ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

1. ИНДУКЦИЯ И НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАВАЕМАЯ СИСТЕМОЙ ПРОВОДНИКОВ

Основные формулы

1.1. Индукция магнитного поля, создаваемая прямым проводником конечной длины на расстоянии “в” от него (рис.1.1):

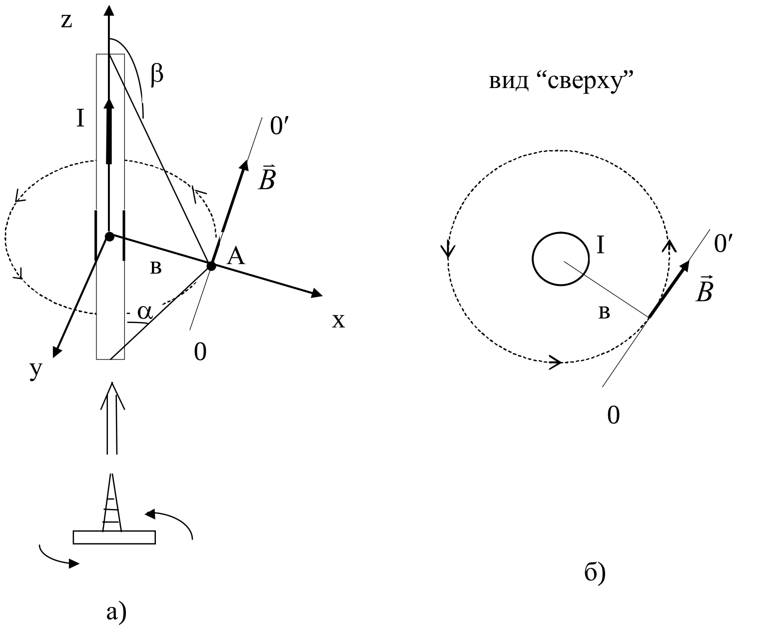


рис.1.1.

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi в}(\cos\alpha - \cos\beta), \quad (1.1)$$

где I - сила тока в проводнике; в - длина перпендикуляра, соединяющего проводник и точку, в которой определяем индукцию магнитного поля (точка “А” на рис.1.1); α и β - углы (показаны на рисунке); μ_0 - магнитная постоянная (μ_0 = $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м); μ - магнитная проницаемость среды.

Вектор индукции $\vec{B}$ направлен по линии, которая перпендикулярна направлению тока I и радиусу “в” (линия 00′) на рис.1.1). Направление вектора $\vec{B}$ можно определить по правилу правого винта для прямого тока: винт вращают так, чтобы он ввинчивался по направлению тока. Вращение головки винта показывает направление линии индукции или линии напряженности магнитного поля. Эти линии имеют вид окружности (на рис.1.1 они изображены пунктирными линиями). Окружности лежат в плоскости, перпендикулярной к току (плоскость X,У), центр окружности совпадает с центром проводника. Стрелки на окружностях показывают направление линии индукции (линии напряженности магнитного поля). Вектор индукции $\vec{B}$ направлен по касательной к линии индукции, его направление совпадает с направлением линии индукции.

1.1.1. Индукция, создаваемая "полубесконечным" прямым проводником (рис.1.2, верхний конец проводника уходит в бесконечность).

В этом случае в формуле (1.1) угол $\beta = 180^0$:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi в}(\cos\alpha + 1) \quad (1.1.1)$$

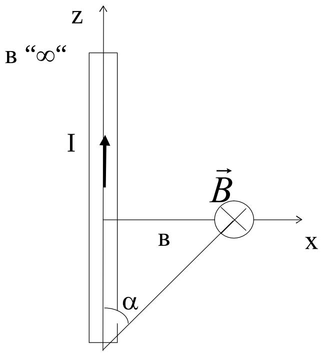


рис.1.2

1.1.2. Индукция, создаваемая бесконечным прямым проводником.

В этом случае в формуле (1.1) $\beta = 180^0$; $\alpha = 0$:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi в} \quad (1.1.2)$$

Вектор $\vec{B}$ направлен "от нас"

1.2. Индукция, создаваемая в центре окружности радиуса R проводником, имеющим вид дуги окружности, длиной ℓ (рис.1.3, окружность лежит в плоскости XУ):

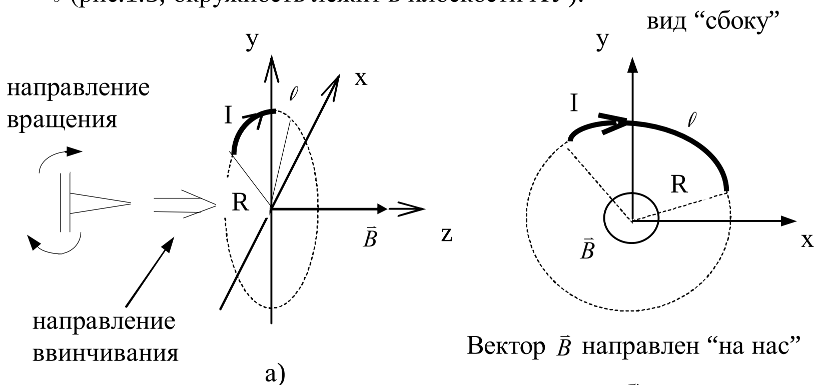


рис.1.3

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} l \quad (1.2)$$

Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит окружность (на рис.1.3 вдоль оси Z). Направление вектора $\vec{B}$ можно найти по правилу правого винта для кругового тока: головку винта вращают по направлению движения тока I; направление ввинчивания винта совпадает с направлением вектора $\vec{B}$.

1.2.1. Индукция, создаваемая круговым проводником радиуса R в его центре (рис.1.4). В этом случае в формуле (1.4) $\ell = 2\pi R$:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} \quad (1.2.1)$$

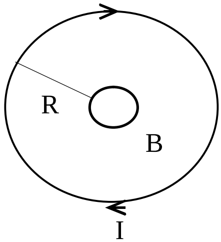


рис.1.4

1.3. $$\vec{B} = \vec{B}\mu \qquad (1.3)$$

$\vec{B}_0$ - индукция, создаваемая в вакууме; $\vec{B}$ - индукция, создаваемая той же системой проводников в магнитной среде с проницаемостью μ (μ вакуума равно 1).

1.4. $$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля. Вектор $\vec{H}$ направлен так же как вектор $\vec{B}$.

Из этого уравнения следует: $$H = \frac{B}{\mu\mu_0} \qquad (1.4)$$

Напряженность магнитного поля не зависит от магнитных свойств среды и одинакова (для заданной системы проводников) в вакууме и в магнитной среде.

Формулы для расчета напряженности магнитного поля могут быть получены из формул для индукции делением их на $\mu\mu_0$.

Напряженность магнитного поля, создаваемая проводниками, по которым течет ток I:

а) прямым проводником конечной длины:

$$H = \frac{I}{4\pi в}(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (1.4.1)$$

б) “полубесконечным” прямым проводником:

$$H = \frac{I}{4\pi в}(\cos\alpha + 1) \qquad (1.4.2)$$

в) бесконечным прямым проводником:

$$H = \frac{I}{2\pi в} \qquad (1.4.3)$$

г) проводником в виде дуги окружности длиной ℓ:

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} l \qquad (1.4.4)$$

д) круговым проводником радиуса R:

$$H = \frac{I}{2R} \qquad (1.4.5)$$

1.5. **Принцип суперпозиции**: вектор индукции магнитного поля, в некоторой точке, равен векторной сумме индукций, создаваемых каждым проводником в отдельности в этой точке.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \qquad (1.5)$$

где $\vec{B}_i$ - индукция, создаваемая проводником, номер которого i; $\vec{B}$ - результирующая индукция, создаваемая всеми проводниками.

Аналогичный принцип суперпозиции справедлив для напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \sum \vec{H}_i \qquad (1.5.1)$$

1.6. $\vec{J} = \chi\vec{H}$ (1.6); $\mu = 1 + \chi$ (1.7); $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$ (1.8);

где $\vec{J}$ - вектор намагниченности, χ - магнитная восприимчивость среды.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1. В плоскости XУ (рис.1.5) расположена плоскость кольцевого проводника радиуса R = 0,4 м, по которому течет ток I_1 = 1 А. Центр кольца (точка “0”) и начало координат совпадают. Бесконечный проводник в точке “А” согнут под прямым углом. По проводнику течет ток I_2 = 2 А. Плоскость, в которой лежит бесконечный проводник, параллельна плоскости XУ; точка А расположена на оси Z и отстоит от точки 0 на расстоянии r = 0,2 м. Проводники находятся в вакууме. Найти в точке 0: 1) вектор магнитной индукции $\vec{B}_0$; 2) вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$.

Предполагая, что проводники находятся в магнитной среде, для которой зависимость J(H) приведена на рис.26, найти в точке 0: 3) намагниченность $\vec{J}$; 4) магнитную восприимчивость χ; магнитную проницаемость μ среды; 6) вектор индукции $\vec{B}$.

РЕШЕНИЕ

Дано:
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
$I_1 = 1$ А
$I_2 = 2$ А
$r = 0{,}2$ м
$R = 0{,}4$ м

$\vec{B}_0, \vec{H}, \vec{J}, \chi, \mu, \vec{B}$ - ?

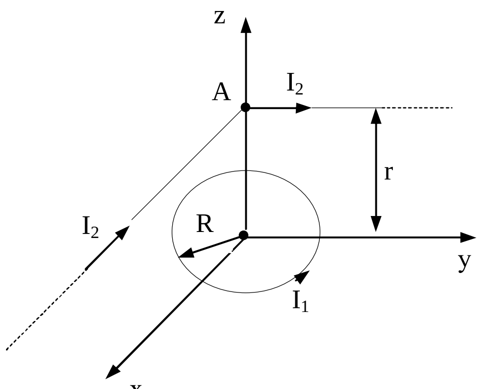


рис.1.5

1. Система проводников состоит из трех проводников: 2-а “полубесконечных” проводника (один параллелен оси X, другой - оси У) и кругового проводника. Найдем направление и величину векторов индукции, создаваемых каждым из проводников в точке 0.

Прямой проводник, параллельный оси X (рис.1.6)

Индукцию, создаваемую этим проводником обозначим $\vec{B}_1$. Вектор $\vec{B}_1$ перпендикулярен отрезку r и направлению тока I_2, т.е. совпадает с линией оси У. Направление вектора $\vec{B}_1$ определяем по правилу правого винта для прямого тока: находим направление линии индукции (пунктирная окружность на рис.1.6, направление линии индукции показано стрелками); вектор $\vec{B}_1$ совпадает с направлением линии индукции в точке “0”, т.е. противоположен положительному направлению оси У.

