НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОГО ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Д.И.МЕНДЕЛЕЕВА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

по теме:
"ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ПОСТОЯННЫЙ ТОК"

(Методическое пособие к расчетному заданию)

Составители: Григорьев В,В, Коняхин В.П.,
Логачева В.М., Мягких Г.И ,
Семина Б.Г., Сивкова О.Д , Подольский В.А., Черков В.М.

Новомосковск - *1995 г.*

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ЗАРЯД. РАБОТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

1.1. Закон Кулона.

$$F = \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где F - сила взаимодействия двух точечных зарядов, Q_1, Q_2;

r - расстояние между ними,

ε - диэлектрическая проницаемость среды,

ε_0 - электрическая постоянная:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}.$$

1.2. Линейная плотность заряда

$$\tau = dQ/d\ell ,$$

где dQ - заряд, который находится на элементарной длине $d\ell$ нити.

Если заряд равномерно распределен по нити, то $\tau = Q/\ell$,

где Q - заряд нити, ℓ - длина нити

1.3. Поверхностная плотность заряда: $\sigma = Q/S$,

где Q - заряд, который равномерно распределен по поверхности площадью S.

1.4. Объемная плотность заряда: $\rho = Q/V$,

где Q - заряд, который равномерно распределен по объему V тела.

1.5. Напряженность $\vec{E}$ электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на заряд Q, помещенный в ту точку поля, в которой надо найти напряженность $\vec{E}$.

1.6. Напряженность электрического поля точечного заряда

$$E = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

где Q - точечный заряд, который создает поле,

r - расстояние от этого заряда до точки, в которой надо найти напряженность поля.

1.7. Напряженность электрического поля бесконечно длинной заряженной нити

$$E = \frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

где τ - линейная плотность заряда нити,

r - расстояние от нити до точки, в которой надо найти напряженность поля.

1.8. Напряженность электрического поля заряженной сферы

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{при } r \ge R \text{ и}$$

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R,$$

где Q - заряд сферы,

r - расстояние от центра сферы до той точки, в которой надо найти напряженность поля,

R - радиус сферы.

1.9. Напряженность электрического поля шара с равномерно распределенным зарядом по его обьему.

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{при } r \ge R,$$

где r - расстояние от центра шара до точки, в которой надо найти напряженность поля,

Q - заряд шара,

R - радиус шара.

1.10. В пп. 1.6 - 1.10 вектор напряженности электрического поля направлен вдоль радиальных прямых от заряда, если он положительный, и к заряду, если он отрицательный.

1.11. Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то по принципу суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots ,$$

где $\vec{E}$ - напряженность результирующего поля,

$\vec{E}_1$ - напряженность поля, созданного первым зарядом,

$\vec{E}_2$ - напряженность поля, созданного вторым зарядом и т.д.

1.12. Потенциал электрического поля

$$\varphi = \frac{W}{Q} ,$$

где W - потенциальная энергия заряда Q, который находится в данной точке электрического поля.

1.13. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} ,$$

где Q1 и Q2 - точечные заряды, которые взаимодействуют между собой,

r - расстояние между ними.

1.14. Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} ,$$

где Q - точечный заряд, который создает поле,

r - расстояние от этого заряда до точки, в которой надо найти потенциал поля

1.15. Потенциал поля заряженной сферы

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \qquad \text{при } r \geq R \quad \text{и}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \qquad \text{при } r \leq R,$$

где Q - заряд сферы,

r - расстояние от центра сферы до точки, в которой надо найти потенциал поля,

R - радиус сферы.

1.16. Эквипотенциальная поверхность - это такая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Линии напряженности электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

1.17. Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то по принципу суперпозиции полей:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots,$$

где φ - потенциал результирующего поля,

$\varphi 1$ - потенциал поля, которое создается первым зарядом,

φ_2 - вторым зарядом и т.д.

1.18. Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении заряда из начального положения (точка 1) в конечное положение (точка 2):

$$A = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где Q - заряд, который перемещается,

φ_1- потенциал первой точки поля

φ_2- потенциал второй точки поля.

1.19. Связь между напряженностью $\vec{E}$ и потенциалом φ электрического поля выражается формулой:

$$\vec{E} = -\,grad\varphi \qquad \text{или} \qquad E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$$

где E_r - проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на выбранное направление $\vec{r}$.

Если электрическое поле однородное, то $E = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot d$,

где φ_1 и φ_2 - потенциалы двух любых точек электрического поля,

d - расстояние между эквипотенциальными поверхностями, проходящими через эти точки.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1.1

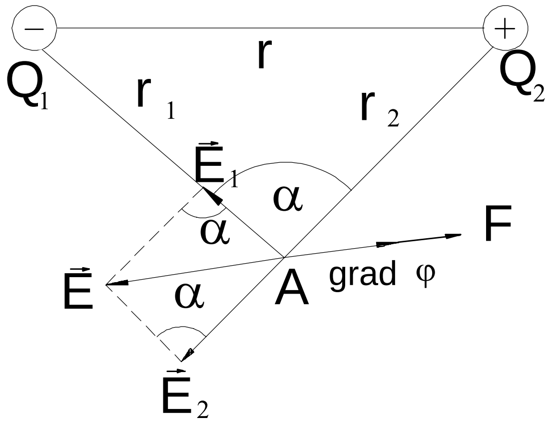
Электрическое поле создано точечными зарядами Q_1 = - 32 нКл и Q_2 = +18 нКл, находящимися на расстоянии r = 10,0 см друг от друга в среде с диэлектрической проницаемостью ε = 2,0. Определить:

1. Напряжнность Е и потенциал φ электрического поля в точке А, находящейся на расстоянии r_1 = 8,0 см от первого заряда и r_2 = 6,0 см от второго;
2. Силу F, которая будет действовать на помещенный в точку А заряд Q_3 = -1,0 нКл, и потенциальную энергию W этого заряда;

3. Работу, совершаемую при перемещении заряда Q_3 из точки А в бесконечно удаленную точку.
4. Указать направление градиента потенциала gradφ в точке А.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$Q_1 = -32$ нКл $= -32\cdot10^{-9}$ Кл
$Q_2 = +18$ нКл $= +18\cdot10^{-9}$ Кл
$Q_3 = -1{,}0\cdot10^{-9}$ Кл
$\varepsilon = 2{,}0$
$r_1 = 8{,}0$ см $= 8{,}0\cdot10^{-2}$ м
$r_2 = 6{,}0$ см $= 6{,}0\cdot10^{-2}$ м
$r = 10{,}0$ см $= 10{,}0\cdot10^{-2}$ м
----
1) E - ? , φ - ?
2) F - ? , W - ?



1. По принципу суперпозиции полей напряженность результирующего поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\ ,$$

где $\vec{E}_1$ - напряженность поля, создаваемого зарядом Q_1 в точке А;

$\vec{E}_2$ - напряженность поля, создаваемого зарядом Q_2 в этой же точке.

По теореме косинусов (для ΔE_1EA) :

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha} \qquad (1.1)$$

Напряженность поля точечного заряда находится по формуле:

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2};\ E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}\ .$$

По теореме косинусов (для ΔQ_1Q_2A):

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2};\cos\alpha = \frac{(8)^2 - (6)^2 - (10)^2}{2\cdot8\cdot6} = 0$$

$$(1.1) \Rightarrow E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{Q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{r_2^2}\right)^2} =$$

$$\frac{9\cdot10^9}{2}\sqrt{\left(\frac{32\cdot10^{-9}}{\left(8\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{18\cdot10^{-9}}{\left(6\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2} \approx 6{,}3\cdot10^4 \quad В\ /\ м$$

По принципу суперпозиции потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad (1.2)$$

где φ_1 - потенциал поля, которое создается зарядом Q_1 в точке А,

φ_2 - потенциал поля, которое создается зарядом Q_2 в этой же точке.

Потенциал поля точечного заряда находится по формуле:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}; \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}$$

$$(1.2) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

$$\varphi = \frac{9\cdot 10^9}{2}\left(\frac{-32\cdot 10^{-9}}{8\cdot 10^{-2}} + \frac{18\cdot 10^{-9}}{6\cdot 10^{-2}}\right) = -450 \text{ (В)}$$

2. Из формулы напряженности электрического поля имеем:

$$E = \frac{F}{|Q_3|} \Rightarrow F = |Q_3|\cdot E = \frac{|Q_3|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{Q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{r_2^2}\right)^2}$$

где E - напряженность в данной точке поля (точка А),

Q_3 - заряд, который находится в этой точке поля.

$$F = 1\cdot 10^{-9}\cdot 6,3\cdot 10^4 = 6,3\cdot 10^{-5}\text{Н}$$

Направление силы показано на чертеже. Сила противонаправлена вектору $\vec{E}$, т.к. заряд Q_3 отрицательный.

