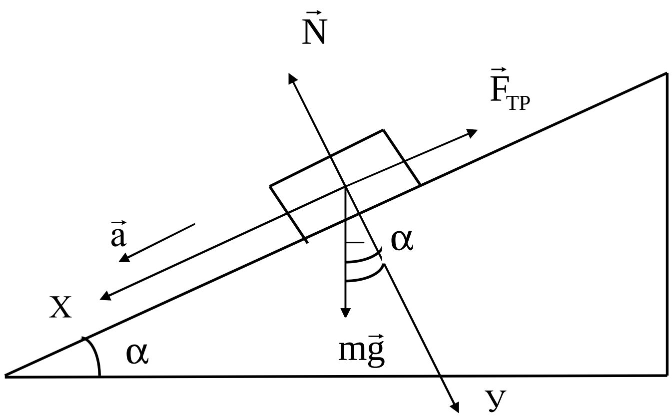
Задача 2.3.

Санки можно удержать на ледяной горке с уклоном 0,20 (уклон-$\sin\alpha$) минимальной силой F = 49 Н. Чтобы тянуть санки в горку равномерно, силу тяги надо увеличить на $\Delta F = 9{,}8$ Н. С каким ускорением a будут двигаться санки, если их предоставить самим себе?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
F = 49 Н
$\Delta F = 9{,}8$ Н
$\sin\alpha = 0{,}20$

a - ?

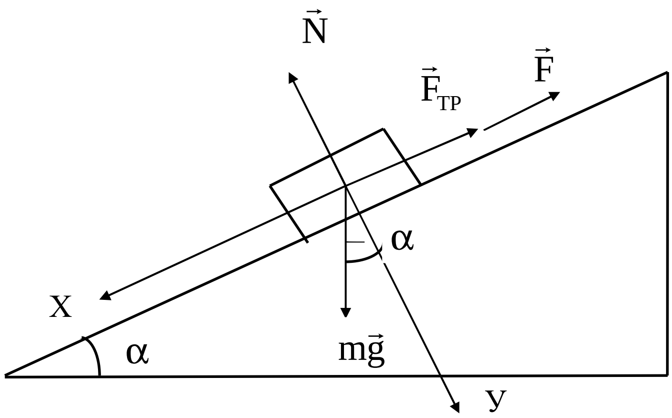


1. Пусть санки предоставлены самим себе и движутся по горке вниз. Запишем II закон Ньютона для санок в проекциях на ось X. Сила трения $F_{тр}$ препятствует скольжению санок вниз.

$$X:\ mg\cos\alpha(90^0-\alpha) + F_{тр}\cos180^0 = ma\cos0^0$$

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma; \quad a = g\sin\alpha - \frac{F_{ТР}}{m} \qquad (2.11)$$

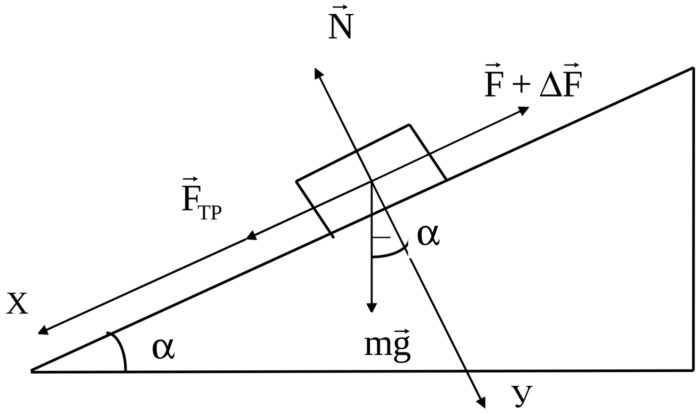
2. Санки удерживают на горке неподвижно (a = 0). Сила трения $F_{тр}$ препятствует возможному скольжению санок вниз.



Запишем II закон Ньютона для санок в проекциях на ось X

$$X:\ mg\sin\alpha - F_{тр} - F = 0;\ F_{тр} = mg\sin\alpha - F \quad (2.12)$$

3. Санки тянут равномерно (a = 0) по горке вверх. Сила трения $F_{тр}$ препятствует движению санок вверх по горке.



II закон Ньютона для санок в проекциях на ось X:

$$X: mg\sin\alpha + F_{тр} - F - \Delta F = 0; \quad F_{тр} = F + \Delta F - mg\sin\alpha \quad (2.13)$$

Из равенств (2.12) и (2.13) получаем

$$mg\sin\alpha - F = F + \Delta F - mg\sin a; \quad 2mg\sin a = 2F + \Delta F$$

$$m = \frac{2F + \Delta F}{2g\sin\alpha} \quad (2.14)$$

Из равенств (2.12) и (2.14) получаем:

$$F_{тр} = \frac{(2F + \Delta F)g\sin\alpha}{2g\sin\alpha} - F; \quad F_{тр} = \frac{2F + \Delta F - 2F}{2}$$

$$F_{тр} = \frac{\Delta F}{2} \quad (2.15)$$

Равенство (2.11) с учетом формул (2.14) и (2.15) примет вид:

$$a = g\sin\alpha - \frac{\Delta F\, 2g\sin\alpha}{2(2F + \Delta F)} = \frac{2F g\sin\alpha + \Delta F g\sin\alpha - \Delta F g\sin\alpha}{2F + \Delta F} = \frac{2F g\sin\alpha}{2F + \Delta F}$$

$$a = \frac{2 \cdot 49 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2}{98 + 9{,}8} = 1{,}8 \text{ м/с}^2; \quad a = 1{,}8 \text{ м/с}^2$$

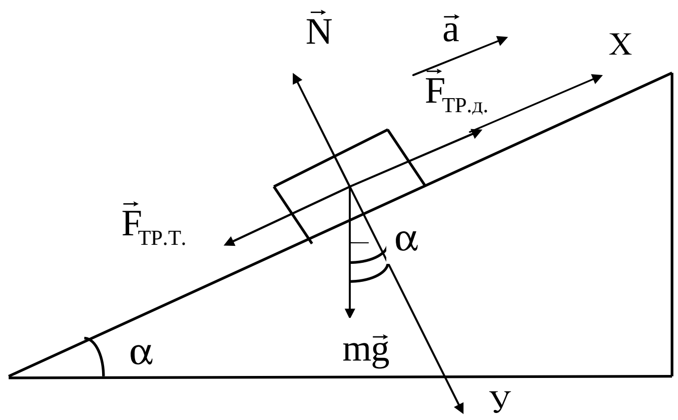
Задача 2.4

Автомобиль массой m = 3,0 т, двигаясь в гору с углом наклона $\alpha = 10^0$, на пути S = = 1,0 км увеличивает свою скорость v_1 = 36 км/ч до v_2 = 72 км/ч. Считая коэффициент тормозящего трения равным $\mu = 0{,}15$, найти силу движущего трения $F_{тр.дв}$.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$m = 3,0$ т $= 3,0 \cdot 10^3$ кг
$\alpha = 10^0$
$v_1 = 36$ км/ч $= 10$ м/с
$v_2 = 72$ км/ч $= 20$ м/с
$\mu = 0,15$
$S = 1,0$ км $= 1,0 \cdot 10^3$ м

$F_{тр.д}$ - ?