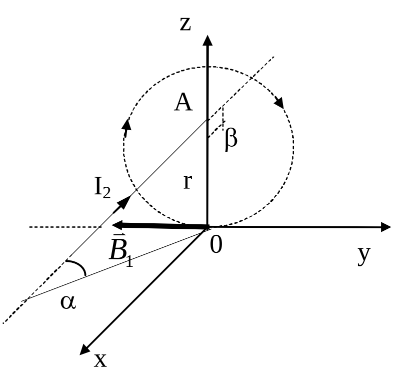


рис.1.6

Модуль вектора B_1 равен (уравнение 1.1):

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi в}(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (1.9)$$

где I - сила тока в проводнике; “в” - расстояние от проводника до точки, в которой определяем индукцию, α и β - углы (показаны на рис.1.6); μ - магнитная проницаемость среды. В данном случае $\mu = 1$, $I = I_2$, $в = r$, $\beta = 90^0$, $\alpha = 0^0$ (т.к. “передний” конец проводника уходит в бесконечность):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi r}(\cos 0^0 - \cos 90^0) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi r} \qquad (1.10)$$

Аналогично находим величину и направление вектора индукции $\vec{B}_2$, созданного вторым прямым проводником, параллельным оси У (рис.1.7): вектор $\vec{B}_2$ направлен в сторону противоположную направлению оси Х; модуль вектора находим по формуле (1.9), где $I = I_2$, $в = r$, $\beta = 180^0$, $\alpha = 90^0$:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi r}(\cos 90^0 - \cos 180^0) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi r} \qquad (1.11)$$

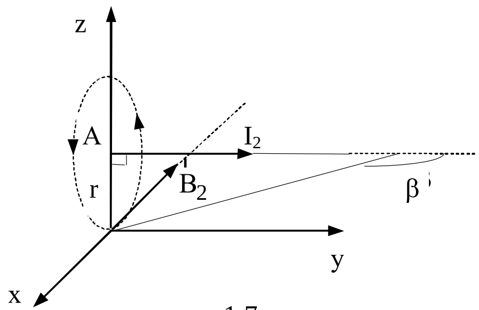


рис.1.7

Круговой проводник.

Индукцию, создаваемую этим проводником обозначим $\vec{B}_3$ (рис.1.8). Вектор $\vec{B}_3$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположен проводник, т.е. вдоль линии, которая совпадает с осью Z. Направление $\vec{B}_3$ определяем по правилу правого винта для кругового тока: вектор $\vec{B}_3$ направлен в сторону положительного направления оси Z. Модуль вектора $\vec{B}_3$ равен (уравнение 1.2):

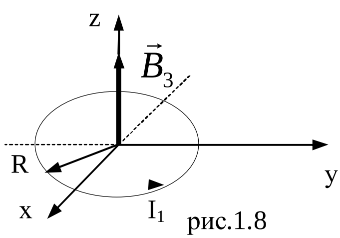


рис.1.8

$$B_3 = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \ell \qquad (1.12)$$

где I - сила тока в проводнике, ℓ - длина проводника, μ - магнитная проницаемость среды.

В данном случае $\mu = 1$ (вакуум; $I = I_1$; длина ℓ равна длине окружности $\ell = 2\pi R$:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \qquad (1.13)$$

На рис.1.9 показаны все три вектора индукции $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$:

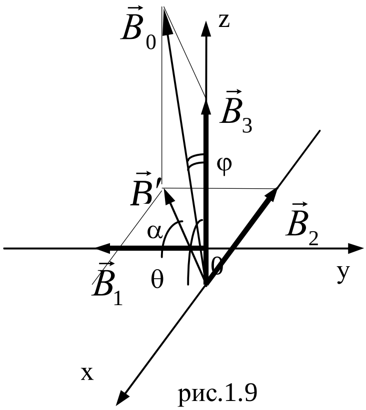


рис.1.9

Вектор $\vec{B}_0$ в точке 0 найдем по принципу суперпозиции полей: вектор индукции магнитного поля равен векторной сумме индукций, создаваемых каждым из проводников в отдельности:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \quad (1.14)$$

Поскольку вектора $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ взаимноперпендикулярны, то модуль результирующего вектора $\vec{B}_0$ найдем по формуле:

$$B_0 = \sqrt{B_1 + B_3 + B_3} \quad (1.15)$$

Подставим в уравнение (1.15) значения B_1 ,B_3 ,B_3 из уравнений (1.10, 1.11, 1.13):

$$B_0 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_1}{2R}\right)^2} = \left(\frac{\mu_0}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{I_2}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{R}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{2}\right)\sqrt{\frac{I_2^2}{2\pi^2 r^2} + \frac{I_1^2}{R^2}} \qquad (1.16)$$

Проверим единицы измерения:

$[B] = (\text{Гн/м})\sqrt{(\text{A}^2/\text{м}^2)} = \text{ГнА/м}^2$; т.к. Гн = Вб/А, а Вб = Тл·м^2,

то получим: $[B] = \dfrac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \dfrac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \dfrac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}$.

Найдем величину вектора B_0:

$$B_0 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{2\pi^2\cdot 4\cdot 10^{-2}} + \frac{1}{16\cdot 10^{-2}}} = \frac{10^{-7}}{2}\sqrt{\frac{10^2}{2} + \frac{\pi^2}{16}10^2} =$$

$$= 2\cdot 10^{-6}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}} = 2\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}06 = 2{,}1\cdot 10^{-6} \quad \text{Тл}$$

Для того, чтобы знать вектор $\vec{B}_0$, надо кроме величины знать и его направление. Направление вектора $\vec{B}_0$ можно задать углами θ и φ (рис.1.9). Угол θ равен:

$$\theta = -(\gamma + 90^0) \qquad (1.17)$$

Угол γ можно найти из треугольника, включающего вектора $\vec{B}_1$ и $\vec{B}'$, где $\vec{B}'$ равен:

$$\vec{B}' = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (1.18); \qquad \cos\gamma = B_1/B' \quad (1.19)$$

Т.к. B_1 перпендикулярно B_2, то по теореме Пифагора находим:

$$B' = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\ ; \quad (1.20)$$

Из уравнений (1.10) и (1.11) видно: $B_1 = B_2 = \mu_0 I_2/4\pi r$.

Подставим $B_1 = B_2$ в уравнение (1.20):

$$B' = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B_1\sqrt{2}$$

Найдем cosγ из уравнения (1.19):

$$cos\gamma = \frac{B_1}{B'} = \frac{B_1}{B_1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \gamma = 45^o$$

Следовательно угол θ (уравнение (1.17)) равен:

$$\theta = -(90^0 + 45^0) = -135^0 \qquad (1.21)$$

Аналогично найдем угол φ (рис.1.9):

$$\cos\varphi = B_3/B_0$$

Подставим B_3 из уравнения (1.13) и B_0 из уравнения (1.16):

$$\cos\varphi = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \Bigg/ \frac{\mu_0}{2}\sqrt{\frac{I_2^2}{2\pi^2 r^2} + \frac{I_1^2}{R^2}} = \frac{I_1}{R} \Bigg/ \frac{I_1}{R}\left(\sqrt{\left(\frac{I_2 R}{I_1 r}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2} + 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{I_2 R}{I_1 r}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\cdot 0{,}4}{1\cdot 0{,}2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{\pi^2}}} = 0{,}74$$

$$\varphi = \arccos(0{,}74) = 42^0.$$

Ответ на первый вопрос: B = Тл; $\theta = -135^0$; $\varphi = 42^0$.

2. Вектор напряженности $\vec{H}$ направлен так же, как вектор индукции $\vec{B}$. Модуль вектора $\vec{H}$ равен (уравнение (1.4)):

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} \qquad (1.22)$$

В п.1 нашли индукцию в вакууме B_0. Для вакуума $\mu = 1$. Следовательно из уравнения (1.22) получим:

$$H = B_0/\mu_0$$

Найдем величину H: $H = 2{,}1\cdot10^{-6}/4\pi\cdot10^{-7} = 1{,}7$ А/м. (1.23)

3. Напряженность магнитного поля не зависит от магнитных свойств среды и одинакова в магнитной среде и в вакууме. Зная напряженность магнитного поля в вакууме (пункт 2), а следовательно и в магнитной среде, по графику рис.26, найдем намагниченность J.

$$J(1{,}7) = 10 \text{ А/м} \qquad (1.24)$$

Вектор $\vec{J}$ равен: $\vec{J} = \chi\vec{H}$, т.е. направлен так же, как вектор $\vec{H}$ (а следовательно, так же, как вектор B_0).

4. Намагниченность J и напряженность H связаны соотношением (уравнение (1.6)):

$$J = \chi H; \;\; \chi = J/H.$$

Подставим численные значения J (уравнение (1.24) и уравнение (1.23)):

$$\chi = 10/1{,}7 = 5{,}9.$$

5. Магнитная проницаемостьμ равна (уравнение (1.7)):

$$\mu = 1 + \chi = 1 + 5{,}9 \;\; =>$$

$$\mu = 6{,}9 \qquad (1.25)$$

6. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ равен (уравнение(1.3)):

$$\vec{B} = \vec{B}\mu.$$

Из уравнения следует, что вектор $\vec{B}$ направлен так же, как вектор $\vec{B}_0$. Модуль вектора B равен: $B = B_0\mu$.

Подставим численные значения B_0 ($B_0 = 2{,}1\cdot10^{-6}$ Тл) и μ ($\mu = 6{,}9$):

$$B = 2{,}1\cdot6{,}9 = 1.5\cdot10^{-5} \text{ Тл}.$$

Задача 1.2. Проводник ACD расположен в плоскости ZУ и согнут так, как показано на рис. 1.10. По проводнику течет ток I_1 =50 А. Через точку L проходит бесконечный прямой проводник параллельный оси Z, по которому течет ток I_2 = 30 А. Направление токов, взаимное расположение проводников и их размеры указаны на рисунке (R = 0,1 м, φ = 60^0, линия “OL” перпендикулярна оси У). Считая, что проводники находятся в вакууме, найти в точке 0: 1) величину магнитной индукции B_0, 2) величину напряженности магнитного поля Н.

Предполагая, что проводники находятся в магнитной среде (зависимость В(Н) для этой среды задана графически на рисунке 27), найти в точке 0: 3) магнитную индукцию в среде В; 4) магнитную проницаемость μ ; 5) магнитную восприимчивость χ; 6) намагниченность J.

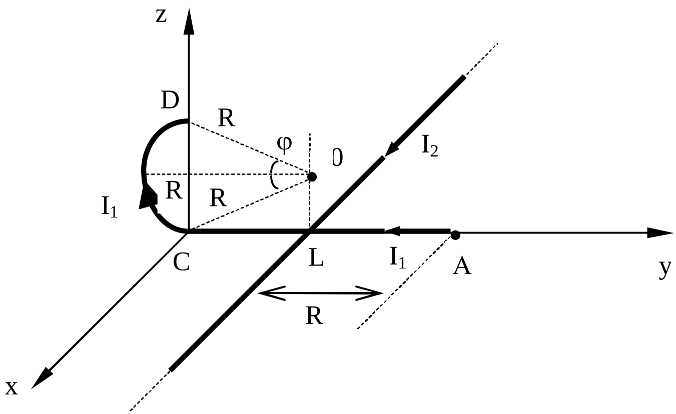


рис.1.10

РЕШЕНИЕ

Дано:	
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м	
I_1 = 50 А	
I_2 = 30 А	
R = 0,1 м	
φ = 600	
B_0,H,B,μ, χ,J - ?	