Из формулы потенциала электрического поля

$$\varphi = \frac{W}{Q_3} \Rightarrow W = Q_3\cdot\varphi = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

$$W = -1\cdot 10^{-9}\cdot(-450) = 4,5\cdot 10^{-7} \text{ Дж}$$

3. Работа, совершаемая при перемещении заряда в электрическом поле:

$$A = Q_3\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)$$

где Q_3 - заряд, который перемещается,

φ_1 - потенциал той точки поля, в которой заряд Q_3 находился вначале, т.е. точки А ($\varphi_1 = \varphi$),

φ_2 - потенциал поля в бесконечности ($\varphi_2 = 0$, т.к. в этом случае $r = \infty$).

Тогда: $$A = Q_3\cdot\varphi_1 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

$$A = \frac{-1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}}\cdot\left(-\frac{32\cdot 10^{-9}}{8\cdot 10^{-2}} + \frac{18\cdot 10^{-9}}{6\cdot 10^{-2}}\right) = 4,5\cdot 10^{-7}\text{Дж}.$$

4. Из формулы связи между напряженностью E и потенциалом φ электрического поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$$

следует, что векторы E и градиент потенциала противонаправлены.

ЗАДАЧА 1.2

Бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью заряда τ_1 = 1,0 мкКл/м. Определить:

1. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками A и B, находящимися от нити на расстоянии r_1 = 4,5 см и r_2 = 6,0 см соответственно. Расстояние между точками A и B r = r_1 = 4,5 см.
2. Работу A, совершаемую электрическим полем при перемещении заряда Q = 1,0 нКл из точки A в точку B.
3. Напряженность электрического поля в точке A после помещения в точку B другой бесконечно длинной нити, параллельной первой и равномерно заряженной с линейной плотностью заряда τ_2 = - 0,5 мкКл/м.
4. С какой силой $\dfrac{dF}{dl}$, приходящейся на единицу длины, взаимодействуют нити?
5. Указать направление градиента потенциала $\mathrm{grad}\varphi$ в точке A после помещения в точку B другой заряженной нити.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$\tau_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Кл/м

$r_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ м

$r = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

Q = 1,0 нКл

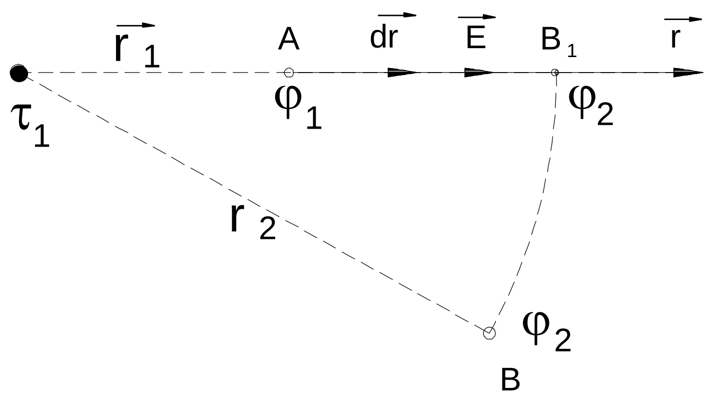
---

1) $\Delta\varphi$ - ? 2) A - ?

3) E_p - ?

$\tau_2 = -0{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м

4) $\dfrac{dF}{dl}$ - ?



1. Радиусом r_2 относительно первой нити опишем цилиндрическую поверхность, которая является эквипотенциальной поверхностью электрического поля, создаваемого зарядом этой нити. Тогда потенциалы точек B_1 и B будут одинаковы и равны φ_2. (Точка B_1 - точка пересечения эквипотенциальной поверхности с осью r , эта ось совпадает с радиусом r_1). Будем искать разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками A и B_1.

   Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной заряженной нитью, находится по формуле:

$$E = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r} ,$$

где τ - линейная плотность заряда нити;

r - расстояние от нити до точки, в которой надо найти $\vec{E}$.

Из формулы связи между напряженностью E и потенциалом φ электрического поля имеем:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow d\varphi = -E_r dr \qquad (1.3)$$

где E_r - проекция напряженности электрического поля на перемещение $d\vec{r}$

$$E_r = E \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между направлением векторов $\vec{E}$ и $d\vec{r}$. Из чертежа видим, что $\alpha = 0^0$, $\cos 0^0 = 1$.

Тогда: $E_r = E = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

(1.3) => $d\varphi = -\dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot dr$. Интегрируем $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{dr}{r}$ =>

=> $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln r \Big]_{r_1}^{r_2} = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln r_2 - \ln r_1\right) = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1.4)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{9}}} \cdot \ln \frac{6}{4,5} = -5,2 \cdot 10^{3} \ \text{(В)}$$

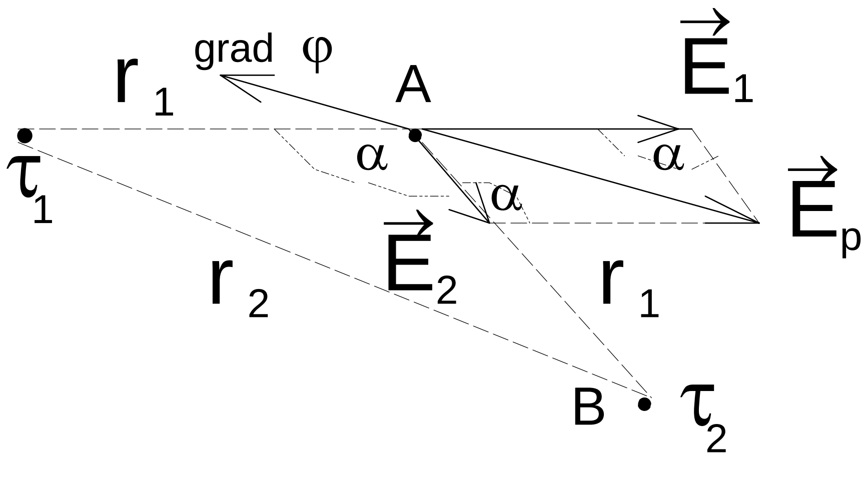
2. Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении заряда Q из одной точки поля в другую,

$$A = Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы первой и второй точек поля соответственно.

$$A = Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = -Q(\varphi_2 - \varphi_1) =>$$
$$A = -10^{-9}(-5,2 \cdot 10^{3}) = 5,2 \cdot 10^{-6} \ \text{(Дж)}$$

3.



По принципу суперпозиции напряженность $\vec{E}_p$ результирующего поля: $\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,

где $\vec{E}_1$ - напряженность поля, создаваемого зарядом первой нити;

$\vec{E}_2$ - напряженность поля, создаваемого зарядом второй нити, проходящей через точку B.

По теореме косинусов $\left(\Delta A E_1 E_p\right)$

$$E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}$$

По теореме косинусов $(\Delta\tau_1 AB)$

$$r_2^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2r_1r_1\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2};$$

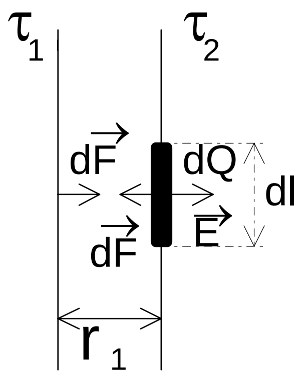
Но $E_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$; $E_2 = \dfrac{|\tau_2|}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$.

$$E_p = \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\right)^2 - 2\frac{\tau_1|\tau_2|}{(2\pi\varepsilon_0 r_1)^2}\cdot\frac{2r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \frac{2\tau_1|\tau_2|\left(2r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2}}$$

$$E_p = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9}{4{,}5\cdot 10^{-2}}\sqrt{\left(1\cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(0{,}5\cdot 10^{-6}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot\frac{2(4{,}5)^2 - (6)^2}{(4{,}5)^2}} = 4{,}3\cdot 10^5 \text{ В/м}$$

4.



Считаем, что первая нить создает электрическое поле. Выделим на второй нити малый отрезок dl с зарядом $dQ = \tau_2 dl$. На этот заряд dQ со стороны поля первой нити действует сила:

$$dF = dQ\cdot E = |\tau_2| dl\,\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{dF}{dl} = \frac{\tau_1|\tau_2|}{2\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$\frac{dF}{dl} = \frac{1\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 18\cdot 10^9}{6\cdot 10^{-2}} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\, H$$

5. Из формулы связи между напряженностью $\vec{E}$ и потенциалом φ электрического поля следует, что

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi\ .$$

Отсюда видим, что векторы напряженности $\vec{E}$ и градиента потенциала $\mathrm{grad}\varphi$ противонаправлены.