За счет работы двигателя колеса автомобиля вращаются. При движении в гору колеса автомобиля (при наличии трения между шинами колеса и дорогой) действуют на полотно дороги силой $\vec{F}_{тр.д.}$ направленной вдоль полотна дороги вниз. По III закону Ньютона на автомобиль действует сила, равная по величине $F_{тр.д}$ и направленная вверх. Эта сила обычно называется силой тяги, развиваемой двигателем автомобиля. Кроме этой силы на автомобиль действует силя тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тормозящего трения $\vec{F}_{тр.т.}$, направленная в сторону, противоположную скорости движения автомобиля.

Запишем II закон Ньютона в проекциях на координатные оси X и У.

X: $F_{тр.дв}\cos 0^0 + F_{тр.т.}\cos 180^0 + N\cos 90^0 + mg\cos(90^0+\alpha) = ma\cos 0^0$

$$F_{тр.д} - F_{тр.т.} - mg\sin\alpha = ma$$

$$F_{тр.д} = F_{тр.т.} + mg\sin\alpha + ma \quad (2.16)$$

У: $mg\cos\alpha + F_{тр.д}\cos 90^0 + F_{тр.т.}\cos 90^0 + N\cos 180^0 = ma\cos 90^0$

$$N = mg\cos\alpha \quad (2.17)$$

$F_{тр.т.} = \mu N$ (2.18) μ – коэффициент тормозящего трения.

Из формул (2.17) и (2.18) получаем:

$$F_{тр.т.} = \mu mg\cos\alpha \quad (2.19)$$

Равенство (2.16) с учетом формулы (2.19) примет вид:

$$F_{тр.д} = m[g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + a] \quad (2.20)$$

Запишем уравнения кинематики для автомобиля (равноускоренное движение с начальной скоростью v_1) :

$$S = v_1 t + \frac{at^2}{2} \quad (2.21)$$ t - время движения автомобиля.

$v_2 = v_1 + at$ => $t = \frac{v_2 - v_1}{a}$ (2.22)

Равенство (2.21) с учетом формулы (2.22) примет вид:

$$S = \frac{v_1(v_2 - v_1)}{a} + \frac{a(v_2 - v_1)^2}{2a^2}; \qquad S = \frac{2v_2v_1 - 2v_1^2 + v_2^2 - 2v_2v_1 + v_1^2}{2a}$$

$$S = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S} \quad (2.23)$$

Равенство (2.20) с учетом формулы (2.23) примет вид:

$$F_{тр.д} = m[g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S}]$$

$$F_{тр.д} = 3{,}0\cdot10^3[9{,}8(0{,}15\cdot0{,}98 + 0{,}17) + \frac{(4+1)10^2}{2\cdot1\cdot10^3}] = 1{,}7\cdot10^3\ Н$$

$$F_{тр.д} = 1{,}7\cdot10^3\ Н.$$

3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ (ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ). ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. $\vec{P} = m\vec{v}$ - формула импульса тела, где m - масса тела, $\vec{v}$ - его скорость.

3.2. $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$ = const, если $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i внеш.}$ = 0 - **закон сохранения импульса**,

где $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$ - суммарный импульс всех тел, входящих в замкнутую систему тел.

3.3. $dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ - формула механической работы, или $dA = F\cdot dr\cdot\cos\alpha$,

где $\vec{F}$ - сила, которая действует на тело, $d\vec{r}$ - перемещение, α - угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $d\vec{r}$. Если F = const и α = const, то $A = F\cdot S\cdot\cos\alpha$

3.4. N = A/t - формула средней мощности, где A - работа, совершаемая за время t.

3.5. N = dA/dt или $N = F\cdot v\cdot\cos\alpha$ - формула мгновенной мощности.

3.6. Кинетическая энергия поступательного движения тела

$E_K = mv^2/2$ или $E_K = p^2/2m$,

где m - масса тела, v - его скорость, p - импульс тела.

3.7. $E_n = кx^2/2$ - формула потенциальной энергии деформированного тела (деформированной пружины), где к - жесткость пружины, x - величина упругой деформации.

3.8. $E_n = -G\dfrac{m_1m_2}{r}$ - формула потенциальной энергии гравитационных взаимодействий двух тел, которые можно считать материальными точками, где m_1 и m_2 - массы этих тел, r - расстояние между ними, G - гравитационная постоянная.

3.8^А. E_n = mgh - формула потенциальной энергии тела в однородном поле силы тяжести, где m - масса тела, g - ускорение силы тяжести, h - высота тела над тем уровнем, на котором потенциальная энергия принимается равной нулю. Эта формула выполняется при h << R, где R - радиус Земли.

3.9. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ = const - **закон сохранения механической энергии**,

где $\sum_{i=1}^{n} E_i$ - суммарная механическая энергия системы тел, в которой не действуют неконсервативные силы.

3.10. **Упругий удар** - это такой удар, при котором выполняется закон сохранения механической энергии.

3.11. **Неупругий удар** - это такой удар, после которого тела движутся с одинаковой скоростью.

При неупругом ударе не выполняется закон сохранения механической энергии. Здесь часть энергии системы тел переходит во внутреннюю энергию этих тел, т.е. выделяется в виде тепла Q, которое равно убыли механической энергии тел.

$Q = \sum_{i=1}^{n} E_{1i} - \sum_{i=1}^{n} E_{2i}$, где $\sum_{i=1}^{n} E_{1i}$ - суммарная механическая энергия тел до удара;

$\sum_{i=1}^{n} E_{2i}$ - суммарная механическая энергия тел после удара.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

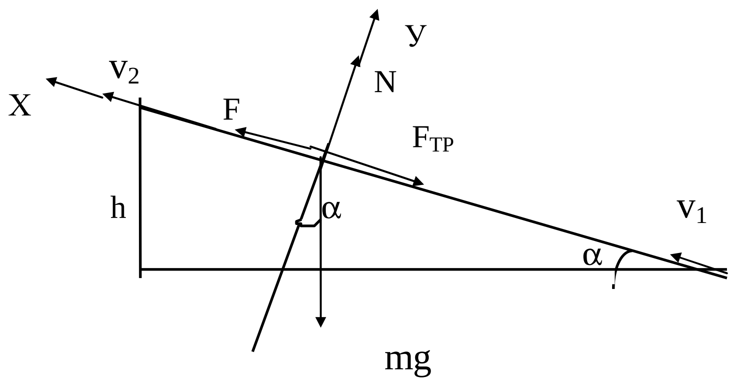
Задача 3.1.

Какую работу надо совершить, чтобы поднять тело массой m = 10 кг вверх по наклонной плоскости на высоту h = 5,0 м, увеличив при этом скорость тела с v_1 = 1,0 м/с до v_2 = 3,0 м/с? Коэффициент трения тела о наклонную плоскость μ = 0,30. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^0$. Какая максимальная мощность развивается при этом подъеме?

РЕШЕНИЕ

Дано:
m = 10 кг
h = 5,0 м
v_1 = 1,0 м/с
v_2 = 3,0 м/с
μ = 0,30

A - ? P - ?



Механическая энергия системы тел изменяется под действием внешних сил и внутренних сил трения.

$\Delta E = A + A_{TP} \Rightarrow A = \Delta E - A_{TP}$, (3.1)

где ΔE - изменение механической энергии тела, A - работа внешней силы F (силы тяги), A_{TP} - работа силы трения F_{TP}.

$\Delta E = E_2 - E_1$ (3.2)

$E_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ - суммарная механическая энергия тела в начальной точке траектории (здесь потенциальную энергию считаем равной нулю),

$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh$ - суммарная механическая энергия в конечной точке траектории.

(3.2) => $\Delta E = \frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2 + 2gh)$ (3.3)

$A_{TP} = F_{TP} S \cos\alpha$, (3.4)

где α - угол между направлением силы трения F_{TP} и перемещением тела ($\alpha = 180^0$; $\cos 180^0 = -1$); S - путь, который проходит тело.