Система проводников состоит из трех проводников: прямого проводника ALC, проводника CD в виде дуги окружности и прямого бесконечного проводника.

Найдем направление и величину векторов индукции, создаваемых каждым из проводников в точке 0.

Прямой проводник ALC. Индукцию, создаваемую этим проводником обозначим $\vec{B}_1$ (рис.1.11). Длину перпендикуляра, соединяющего проводник и точку 0 (отрезок “OL”) обозначим “в”.

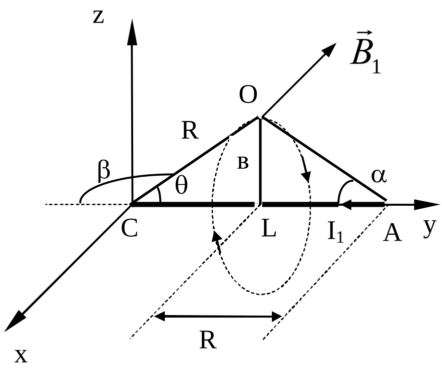


рис.1.11

Вектор индукции $\vec{B}_1$ перпендикулярен отрезку “в” и направлению тока I_1, т.е. параллелен линии оси X. Направление вектора $\vec{B}_1$ определяем по правилу правого винта для прямого тока: находим направление линии магнитной индукции (эта линия имеет вид окружности и расположена в плоскости, перпендикулярной оси У, пунктирная линия на рис.1.11, направление линии индукции показано стрелками). Вектор $\vec{B}_1$ совпадает с направлением линии индукции в точке 0, т.е. противоположен положительному направлению оси X. Модуль вектора $\vec{B}_1$ равен (уравнение (1.1)):

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi в}(\cos\alpha - \cos\beta), \qquad (1.26)$$

где I - сила тока в проводнике; “в” - расстояние от проводника до точки, в которой определяем индукцию, α и β - углы (показаны на рис.1.11); μ - магнитная проницаемость среды. По условию задачи μ = 1, $I = I_1$. Из рисунка 1.10 видно, что угол OCL равен $\varphi/2$. На рис.1.11 этот угол обозначен θ:

$$\theta = \varphi/2\ . \qquad (1.27)$$

Следовательно

$$\beta = 180 - \theta = 180 - (\varphi/2)$$

$$\cos\beta = \cos(180 - (\varphi/2)) = -\cos(\varphi/2) \qquad (1.28)$$

Из треугольника OCL выразим “в”:

$$в = R\sin\theta = R\sin(\varphi/2) \qquad (1.29)$$

Из треугольника OLA выразим tg α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{в}{R} = \frac{R\sin\frac{\varphi}{2}}{R} = \sin(\varphi/2) \qquad (1.30)$$

Зная tg α можно найти cos α:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}} \qquad (1.31)$$

Подставим найденные выражения в уравнение (1.26):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R\,\sin\frac{\varphi}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}} + \cos\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (1.32)$$

Индукцию, создаваемую проводником CD, обозначим $\vec{B}_2$ (рис.1.12). Вектор $\vec{B}_2$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположен проводник CD, т.е. вдоль линии параллельной линии оси X. Направление вектора $\vec{B}_2$ определяем по правилу правого винта для кругового тока; вектор $\vec{B}_2$ направлен в сторону противоположную оси X (т.е. совпадает по направлению с вектором B_1). Модуль вектора $\vec{B}_2$ равен (уравнение (1.12):

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2}\,\ell \qquad (1.33)$$

где I - сила тока в проводнике, ℓ - длина проводника, μ - магнитная проницаемость среды. По условию $I = I_1$, $\mu = 1$.

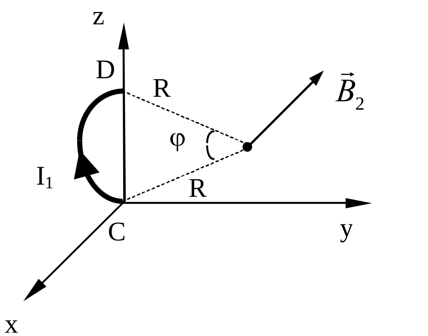


рис.1.12

Длину ℓ найдем, зная центральный угол φ: $\ell = R\varphi$. (1.34)

(В уравнении (1.34) угол φ берется в радианах)

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R^2} R\varphi = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R}\varphi \qquad (1.35)$$

Индукцию, создаваемую бесконечным прямым проводником обозначим $\vec{B}_3$ (рис.1.13). Вектор $\vec{B}_3$ перпендикулярен направлению тока I_2 и радиусу "в", т.е. параллелен линии оси У. Направление вектора $\vec{B}_3$ находим по правилу правого винта для прямого проводника. На рис.1.13 показана линия индукции (пунктирная линия). Следовательно, вектор $\vec{B}_3$ противоположен положительному направлению оси У. Модуль вектора $\vec{B}_3$ найдем по формуле (1.26), где $I = I_2$, $\mu = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 180^0$, "в" - определяется выражением (1.29):

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R\,\sin\frac{\varphi}{2}} = (\cos 0 - \cos 180) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R\,\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad (1.36)$$

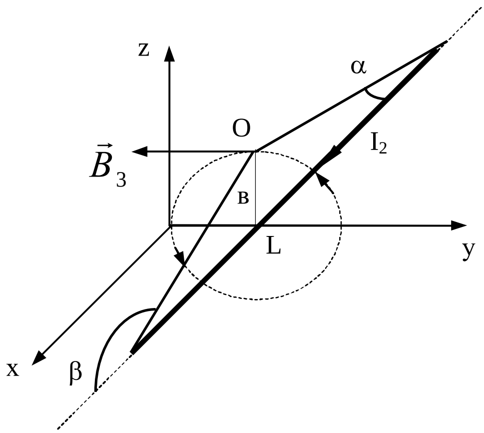


рис.1.13

$$B_0=\frac{\mu_0}{2\pi R}\sqrt{\left(\frac{I_2}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2+\left[\frac{I_1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{I_1}{2}\varphi\right]^2}$$

$$B_0=\frac{\mu_0}{4\pi R\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\cdot I_2^2+I_1^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}}+\cos\frac{\varphi}{2}+\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\qquad(1.41)$$

Проверим единицы измерения: $[B]=\frac{Гн}{м\cdot м}\sqrt{A^2}=\frac{Гн\ A}{м^2}$.

Т.к. Гн = Вб/А, а Вб = Тл·м^2, то получим:

$$[B]=\frac{Вб\cdot A}{A\cdot м^2}=\frac{Вб}{м^2}=\frac{Тл\cdot м^2}{м^2}=Тл$$

Подставим числовые данные ($\varphi = 60^0 = \pi/3$ рад)

$$B_0 = \frac{4\pi\cdot10^{-7}}{4\pi\cdot0{,}1\sin30^o}\sqrt{4\cdot900+2500\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 30^o}}+\cos30^o+\frac{\pi}{3}\sin30^o\right)^2} =$$

$$= \frac{10^{-7}}{0{,}05}\sqrt{3{,}6\cdot10^3+2{,}5\cdot10^3\cdot5{,}2} = 2{,}6\cdot10^{-4}\quad \text{Тл} \qquad (1.42)$$

2. Модуль вектора H равен (уравнение (1.4): $H = B/\mu_0\mu$. (1.43)
В пункте 1 нашли индукцию B_0 в вакууме. Для вакуума $\mu = 1$. Следовательно, из уравнения (1.43), получим:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0};\qquad H = \frac{2{,}6\cdot10^{-4}}{4\pi\cdot10^{-7}} = 2{,}1\cdot10^2\ \text{А/м} \qquad (1.44)$$

3. Напряженность магнитного поля не зависит от магнитных свойств среды и одинакова в магнитной среде и в вакууме. Зная напряженность магнитного поля в вакууме (а значит, и в магнитной среде), найдем по графику рис.27 магнитную индукцию в среде:

$$B(210) = 0{,}54\ \text{Тл}.$$

4. Магнитная индукция в среде B и в вакууме B_0 связаны соотношением (уравнение (1.31)):

$$B = B_0\mu;\quad \mu = B/B_0 = 0{,}54/(2{,}6\cdot10^{-4}) = 2{,}1\cdot10^3.$$

5. Магнитная проницаемость μ равна (уравнение (1.7)):

$$\mu = 1 + \chi;\qquad \chi = \mu - 1 = 2100 - 1 \approx 2{,}1\cdot10^3.$$

6. Намагниченность J и напряженность магнитного поля H связаны соотношением:

$$J = \chi H;\qquad J = 2{,}1\cdot10^3\cdot210 = 4{,}4\cdot10^5\ \text{А/м}.$$

2. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ КОАКСИАЛЬНЫХ* ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ

2.1. **Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля**; циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов, охватываемых этим контуром

$$\oint\limits_{l} H_l dl = \sum I_i \qquad (2.1)$$

где $d\vec{\ell}$ - вектор перемещения, взятый на контуре ℓ, H_ℓ - проекция вектора $\vec{H}$ на перемещение $d\vec{\ell}$; $\sum I_i$ - алгебраическая сумма токов, расположенных внутри замкнутого контура ℓ.

2.2. Система коаксиальных цилиндриче ских проводников создает магнитное поле, линии напряженности которого имеют вид окружностей. Центр окружностей расположен на оси проводников (аналогично полю бесконечно длинного проводника, см.раздел 1, рис.1.1). Направление вектора $\vec{H}$ определяется так же, как для бесконечно длинного проводника.

2.3. Поток вектора напряженности Φ_H через площадку S равен:

$$\Phi_H = \int\limits_S H_n \, dS , \qquad (2.2)$$

где H_n - проекция вектора $\vec{H}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1. По тонкому длинному цилиндрическому проводнику радиуса $r = 0{,}10$ м течет ток $I_1 = 1$А (рис.2.1). Ось второго цилиндрического проводника совпадает с осью первого. Внутренний диаметр этого проводника $R_1 = 0{,}20$ м, внешний $R_2 = 0{,}40$ м. Ток, протекающий по этому проводнику $I_2 = 4$ А, противоположен току I_1. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора напряженности $\vec{H}$, найти: 1) напряженность магнитного поля на расстояниях
$x_1 = 0{,}05$ м, $x_2 = 0{,}15$ м, $x_3 = 0{,}30$ м; 2) расстояния x_0 от оси, в которых вектор $\vec{H}_0$ равен нулю; 3) поток вектора напряженности через внешнюю площадку S (см.рис.2.1., в = 0,20 м, h = 0,10 м).

---

* имеющих общую ось.