ЗАДАЧА 1.3

Положительный точечный заряд Q1 находится в центре сферы радиусом R = 20 см. По сфере равномерно распределен заряд Q_2 = 100 нКл. Напряженность электрического поля на расстоянии r = 10 см от центра сферы E = 180 В/см. Определить:

1. Потенциал φ электрического поля на этом же расстоянии от центра сферы;
2. Силу F, которая будет действовать на пробный заряд Q = 1,0 нКл, помещенный в точку на расстоянии r от центра сферы, и потенциальную энергию этого заряда.
3. Работу перемещения заряда Q_3 = 3,0 нКл из этой точки в бесконечность.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$R = 20 \cdot 10^{-2}$ м

$Q_2 = 100 \cdot 10^{-9}$ Кл

$r = 10 \cdot 10^{-2}$ м

$E = 180$ В/см = $1{,}8 \cdot 10^{4}$ В/м

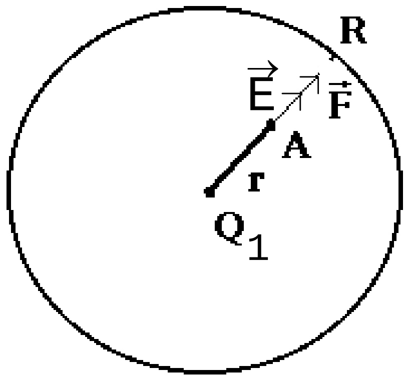
----

1) φ - ?

2) $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл

F - ? , W - ?

3) Q_3 = 3,0нКл, A- ?



1. По принципу суперпозиции полей напряженность результирующего поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

где $\vec{E}_1$ - напряженность поля, которое создается точечным зарядом Q_1

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\vec{E}_2$ - напряженность поля, которое создается зарядом сферы. Известно, что заряд сферы создает электрическое поле только вне сферы, а внутри сферы этот заряд поля не создает. Поэтому на расстоянии r от цетра сферы (точка А) $\vec{E}_2 = 0$.

Тогда, $E = E_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E$.

По принципу суперпозиции полей потенциал результирующего поля $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,
где φ_1 - потенциал поля, которое создается точечным зарядом Q_1 в точке А,

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2 E}{4\pi\varepsilon_0 r} = rE \ ,$$

φ_2 - потенциал поля, создаваемого зарядом Q2 сферы. Известно, что потенциал поля этого заряда внутри сферы равен потенциалу на поверхности сферы, который находится по формуле:

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \ ,$$ где R - радиус сферы.

Тогда: $\varphi = rE + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\varphi = 0{,}1 \cdot 1{,}8 \cdot 10^4 + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{0{,}2} = 6{,}3 \cdot 10^3 \text{В}$$

2. Сила, действующая на заряд Q, помещенный в данную точку электрического поля,

$$F = QE,$$

где E - напряженность поля в этой точке.

$$F = 1 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}8 \cdot 10^4 = 1{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$$

Направление силы указано на рисунке (направление векторов F и E совпадают, т.к. Q положительный заряд).

Потенциальная энергия заряда Q, помещенного в данную точку электрического поля,

$$W = Q\varphi \ ,$$

где φ - потенциал поля в этой точке. В нашей задаче φ - это потенциал результирующего поля, которое создается точечным зарядом Q_1 и зарядом Q_2 сферы.

$$W = 1\cdot10^{-9}\cdot6{,}3\cdot10^{3} = 6{,}3\cdot10^{-6} \text{ Дж}$$

3. Работа, совершаемая при перемещении заряда в электрическом поле,

$$A = Q_3\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),$$

где Q_3 - заряд, который перемещается,

$\varphi_1 = \varphi$ - потенциал поля в точке А,

$\varphi_2 = 0$ - потенциал поля в бесконечности, т.к. в этом случае $r = \infty$.

Тогда $A = Q3 \cdot\varphi = 3\cdot10^{-9}\cdot6{,}3\cdot10^{3} = 1{,}9\cdot10^{-5}$ Дж

ЗАДАЧА 1.4

Шар из однородного материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}0$ равномерно заряжен по объему. Радиус шара $R_1 = 4{,}0$ см. Шар окружен сферой радиусом $R_2 = 8{,}0$ см, заряженной с поверхностной плотностью заряда $\sigma = -8{,}85\cdot10^{-6}$ мкКл/м. Напряженность электрического поля на расстоянии $r_1 = 2{,}0$ см от центра шара (в точке А) E = 1500 кВ/м.

Определить:

1. Напряженность Ер и потенциал φ электрического поля в точке В, удаленной от центра шара на расстояние $r_2 = 10$ см. Заряд шара положительный.
2. Силу F, которая будет действовать на заряд Q = 10 нКл, если его поместить в точку В.
3. Отношение абсолютной величины потенциальной энергии W_1 взаимодействия зарядов шара и сферы к потенциальной энергии W_2 взаимодействия этого заряда Q с зарядами зарядами шара и сферы.
4. Работу при перемещении заряда Q из точки В в точку С, находящуюся на поверхности сферы.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$\varepsilon = 2{,}0$

$R_1 = 4{,}0\cdot10^{-2}$ м

$R_2 = 8{,}0\cdot10^{-2}$ м

$\sigma = -8{,}85\cdot10^{-6}$ Кл/м^2

$r_1 = 2{,}0\cdot10^{-2}$ м

$E = 1{,}5\cdot10^{6}$ В/м

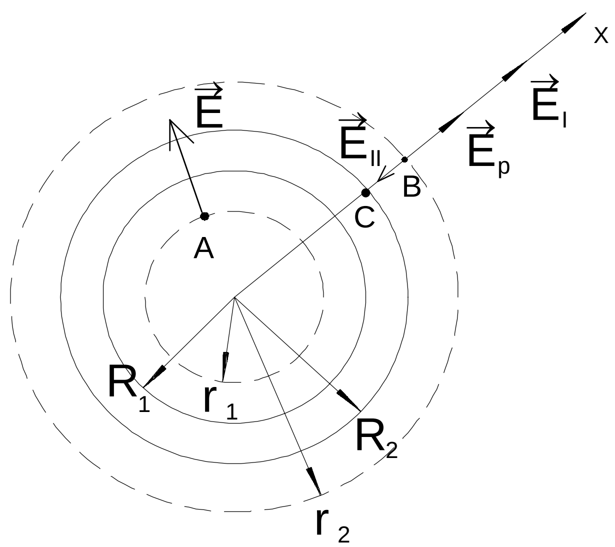
----

1) Ep - ?, φ - ?

$r_2 = 0{,}1$ м

2) F - ?, Кл, $Q = 10\cdot10^{-9}$ Кл

$|W_1/W_2|$ - ?



1. Представим, что заряд Q_1 шара состоит из заряда Q_0 шара радиуса r_1 и заряда Q_0' шарового слоя, внешний радиус которого R_1, а внутренний - r_1, т.е.

$$Q_1 = Q_0 + Q_0'$$

По принципу суперпозиции полей напряженность результирующего поля в точке А:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \qquad (1.5)$$

где $\vec{E}_1$ - напряженность поля, создаваемого зарядом Q_0, который находится внутри сферы радиуса r_1;

$\vec{E}_2$ - напряженность поля, создаваемого зарядом Q'_0 шарового слоя, внутренний радиус которого r_1. Этот заряд не создает поля внутри сферы этого радиуса. Поэтому $E_2 = 0$;

$\vec{E}_3$ - напряженность поля, создаваемого в точке А зарядом сферы радиусом R_2. Так как точка А находится внутри этой сферы, то $E_3 = 0$.

Тогда из выражения (1.5) => $E = E_1$, $E_1 = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$

Так как заряд шара радиуса R_1 равномерно распределен по всему объему, то для определения объемной плотности заряда шара радиуса R_1 можно найти объемную плотность заряда внутри шара радиуса r_1: $\rho = \dfrac{Q_0}{V_0}$;

где V0 - объем шара радиуса r1 ; $V0 = \frac{4}{3}\pi r1^3$

Тогда $\rho = \dfrac{3Q_0}{4\pi r_1^3} \Rightarrow Q_0 = \dfrac{4}{3}\pi\rho r_1^3$

$$E = E_1 = \frac{4\pi\rho r_1^3}{3\cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} = \frac{\rho\cdot r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon} \Rightarrow \rho = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon E}{r_1}$$

Заряд шара $Q_1 = \rho V = \dfrac{3\varepsilon_0\varepsilon E}{r_1}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_1^3 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E R_1^3}{r_1}$, (1.6)

где R_1 - радиус шара.

Найдем теперь Е и φ в точке В, которая находится вне сферы и вне шара.

По принципу суперпозиции полей

$$\vec{E}_p = \vec{E}_I + \vec{E}_{II} \qquad (1.1)$$

$\vec{E}_I$ - напряженность поля, создаваемого в точке В зарядом шара

$$E_I = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E R_1^3}{r_1 4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 r_2^2}$$

$\vec{E}_{II}$ - напряженность поля, создаваемого в точке В зарядом сферы Q_2.

$$E_{II} = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

Заряд сферы $Q_2 = \sigma\cdot S = \sigma\cdot 4\pi R_2^2$

$$E_{II} = \frac{|\sigma|\cdot 4\pi R_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{|\sigma|\cdot R_2^2}{\varepsilon_0 r_2^2}$$

В проекции на ось X имеем:

$$(1) \Rightarrow E_p = E_I - E_{II} = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 r_2^2} - \frac{|\sigma| R_2^2}{\varepsilon_0 r_2^2} \Rightarrow E_p = \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1} - \frac{|\sigma| R_2^2}{\varepsilon_0}\right)$$

$$E_p = \frac{1}{(0,1)^2}\left(\frac{2\cdot 1{,}5\cdot 10^6\cdot\left(4\cdot 10^{-2}\right)^3}{2\cdot 10^{-2}} - \frac{8{,}85\cdot 10^{-6}\cdot\left(8\cdot 10^{-2}\right)^2}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\right) = 3{,}2\cdot 10^5 В/м = 320 кВ/м$$

По принципу суперпозиции полей $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы полей, создаваемых в точке В зарядом шара и сферы соответственно.