Из чертежа видно, что $h = S\sin\alpha \Rightarrow S = h/\sin\alpha$.

Относительно оси У тело покоится, поэтому сумма проекций всех сил на ось У равна нулю, т.е. $\sum_{i=1}^{n} F_y = 0$.

$N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

$F_{TP} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$

Из равенства (3.4) и последней формулы следует:

$A_{TP} = \mu mg\cos\alpha\,(h/\sin\alpha)(-1)$; $A_{TP} = -\mu mgh\cdot ctg\alpha$ (3.5)

Из равенств (3.3),(3.5) и (3.1) следует:

$$A = \frac{m}{2}(\,v_2^2 - v_1^2 + 2gh\,) - (-\mu mgh\cdot ctg\alpha)\,;$$

$$A = \frac{m}{2}[\,v_2^2 - v_1^2 + 2gh\,(1+\mu\cdot ctg\alpha)]$$

$$A = \frac{10}{2}(3{,}0^2 - 1{,}0^2 + 2\cdot 9{,}8\cdot 5{,}0(1+0{,}30\sqrt{3})) = 7{,}8\cdot 10^2 \text{ Дж}$$

Мгновенная мощность находится по формуле:

$P = F\cdot v\cdot\cos 0^0$; $P = F\cdot v$ (3.6)

где F - сила тяги, действующая на тело, v - скорость этого тела.

Считая силу тяги постоянной, мощность будет максимальной, если скорость тела максимальна, т.е. $v = v_2$.

Из формулы работы:

$A = F\cdot S\cdot\cos 0^0 = F\cdot(h/\sin□)$ => $F = A\sin□/h$ (3.7)

Из равенств (3.6) и (3.7) получаем:

$$P = \frac{Av_2\sin□}{h}; \qquad P = \frac{780\cdot 3{,}0\cdot\frac{1}{2}}{5{,}0} = 2{,}3\cdot 10^2 \text{ Вт}$$

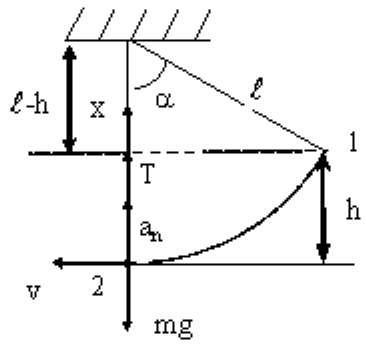
Задача 3.2.

Тело массой m = 1,0 кг, подвешенное на нити, отклонили на угол □ = 60^0 и отпустили. Найти силу натяжения T нити в тот момент, когда тело проходит положение равновесия.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m = 1,0 кг
$\alpha = 60^0$

T - ?



На тело не действуют неконсервативные силы. Поэтому выполняется закон сохранения механической энергии.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}, \quad (3.8)$$

где h - высота тела в начальном положении 1 над нулевым уровнем; v - скорость тела в конечном положении 2.

По второму закону Ньютона

$$m\vec{a}_n = \vec{T} + m\vec{g}$$

В проекциях на ось X имеем:

$ma_n = T - mg \Rightarrow T = m(a_n + g)$ (3.9)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\ell}$$ (3.10) - нормальное ускорение тела в точке 2.

R = l - радиус окружности или длина нити, T - сила натяжения нити.

Формула (3.9) с учетом (3.10) и (3.8) примет вид:

$$T = ma_n + mg = m\left(\frac{v^2}{\ell} + g\right) = m\left(\frac{2gh}{\ell} + g\right) = mg\left(\frac{2h}{\ell} + 1\right)$$

$$T = mg\left(\frac{2h}{\ell} + 1\right) \qquad (3.11)$$

Из чертежа видим, что $l - h = l\cdot\cos□$ => $h = l(1 - \cos□)$. (3.12)

Из формул (3.11) и (3.12) получаем:

$$T = mg\left(\frac{2\ell(1-\cos\alpha)}{\ell} + 1\right);$$ $T = mg(3 - 2\cos□)$

$T = 1{,}0\cdot 9{,}8(3 - 2\cos 60^0) = 20$ Н

Задача 3.3.

В пружинном пистолете пружина сжата на $x_1 = 1{,}0$ см. При зарядке пистолета пружину сжимают еще на $\Delta x = 1{,}0$ см. Жесткость пружины $К = 9{,}8\cdot 10^2$ Н/м. Из пистолета стреляют вертикально вверх.

1. Найти работу, совершенную при зарядке пистолета.
2. Найти начальную скорость вылета пули.
3. На какой высоте скорость пули уменьшится в n = 2 раза?

Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Масса пули m = 6,0 г.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

$x_1 = 1{,}0$ см $= 1{,}0\cdot 10^{-2}$ м

$\Delta x = 1{,}0$ см $= 1{,}0\cdot 10^{-2}$ м

$К = 9{,}8\cdot 10^2$ Н/м

$m = 6{,}0$ г $= 6{,}0\cdot 10^{-3}$ кг

$v_0/v = n = 2$

1. A - ?; 2. v_0 - ?;
3. h - ?

1. При сжатии пружины совершается работа А, которая идет на увеличение потенциальной энергии ΔE пружины.

$$A = \Delta E = E_2 - E_1 \quad (3.13)$$

$E_1 = кx_1^2/2$ - потенциальная энергия пружины в начальном состоянии,

$E_2 = кx_2^2/2$ - потенциальная энергия пружины в конечном состоянии.

Формула (3.13) с учетом двух последних равенств примет вид:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \Rightarrow A = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$x_2 = x_1 + \Delta x$ - деформация пружины в конечном состоянии.

$$A = \frac{9{,}8 \cdot 10^2\left[\left(2{,}0 \cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(1{,}0 \cdot 10^{-2}\right)^2\right]}{2} = 0{,}15 \text{ Дж}$$

2. В условии задачи неконсервативными силами пренебрегают, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии:

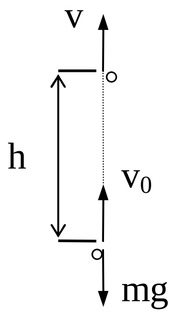
$$\frac{kx_2^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 10^2 (4 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-4})}{6 \cdot 10^{-3}}} = 7{,}0 \text{ м/с}$$

3. Движение пули после выстрела.

По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{v_0^2 - \left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{2g} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow h = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3k(x_2^2 - x_1^2)}{8mg}$$

$$h = \frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 10^2[(2{,}0 \cdot 10^{-2})^2 - (1{,}0 \cdot 10^{-2})^2]}{8 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 3{,}8 \text{ м}$$

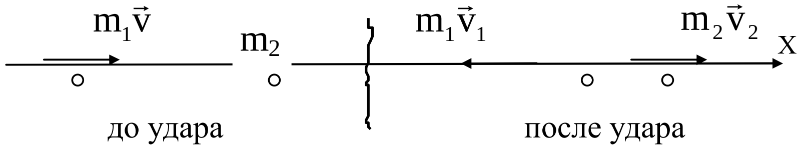
Задача 3.4.

Шар массой m_1 = 2,0 кг движется со скоростью v = 5,0 м/с и соударяется с покоящимся шаром массой m_2 = 8,0 кг. Удар шаров упругий и центральный. Найти:

1. Скорости шаров v_1 и v_2 после удара.
2. Изменение импульса первого шара.
3. Долю механической энергии, которую первый шар передает второму.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m_1 = 2,0 кг m_2 = 8,0 кг v = 5,0 м/с
1. v_1 - ?, v_2 - ? 2. Δp - ? 3. $\omega = E_2/E$ - ?