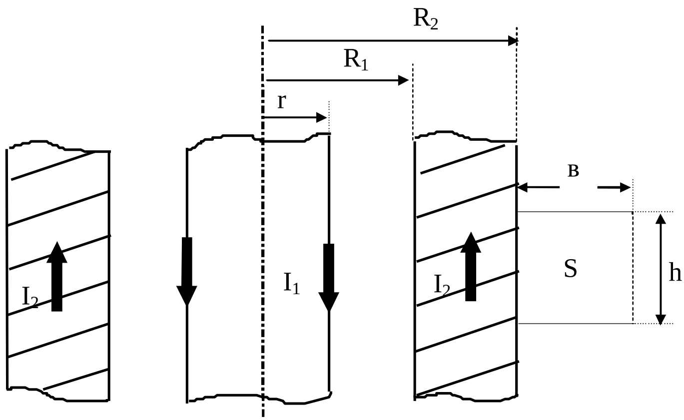


рис.2.1

РЕШЕНИЕ

Дано: r = 0,10, R_1 = 0,20 м R_2 = 0,40 м I_1 = 1А, I_2 = 4 А, x_1 = 0,05 м, x_2 = 0,15 м, x_3 = 0,30 м, H_0 = 0, h = 0,10 м, в = 0,20 м $H, H_2, X_0, Ф_H$ -?	1.а. Линии напряженности магнитного системы коаксиальных бесконечно длинных проводников имеют вид концентрических окружностей (т.к. по условию проводники длинные, то их можно рассматривать как бесконечные). Будем считать положительным ток, направленный “вниз” (рис.2.2, ток I_1). По правилу правого винта для прямого тока находим направление линии напряженности, создаваемой током, идущим “вниз” (см.раздел 1). Эта линия “направлена” по “часовой стрелке” (рис.2.2). Вектор перемещения $d\vec{\ell}$, будем брать в направлении линии напряженности (рис.2.2, перемещение $d\vec{\ell}$ на окружности радиуса X_1).

1.б. Для определения напряженности на расстоянии X_1 выбираем контур ℓ в виде окружности радиуса X_1 (рис.2.2). В любой точке этой окружности напряженность H_1 одинакова по величине и направлена по касательной к этой окружности(см.раздел 1). Применим **теорему о циркуляции вектора напряженности**: циркуляция вектора напряженности по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов, охватываемых эти контуром.

$$\oint_{\ell} H_{\ell} d\ell = \sum I_i \qquad (2.3)$$

где $d\vec{\ell}$ - вектор перемещения на контуре ℓ, H_{ℓ} - проекция вектора $\vec{H}$ на перемещение $d\vec{\ell}$; $\sum I_i$ - сумма токов, протекающих внутри контура.

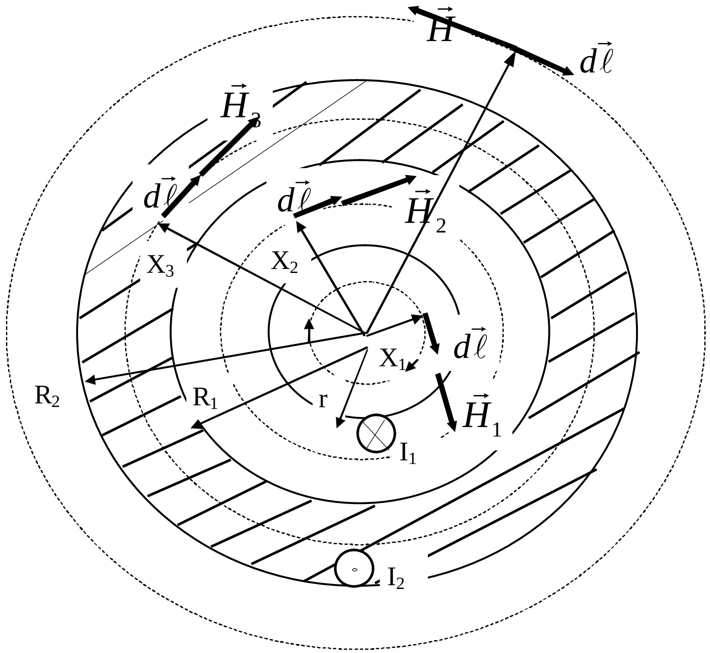


рис.2.2

Выбираем некоторое перемещение $d\vec{\ell}$ на окружности радиуса X_1 (рис.2.2). Вектор $\vec{H}_1$ в той точке, для которой взято перемещение $d\vec{\ell}$ направлен параллельно $d\vec{\ell}$ (вектор $\vec{H}$ направлен по касательной к линии напряженности, а следовательно, к окружности радиуса X_1.

$$H_{\ell} = H_1 d\ell \cos\alpha,$$

где α - угол между вектором $\vec{H}_1$ и перемещением $d\vec{\ell}$. В данном случае $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

$$H_{\ell} = H_1 d\ell \qquad (2.4)$$

Следовательно

$$\oint H_\ell d\ell = \oint H_1 d\ell = H_1 \oint d\ell \quad (2.5)$$

(Величину H_1 можно вынести за знак интеграла, т.к. H_1 одинакова для любой точки рассматриваемого контура).

Так как
$$\oint d\ell = \ell = 2\pi X_1\,, \quad (2.6)$$

то из уравнений (2.5) и (2.6), получаем:

$$\oint_\ell H_\ell d\ell = H_1 2\pi X_1 \quad (2.7)$$

Внутри окружности радиуса X_1 нет токов. Следовательно, для этого контура

$$\sum I_i = 0 \quad (2.8)$$

Подставим уравнения (2.7) и (2.8) в теорему о циркуляции (2.3):

$$H_1 2\pi X_1 = 0\,; \qquad H_1 = 0 \quad (2.9)$$

2. Для определения напряженности в точке X_2 выбираем контур ℓ в виде окружности радиуса X_2 (рис.2.2). Применяем теорему о циркуляции (2.3):

$$\oint_\ell H_\ell d\ell = \oint H_2 d\ell \cos\alpha = \oint H_2 d\ell \cos 0$$

$$\oint_\ell H_\ell d\ell = H_2 2\pi X_2 \quad (2.10)$$

Внутри окружности радиуса X_2 протекает только ток I_1:

$$\sum I_i = I_1 \quad (2.11)$$

Подставляем уравнения (2.10) и (2.11) в теорему о циркуляции (2.3):

$$H_2 2\pi X_2 = I_1$$

$$H_2 = I_1 / 2\pi X_2$$

Подставим числовые данные:

$$H_2 = 1/2\pi 0{,}15 = 1{,}1 \text{ А/м}$$

Для определения напряженности в точке X_3 выбираем контур ℓ в виде окружности радиуса X_3 (рис.2.2) и применяем теорему о циркуляции.

$$\oint_\ell H_\ell d\ell = \oint H_3 d\ell \cos 0 = H_3 2\pi X_3 \quad (2.12)$$

Внутри этого контура идет ток I_1 и еще та часть тока I_2, которая протекает через сечение этого проводника, заключенного между окружностями радиуса X_3 и R_1. Обозначим эту часть тока I' :

$$\sum I_i = I_1 - I' \quad (2.12)$$

В уравнении I' взят со знаком “–”, т.к. за положительный ток принят ток, направленный “вниз” (см.пункт 1.а).

Для определения величины тока I' найдем плотность тока, текущего через поперечное сечение второго проводника:

$$J = I_2/S \qquad (2.13)$$

где S - площадь сечения второго проводника, J - плотность тока. Площадь S - это площадь, заключенная между окружностями с радиусами R_2 и R_1. Ее можно найти как разность площади круга радиуса R_2 и площади круга радиуса R_1:

$$J = \frac{I_2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = \frac{I_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \qquad (2.14)$$

Ток I' равен: $I' = JS'$, (2.15)

где S' - часть площади сечения второго проводника, заключенная между окружностями с радиусами X_3 и R_1

$$I' = J(\pi X_3^2 - \pi R_1^2 = J\pi(X_3^2 - R_1^2) \qquad (2.16)$$

Подставим в уравнение (2.16) плотность тока из уравнения (2.14):

$$I' = I_2 \frac{X_3^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Сумма токов (уравнение (2.12)) равна:

$$\sum I_i = I_1 - I_2 \frac{X_3^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad (2.17)$$

Подставляем уравнения (2.12) и (2.17) в теорему о циркуляции:

$$H_3 2\pi X_3 = I_1 - I_2 \frac{X_3^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad H_3 = \frac{1}{2\pi X_3}(I_1 - I_2 \frac{X_3^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}) \qquad (2.18)$$

Подставим числовые данные:

$$H_3 = \frac{1}{2\pi 0{,}3}(1 - 4\frac{9-4}{16-4}) = -0{,}35 \text{ А/м}. \qquad (2.19)$$

Знак “–” в уравнении (2.19) указывает на то, что вектор $\vec{H}_3$ направлен противоположно тому направлению, которое показано на рис.2.2.

3. Для определения точки X_0 (точка, в которой $H_0 = 0$) выбираем некоторую окружность радиуса X_0, расположенную внутри второго проводника. Повторяя все операции, которые выполнялись для определения величины H_3, получим уравнение аналогичное уравнению (2.18), в котором H_3 надо заменить на H_0, X_3 – на X_0:

$$H_0 2\pi X_0 = I_1 - I_2 \frac{X_0^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad (2.20)$$

Так как по условию $H_0 = 0$, то из (2.20) следует:

$$I_1 = I_2\frac{X_0^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2};\ X_0^2 - R_1^2 = \frac{I_1}{I_2}(R_2^2 - R_1^2)\ ,\ X_0 = \sqrt{R_1^2 + \frac{I_1}{I_2}(R_2^2 - R_1^2)}\ (2.21)$$

Подставим числовые данные:

$$X_0 = \sqrt{0.04 + \frac{1}{4}(0{,}16 - 0{,}04)} = 0{,}26\ \text{м}.$$

4. Для определения потока вектора напряженности Φ_H через площадку S найдем напряженность $\vec{H}$ для расстояний $X \geq R_2$. Выбираем контур в виде окружности радиуса X и считаем, что вектор $\vec{H}$ противоположен перемещению $d\vec{\ell}$ (рис.2.2). Применим теорему о циркуляции.