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E R_1^3}{r_1 4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 r_2};\quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{\sigma\cdot 4\pi R_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r_2}$$

$$\varphi = \frac{1}{r_2}\left(\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\right);\quad (1.7)$$

$$\varphi = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{2\cdot 1{,}5\cdot 10^6\left(4\cdot 10^{-2}\right)^3}{2\cdot 10^{-2}} + \frac{-8{,}85\cdot 10^{-6}\cdot\left(8\cdot 10^{-2}\right)^2}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\right) = 3{,}2\cdot 10^4 В = 32 Кв$$

2. Из формулы напряженности Е электрического поля имеем:

$$E_p = \frac{F}{Q} \Rightarrow F = Q\cdot E_p,$$

где F - сила, которая действует на заряд Q, помещенный в электрическое поле.

$$F = 10^{-8}\cdot 3{,}2\cdot 10^5 = 3{,}2\cdot 10^{-3}\ Н$$

3. Из формулы потенциала φ электрического поля имеем:

$$\varphi = \frac{W_2}{Q} \Rightarrow W_2 = Q\cdot\varphi$$

где W_2 - энергия взаимодействия заряда Q с зарядами шара и сферы,

φ - потенциал поля, создаваемого зарядами шара и сферы в точке В.

$$W_2 = \frac{Q}{r_2}\left(\frac{\varepsilon\cdot E\cdot R_1^3}{r_1} + \frac{\sigma\cdot R_2^2}{\varepsilon_0}\right)$$

Найдем энергию взаимодействия зарядов шара и сферы. Считаем, что заряд шара Q_1 создает электрическое поле, а заряд сферы Q_2 находится в этом поле. Тогда

$$W_1 = Q_2\cdot\varphi_1^1$$

где φ_1^1 - потенциал поля, которое создается зарядом шара Q_1 в тех точках пространства, в которых находится поверхность сферы.

Так как сфера расположена симметрично относительно шара, то во всех точках сферы потенциал φ_1^1 поля будет одинаков и равный

$$\varphi_1^1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Тогда $$W_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot R_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E\cdot R_1^3\cdot\sigma\cdot 4\pi R_2^2}{r_1 4\pi\varepsilon_0\cdot R_2} = \frac{4\pi\varepsilon E\cdot\sigma\cdot R_1^3\cdot R_2}{r_1}$$

$$\left|\frac{W_1}{W_2}\right| = \frac{4\pi\varepsilon\cdot E\cdot R_1^3\cdot|\sigma|\cdot r_2\cdot R_2}{r_1\cdot Q\cdot\left(\frac{\varepsilon\cdot E\cdot R_1^3}{r_1}+\frac{\sigma\cdot R_2^2}{\varepsilon_0}\right)}$$

$$\left|\frac{W_1}{W_2}\right| = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 1{,}5\cdot 10^6\cdot\left(4\cdot 10^{-2}\right)^3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}1\cdot 8\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot 10^{-10}\cdot\left(\frac{2\cdot 1{,}5\cdot 10^6\cdot\left(4\cdot 10^{-2}\right)^3}{2\cdot 10^{-2}}+\frac{-8{,}85\cdot 10^{-6}\cdot\left(8\cdot 10^{-2}\right)^2}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)} = 2{,}7\cdot 10^3$$

4. Работа по перемещению заряда в электрическом поле

$$A = Q(\varphi_B - \varphi_C)$$

где Q - заряд, который перемещается,

φ_B - потенциал электрического поля в точке В (см. формулу 1.7)

$$\varphi_B = \varphi = \frac{1}{r_2}\left(\frac{\varepsilon\cdot E\cdot R_1^3}{r_1}+\frac{\sigma\cdot R_2^2}{\varepsilon_0}\right)$$

φ_C- потенциал электрического поля в точке С (на поверхности сферы).

По принципу суперпозиции полей $\varphi_C = \varphi_3 + \varphi_4$,

где φ_3- потенциал поля, которое создается зарядом шара в точке С,

$$\varphi_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E R_1^3}{r_1\cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1\cdot R_2}$$

где Q_1 - заряд шара (см. формулу 1.6)

R_2 - радиус сферы, т.е. расстояние от центра шара до точки С.

φ_4 - потенциал поля, которое создается зарядом сферы в точке С (на ее поверхности)

$$\varphi_4 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma\cdot 4\pi R_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0},$$

где Q_2 - заряд сферы.

$$\varphi_C = \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1\cdot R_2}+\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0}.$$

Тогда $A = Q\cdot\left(\varphi_B-\varphi_C\right) = Q\cdot\left(\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_2 r_1}+\frac{\sigma\cdot R_2^2}{r_2\varepsilon_0}-\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1\cdot R_2}-\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0}\right) =$

$$= Q\cdot\left[\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_2}{r_2}-1\right)\right] = \frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 r_2 R_2}\left(R_2-r_2\right)-\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0 r_2}\left(R_2-r_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = Q\cdot\left(r_2-R_2\right)\cdot\left(\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0 r_2}-\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 r_2 R_2}\right) = Q\cdot\frac{\left(r_2-R_2\right)}{r_2}\cdot\left(\frac{\sigma\cdot R_2}{\varepsilon_0}-\frac{\varepsilon E R_1^3}{r_1 R_2}\right)$$

$$A = 10 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{(0,1-0,08)}{0,08} \cdot \left(\frac{-8,85 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{8,85 \cdot 10^{-12}} - \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{6} \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^{3}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-2}} \right) = -2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

Знак «–» указывает, что работа совершается внешними силами против сил электрического поля.

2. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТОК ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ.

2-1. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля

$$\Phi_E = \int\limits_s E_n dS \quad , \quad \left[\Phi_E\right] = \text{В·м}$$

где E_n - проекция напряженности электрического поля на нормаль к поверхности S.

Если поле однородное, а поверхность плоская, то

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\alpha ,$$

где E - напряженность электрического поля,

S - площадь поверхности, через которую надо найти поток вектора $\vec{E}$,

α - угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$, где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности.

2-2. Электрическое смещение (электрическая индукция) $\vec{D}$ и напряженность $\vec{E}$ электрического поля связаны соотношением:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

2-3. Поток вектора электрического смещения $\vec{D}$.

$$\Phi_D = \int\limits_s D_n dS \quad ; \quad \left[\Phi_D\right] = \text{Кл}$$

где D_n - проекция вектора электростатичского смещения на направление нормали $\vec{n}$ к поверхности S.

Если поле однородное, а поверхность плоская, то $\Phi_D = D \cdot S \cdot \cos\alpha$

где α - угол между направлением векторов $\vec{D}$ и $\vec{n}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 2.1

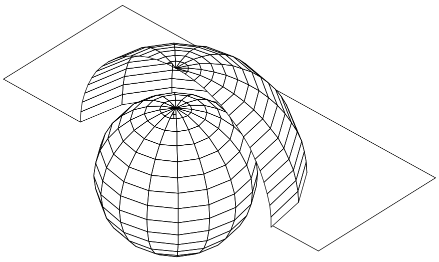
Из квадратной пластинки вырезан полукруг. На это место установлена четверть сферы такого же радиуса. Шар радиусом r, меньшим радиуса сферы, заряженный до потенциала φ = 100 В, помещен так, что его центр совпадает с центром кривизны сферической поверхности. Радиус шара r = 1,5 см.

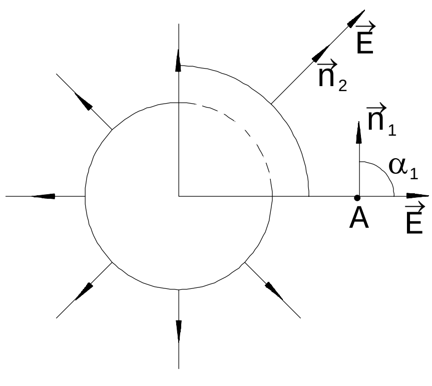
Начертить силовые линии электрического поля, создаваемого зарядом шара. Найти суммарный поток вектора напряженности электрического поля через поверхность пластинки и четверть сферы.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$r = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
φ = 100 В

Φ – ?