1. Так как удар шаров упругий, то выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

По закону сохранения импульса: $m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

В проекциях на ось X имеем:

$m_1v = - m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow m_1(v + v_1) = m_2v_2$ (3.13)

По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \Rightarrow m_1(v^2 - v_1^2) = m_2v_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1(v + v_1)(v - v_1) = m_2v_2^2 \qquad (3.14)$$

Разделив выражение (3.14) на (3.13), получим:

$$\frac{m_1(v+v_1)(v-v_1)}{m_1(v+v_1)}=\frac{m_2v_2^2}{m_2v_2} \Rightarrow v - v_1 = v_2 \quad (3.15)$$

Равенство (3.13) с учетом формулы (3.15) примет вид:

$m_1v + m_1v_1 = m_2v - m_2v_1$; $v_1(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1)v$

$$v_1=\frac{(m_2-m_1)v}{m_1+m_2}; \quad v_1=\frac{(8{,}0-2{,}0)\cdot 5{,}0}{8{,}0+2{,}0}=3{,}0 \text{ м/с}$$

$$(3.15) \Rightarrow v_2 = v - v_1 = v - \frac{(m_2-m_1)v}{m_1+m_2}=\frac{v(m_1+m_2-m_2+m_1)}{m_1+m_2} \Rightarrow v_2=\frac{2m_1v}{m_1+m_2};$$

$$v_2=\frac{2\cdot 2{,}0\cdot 5{,}0}{2{,}0+8{,}0}=2{,}0 \text{ м/с}$$

2. Изменение импульса первого шара: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}$,

где $\vec{p}_1$ - импульс первого шара после удара, $\vec{p}$ - его импульс до удара.

$\vec{p} = m_1\vec{v}$; $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$.

В проекциях на ось X имеем:

$$\Delta p = -m_1v_1 - m_1v = -m_1(v_1+v) = m_1\left(\frac{(m_2-m_1)v}{m_1+m_2}+v\right) = -m_1v\frac{m_2-m_1+m_1+m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = -\frac{2m_1m_2v}{m_1+m_2}; \quad \Delta p = -\frac{2\cdot 2{,}0\cdot 8{,}0\cdot 5{,}0}{2{,}0+8{,}0} = -16 \text{ кг·м/с}$$

3. Найдем долю механической энергии, которую первый шар передает во время удара второму шару. $\omega = E_2/E$, (3.16)

где E_2 - кинетическая энергия второго шара после удара,

E - кинетическая энергия первого шара до удара.

$$E_2=\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_2}{2}\cdot\frac{4m_1^2v^2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{2m_2m_1^2v^2}{(m_1+m_2)^2}; \quad E=\frac{m_1v^2}{2}$$

Формула (3.16) с учетом двух последних равенств примет вид:

$$\omega=\frac{E_2}{E}=\frac{2m_2m_1^2v^2\cdot 2}{(m_1+m_2)^2\cdot m_1v^2} \Rightarrow \omega=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}; \quad \omega=\frac{4\cdot 2{,}0\cdot 8{,}0}{(2{,}0+8{,}0)^2}=0{,}64$$

Задача 3.5.

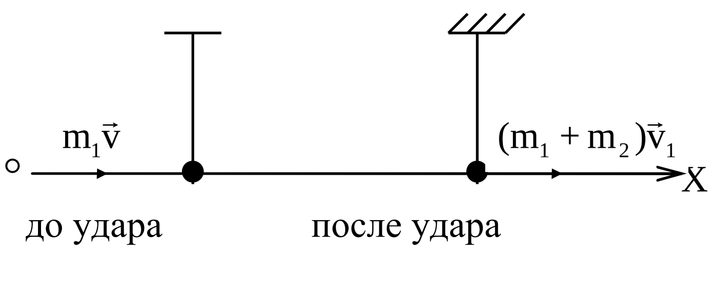
Пуля массой m_1 = 10 г летит горизонтально со скоростью v = 400 м/с, попадает в шар, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l = 1,0 м, и застревает в нем. Масса шара m_2 = 990 г. Найти:

1. Скорость v_1 тел после удара.
2. Изменение внутренней энергии тел.
3. Максимальный угол α, на который отклонится нить с шаром после удара.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m_1 = 0,010 кг
m_2 = 0,99 кг
v = 400 м/с
l = 1,0 м
v_1 - ?; ΔU - ?; α-?

1.



Система тел пуля-шар - нить-Земля является замкнутой, поэтому выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{v}_1,$$

где $m_1\vec{v}$ - импульс пули до удара; $(m_1 + m_2)\vec{v}_1$ - импульс пули и шара непосредственно после удара (т.к. пуля застревает в шаре, то после удара они движутся с одинаковой скоростью).

В проекциях на ось X имеем:

$m_1v = (m_1+m_2)v_1$ => $v_1 = \dfrac{m_1 v}{m_1 + m_2}$; $v_1 = \dfrac{0{,}010\cdot 400}{0{,}010 + 0{,}99} = 4{,}0$ м/с

2. При неупругом ударе не выполняется закон сохранения механической энергии. Здесь часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию ΔU, причем ΔU равно убыли механической энергии системы пуля-шар, т.е.

$$\Delta U = E_1 - E_2 = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_1^2}{2},$$

где $E_1 = \dfrac{m_1 v^2}{2}$ - кинетическая энергия системы тел до удара,

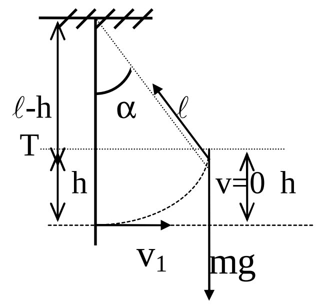
$E_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)v_1^2}{2}$ - кинетическая энергия системы тел непосредственно после удара (при ударе потенциальная энергия тел не изменяется).

$$\Delta U = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\cdot\frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 v^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$= \frac{m_1 v^2 (m_1 + m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)} \quad => \quad \Delta U = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\Delta U = \frac{0{,}010\cdot 0{,}99\cdot (400)^2}{2(0{,}010 + 0{,}99)} = 7{,}9\cdot 10^2 \text{ Дж}$$

3. Движение тел после удара. Здесь на систему тел не действуют неконсервативные силы, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии:



$$\frac{(m_1 + m_2)v_1^2}{2} = (m_1 + m_2)gh \;=>\; h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m_1^2 v^2}{2g(m_1 + m_2)^2}$$

Из чертежа видим, что

$l - h = l\cos\alpha$ => $\cos\alpha = \dfrac{\ell - h}{\ell} = 1 - \dfrac{h}{\ell}$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2gl}\cdot\left(\frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}0}\left(\frac{0{,}010\cdot 400}{0{,}010 + 0{,}99}\right)^2 = 0{,}185 \quad => \quad \alpha = 79^{\circ}$$

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА.

4.1. Вращающий момент силы $\vec{F}$, действующей на тело, которое имеет неподвижную ось вращения
$M = F_{\perp}l$,
где $F_{\perp}$ - проекция силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения;
l - плечо силы $\vec{F}$ (это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).
4.2. Момент инерции тела относительно оси вращения:
1. Момент инерции материальной точки
$I = mr^2$,
где m - масса материальной точки, r - расстояние от этой точки до оси вращения.
2. Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню

$I = \dfrac{m\ell^2}{12}$, где m - масса стержня; l - его длина.