$$\oint H_\ell d\ell = \oint H d\ell\, cos180 = -H\, 2\pi X$$

Внутри этого контура протекают токи I_1 и I_2:

$$\sum I_i = I_1 - I_2$$

Получаем: $-H2\pi X = I_1 - I_2$

$$H = (I_1 - I_2)/2\pi X \qquad (2.22)$$

Поскольку $I_2 > I_1$, то $H > 0$, следовательно, вектор $\vec{H}$ направлен так, как показано на рис.2.2. Найдем поток через площадку S:

$$\Phi_H = \int_S H_n dS \qquad (2.23)$$

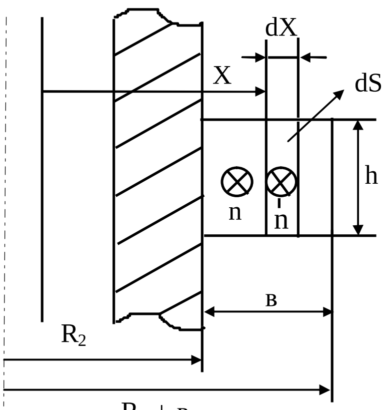


рис.2.3

где Hn - проекция вектора $\vec{H}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS. В качестве площадки dS выбираем полосу шириной dX, расположенную на расстоянии X от оси проводников (рис.2.3). Вектор $\vec{H}$ в любой точке этой площадки имеет одно и тоже значение (уравнение (2.22) и перпендикулярен к площадке dS (рис.2.2). Нормаль к площадке - это единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к площадке. В данном случае угол между вектором $\vec{H}$ и нормалью $\vec{n}$ равен 0:

$$Hn = H\cos\alpha,$$

где α - угол между вектором $\vec{H}$ и нормалью $\vec{n}$. Т.к. $\alpha = 0$, то получим:

$$H_n = H;\ dS = dX \cdot h;$$

$$H_n \cdot dS = H \cdot h \cdot dX \qquad (2.24)$$

Подставим уравнение (2.24) в уравнение (2.23):

$$Ф_H = \int_S H_n dS = \int_S H \cdot h dX$$

Подставим в эту формулу выражение для H из уравнения (2.22):

$$Ф_H = \int_S \frac{I_2 - I_1}{2\pi X} h dX \qquad (2.25)$$

Для того, чтобы найти поток через всю площадку S, надо проинтегрировать уравнение (2.25) в пределах изменения X от R_2 до R_2 + в (рис.2.3):

$$Ф_H = \int_{R_2}^{R_2+в} \frac{I_2 - I_1}{2\pi X} h dX = \frac{I_2 - I_1}{2\pi} h \int_{R_2}^{R_2+в} \frac{dX}{X} = \frac{I_2 - I_1}{2\pi} h \ln X \Big|_{R_2}^{R_2+в}$$

$$Ф_H = \frac{I_2 - I_1}{2\pi} h \ln \frac{R_2 + в}{R_2} \qquad (2.26)$$

Подставим числовые данные:

$$Ф_H = \frac{4-1}{2\pi} 0{,}1 \ell n \frac{0{,}4 + 0{,}1}{0{,}4} = 0{,}048 \ell n 1{,}25 = 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ А·м}$$

3.РАМКА (ПРОВОДНИК) С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Основные формулы

3.1. $\mathbf{\Phi = Bs\cos\alpha}$,

Ф - магнитный поток через плоский контур площадью S;

В - магнитная индукция однородного поля;

α - угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура.

3.2. $\mathbf{d\Phi = B\ell dx\cos\alpha}$,

dФ - изменение потока вектора магнитной индукции $\vec{B}$ за время dt;

dx - смещение проводника длиной ℓ при его поступательном движении;

α - угол между вектором $\vec{B}$ и вектором $\vec{I}$, равным по модулю длине проводника ℓ и совпадающий по направлению тока в этом проводнике.

3.3 $\mathcal{E}_i = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d\Psi}{dt}$ - основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея),

$\mathcal{E}_i$ - э.д.с. индукции; N - число витков контура (рамки); Ψ - потокосцепление.

3.4. $\mathbf{\mathcal{E}_i = BNS\omega\sin\omega t}$,

$\mathcal{E}_i$ - э.д.с. индукции, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью в однородном магнитном поле с индукцией В;

ωt - мгновенное значение угла между вектором В и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки.

3.5. $\mathbf{P_m = NIS}$,

P_m - магнитный момент контура площадью S с током I;

N - число витков.

3.6. $\mathbf{P = A/t}$,

Р - мощность, выделяющаяся в контуре (рамке).

3.7. $\mathbf{A = Q = I_i^2 Rt = I_i \mathcal{E}_i t}$ - закон Джоуля-Ленца,

А - работа, совершаемая полем в проводнике за времяt;

I_i - индукционный ток в рамке (проводнике);

R - сопротивление рамки;

$\mathcal{E}_i$ - э.д.с. индукции.

3.8. $\mathbf{B = \mu_0 I/2\pi x}$,

В - индукция магнитного поля, созданного прямым током I;

x - расстояние от проводника до точки.

3.9. **$F = BI\ell\sin\alpha$** - закон Ампера,

F - сила, действующая на проводник с током I в магнитном поле индукции B;

ℓ - длина проводника;

α - угол между векторами $\vec{I}$ и $\vec{B}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1. Проволочная рамка, состоящая из N = 100 витков провода, начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 1\ c^{-2}$ в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл (рис.3.1). Ось вращения рамки перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки S = 20 $см^2$. Сопротивление одного витка R = 0,01 Ом.

1. По какому закону изменяется э.д.с. индукции в рамке $\mathcal{E}_i$ (построить график этой зависимости).

2. Найти: а) мгновенное значение э.д.с. $\mathcal{E}_i$,
   б) магнитный момент P_m,
   в) мощность P, выделяющуюся в рамке через 1 с после начала вращения.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

N = 100

$\varepsilon = 1\ c^{-2}$

B = 0,2 Тл

$S = 20\ см^2 = 2\cdot10^{-3}\ м^2$

R = 0,01 Ом

t = 1 с

$\mathcal{E}_i$ (t), $\mathcal{E}_i$ мгн, P_m,P - ?

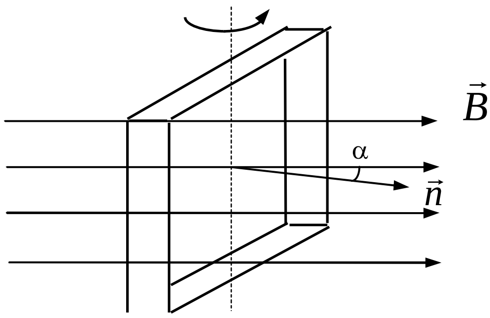


рис.3.1

1. Зависимость $\mathcal{E}_i$ от времени найдем с помощью закона Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} \qquad (1),$$

где $\Psi = N\Phi$ (2) - потокосцепление; N - число витков, пронизываемых магнитным потокм Ф, который изменяется с течением времени t по закону:

$$\Phi = BS\cos\omega t \ (3),$$

где B - магнитная индукция, S - площадь рамки, ω - угловая скорость, которая связана с угловым ускорением: $\omega = \varepsilon t$ (4).
Решим уравнение (4) с учетом уравнений (2),(3):

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega\sin\omega t = NBS\varepsilon t\sin(\varepsilon t^2) \qquad (5)$$

Графически эта зависимость:

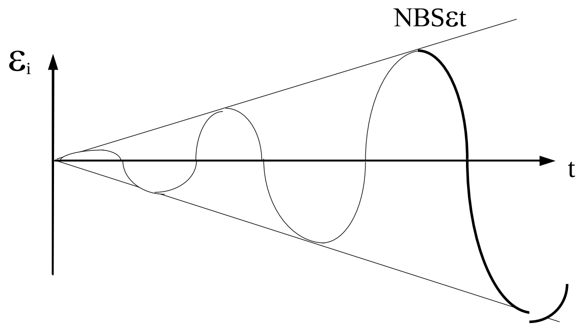


рис.3.2

2. а) мгновенное значение э.д.с. $\mathcal{E}_i$ через 1 с после начала вращения определим по уравнению (5):

$$\mathcal{E}_i = NBS\varepsilon t\sin(\varepsilon t^2) = 100\cdot 0{,}2\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(1\text{рад}) = 0{,}4\cdot 10^{-1}\cdot \sin 57^o 18' =$$

$$= 4\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}84 \approx 0{,}0336 \quad (В)$$

б) магнитный момент P_m через t = 1 с после начала вращения:

$$P_m = NI_iS \ (6) \text{ - это для N витков.}$$

По закону Ома найдем индукционный ток: $I_i = \mathcal{E}_i/NR$ (7).
Подставив уравнение (7) в уравнение (6), получим:

$$P_m = \mathcal{E}_i S/R \quad (8)$$

В уравнении (8) $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i$ мгн (для t = 1 с). Решаем уравнение (8):

$$P_m = \frac{0{,}034\cdot 2\cdot 10^{-3}}{0{,}01} = 6{,}8\cdot 10^{-3} \ \text{А}\cdot\text{м}^2$$

в) т.к. при вращении рамки в магнитном поле в рамке образуется индукционный ток, то его мощность можно посчитать по закону Джоуля-Ленца за время t = 1 с:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q}{t} = I_i^2 R = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R}.$$

Для N витков: $P = \frac{\mathcal{E}_i^2}{NR} = \frac{(0{,}034)^2}{100 \cdot 0{,}01} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$ (Вт).

Задача 3.2. Квадратная рамка со стороной а = 0,30 см и сопротивлением R = 0,050 Ом находится в магнитном поле, созданным длинным проводником с током I = 10 А. Проводник и рамка находятся в одной плоскости (рис.3.3). Рамку поступательно перемещают вправо со скоростью v = 2,0 м/с. Когда рамка находится на расстоянии в = 30 см от проводника, определить:

1. Э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ рамки;
2. Величину и направление индукционного тока I_i в рамке;
3. Магнитный момент P_m рамки;
4. Мощность P, выделяющуюся в рамке.

Поле внутри рамки, ввиду ее малых размеров, считать однородным.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

а = 0,30 см = 0,0030 м
I = 10 А
R = 0,050 Ом
v = 2,0 м/с
в = 30 см = 0,3 м

$\mathcal{E}_i$, I_i, P_m, P - ?

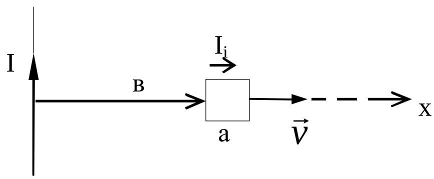


рис.3.3

1. Основной закон электромагнитной индукции: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ (1),

где dΦ = SdB (2) (по условию задачи рамка и проводник с током лежат в одной плоскости). Т.к. площадь рамки $S = a^2$, то $d\Phi = a^2 dB$ (3). Индукция магнитного поля, созданного прямым током равна $B = \mu_0 I / 2\pi x$ (4), x - расстояние от проводника до точки.

Продифференцируем уравнение (4):

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (5), \text{ (т.к. } (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2})$$

С учетом уравнений (3) и (5) и при x = в, уравнение (1) примет вид:

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 a^2 I}{2\pi в^2}\frac{dx}{dt}\ (6),\ \text{т.к.}\ v = \frac{dx}{dt},\ \text{то}$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\cdot\left(\frac{a}{в}\right)^2 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot 2}{2\pi}\cdot\left(\frac{0{,}003}{0{,}3}\right)^2 = 40\cdot 10^{-7}\cdot(10^{-2})^2 = 4\cdot 10^{-10}В$$

2. Индукционный ток определяем по закону Ома:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{4\cdot 10^{-10}}{0{,}05} = 8\cdot 10^{-9}А$$

Направление индукционного тока определяется по правилу Ленца - по часовой стрелке.

3. Магнитный момент рамки:

$$P_m = I_i S = I_i\cdot a^2 = 8\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^{-6} = 72\cdot 10^{-15}\ А\cdot м^2$$

4. Мощность, выделяющаяся в рамке:

$$P = \mathcal{E}_i\, I_i = 4\cdot 10^{-8}\cdot 8\cdot 10^{-9} = 3{,}2\cdot 10^{-18}\ Вт.$$

<u>Задача 3.3.</u> Медный проводник длиной ℓ = 20 см и площадью поперечного сечения S = 0,8 мм^2 движется в однородном магнитном поле с индукцией B = 10 мТл со скоростью v = 1,0 м/с под углом α = 30^0 к вектору магнитной индукции (рис.3.4.).