Суммарный поток вектора напряженности электрического поля через всю поверхность

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \qquad (2.1)$$

где Φ_1 - поток вектора напряженности электрического поля через поверхность пластинки,

Φ_2 - поток вектора напряженности электрического поля через сферическую поверхность.

$$\Phi_1 = \int_{S_1} E_n dS \qquad (2.2)$$

где E_n - проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на нормаль к поверхности $\vec{n}_1$.

Из чертежа видим, что $E_n = E\cos\alpha_1 = 0$, так как $\alpha_1 = 90^o, \cos 90^o = 0$

$$(2.2) \quad => \quad \Phi_1 = 0; \qquad \Phi_2 = \int_{S_2} E_n dS = \int_{S_2} E \cos\alpha_2 \cdot dS$$

Из чертежа видим, что угол α_2 между направлением векторов $\vec{n}_2$ и $\vec{E}$ для сферической поверхности равен 0^0, поэтому

$$\Phi_2 = \int_{S_2} E dS$$

Так как сферическая поверхность расположена симметрично относительно заряженного шара, то во всех точках сферы напряженность поля будет одинакова, поэтому E можно вынести за знак интеграла, т.е.

$$\Phi_2 = E \int_{S_2} dS = E \cdot S_2 \qquad (2.3)$$

где E - напряженность электрического поля, создаваемого заряженным шаром, в тех точках, через которые проходит сферическая поверхность,

S_2 - площадь четверти сферы

$$S_2 = \frac{S_{c.}}{4} = \frac{4\pi R^2}{4} = \pi R^2$$

где R - радиус кривизны сферической поверхности.

Напряженность электрического поля вне заряженного шара $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (2.4)

где Q - заряд шара. Найдем этот заряд.

Потенциал поля на поверхности заряженного шара $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

где r - радиус шара; φ - его потенциал. Откуда $Q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi$.

$$(2.4) \; => \; E = \frac{4\pi\varepsilon_0 r\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{r\varphi}{R^2}.$$

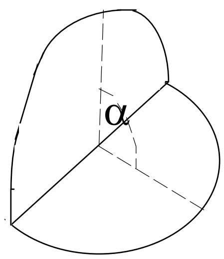
$$(2.3) \; => \; \Phi_2 = \frac{r\varphi}{R^2} \cdot \pi R^2 \Rightarrow \Phi_2 = \pi r\varphi$$

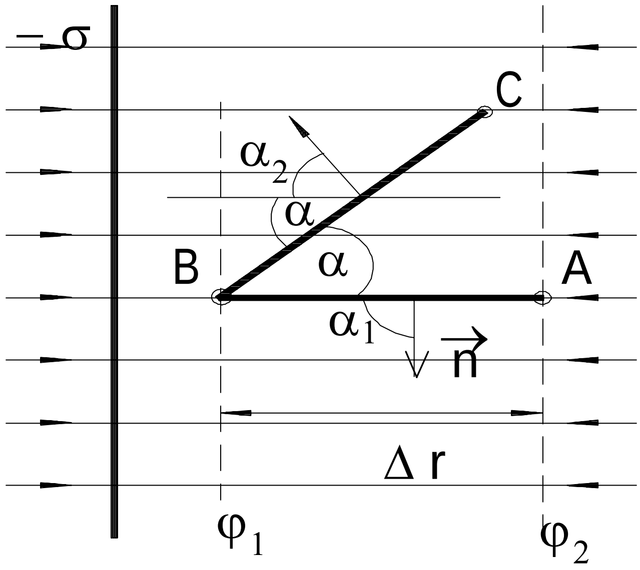
$$(2.1) \; => \; \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \pi r\varphi; \quad \Phi = 3{,}14 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 4{,}7 \; (\text{В}\cdot\text{м}).$$

ЗАДАЧА 2.2

Электрическое поле создано бесконечно протяженной заряженной пластинкой. В поле находится круг, изогнутый по диаметру под углом а = 30^0 так что одна половина круга лежит в плоскости, перпендикулярной заряженной пластинке. Начертить силовые линии электрического поля бесконечно протяженной заряженной пластинки.

Найти поток вектора электрического смещения через поверхность круга, если разность потенциалов между точками А и В поля $\Delta\varphi$ = 18 В. Радиус круга R =10 см.





РЕШЕНИЕ

Дано:
$\alpha = 30^0$
$\Delta\varphi = 18$ В
$R = 10\cdot10^{-2}$ м

$\Phi - ?$

Силовые линии показаны на рисунке. Вектор смещения $\vec{D}$ параллелен вектору напряженности $\vec{E}$.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \qquad (2.5)$$

где Φ_1– поток вектора электрического смещения через часть круга ВА,
Φ_2– поток вектора электрического смещения через часть круга ВС.

$$\Phi_1 = \int_{S_1} D_n dS = \int_{S_1} D\cos\alpha_1 \cdot dS = 0\ ,$$

так как угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности ВА и вектором электрического смещения $\vec{D}$ a = 90^0, cos 90^0 = 0.

$$\Phi_2 = \int_{S_2} D_n dS = \int_{S_2} D\cdot\cos\alpha_2\cdot dS$$

Электрическое поле бесконечно протяженной заряженной плоскости является однородным, т.е. $\vec{D}$ = const, поэтому D можно вынести за знак интеграла.
Из чертежа видим, что a_2 = 90^0 - a; cosa_2 = cos (90^0 - a) = sina

Тогда
$$\Phi_2 = D\cdot\sin\alpha\int_{S_2} dS = D\sin\alpha\cdot S_2$$

где S_2– площадь полукруга, $S_2 = \frac{\pi R^2}{2}$

$$\Phi_2 = D\cdot\frac{\pi R^2}{2}\cdot\sin\alpha \qquad (2.6)$$

Напряженность однородного электрического поля : $E = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}\right|$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между двумя точками поля, т.е. точками В и А;
Δr - расстояние между двумя эквипотенциальными поверхностями, проходящим через эти точки. Из чертежа видим, что $\Delta r = R$.

Для вакуума $D = \varepsilon_0\cdot E = \varepsilon_0\frac{\Delta\varphi}{R}$

$$\left(2.6\right) => \Phi_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \Delta\varphi}{R} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} \sin\alpha \Rightarrow \Phi_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 \cdot R \cdot \Delta\varphi}{2} \sin\alpha$$

$$\left(2.5\right) \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 \cdot R \cdot \Delta\varphi}{2} \sin\alpha$$

$$\Phi = \frac{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 12{,}5 \quad \text{пКл} \ .$$

3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основные формулы и законы

3.1. На заряженную частицу в электрическом поле действует сила: $\vec{F} = q\vec{E}$,

где q - заряд частицы; $\vec{E}$ - напряженность электрического поля.

3.2. Напряженность электрического поля связана с потенциалом φ соотношением:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi\,,$$

Если электрическое поле однородно, можно записать:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\ell} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell} = \frac{U}{\ell},$$

где ℓ - расстояние между эквипотенциальными поверхностями, имеющими потенциалы φ_1 и φ_2 (для однородного поля ℓ это расстояние между точками 1 и 2 вдоль силовой линии),

U - напряжение; $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

3.3. В плоском конденсаторе поле можно считать однородным. Тогда из п.3.2 следует, что напряженность поля в конденсаторе равна:

$$E = \frac{U}{d}\ ,$$

где U - напряжение на конденсаторе; d - расстояние между пластинами конденсатора.

3.4. Разность потенциалов точек 1и 2 электрического поля связана с работой A, совершаемой электрическим полем при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}\ .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 3.1

Электрон влетает вдоль силовых линий в однородное электрическое поле со скоростью $\upsilon_o = 10$ Мм/с. Пройдя расстояние ℓ = 95 см из точки 1 в точку 2, электрон потерял 1/3 часть своей первоначальной кинетической энергии T_0. Найти:

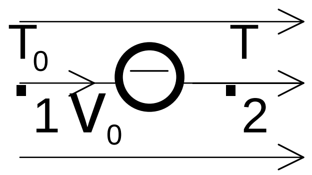


рис.3.1

1. Работу A сил электрического поля при перемещении электрона из точки 1 в точку 2;
2. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ электрического поля между точками 1 и 2;
3. Напряженность $\vec{E}$ электрического поля (указать на рисунке направление вектора напряженности);
4. Силу $\vec{F}$, действующую на электрон (указать на рисунке направление вектора силы).

РЕШЕНИЕ

Дано:
$\upsilon_0 = 10^7$ м/с
ℓ = 0,95м
$T_0 - T = \frac{1}{3}T_0$

A-?, $(\varphi_1 - \varphi_2) - ?$
E-?, F-? a - ?