3. Момент инерции тонкого кольца, обруча, обода, тонкостенной трубы относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основанию данного тела
$I = mR^2$, где m - масса тела; R - его радиус.
4. Момент инерции однородного диска, цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основанию

$I = \dfrac{mR^2}{2}$, где m - масса тела; R - его радиус.

5. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс

$I = \dfrac{2mR^2}{5}$, где m - масса шара; R - его радиус.

4.3. Теорема Штейнера $\mathbf{I = I_0 + md^2}$,
где I - момент инерции тела относительно любой оси;
I_0 - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно первой оси;
d - расстояние между осями; m - масса тела.
4.4. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i,$$

где I - момент инерции тела относительно оси вращения,
$\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение вращения тела;
$\vec{M}_i$ - вращающий момент i-той силы, действующей на тело,
$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$ - суммарный вращающий момент всех сил, действующих на тело.
4.5. Момент импульса тела относительно оси: $\vec{L} = I\vec{\omega}$,
где I - момент инерции тела относительно заданной оси,

$\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения тела.

4.6. Закон сохранения момента импульса: $\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i$ = const, если $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{iвнеш}$ = 0

где $\vec{L}_i$ - момент импульса i-того тела,

$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i$ - суммарный момент импульса замкнутой системы тел,

$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{iвнеш}$ - суммарный момент внешних сил, действующих на систему тел.

4.7. Работа, совершаемая при вращательном движении тела: **A = Mφ,**
где M - вращающий момент заданной силы или суммы сил, действующих на тело, φ - угол поворота радиус-вектора любой точки тела.
Эта формула выполняется, если силы, действующие на тело, не изменяются.

4.8. Мгновенная мощность, развиваемая при вращательном движении,
N = Mω,
где M - вращающий момент внешней силы (силы тяги), действующий на тело,
ω - угловая скорость вращения тела.

4.9. Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I - момент инерции тела относительно оси вращения;
ω - угловая скорость вращения тела.

4.10. Кинетическая энергия тела, которое катится по плоскости без скольжения.

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где v_c - скорость центра масс тела;
I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела.

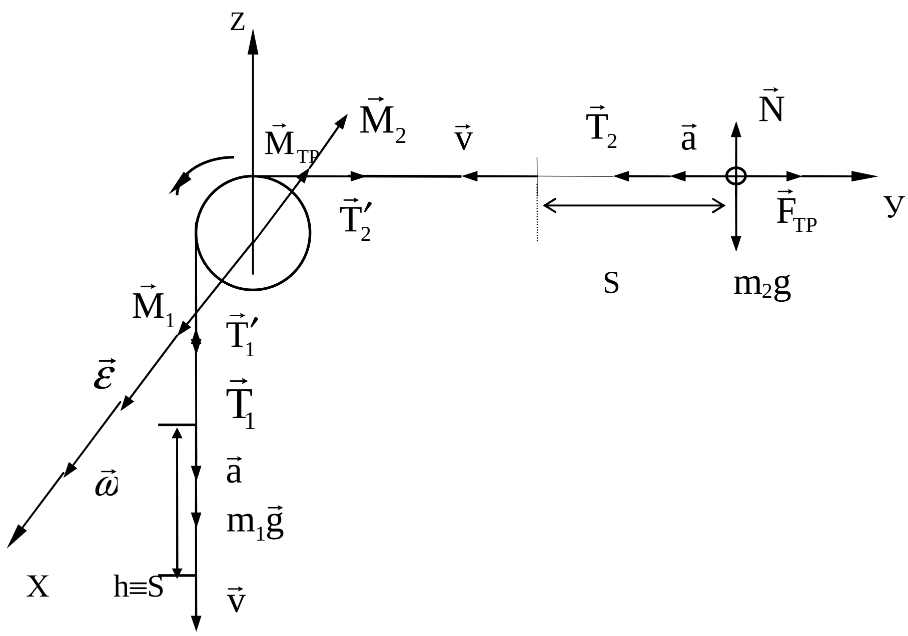
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1.
Через блок, представляющий собой однородный диск массой m = 100 г и радиусом R = = 2,0 см, укрепленный на краю стола, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = m_2 = m$ = 100 г. Груз массой m_2 скользит по горизонтальной поверхности стола и за время t = 2,0 с проходит путь S = 1,6 м от начала движения. Коэффициент трения между грузом и поверхностью стола μ = 0,50. Нить не проскальзывает по поверхности блока. Найти:
1. Ускорение a грузов и угловое ускорение ε блока;
2. Суммарную кинетическую энергию E_K движения грузов и блока через t = 2,0 с
3. Силы натяжения нитей T_1 и T_2;
4. Момент силы трения M_{TP}, действующей на блок со стороны его оси;
5. Работу A_{TP}, совершенную против сил трения.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m = 0,10 кг
$m_1 = m_2 = m$
t = 2,0 с
R = 2,0 см
S = 1,6 м
$\mu = 0{,}50$
$v_0 = 0$

1. a - ?, ε - ?
2. E - ?
3. T_1 - ? T_2 - ?
4. $M_{ТР}$ - ?
5. A - ?



1. Грузы m_1 и m_2 движутся равноускоренно без начальной скорости. В этом случае уравнения кинематики движения грузов имеют вид:
$S = at^2/2$ (4.1); $v = at$, (4.2)
где S - путь, пройденный грузом за время t ;
a - ускорение грузов;
v - скорость грузов через время t.
Из равенства (4.1) получаем: $a = \frac{2S}{t^2}$ (4.3) ; $a = \frac{2 \cdot 1{,}6}{2{,}0^2} = 0{,}80$ (м/с^2).

Вектор ускорения грузов направлен по касательной к поверхности блока. Так как нет проскальзывания нити, то ускорение грузов равно тангенциальному ускорению a_τ точек на поверхности блока, т.е. $\mathbf{a_\tau = a}$.
Из формулы связи между тангенциальным a_τ и угловым ε ускорением имеем:
$a_\tau = \varepsilon R$,
где R - радиус блока (диска).
Отсюда $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{a}{R}$ => $\varepsilon = \frac{2S}{Rt^2}$; $\varepsilon = \frac{2 \cdot 1{,}6}{2{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}0^2} = 40$ (1/с^2).

2. Суммарная кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения грузов и кинетической энергии вращательного движения диска, т.е.
$E_К = E_{П1} + E_{П2} + E_{ВР}$ (4.4)
$E_{П1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, где v - скорость первого груза через время t. Из равенств (4.2) и (4.3) получаем:

$$v = at = \frac{2St}{t^2} = \frac{2S}{t}$$

$$E_{П2} = \frac{m4S^2}{2t^2} = \frac{2mS^2}{t^2} \quad (4.5)$$

Так как нить нерастяжима, то скорости грузов, а также линейная скорость точек на поверхности диска будут одинаковы.

Аналогично $E_{П2} = \dfrac{2mS^2}{t^2}$ (4.6)

$E_{ВР} = \dfrac{I\omega^2}{2}$,

где I - момент инерции диска относительно оси вращения. Так как ось вращения совпадает с геометрической осью диска, то

$I = \dfrac{mR^2}{2}$

Из формулы связи линейной и угловой скорости

$v = \omega R$ => $\omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{2S}{Rt}$

$$E_{ВР} = \frac{mR^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{4S^2}{R^2t^2} = \frac{mS^2}{t^2} \quad (4.7)$$

Из равенств (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7) получаем:

$$E_{вр} = \frac{2mS^2}{t^2} + \frac{2mS^2}{t^2} + \frac{mS^2}{t^2} \quad => \quad E_{вр} = \frac{5mS^2}{t^2}$$

$$E_{вр} = \frac{5\cdot 0{,}10(1{,}6)^2}{(2{,}0)^2} = 0{,}32 \text{ Дж}$$

3. Так как грузы движутся поступательно, то используем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ - сумма всех сил, которые действуют на тело.