1. Найти э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ в проводнике.
2. В каком направлении потечет индукционный ток, если концы проводника замкнуть между собой за пределами магнитного поля?
3. Определить силу F, действующую на проводник со стороны магнитного поля.
4. Какое количество тепла Q выделяется в проводнике за промежуток времени Δt = 3,0 с?
5. При каком угле α э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ будет максимальной?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
ℓ = 20 см = 0,2 м
S = 0,8 мм^2 = 0,8$\cdot$10^{-6} м^2
B = 10 мТл= 10$\cdot$10^{-3} Тл
v = 1,0 м/с
α = 30^0
Δt = 3,0 с

$\mathcal{E}_i$, F, Q, α - ?

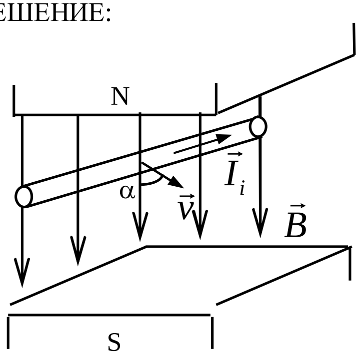


рис.3.4.

1. При движении проводника изменяется магнитное поле, пронизывающее проводник и в нем возникает э.д.с. индукции:

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ (1), где dΦ - изменение потока вектора магнитной индукции за время dt.

При поступательном движении проводника на какое-то расстояние dx будем иметь:

$$d\Phi = B\ell dx\cos\alpha \quad (2)$$

Подставим уравнение (2) в уравнение (1):

$$\varepsilon_i = -\frac{Bl\cdot\cos\alpha\cdot dx}{dt}, \text{ где } \frac{dx}{dt} = v, \text{ тогда } \varepsilon_i = -B\ell v\cos\alpha \quad (3)$$

$$\varepsilon_i = -10\cdot10^{-3}\cdot0{,}2\cdot1\cdot0{,}87 = -1{,}7\cdot10^{-3}\text{ В.}$$

2. Так как проводник замкнут за пределами магнитного поля, то по нему течет индукционный ток, магнитное поле которого препятствует изменению внешнего магнитного поля (по правилу Ленца), т.е. эти поля противонаправлены. По правилу буравчика индукционный ток направлен как указано на рис.3.4.

3. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле по закону Ампера равна:

$$F = IB\ell\sin\alpha \ (4), \text{ где } \alpha = [\vec{I}\wedge\vec{B}] = [\vec{\ell}\wedge\vec{B}] = 90^0.$$

По закону Ома: $I_i = \varepsilon_i / R$ (5),

где R - сопротивление однородного проводника, $R = \rho\frac{l}{S}$ (6), где ρ - удельное сопротивление вещества проводника (для меди ρ = $8{,}93\cdot10^3$ кг/м^3).

Подставим уравнения (5) и (6) в уравнение (4):

$$F = \frac{\varepsilon_i SB\sin\alpha}{\rho} = \frac{1{,}7\cdot10^{-3}\cdot0{,}8\cdot10^{-6}\cdot10^{-2}}{8{,}93\cdot10^3} = 0{,}16\cdot10^{-14}\text{ Н}$$

$$F = 1{,}6\cdot10^{-15}\text{ Н} = 1{,}6\text{ фН.}$$

4. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике за время Δt:

$$Q = A = I\Delta\Phi \quad (7)$$

Т.к. $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, то $Q = I\varepsilon_i\,\Delta t$, с учетом формул (5) и (6), получим:

$$Q = \frac{\varepsilon_i^2 S}{\rho l}\Delta t = \frac{(1{,}7\cdot10^{-3})^2\cdot0{,}8\cdot10^{-6}}{0{,}2\cdot8{,}93\cdot10^3} = 1{,}35\cdot10^{-15}\text{ Дж} = 1{,}37\text{ фДж.}$$

5. Так как $\varepsilon_i = -B\ell v\cos\alpha$, то ε_i max при cosα = -1, α = 180^0.

4. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА

Сила Ампера

Сила, действующая на элемент длины проводника с током I, помещенного в магнитное поле, называется силой Ампера.

4.1. Сила Ампера в векторной форме:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}\vec{B}\right], \quad (4.1)$$

где $d\vec{\ell}$ - вектор элемента длины проводника, проведенный по направлению тока; $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции.

4.2. Сила Ампера в скалярном виде:

$$dF = Id\ell B\sin\alpha, \quad (4.2)$$

где α - угол между векторами $d\vec{\ell}$ и $\vec{B}$.

4.3. Если угол α и $\vec{B}$ вектор магнитной индукции не изменяются, то силу Ампера можно записать так:

$$\vec{F} = I\left[\vec{\ell}\vec{B}\right] \quad (4.3).$$

4. 4. В скалярном виде: $F = I\ell B\sin\alpha$. (4.4)

Сила Лоренца

4.5. На электрический заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца.

$$\vec{F} = Q\left[\vec{v}\vec{B}\right] \quad (4.5)$$

4.6. В скалярном виде: $F = QvB\sin\alpha$, (4.6)

где Q - заряд частицы; v - скорость частицы; B - вектор магнитной индукции; α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1. Рядом с длинным прямым проводником, по которому течет ток I_1 = 100 А, расположена квадратная рамка со стороной a = 10 см. По ней идет ток I_2 = 100 А. Рамка лежит в одной плоскости с проводником. Расстояние от длинного проводника до ближайшей стороны рамки ℓ = 10 см. Определить:

1. Силу $\vec{F}$, действующую на рамку в начальном положении;
2. Работу А этой силы при удалении рамки из магнитного поля.

При движении рамки токи поддерживаются постоянными.

РЕШЕНИЕ:

Дано:

$I_1 = 100 А$
$I_2 = 100$ А
$a = 10$ см $= 0{,}1$ м
$\ell = 10$ см $= 0{,}1$ м

$\vec{F}$, А - ?

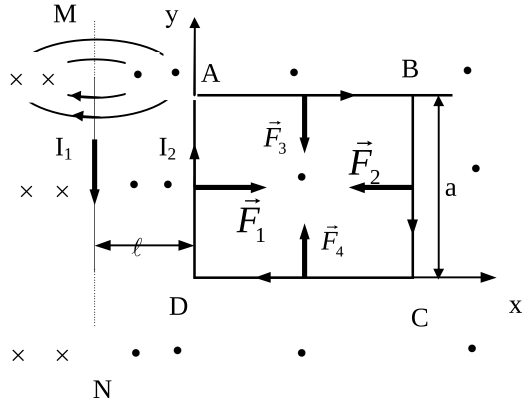


рис.4.1.

1. Рамка ABCD, по которой идет ток I_2, находится в магнитном поле, создаваемом бесконечно длинным проводником с током I_1, Следовательно, на рамку действует сила Ампера.

Магнитное поле прямого проводника неоднородно, поэтому воспользуемся формулой из п.4.1.

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell}\vec{B}\right]$$

Направление силы Ампера определяется по правилу векторного произведения или правилу “левой руки”. Леву руку расположим так, чтобы четыре вытянутых пальца были направлены по току, а линии вектора магнитной индукции входили в ладонь, тогда отогнутый на 90^0 “большой” палец укажет направление силы Ампера.

Для определения направления и величины силы Ампера, надо знать направление и величину вектора магнитной индукции $\vec{B}$ поля, создаваемого током, идущим по бесконечно длинному проводнику MN.

Вектор магнитной индукции определяется по закону Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{I}{r^3}[\,d\vec{\ell}\vec{r}\,]\cdot$$

Линии магнитной индукции направлены перпендикулярно плоскости, проходящей через элемент $d\vec{\ell}$ и точку, к которой проведен радиус-вектор $\bar{r}$. Направление $\vec{B}$ определим по правилу “правого винта” (правило “буравчика”).

Линии магнитной индукции прямого проводника представляют собой концентрические окружности. В области, где лежит рамка, они направлены к нам и обозначены точками. В области слева от проводника они направлены от нас, перпендикулярно рисунку, и обозначены крестиками.

Найдем равнодействующую сил, действующих на рамку.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i; \qquad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \cdot$$

В проекциях на ось ОХ:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x};\ \ F_{1x} = F_1;\ \ F_{2x} = -F_2.$$

В проекциях на ось ОУ:

$$F_y = F_{4y} + F_{3y};\ \ F_{4y} = F_4;\ \ F_{3y} = -F_3.$$

По проводникам АВ и DC идут равные токи, противоположных направлений. Они равны по длине и симметрично расположены. Следовательно, силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ равны по модулю и противоположнонаправлены. В сумме они дадут ноль. Тогда равнодействующая равна:

$$F = F_1 - F_2 \qquad (4.7)$$

Сила Ампера $dF = Id\ell B\sin\alpha$. В данной задаче $\alpha = 90^0$, $\sin\alpha = 1$, тогда: $dF = Id\ell B$ (4.8)

Из закона Био-Савара-Лапласа индукция поля бесконечно длинного проводника с током в вакууме определяется формулой:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{x} \quad (4.9);$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x_1}; \ B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{x_2}$$

где x - расстояние от проводника до точки, где определяется индукция.

Для силы F_1; $x_1 = \ell$. Для силы F_2; $x_2 = \ell + a$.

Тогда из (4.4)

$$F_1 = I_2 \cdot a \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{\ell} \cdot a \qquad (4.10)$$

$$F_2 = I_2 \cdot a \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{\ell + a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{\ell + a} \cdot a \qquad (4.11)$$

Подставим формулы (4.8) и (4.9) в (4.7):

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{\ell} \cdot a - \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{\ell + a} \cdot a$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 I_2 \cdot a(1 - \frac{1}{\ell + a}) \qquad (4.12)$$

По условию задачи в начальном положении ℓ = a.

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 \cdot a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right); \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I_1 I_2, \text{ но } I_1 = I_2, \text{ тогда } F = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I_1^2$$

Подставим значения величин. Учтем, что $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$$F = 10^{-7}\ \text{Гн/м}\cdot 10^4\ \text{А} = 1\cdot 10^{-3}\ \text{Н};\ F = 1\ \text{мН}.$$

2. Механическая работа: $dA = (\vec{F}\ d\vec{r})$.

В скалярном виде: $dA = Fdr\cos(\vec{F}\wedge d\vec{r})$,

где $d\vec{r}$ - перемещение; $(\vec{F}\wedge d\vec{r})$ - угол между вектором силы $\vec{F}$ и вектором перемещения $d\vec{r}$.

В данной задаче перемещение идет вдоль оси OX, угол между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ равен нулю, $\cos(\vec{F}\wedge d\vec{r}) = 1$, $|d\vec{r}| = dx$.

Тогда $dA = Fdx$.

$$A = \sum_{x}^{\infty} F\,dx.$$

Учитывая формулы (4.9) и (4.4), имеем:

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 a\left[\int_{x_1}^{\infty}\frac{dx}{x} - \int_{x_2}^{\infty}\frac{dx}{x}\right]$$

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 a\left[\ln x\Big|_{x_1}^{\infty} - \ln x\Big|_{x_{2q}}^{\infty}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 a\left[(\ln\infty - \ln x_1) - (\ln\infty - \ln x_2)\right]$$

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 a\left[(\ln x_2 - \ln x_1)\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2\cdot \ln\frac{x_2}{x_1}$$

Но $x_2 = \ell + a$, $x_1 = \ell$.