1.Работа всех сил, действующих на тело равна изменению его кинетической энергии В данном случае на электрон действует только сила, создаваемая электрическим полем (силой тяжести - пренебречь). Следовательно работа силы электрического поля равна

$$A = T - T_0 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}T_0 .$$

Полагая, что движение электрона подчиняется классическим законам физики, т.к. $\upsilon_0 = 10^7$ м/с << c, где c = $3\cdot10^8$ м/с - скорость света, можно записать:

$$T_0 = \frac{m\upsilon_0^2}{2},$$

где m - масса электрона, $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Следовательно:

$$A = -\frac{1}{3}\cdot\frac{m\upsilon_0^2}{2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{9{,}1\cdot(10^7)^2}{2} = -1{,}5\cdot10^{-17} \text{ (Дж)}$$

2. Разность потенциалов точек 1 и 2 - $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{e}$,

где e - заряд электрона, e = $-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-1{,}5\cdot10^{-17}}{-1{,}6\cdot10^{-19}} = 95 \text{ В};$$

3. Напряженность однородного электрического поля связана с разностью потенциалов соотношением:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell},$$

где ℓ - расстояние между точками 1 и 2 вдоль силовой линии.

$$E = \frac{95}{0{,}95} = 100 \text{ (В/м)}$$

Вектор напряженности электрического поля направлен в сторону убыли потенциала, как показано на рисунке:

$\varphi_1 > \varphi_2$

рис.3.2

4. Силу, действующую на электрон определим из соотношения: $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$,

$$\left|\vec{F}\right| = e \cdot E = 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{Н}$$

Направление вектора силы будет противоположно направлению вектора напряженности, т.к. заряд электрона отрицательный.

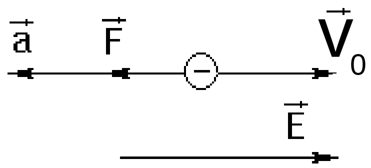


Рис.3.3

ЗАДАЧА 3.2

Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью υ_0 = 10 Мм/с, направленной параллельно пластинам. Расстояние между пластинами d = 16 мм, разность потенциалов U = 30 В, длина пластин ℓ = 60 мм. Электрическое поле внутри конденсатора считать однородным. Определить :

1. Напряженность $\vec{E}$ электрического поля внутри конденсатора (указать на рисунке направления векторов напряженности $\vec{E}$ и силы $\vec{F}$, действующей на электрон);
2. Ускорение $\vec{a}$, с которым двигается электрон внутри конденсатора;
3. Скорость υ электрона при вылете из конденсатора;
4. Во сколько раз увеличивается кинетическая энергия электрона после пролета между пластинами;
5. Работу A сил электрического поля.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\upsilon_0 = 10$ Мм/с = 10^7 м/с
d = 16 мм = $1{,}6 \cdot 10^{-2}$ м
U = 30 В
ℓ = 6 см = $6 \cdot 10^{-2}$ м

$\vec{E} - ?; \vec{F} - ?; \Delta d - ?$
$\frac{T}{T_0}$-? ; A-?

1. Напряженность однородного электрического поля в конденсаторе связана с разностью потенциалов соотношением: E =U/d, (3.1)
   где d - расстояние между пластинами конденсатора
   $$E = \frac{300}{1{,}6 \cdot 10^{-2}} = 1{,}88 \cdot 10^4\ (\text{В/м})$$
2. Определим ускорение ,исходя из 2-го закона Ньютона:
   $$\vec{F} = m\vec{a}\ ,$$
   где m- масса электрона; $\vec{F}$-суммарная сила, действующая на него.

На электрон действуют две силы: сила электрического поля F и сила тяжести. Силой тяжести - пренебрегаем.
Тогда, согласно п.3.1

$F = |e| \cdot E$, где e - заряд электрона.

Следовательно: $$a = \frac{F}{m} = \frac{|e| \cdot E}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}88 \cdot 10^{4}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2 \qquad (3.2)$$

Направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{F}$ показано на рис.3.4. Эти вектора противоположны, т.е. заряд электрона отрицательный.

3. Для определения скорости разложим ее на составляющие вдоль и поперек электрического поля, рис.3.4. Так как вдоль направления начальной скорости υ_0 силы на электрон не действуют, то $\upsilon_{\perp} = \upsilon_0$. Для нахождения υ найдем υ_{II} .

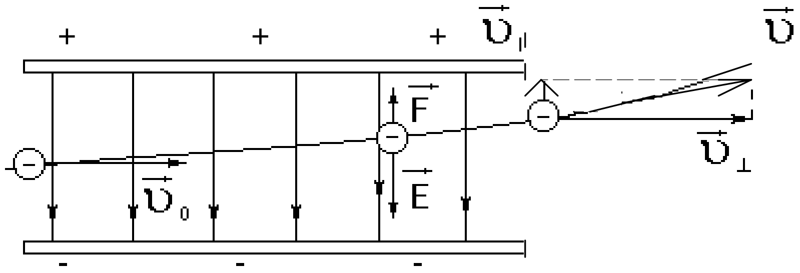


Рис.3.4.

В направлении $\vec{\upsilon}_{II}$ электрон двигается равноускоренно. Начальная скорость в этом направлении равна 0. Поэтому можно записать:

$$\upsilon_{II} = at \ ,$$

где t - время, за которое электрон пролетает между пластинами.
Время пролета между пластинами определим из соотношения:

$$t = \frac{\ell}{\upsilon_{\perp}} = \frac{\ell}{\upsilon_0}$$

Следовательно:

$$\upsilon_{II} = \frac{a\ell}{\upsilon_0} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{15} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{10^{7}} = 1{,}9 \cdot 10^{7} \text{ м/с} \qquad (3.3)$$

Поэтому $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{II}^2}$. Учитывая выражения (3.1) - (3.3) получим:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\frac{|e| \cdot U \cdot l}{m\upsilon_0 d}\right)^2} \ ; \qquad \upsilon = \sqrt{\left(10^7\right)^2 + \left(1{,}9 \cdot 10^7\right)^2} = 2{,}1 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

3. $$\frac{T}{T_0} = \frac{\frac{m\upsilon^2}{2}}{\frac{m\upsilon_0^2}{2}} = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2 = \left(\frac{2{,}1 \cdot 10^7}{1{,}0 \cdot 10^7}\right)^2 = 4{,}4 \quad - \qquad (3.4)$$

4. Работа всех сил, действующих на тело, равна изменению его кинетической энергии. В данном случае на электрон действует только сила, создаваемая электрическим полем (силой тяжести пренебрегаем). Следовательно работа силы электрического поля равна: $A = \Delta T = T - T_0$

Из соотношения (3.4) можно записать: $T = T_0 + \Delta T = 4{,}4 \cdot T_0$

Следовательно:

$$A = T - T_0 = 3{,}4 T_0 \Rightarrow A = 3{,}4 \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{3{,}4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^7)^2}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-16} \text{ (Дж)}$$

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКА

4.1. Поляризованность диэлектрика: $\vec{P} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{P}_i}{\Delta V}$,

где P_i - электрический момент отдельной (i-й) молекулы,

N - число молекул в объеме ΔV.

4.2. Связь поляризованности $\vec{P}$ с напряженностью $\vec{E}$ электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость, ε_0 - электрическая постоянная.

4.3. Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ :

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

4.4. Напряженность $\vec{E}$ электрического поля в диэлектрике связана с напряженностью $\vec{E}_0$ внешнего поля соотношением: $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}$

4.5. Связь электрического смещения с напряженностью $\vec{E}$ электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} .$$

4.6. Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

где σ - поверхностная плотность заряда.

4.7. Напряженность электрического поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными с одинаковой по абсолютному значению поверхностной плотностью σ плоскостями,

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

4.8. Электроемкость конденсатора : $C = \dfrac{Q}{U}$.

Электроемкость плоского конденсатора : $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$.

где Q - заряд каждой пластины; U - разность потенциалов между пластинами;

S - площадь каждой пластины; d - расстояние между ними.

4.9. Напряженность электрического поля между пластинами плоского конденсатора

$$E = \frac{U}{d}$$

4.10. Энергия электрического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2}$$

4.11. Объемная плотность энергии электрического поля

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$, где V - объем, занимаемый полем.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 4.1

Плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между обкладками 3,2 мм и площадью S каждой 16 $см^2$ подключен к батарее с э.д.с. $\mathcal{E}$ = 240 В. Не отсоединяя конденсатор от батареи, вносят в него стеклянную пластинку, плотно прилегающую к обкладкам (диэлектрическая проницаемость стекла ε = 6,0). Определить:

1. Изменение Δσ поверхностной плотности свободных зарядов обкладок и поверхностную плотность σ′ связанных зарядов на стекле;
2. Относительное изменение $\frac{\Delta F}{F_0}$ силы взаимодействия обкладок конденсатора;
3. Работу А, совершаемую при внесении диэлектрика.

РЕШЕНИЕ

Дано:

d = 3,2 мм = $3{,}2\cdot10^{-3}$ м

S = 16 $см^2 = 1{,}6\cdot10^{-3}$ $м^2$

$\mathcal{E}$ = 240 В

ε = 6,0

$\Delta\sigma, \sigma', \frac{\Delta F}{F_0}, A$ - ?