Для первого груза: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$.

В проекциях на ось Z имеем:

$-ma = -mg + T_1$ => $T_1 = mg - ma = m(g - a)$ =>

$$T_1 = m\left(g - \frac{2S}{t^2}\right);\ T_1 = 0{,}1\left(9{,}8 - \frac{2\cdot 1{,}6}{(2{,}0)^2}\right) = 0{,}90 \text{ Н}$$

Для второго груза: $m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{ТР} + m_2\vec{g}$

В проекциях на ось У имеем:

$-m_2a = -T_2 + F_{ТР}$ => $T_2 = F_{ТР} + m_2a$ (4.8)

В проекциях на ось Z имеем:

$0 = N - m_2g$ => $N = m_2g$, где N - сила упругости опоры.

$F_{ТР} = \mu N = \mu m_2 g$ (4.9)

Из равенств (4.8) и (4.9) получаем: $T_2 = m(\mu g + a)$ (4.10)

Из равенств (4.10) и (4.3) имеем: $T_2 = m\left(\mu g + \frac{2S}{t^2}\right)$

$$T_2 = 0{,}10 \cdot \left(0{,}50 \cdot 9{,}8 + \frac{2 \cdot 1{,}6}{(2{,}0)^2}\right) = 0{,}57\ \text{Н}$$

4. Блок (диск) совершает вращательное движение, поэтому используем основное уравнение динамики вращательного движения.

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{ТР}$$

где $I = \frac{1}{2} mR^2$ - момент инерции диска относительно оси вращения;

$\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение диска;

$\vec{M}_1$ - момент силы натяжения $T_1^{/}$ нити;

$\vec{M}_2$ - момент силы натяжения $T_2^{/}$ нити;

$\vec{M}_{ТР}$ - момент силы трения, действующей между блоком и его осью.

Направления этих моментов сил, а также угловой скорости блока находим по правилу буравчика. Так как вращение блока является равноускоренным, то векторы углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ сонаправлены.

Так как нить невесома (массой нити пренебрегаем), то сила натяжения во всех точках нити одинакова, т.е.

$$|\vec{T}_1^{/}| = |\vec{T}_1| \text{ и } |\vec{T}_2^{/}| = |\vec{T}_2|$$

В проекциях на ось X имеем:

$I\varepsilon = M_1 - M_2 - M_{ТР}$ => $M_{ТР} = M_1 - M_2 - I\varepsilon$ (4.11)

$M_1 = T_1R$; $M_2 = T_2R$. Здесь R - это плечо сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Из формулы (4.11) получаем:

$$M_{ТР} = T_1R - T_2R - I\varepsilon = m\left(g - \frac{2S}{t^2}\right)R - m\left(\mu g + \frac{2S}{t^2}\right)R - \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{2S}{Rt^2} =$$

$$= mR\left(g - \frac{2S}{t^2} - \mu g - \frac{2S}{t^2} - \frac{S}{t^2}\right) \quad => \quad M_{ТР} = mR\left[g(1-\mu) - \frac{5S}{t^2}\right]$$

$$M_{ТР} = 0{,}10 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\left[9{,}8(1 - 0{,}50) - \frac{5 \cdot 1{,}6}{(2{,}0)^2}\right] = 5{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}$$

5. Работа $A_{тр}$, совершенная против сил трения равна убыли механической энергии замкнутой системы тел

$A_{тр} = E_1 - E_2$ (4.12)

где E_1 - суммарная механическая энергия системы тел в начальный момент времени, когда все тела системы еще не двигались. (По условию задачи $v_0 = 0$). В этом случае она равна потенциальной энергии первого груза, т.е.

$E_1 = m_1gh = mgS$ (4.13)

E_2 - суммарная механическая энергия системы тел через время t = 2 с. В этом случае она равна кинетической энергии грузов и блока, т.е.

$E_2 = E_{П1} + E_{П2} + E_{ВР} = 5mS^2/t^2$ (4.14)

где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ - значения кинетической энергии поступательного движения грузов, $E_{ВР}$ - кинетическая энергия вращательного движения диска.

Из формул (4.12), (4.13) и (4.14) получаем:

$$A_{TP} = mgS - \frac{5mS^2}{t^2} \quad => \quad A_{TP} = mS \cdot \left(g - \frac{5S}{t^2}\right)$$

$$A_{TP} = 0{,}10 \cdot 1{,}6 \cdot \left(9{,}8 - \frac{5 \cdot 1{,}6}{(2{,}0)^2}\right) \approx 1{,}2 Дж$$

Задача 4.2.

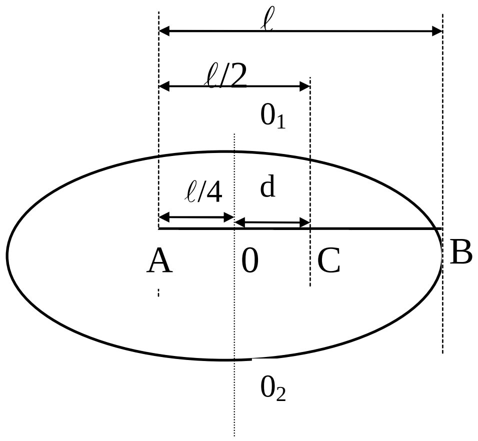
Тонкий однородный стержень массой m = 0,48 кг и длиной l = 1,0 м вращается относительно вертикальной оси, проходящей перпендикулярно стержню на расстоянии l_1 = l/4 от его конца. Стержень вращается равноускоренно и за время t = 3,14 с его частота вращения изменяется от n_1 = 3,0 об/с до n_2 = 5,0 об/с. Момент сил трения, действующих на стержень, $M_{тр}$ = 0,020 Н·м. Найти:

1. Момент инерции стержня относительно оси вращения;
2. Угловое ускорение стержня и угол, на который он повернется за время t = 3,14 с;
3. Изменение модуля момента импульса стержня за это время;
4. Вращающий момент внешней силы, действующий на стержень;
5. Работу, совершенную этой силой за время t = 3,14 с.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
m = 0,48 кг
l = 1,0 м
l_1 = l/4
t = 3,14 с
n_1 = 3,0 об/с
n_2 = 5,0 об/с
$M_{тр}$ = 0,020 Н·м

1. I -?
2. ε - ? φ - ?
3. $\left|\Delta \vec{L}\right|$ - ?
4. M - ? 5. A - ?



На чертеже: AB - однородный стержень, O_1O_2 - ось вращения, C - центр масс стержня.

По теореме Штейнера имеем:

$I = I_0 + md^2$ (4.15)

где I - момент инерции стержня относительно оси вращения;

I_0 - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси вращения;

d - расстояние между этими осями.

Из чертежа видим, что $oc = d = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4}$. (4.16)

Для однородного стержня $I_0 = \dfrac{m\ell^2}{12}$ (4.17)

где l - длина стержня; m - его масса.