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 a\cdot \ell n\frac{\ell + a}{\ell} \qquad (4.13)$$

Учтем, что по условию данной задачи ℓ = a, $I_1 = I_2$.

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1^2 a\cdot \ell n\frac{\ell+\ell}{\ell}; \qquad A = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 a\cdot \ell n2$$

Подставим значения:

$$A = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\cdot 100\cdot 0{,}1\cdot \ln 2 = 2\cdot 10^{-6}\cdot \ln 2 = 1{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Проверим размерность:

$$[A] = [(\text{Гн/м})\cdot \text{А}^2\cdot \text{м}] = [\text{Гн}\cdot \text{А}^2] = \left[\frac{\text{кг}\cdot \text{м}^2\cdot \text{м}^2}{\text{с}^2\cdot \text{А}^2}\cdot \text{А}^2\right] = \left[\frac{\text{кг}\cdot \text{м}^2\ \text{м}^2}{\text{с}^2}\right] = [\text{Дж}].$$

$A = 1{,}4$ мкДж.

Работу поля по перемещению контура можно определить и по формуле работы магнитного поля: $\mathbf{A = I\Delta\Phi}$, Ф - поток магнитной индукции в бесконечности будет равен нулю, т.к. индукция $B_\infty = 0$.

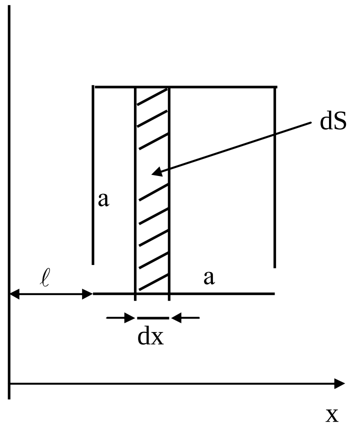


рис.4.2.

$$dA = I_2 d\Phi_1$$

$$d\Phi = B_n dS = B_n \cdot a \cdot dx,$$

где B_n - проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали $\vec{n}$ ($\vec{B} \| \vec{n}$). $B_n = B$.

$$A = I_2 \int_{x_1}^{x_2} B \cdot a \cdot dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}$$

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln \frac{x_2}{x_1}$$

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ell n \frac{\ell + a}{\ell} \quad (4.14).$$

Формула (4.14) полностью совпадает с формулой (4.13)

<u>Задача 4.2.</u> Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 10$ кВ, влетает в магнитное поле напряженностью $H = 10$ кА/м так, что вектор скорости частицы и напряженности магнитного поля составляют угол $\pi/2$. Определить:

1. Период T вращения электрона. 2. Частоту ν. 3. Скорость v.

4. Радиус траектории R. 5. Силу силу эквивалентного тока $I_э$.

6. Магнитный момент P_m эквивалентного поля.

7. Момент импульса электрона L.

8. Отношение магнитного момента к моменту импульса (P_m/ L).

РЕШЕНИЕ:

Дано:

$H = 10$ кА/м $= 10 \cdot 10^3$ А/м

$U = 10$ кВ $= 10 \cdot 10^3$ В

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

T, ν, v, R, $I_э$, P_m, L, (P_m/ L) - ?

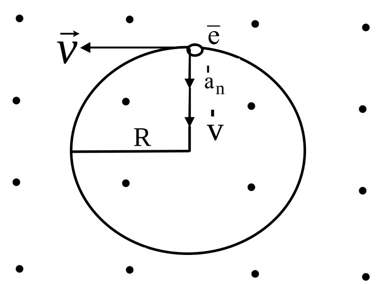


рис.4.3.

Направление силы Лоренца определяется правилами векторного произведения или по правилу “левой руки”. Левую руку распологаем так, чтобы линии индукции входили в ладонь, четыре вытянутых пальца были направлены по скорости движения положительной частицы, тогда, отогнутый на девяносто градусов большой палец, укажет направление силы Лоренца.В нашей задаче напряженность магнитного поля направлена к “нам”, четыре пальца направим против скорости электрона.

Из формулы видно, что сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно движению частицы, поэтому она не может изменить величину этой скорости (не совершается работа), а изменяет только направление движения частицы. Ускорение, создаваемое силой Лоренца, будет являться центростремительным.

$$\vec{F}_л = e\left[\vec{v}\vec{B}\right]$$

$$F_л = evB\sin\alpha$$

В данной задаче $\alpha = 90^0$, $\sin\alpha = 1$, тогда

$$F_л = evB \qquad (4.15)$$

Для вакуума $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, отсюда

$$F_л = ev\mu_0H$$

По второму закону Ньютона $F_л = ma_n = (mv^2)/R$, где a_n - нормальное ускорение. Поэтому можно записать:

$$ev\mu_0H = (mv^2)/R \quad => \quad e\mu_0H = m(v/R) \quad => \quad (v/R) = (e\mu_0H)/m \ (4.16)$$

1. Найдем период вращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Учитывая формулу (4.16), получим:

$$T = \frac{2\pi m}{e\mu_0 H};\ T = \frac{2\pi\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4} = 2{,}8\cdot 10^{-9}\text{с}.$$

2. $\nu = 1/T$, $\nu = 3{,}6\cdot 10^8$ Гц.

3. Теорема о кинетической энергии

$A = \Delta T$, где ΔT - изменение кинетической энергии.

Работу совершает электрическое поле, ускоряя электрон: $A = eU$.

$eU= \Delta T$, $eU= T - T_0$, где T_0 - начальное значение кинетической энергии электрона. Из условия задачи $T_0 = 0$.

$$eU = T = \frac{mv^2}{2} \ => \ v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} = 6\cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

4. $ev\mu_0 H = \frac{mv^2}{R}$; $\frac{mv^2}{2} = T$ => $mv^2 = 2T$; $ev\mu_0 H = \frac{2T}{R} = \frac{2eU}{R}$ => =>

$$R = \frac{2eU}{ev\mu_0 H} = \frac{2U}{v\mu_0 H}; \ R = \frac{2\cdot 10^4}{6\cdot 10^7 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^4} = 0{,}03 \text{ м.}$$

5. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$; $I = \frac{e}{t} = \frac{\mu_0 H e^2}{2\pi m}$; $I = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^4\cdot 1{,}6^2\cdot 10^{-28}}{2\pi\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}} 0{,}56$ А.

6. $\vec{P}_m = IS\vec{n}$; $P_m = IS$; $P_m = \frac{e}{T}\pi R^2$;

$$P_m = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{2{,}8\cdot 10^{-9}}\pi\cdot 9\cdot 10^{-14} = 16\cdot 10^{-14} \text{ А}\cdot\text{м}^2.$$

7. $\vec{L} = [\vec{p}\vec{\gamma}]$; $L = \rho\gamma\sin(\vec{p}\wedge\vec{\gamma})$; $\gamma\sin(\vec{p}\wedge\vec{\gamma}) = R$;

$L = pR = mvR$; $L = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 6\cdot 10^7\cdot 0{,}03 = 1{,}6\cdot 10^{-24}$ кг·м²/с.

8. $\frac{P_m}{L} = \frac{e\pi R^2}{TmvR} = \frac{e\pi R}{Tmv} = \frac{\mu_0 H e^2 R^2}{2me\mu_0 H R^2}\frac{e}{2m}$; $\frac{P_m}{L} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}} = 1\cdot 10^{-16}$

<u>Задача 4.3.</u> Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U = 1 кВ влетел в однородное магнитное поле с напряженностью H = 100 кА/м, под углом $\alpha = 60^0$ к линиям магнитной индукции. Определить:

1. Период T, частоту ν, угловую скорость ω;
2. Радиус R окружности;
3. Шаг h винтовой траектории электрона;
4. Момент импульса L относительно оси вращения;
5. Кинетическую энергию и долю этой энергии, приходящуюся на вращательное и поступательное движение.

РЕШЕНИЕ

Дано:

$U = 1$ кВ $= 1\cdot 10^3$ В
$H = 100$ кА/м $= 1\cdot 10^5$ А/м
$\alpha = 60^0$

1. T, ν, ω - ?
2. R - ? ; 3. h - ?; 4. L - ?
5. E - ?, $E_В/E$ - ?, $E_П/E$ - ?

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца - $\vec{F} = Q\left[\vec{v}\vec{B}\right]$. Из формулы видно, что сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, следовательно, меняет только направление движения частицы, а также перпендикулярна вектору магнитной индукции

Поэтому, частица в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, будет вращаться. Вектор скорости направлен поду углом ($\pi/2$ - α) к этой плоскости и будет иметь составляющую, параллельную линиям магнитной индукции. Эта составляющая скорости не будет изменяться, т.к. нет параллельной составляющей силы. Следовательно, в направлении линии магнитной индукуции частица будет двигаться поступательно.

Частица будет участвовать одновременно во вращательном и поступательном движении, т.е. траектория ее движения будет - винтовая линия.

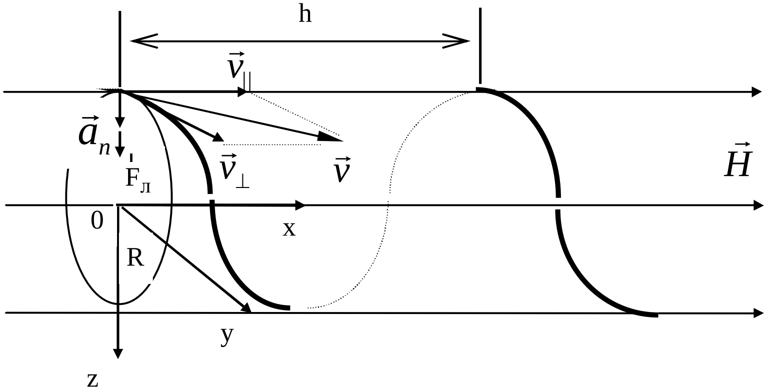


рис.4.4

Параллельная составляющая скорости $|\vec{v}_{||}|$ = v_x , а перпендикулярная составляющая скорости $|\vec{v}_\perp|$ = v_y. Из рис.4.4 $v_{||} = v\cdot\cos\alpha$, $v_\perp = v\cdot\sin\alpha$.

Сила Лоренца $F_л = QvB\sin\alpha$, $Q = e$, $F_л = evB\sin\alpha$, $F_л = ev_\perp$. Сила Лоренца центростремительная и по второму закону Ньютона $F_л = ma_n$, где a_n - нормальное ускорение.

$$eBv_\perp = \frac{mv_\perp^2}{R}; \quad \frac{eB}{m} = \frac{v_\perp}{R}\bigg|\cdot\frac{1}{2\pi}; \quad \frac{eB}{2\pi m} = \frac{v_\perp}{2\pi R} = \frac{1}{T} = \nu$$

1. $\nu = \dfrac{eB}{2\pi m}$; $B = \mu\mu_0 H$, для вакуума $\mu = 1$, тогда

$$\nu = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^{5}}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot2\pi} = \frac{3{,}2}{9{,}1}\cdot10^{10}\ (c^{-1}) = 0{,}33\cdot10^{10}\ Гц$$

$$T = 3\cdot10^{-10}\ c.$$

$$\omega = 2\pi\nu.$$

2. $\frac{eB}{m} = \frac{v_\perp}{R} = \frac{v \cdot \sin\alpha}{R}$; $R = \frac{mv \cdot \sin\alpha}{eB}$, mv = P - импульс электрона.