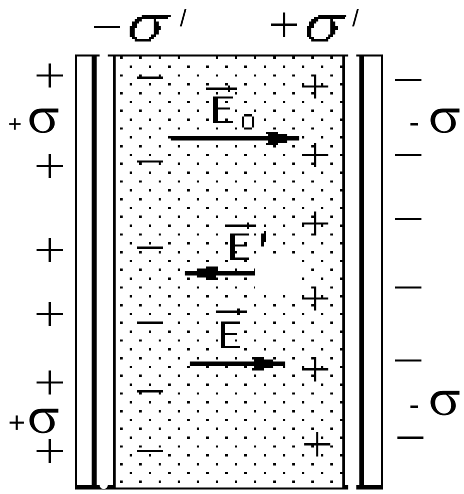


Рис.4.1

σ - поверхтностная плотность свободных зарядов на пластинах конденсатора

σ' - поврхностная плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика

1. Разность потенциалов U на обкладках конденсатора равна э.д.с. $\mathcal{E}$ батареи, т.к. ток в цепи отсутствует. Поскольку при внесении пластинки конденсатор не отключается от батареи, то разность потенциалов U на его обкладках не изменяется. Следовательно, не изменяется и напряженность электрического поля.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\mathcal{E}}{d}\,. \qquad (4.1)$$

(Разность потенциалов на пластинах конденсатора равна ЭДС)

По условию задачи расстояние d между обкладками конденсатора много меньше размеров обкладок. В этом случае напряженность E электрического поля будет связана с поверхностной плотностью σ свободных зарядов обкладок конденсатора так же, как для двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

До внесения пластинки диэлектрик отсутствовал (ε = 1) и $E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ (4.2)

После внесения пластинки : $E = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon}$, (4.3)

где ε - диэлектрическая проницаемость стекла.
Изменение $\Delta\sigma$ поверхностной плотности свободных зарядов

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \tag{4.4}$$

Выразим σ_1 и σ_2 из (4.2) и (4.3) соответствнно и подставим в (4.4):

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E, \ \ \sigma_2 = \varepsilon_0\varepsilon E$$

$$\Delta\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E - \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E \cdot (\varepsilon - 1) \tag{4.5}$$

С учетом (4.1) последнее выражение примет вид: $\Delta\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot (\varepsilon - 1)}{d}$

$$\Delta\sigma = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 240 \cdot 5}{3{,}2 \cdot 10^{-3}} = 3{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2 = 3{,}3\ \text{мкКл/м}^2$$

Найдем поврхностную плотность σ' связанных зарядов, возникающих на стеклянной пластинке, внесенной в поле плоского конденсатора (рис.4.1).
Свободные заряды обкладок с поверхностной плотностью σ_2 создают внутри конденсатора электрическое поле напряженностью

$$E_o = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o} = \varepsilon E\ .$$

Связанные заряды, находящиеся на поверхности стеклянной пластинки, создают поле напряженностью: $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$.

Поскольку напряженности $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$ направлены противоположно, то напряженность результирующего поля в стекле:

$$E = E_0 - E' \Rightarrow E = \varepsilon E - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

Откуда поверхностная плотность связанных зарядов: $\sigma' = \varepsilon_0 E \cdot (\varepsilon - 1)$.

Сравнение этого выражения с (4.5) показывает, что $\sigma' = \Delta\sigma = 3{,}3$ мкКл/м^2 .

2. На заряд Q, находящийся на одной из обкладок конденсатора, действует создаваемое другой обкладкой электрическое поле напряженностью

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Тогда сила взаимодействия обкладок конденсатора; $F = QE_1 = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. (4.6)

Считая, что заряды на обкладках конденсатора распределены равномерно, получим из определения поверхностной плотности зарядов: $\sigma = \dfrac{Q}{S}$

Найдем заряд Q и подставим выражение для него в (4.6): $Q = \sigma S$,

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

До внесения стеклянной пластинки $\varepsilon = 1$. Следовательно сила взаимодействия обкладок равна: $F_0 = \dfrac{\sigma_1^2 S}{2\varepsilon_0}$.

После внесения пластинки эта сила равна: $F = \dfrac{\sigma_2^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Относительное изменение $\frac{\Delta F}{F_0}$ силы взаимодействия пластин: $\frac{\Delta F}{F_0} = \frac{F - F_0}{F_0} = \frac{F}{F_0} - 1$

С учетом выражений для F_0 и F имеем: $$\frac{\Delta F}{F_0} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \varepsilon} - 1 \qquad (4.7)$$

Отношение σ_2 / σ_1 найдем, приравняв (4.2) и (4.3): $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \varepsilon$

Таким образом (4.7) принимает вид: $\frac{\Delta F}{F_0} = \varepsilon - 1 = 5$.

3. Работа А, совершенная при внесении пластинки, равна изменению ΔW энергии электрического поля конденсатора

$$A = \Delta W = \frac{CU^2}{2} - \frac{C_0U^2}{2} \Rightarrow A = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C_0\mathcal{E}^2}{2},$$

где С и C_0 - емкости конденсатора после и до внесения диэлектрика. Емкости конденсатора найдем по формулам: $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ и подставим в выражение для работы.

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon^2 \cdot (\varepsilon - 1)}{2d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 240^2 \cdot 5}{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} = 0,64 \text{ мкДж}$$

ЗАДАЧА 4.2

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено слюдой (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 6,0$). Отключив конденсатор от источника тока, заменяют слюду парафиновой бумагой (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = 2,0$). Определить:

1. Отношение $\frac{\Delta\sigma'}{\sigma}$ изменения поверхностной плотности связанных зарядов на диэлектрике к поверхностной плотности свободных зарядов пластин конденсатора;
2. Отношение P_2 / P_1 давлений, оказываемого пластинами конденсатора на парафиновую бумагу и слюду;
3. Относительное изменение $\frac{\Delta\omega}{\omega_1}$ объемной плотности энергии электрического поля.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\varepsilon_1 = 6,0$
$\varepsilon_2 = 2,0$

$\frac{\Delta\sigma'}{\sigma}, \frac{P_2}{P_1}, \frac{\Delta\omega}{\omega_1} - ?$

1. Свободные заряды пластин плоского конденсатора создают в вакууме электрическое поле напряженностью

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad (4.8)$$

где σ - поверхностная плотность свободных зарядов, ε_0 - электрическая постоянная.

Связанный заряд σ' пластин диэлектрика создает поле напряженностью

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \qquad (4.9)$$

где σ' - поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике. Это поле направлено противоположно полю пластин (рис.4.1)

Поэтому результирующая напряженность: $E = E_0 - E'$. (4.10)

С другой стороны, напряженность электрического поля в диэлектрике, заполняющем пространство между пластинами плоского конденсатора можно найти как:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \qquad (4.11)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего пространство между пластинами.

Подставляя (4.8), (4.9) и (4.11) в (4.10) получим: $\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$.

Следовательно : $\frac{\sigma'}{\sigma} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$. (4.12)

По условию задачи при замене диэлектрика конденсатор был отключен от источника тока. Следовательно свободный заряд пластин и плотность σ этих зарядов не изменились. Тогда отношение изменения $\Delta\sigma'$ поверхностной плотности связанных зарядов на диэлектрике к поверхностной плотности σ свободных зарядов пластин с учетом (4.12) равно:

$$\frac{\Delta\sigma'}{\sigma} = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\sigma} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}; \ \frac{\Delta\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -0,33.$$

Знак минус показывает, что поверхностная плотность связанных зарядов уменьшилась.

2. Сила взаимодействия пластин плоского конденсатора (см.задачу 4.1)

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \text{ где } S \text{ - площадь пластин.}$$

Пластины оказывают на диэлектрик давление $P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Отношение давлений $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_2} : \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 3$.

3. Объемная плотность энергии электрического поля $\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$.

Выразим ω через поверхностную плотность σ зарядов пластин, используя (4.11):

$$\omega = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Относительное изменение объемной плотности энергии: $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1$.

Учитывая, что $\omega_1 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \omega_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_2}$, находим отношения:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \ \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2.$$

5. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

5.1. Сила постоянного тока : $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$,

где ΔQ - количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время Δt.

5.2. Плотность тока : $j = I/S$,

где I - сила тока, S - площадь поперечного сечения проводника.

5.3. Сопротивление R однородного проводника равно: $R = \rho\frac{l}{S}$;

где l - длина проводника, ρ - удельное сопротивление вещества.

5.4. Сопротивление нескольких проводников :

а) соединенных последовательно: $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$; б) соединенных параллельно: $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$

Здесь R_i - сопротивление i-го проводника; n - число проводников.

5.5. Закон Ома для участка цепи : $I = U/R$,

где U - напряжение на участке цепи; R - сопротивление этого участка цепи.

5.6. Закон Ома для замкнутой цепи: $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$;

где ε - э.д.с. источника тока; r - внутреннее сопротивление источника тока, R - сопротивление внешнего участка цепи.

Последовательное и параллельное соединения источников тока

5.7. $I = \frac{к \cdot \varepsilon}{R + r \cdot к}$; к - число источников, соединенных последовательно.