Из равенств (4.15), (4.16) и (4.17) получаем:

$$I = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{16} \quad => \quad I = \frac{7m\ell^2}{48}$$

$$I = \frac{7 \cdot 0{,}48 \cdot 1{,}0^2}{48} = 7{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

2. Уравнения кинематики равноускоренного вращения

$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon t$ (4.18) $\varphi = \omega_1 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ (4.19)

где $\omega_2 = 2\square n_2$- угловая скорость стержня в момент времени t_1;

$\omega_1 = 2\square n_1$ - начальная угловая скорость вращения стержня;

ε - угловое ускорение; φ - угол поворота стержня за время t.

Из равенства (4.18) имеем:

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{2\pi n_2 - 2\pi n_1}{t} \quad => \quad \varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} \qquad (4.20)$$

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (5{,}0 - 3{,}0)}{3{,}14} = 4{,}0\ \frac{1}{c^2}$$

Из формул (4.19) и (4.20) получаем:

$$\varphi = 2\pi n_1 t + \frac{2\pi(n_2 - n_1)t^2}{2t} = \pi t(2n_1 + n_2 - n_1) \quad => \quad \varphi = \pi t(n_1 + n_2)$$

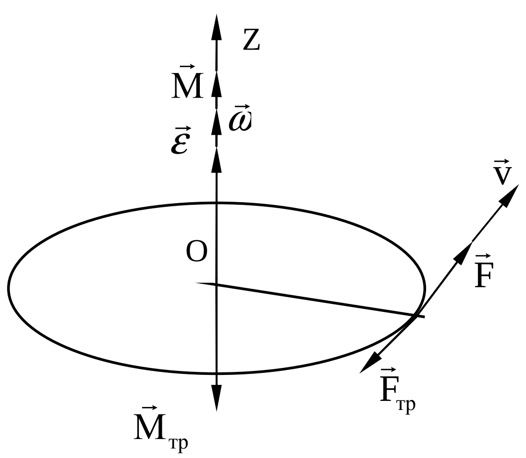
$\varphi = \pi 3{,}14(3+5) = 25\pi$(рад)

3. Изменение модуля момента импульса стержня

$$\Delta L = L_2 - L_1 = I\omega_2 - I\omega_1 = I\cdot(2\pi n_2 - 2\pi n_1) = \frac{7m\ell^2}{48} \cdot 2\pi(n_2 - n_1) \quad =>$$

$$\Delta L = \frac{7\square m\ell^2(n_2 - n_1)}{24};\ \Delta L = \frac{7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}48 \cdot 1{,}0^2 \cdot (5{,}0 - 3{,}0)}{24} = 0{,}88\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2)/\text{с}.$$

4.



Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i ,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$ - сумма всех моментов сил, которые действуют на стержень.

где $\vec{M}$ - момент внешней силы F, действующей на стержень;
$\vec{M}_{TP}$ - момент сил трения.

Направления моментов сил $\vec{M}$, $\vec{M}_{TP}$, а также угловой скорости находим по правилу буравчика. Для равноускоренного движения векторы углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ сонаправлены.

В проекции на ось Z имеем:

$$I\varepsilon = M - M_{TP} \;\Rightarrow\; M = I\varepsilon + M_{TP} = \frac{7m\ell^2}{48}\cdot\frac{2\pi n_2 - n_1)}{t} + M_{TP} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; M = \frac{7\pi m\ell^2(n_2 - n_1)}{24t} + M_{TP}$$

$$M = \frac{7\cdot 3{,}14\cdot 0{,}48\cdot 1{,}0^2\cdot(5{,}0 - 3{,}0)}{24\cdot 3{,}14} + 0{,}020 = 0{,}30 \text{ Н·м}$$

5. Работа, совершаемая при вращательном движении,

$$A = \int_0^{\varphi} M d\varphi = M\int_0^{\varphi} d\varphi \quad\Rightarrow\quad A = M\varphi,$$

где M - момент внешней силы. В данной задаче $\vec{M}$ = const, так как вращение равноускоренное, поэтому его можно было вынести за знак интеграла.

$$A = \left(\frac{7\pi m\ell^2(n_2 - n_1)}{24t} + M_{TP}\right)\cdot \pi t(n_2 + n_1)$$

$$A = \left(\frac{7\cdot 3{,}14\cdot 0{,}48\cdot(1{,}0)^2\cdot(5{,}0 - 3{,}0)}{24\cdot 3{,}14} + 0{,}020\right)\cdot 3{,}14\cdot 3{,}14\cdot(5{,}0 + 3{,}0) = 24 \; \textit{Дж}$$

Задача 4.3.

Человек стоит в центре горизонтальной платформы, которая вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2{,}0$ с$^{-1}$. На краю платформы лежит груз массой m = 10 кг. С помощью веревки человек очень медленно передвинул груз ближе к центру платформы на расстояние r = R/2, где R = 2,0 м - радиус платформы.

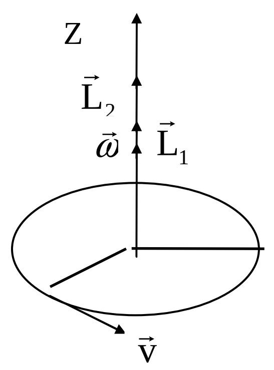
1. С какой угловой скоростью ω_1 стала вращаться платформа, если суммарный момент инерции платформы с человеком I_0 = 10 кг·м^2. Груз считать материальной точкой.
2. Найти изменение кинетической энергии системы тел и работу A, совершенную человеком, если коэффициент трения груза о поверхность платформы μ = 0,50.

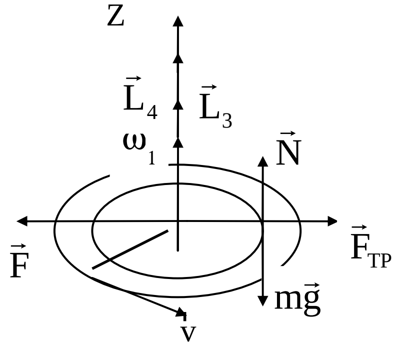
РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\omega = 2{,}0$ с$^{-1}$
m = 10 кг
R = 2,0 м
r = R/2
I_0 = 10 кг·м^2
$\mu = 0{,}50$

1. ω_1 - ?
2. ΔE - ?
3. A - ?

1.





Система тел: платформа-человек-груз-Земля является замкнутой системой тел. Поэтому выполняется закон сохранения момента импульса.

$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_3 + \vec{L}_4$ (4.21)

где $\vec{L}_1$ и $\vec{L}_3$ - моменты импульса платформы с человеком до и после передвижения груза,

$\vec{L}_1 = I_0\vec{\omega}$ (4.22), $\vec{L}_3 = I_0\vec{\omega}_1$ (4.23)

$\vec{L}_2$ и $\vec{L}_4$ - моменты импульса груза до и после его передвижения,

$\vec{L}_2 = I_1\vec{\omega}$ (4.24), $\vec{L}_4 = I_2\vec{\omega}_1$ (4.25),

где $I_1 = mR^2$ - момент инерции груза (материальной точки) относительно оси вращения до его передвижения, I_2 - момент инерции груза относительно той же оси вращения после его передвижения. $I_2 = mr^2 = mR^2/4$. (4.26)

Направления векторов $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{\omega}, \vec{L}_3, \vec{L}_4$ и $\vec{\omega}_1$ находим по правилу буравчика.

Тогда формула (4.21) с учетом равенств (4.22) - (4.25) примет вид:

$$I_0\vec{\omega} + I_1\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_1$$

В проекциях на ось Z имеем: $I_0\omega + I_1\omega = I_0\omega_1 + I_2\omega_1$ => $\omega_1 = \dfrac{(I_0 + I_1)\omega}{I_0 + I_2}$

Последняя формула с учетом равенства (4.26) примет вид:

$$\omega_1 = \frac{(I_0 + mR^2)\omega}{I_0 + \dfrac{mR^2}{4}} \quad (4.27) \qquad \omega_1 = \frac{(10 + 10\cdot(2{,}0)^2)\cdot 2{,}0}{10 + \dfrac{10\cdot(2{,}0)^2}{4}} = 5{,}0 \text{ с}^{-1}$$

2. Изменение кинетической энергии системы тел

$\Delta E = E_2 - E_1$ (4.28)

E_1 - начальная кинетическая энергия вращательного движения системы тел.

$$E_1 = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{I_1\omega^2}{2} = \frac{(I_0 + I_1)\omega^2}{2} = \frac{(I_0 + mR^2)\omega^2}{2} \quad (4.29)$$

E_2 - конечная кинетическая энергия вращательного движения системы тел.

$$E_2 = \frac{I_0\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_1^2}{2} = \frac{(I_0 + I_2)\omega_1^2}{2} \quad (4.30)$$

Из равенств (4.30) и (4.27) получаем:

$$E_2 = \left(I_0 + \frac{mR^2}{4}\right)\cdot\frac{(I_0 + mR^2)^2\omega^2}{2(I_0 + mR^2/4)^2} = \frac{2(I_0 + mR^2)^2\omega^2}{4I_0 + mR^2} \quad (4.31)$$

Формула (4.28) с учетом равенств (4.29) и (4.31) примет вид:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{2(I_0 + mR^2)^2\omega^2}{4I_0 + mR^2} - \frac{(I_0 + mR^2)\omega^2}{2} =$$

$$= (I_0 + mR^2)\omega^2\left(\frac{2(I_0 + mR^2)}{4I_0 + mR^2} - \frac{1}{2}\right) = (I_0 + mR^2)\omega^2\left(\frac{4I_0 + 4mR^2 - 4I_0 - mR^2}{2(4I_0 + mR^2)}\right) => $$

=>

$$\Delta E = \frac{3m(I_0 + mR^2)R^2\omega^2}{2(4I_0 + mR^2)} \quad (4.32)$$

$$\Delta E = \frac{3 \cdot 10 \cdot (10 + 10 \cdot 2{,}0^2) \cdot (2{,}0)^2 \cdot (2{,}0)^2}{2(4 \cdot 10 + 10 \cdot 2{,}0^2)} = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ Дж}$$

3. Изменение кинетической энергии ΔE системы произошло под действием силы тяги и силы трения. Тогда

$\Delta E = A + A_{TP}$,

где A - это работа силы тяги человека;

A_{TP} - работа силы трения.

=> $A = \Delta E - A_{TP}$ (4.33); $A_{TP} = F_{TP} S \cos\alpha$ (4.34)

где F_{TP} - сила трения, действующая на груз при его перемещении;

$S = R/2$ - путь, который проходит груз;

α- угол между направлением силы трения и перемещением груза;

$\alpha = 180^0$, $\cos 180^0 = -1$ (4.35)

В направлении оси Z груз находится в равновесии, поэтому сумма проекций всех сил, действующих на груз, равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \ \Rightarrow \ N - mg = 0 \ \Rightarrow \ N = mg; \quad F_{TP} = \mu N = \mu mg \quad (4.36)$$

Формула (4.34) с учетом равенств (4.35) и (4.36) примет вид:

$$A_{TP} = F_{TP} S \cos\alpha = \mu mg \cdot (R/2) \cdot (-1); \quad A_{TP} = -\frac{\mu mgR}{2} \quad (4.37)$$

Формула (4.33) с учетом равенств (4.32) и (4.37) примет вид:

$$A = \frac{3m(I_0 + mR^2)R^2\omega^2}{2(4I_0 + mR^2)} + \frac{\mu mgR}{2}$$

$$A = \frac{mR}{2}\left[\frac{3R(I_0 + mR^2)\omega^2}{4I_0 + mR^2} + \mu g\right]$$

$$A = \frac{10 \cdot 2{,}0}{2} \cdot \left[\frac{3 \cdot 10 \cdot 2{,}0 \cdot (10 + 10 \cdot (2{,}0)^2) \cdot (2{,}0)^2}{4 \cdot 10 + 10 \cdot (2{,}0)^2} + 0{,}50 \cdot 9{,}8\right] \approx 2{,}0 \cdot 10^2 \text{ Дж}$$

Задача 4.4.

Однородный стержень длиной □ = 60 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы этот стержень отклонился на угол □ = 90^0 от положения равновесия. Силой трения пренебречь.

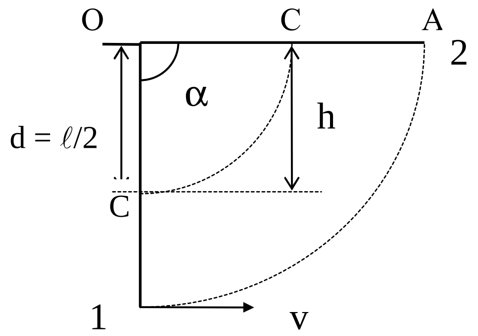
РЕШЕНИЕ:

Дано:

□ = 0,60 м

□ = 90^0

v - ?



1. Найдем сначала момент инерции стержня относительно оси вращения.
По теореме Штейнера имеем:
$I = I_0 + md^2$,   (4.38)
где I - момент инерции стержня относительно оси вращения (ось вращения проходит через точку 0 перпендикулярно плоскости чертежа);
I_0 - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс С стержня;
d - расстояние между этими осями.
$I_0 = ml^2/12$ (4.39)
Из чертежа видим, что d = OC = l/2.   (4.40)
Из формул (4.38), (4.39) и (4.40) получаем:

$$I = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{3m\ell^2 + m\ell^2}{12}; \qquad I = \frac{m\ell^2}{3}$$

2. Так как по условию задачи на стержень не действуют неконсервативные силы, то выполняется закон сохранения механической энергии.
$E_{K1} + E_{П1} = E_{K2} + E_{П2}$, (4.41)
где E_{K1} и $E_{П1}$ - кинетическая и потенциальная энергия стержня в положении 1;
E_{K2} и $E_{П2}$ - кинетическая и потенциальная энергия стержня в положении 2.

$$E_{K1} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4.42)$$

где E_{K1} - кинетическая энергия вращательного движения стержня;
I - момент инерции стержня относительно оси вращения;
ω - угловая скорость стержня.
$\omega = v/l$ (4.43)
Из формул (4.42) и (4.43) получаем:

$$E_{K1} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\ell^2 \cdot v^2}{2 \cdot 3 \cdot \ell^2} = \frac{mv^2}{6} \quad (4.44)$$

Считаем, что $E_{П1} = 0$, т.к. в состоянии 1 центр масс стержня занимает самое низкое положение;
$E_{K2} = 0$, т.к. в положении 2 стержень остановился и скорость его равна нулю;
$E_{П2} = mgh$, где h - высота, на которую поднимается центр тяжести стержня. Из чертежа видим, что h = l/2, и тогда $E_{П2} = mgl/2$ (4.45).
Формула (4.41) с учетом того, что $E_{П1} = 0$, $E_{K2} = 0$, а также равенств (4.44) и (4.45) примет вид:

$$\frac{mv^2}{6} = \frac{mg\ell}{2} \quad => \quad v = \sqrt{3g\ell} \qquad v = \sqrt{3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}60} = 4{,}2 \text{ м/с}$$