5.8. $I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{m}}$; m - число источников, соединенных параллельно.

5.9. При смешанном соединении (к - последовательно, в m - параллельные группы);

$$I = \frac{\varepsilon \cdot к}{R + \frac{r \cdot к}{m}}$$

5.10. Закон Ома в дифференциальной форме: $j = \frac{E}{\rho}$

где E - напряженность электрического поля в проводнике ;

5.11. $j = n \cdot e \cdot \upsilon_{gp}$; n - концентрация свободных электронов, e -модуль заряд электрона, υ_{gp} - скорость дрейфа (направленная скорость) электронов.

5.12. $E = U/l$; где l - длина проводника.

5.13. Мощность тока $P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2R$. ,

где U - напряжение на участке цепи, R - сопротивление этого участка.

5.14. Полная мощность в цепи $P_n = \varepsilon \cdot I = I^2 \cdot (R + r)$,

где ε - э.д.с. источника тока, R - сопротивление внешнего участка цепи.

5.15. К.п.д. цепи : $\eta = \frac{P}{P_n}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 5.1

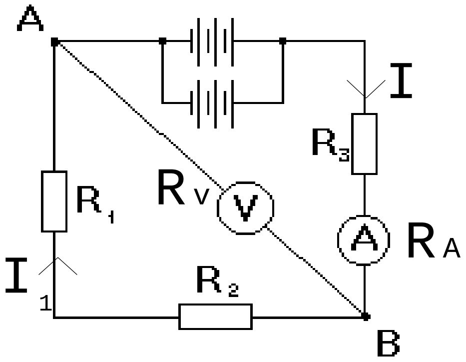


рис.5.1

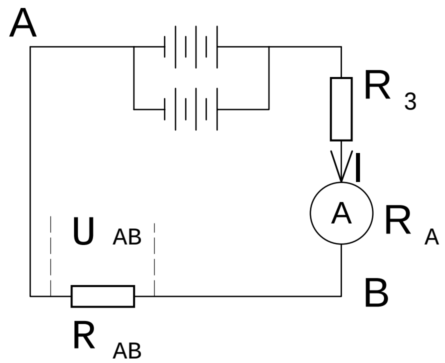


рис.5.2

Шесть источников с $\mathcal{E}$ = 2 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом каждый соединены по три последовательно в две параллельные группы. Сопротивления R_1 = 40 Ом, R_2= 60 Ом,R_3 = 7,5 Ом соединены по схеме. Сила тока в цепи измеряется амперметром с R_A = 0,1 Ом. К участку АВ подключен вольтметр с R_V = 1000 Ом. Сопротивление R_1 представляет собой медный проводник ($\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м, длиной l = 200 м.). Скорость дрейфа электронов в нем $\upsilon_{gp} = 2\cdot10^6$ м/с. Найти:

1. Показания амперметра и вольтметра;
2. Силу тока I_1 и плотность тока j в сопротивлении R_1 ;
3. Напряжение U_1 на концах медного проводника и напряженность Е электрического поля в нем.
4. Концентрацию электронов n в нем.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

$\mathcal{E}$ = 2,0 В
к = 3
m = 2.
R_1 = 40,0 Ом:
R_2 = 60,0 Ом
R_3 = 7,5 Ом
R_A = 0,10 Ом
R_V = 1000 Ом
$\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м
ℓ = 200 м
$\upsilon_{gp} = 2{,}0\cdot10^{6}$ м/с
r=1,0 Ом
----
1) I - ?, U - ?
2) I_1 - ?, j - ?
3) U_1 - ?, E - ?,
4) n - ? В

1. Рассчитаем сопротивление R внешней цепи (п.5.4). Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно. Их общее сопротивление R_{12} равно: $R_{12} = R_1 + R_2$. Сопротивление R_{12} соединено параллельно с сопротивлением R_V. Поэтому сопротивление участка R_1, R_2, R_V (обозначим его R_{AB}) равно:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_V} = \frac{R_V + R_{12}}{R_{12}\cdot R_V} = \frac{R_V + R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)R_V}$$

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)\cdot R_V}{R_1 + R_2 + R_V} = \frac{(40 + 60)\cdot 1000}{40 + 60 + 1000} = 90{,}9 \text{ Ом}$$

Сопротивления R_{AB}, R_A и R_3 соединены последовательно (рис.5.2). Поэтому сопротивление внешней цепи R равно:

$$R = R_{AB} + R_A + R_3 = 90{,}9 + 0{,}1 + 7{,}5 = 98{,}5 \text{ Ом}$$

Силу тока в цепи (показания амперметра) определяем по закону Ома для замкнутой цепи с несколькими источниками тока (п.5.9):

$$I = \frac{\mathcal{E}\cdot к}{R + \frac{r\cdot к}{m}} = \frac{2\cdot 3}{98{,}5 + \frac{0{,}5\cdot 3}{2}} = 0{,}061 A$$

Напряжение на участке АВ (показания вольтметра) определяем по закону Ома для участка цепи (рис.5.2 ; п.5.3):

$$U = U_{AB} = I \cdot R_{AB} = 0,06 \cdot 90,9 = 5,4 \text{ В}$$

2.Ток через сопротивления R_1 и R_2 одинаковый т.к. они соединены последовательно (рис.5.1). Сопротивление этого участка R_1 + R_2 ; напряжение на этом участке - U_{AB}.По закону Ома найдем ток I_1:

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1 + R_2} = \frac{5,4}{40 + 60} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ А}$$

Плотность тока (п.5.2): $j = \dfrac{I_1}{S}$

Сечение S найдем, зная сопротивление R_1 ; $R_1 = \dfrac{\rho \cdot \ell}{S}$.

Отсюда $S = \dfrac{\rho \cdot \ell}{R_1}$ => $j = \dfrac{I_1 \cdot R_1}{\rho \cdot \ell}$

$$j = \frac{5,4 \cdot 10^{-2} \cdot 40}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 200} = 0,64 \cdot 10^{6} \text{ А/м}^2 .$$

3. Напряжение на сопротивлении R_1 : $U_1 = I_1 \cdot R_1 = 5,4 \cdot 10^{-2} \cdot 40 = 2,2$ В

Напряженность Е электрического поля в сопротивлении R_1 равна (п.5.10): $E = j \cdot \rho$

$$E = 0,64 \cdot 10^{6} \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

4. Концентрация свободных электронов (п.5.11) :

$$n = \frac{j}{e \cdot \upsilon_{gp}} = \frac{0,64 \cdot 10^{6}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{6}} = 2,0 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$$

ЗАДАЧА 5.2

Разветвленная цепь, состоящая из двух параллельно соединенных сопротивлений R_1 = = 6,0 Ом и R_1 = 12 Ом, включена последовательно с сопротивлением R_3 = 15 Ом. Эта цепь подключена к зажимам генератора, ЭДС которого ε = 200 В, а внутреннее сопротивление r = 1,0 Ом. Вычислить:

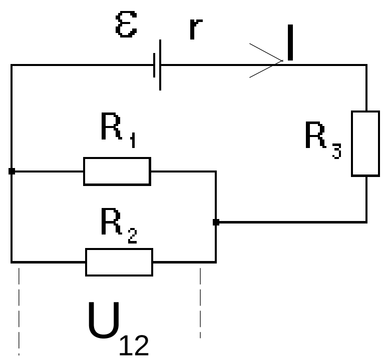
1. Мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1.
2. Мощность, выделяющуюся во всей внешней цепи.
3. К.п.д. цепи.

РЕШЕНИЕ

Дано:

ε = 200 В
r = 1,0 Ом
R_1 = 6,0 Ом
R_2 = 12,0 Ом
R_3 = 15,0 Ом

P_1 -? P -?
η - ?



1. Рассчитаем сопротивление разветвленного участка (обозначим его R_{12}) и всей внешней цепи R (п.5.4)

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4{,}0 \text{ Ом}$$

$$R = R_{12} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} + 15 = 19 \text{ Ом}$$

Сила тока I в цепи (закон Ома для замкнутой цепи - п.5.7)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{200}{19 + 1} = 10A$$

Напряжение на разветвленном участке $U_{12} = I \cdot R_{12}$.

Мощность (п.5.13): $P_1 = \frac{U_{12}^2}{R_1} = \frac{(I \cdot R_{12})^2}{R_1}$; $P_1 = \frac{(10 \cdot 4)^2}{6} = 270$ Вт

2. Мощность во всей внешней цепи $P = I^2 \cdot R = 10^2 \cdot 19 = 1900$ Вт.

3. К.п.д. цепи равно (п.5.15): $\eta = \frac{P}{P_n}$; $\eta = \frac{I^2 \cdot R}{I \cdot \varepsilon} = \frac{I^2 \cdot R}{I^2 \cdot (R + r)} = \frac{R}{R + r}$

$$\eta = \frac{19}{19 + 1} = 0{,}85 \text{ ; } \quad \eta = 85\%.$$