Связь импульса и энергии $P^2 = 2mE$.

Из теоремы о кинетической энергии $A = \Delta E$. A - работа ускоряющего поля: $A = eU$. $\Delta E = E - E_0$, E_0 - начальное значение кинетической энергии.

$$E_0 = 0;\ eU = E = P^2/2m. \Rightarrow P^2 = 2meU \Rightarrow P = \sqrt{2meU}.$$

$$R = \frac{\sqrt{2meU} \cdot \sin\alpha}{eB};\ R = \sqrt{\frac{2mU}{e}} \cdot \frac{\sin\alpha}{B};$$

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \cdot \frac{\sin 60^0}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5} = 7{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{м};$$

3. Шаг винтовой линии h - это путь, пройденный частицей вдоль оси X ($\parallel \vec{B}$) за время одного оборота, т.е. за период.

$h = v_x \cdot T = v_\parallel \cdot T$; $h = v \cdot \cos\alpha \cdot T$; $\frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, тогда $h = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \cos\alpha \cdot T$; $h = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0{,}33 \cdot 10^{10}} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ м.

4. $L = m v_\perp R = mRv \cdot \sin\alpha$; $L = mR\sqrt{\frac{2eU}{m}} \sin\alpha$; $L = \sqrt{2meU} \cdot R \cdot \sin\alpha$;

$$L = \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}87 = 4 \cdot 10^{-26}\ (\text{кг} \cdot \text{м}^2)/\text{с}.$$

5. $E = eU$;

$$E_п = \frac{mv_\parallel^2}{2};\ E_п = \frac{mv^2 \cos^2\alpha}{2} = E\cos^2\alpha;\ E_п/E = \cos^2\alpha;\ E_п/E = 0{,}25.$$

$$E_в = \frac{mv_\perp^2}{2};\ E_п = \frac{mv^2 \cdot \sin^2\alpha}{2} = E\sin^2\alpha;\ E_в/E = \sin^2\alpha;\ E_в/E = 0{,}75.$$

5. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

5.1. Магнитный поток через поверхность площадью S

$$\Phi = \int_S B_n dS ,$$

где Bn - проекция вектора магнитной индукции на нормаль к поверхности.

Если магнитное поле однородное, а поверхность плоская, то

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где B - индукция магнитного поля, S - площадь поверхности,

α - угол между направлением индукции магнитного поля и нормалью к поверхности.

5.2. Полный магнитный поток или потокосцепление $\psi = N\Phi$,

где N - число витков катушки, Φ - магнитный поток через площадь, охватываемую каждым витком.

5.3. Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея-Максвелла)

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} ,$$

где ε_i - ЭДС индукции, возникающая в контуре, dΦ - изменение магнитного потока, пронизывающего этот контур за время dt,

dψ - изменение потокосцепления за время dt, N - число витков катушки.

Если магнитный поток изменяется равномерно, то

$$\varepsilon_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

где ΔΦ - изменение магнитного потока за время Δt.

Если прямой проводник движется в однородном магнитном поле, то на концах проводника возникает разность потенциалов.

$$U = B\ell v\sin\alpha,$$

где B - индукции магнитного поля, ℓ - длина проводника, v - его скорость, α - угол между направлением скорости проводника и индукцией магнитного поля.

5.4. Индуктивность контура (катушки, соленоида и т.д.)

$$L = \psi/I,$$

где I - сила тока в контуре, ψ - полный магнитный поток (потокосцепление) контура с током.

5.5. Индуктивность соленоида (тороида).

$$L = \mu\mu_o n^2 V$$

где μ_o - магнитная постоянная, n -число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, V - объем соленоида, μ - магнитная проницаемость вещества сердечника соленоида (тороида)

5.6. ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt},$$

где L - индуктивность контура, dI - изменение силы тока в нем за время dt.

5.7. При отключении источника тока в цепи идет ток размыкания

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где I - сила тока в цепи через время t после отключения источника тока, I_0 - сила тока в катушке индуктивности до отключения источника тока (при t = 0), L - индуктивность катушки, R - общее сопротивление той части цепи, по которой идет ток после отключения источника тока.

5.8. Энергия магнитного поля контура с током

$$W = LI^2/2,$$

где L - индуктивность контура, I - сила тока в нем.

5.9. Объемная плотность энергии

$$\varpi = W/V,$$

где V - объем, энергия поля в котором равна W.

5.10. Объемная плотность энергии однородного магнитного поля

$$\varpi = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

где B индукции магнитного поля, H - его напряженность, μ - магнитная проницаемость вещества.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

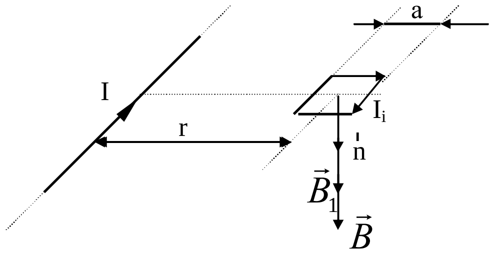
Задача 5.1. Квадратная рамка со стороной a = 1,0 см находится на расстоянии r = 50 см от бесконечно длинного проводника, ток в котором убывает по закону $I = I_0 - kt^2$, где $k = 1{,}0$ А/с^2, $I_0 = 7{,}0$ А. Проводник и рамка находятся в одной плоскости.

1. По какому закону изменяется ЭДС индукции, возникающая в рамке?
2. Найти эту ЭДС индукции ε_i через t = 2,0 с от начала изменения тока.
3. Показать направление индукционного тока в рамке.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$a = 1{,}0$ см $= 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м
$r = 50$ см $= 0{,}50$ м
$I = I_0 - kt^2$
$I_0 = 7{,}0$ А
$k = 1{,}0$ А/с^2
$t = 2{,}0$ с

1. $\Phi(t)$ - ? ; 2. ε_i - ?



1. Бесконечно длинный проводник с током создает магнитное поле, индукция которого находится по формуле:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Направление индукции $\vec{B}$ этого поля находим по правилу правого винта. В этом месте, где находится рамка, вектор $\vec{B}$ направлен вниз и совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к поверхности рамки.

Так как размеры рамки малы по сравнению с расстоянием от проводника до рамки, то индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в том месте, где находится рамка, можно считать постоянной.
Магнитный поток через площадь рамки

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где $S = a^2$ - площадь рамки, α - угол между направлением векторов $\vec{n}$ и $\vec{B}$. Т.к. эти векторы сонаправлены, то $\alpha = 0$, $\cos 0^\circ = 1$.

$$\boldsymbol{\Phi = BS} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu\mu_0 \cdot a^2 (I_0 - kt^2)}{2\pi \cdot r}$$

2. Если контур пронизывается изменяющимся магнитным потоком, то в контуре возникает ЭДС и ндукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\mu_0 \cdot a^2 (I_0 - kt^2)}{2\pi \cdot r}\right) = -\frac{\mu\mu_0 \cdot a^2}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{d}{dt}(I_0 - kt^2) =$$

$$= -\frac{\mu\mu_0 \cdot a^2}{2\pi \cdot r}(-2kt) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i = \frac{\mu\mu_0 \cdot a^2 kt}{\pi \cdot r}$$

$$\mathcal{E}_i(t) = \frac{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot(1{,}0\cdot 10^{-2})\cdot 1{,}0\cdot 2{,}0}{\pi\cdot 0{,}50} = 1{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{В}.$$

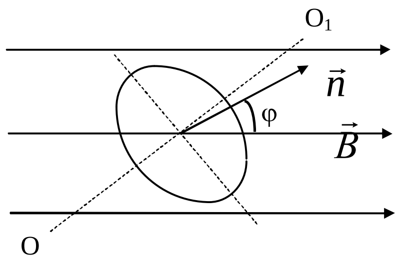
3. Так как ток в проводнике убывает с течением времени, то убывает и магнитный поток, пронизывающий рамку. По правилу Ленца магнитное поле $\vec{B}_i$ индукционного тока направлено против изменения внешнего магнитного поля $\vec{B}$. Т.к. внешнее магнитное поле $\vec{B}$ убывает, то магнитное поле $\vec{B}_i$ индукционного тока препятствует этому убыванию, т.е. эти поля $\vec{B}_i$ и $\vec{B}$ сонаправлены. Направление индукционного тока I_i находим по правилу правого винта. Он направлен по часовой стрелке.

<u>Задача 5.2.</u> Виток радиуса r = 1,0 см начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 2{,}0\ 1/c^2$ в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,050 Тл. Ось вращения витка совпадает с его диаметром т перпендикулярна линиям магнитной индукции. По какому закону изменяется ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ в витке?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\omega_0 = 0$
$r = 1{,}0$ см $= 1{,}0\cdot 10^{-2}$ м
$\varepsilon = 2{,}0\ 1/c^2$
B = 0,050 Тл

$\mathcal{E}(t)$ - ?



Магнитный поток через площадь S

$$\Phi = BS\cos\varphi,$$

где $S = \pi r^2$ - площадь, охватываемая витком.

При вращении витка относительно оси OO_1 угол φ между направлением нормали $\vec{n}$ и индукцией магнитного поля B изменяется по закону:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

где ω_0 - начальная угловая скорость вращения витка. $\omega_0 = 0$, т.к. по условию задачи сказано, что виток только начинает вращение.

$$\Phi = B\,\pi r^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Если виток пронизывается изменяющимся магнитным полем, то в витке возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B\pi \cdot r^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = -B\pi \cdot r^2 \frac{d}{dt}\left(\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) =$$

$$= -B\pi \cdot r^2\left(-\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\cdot 2\varepsilon t \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i = 2B\varepsilon\pi \cdot r^2 t \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

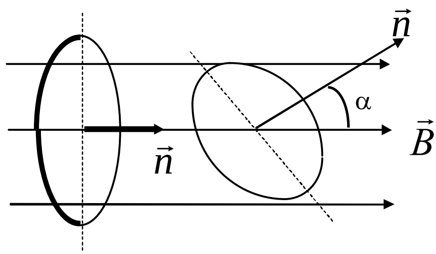
$$\varepsilon_i = 2\cdot 0{,}050\cdot 2{,}0\cdot 3{,}14\cdot(1{,}0\cdot 10^{-2})^2\cdot t\cdot \sin\frac{2{,}0\cdot t^2}{2} \quad => \quad \varepsilon_i(t) = 6{,}3\cdot 10^{-4} t\cdot \sin t^2$$

Задача 5.3. Кольцо радиуса r = 1,0 см находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,020 Тл, так что линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости кольца. Кольцо повернули на угол $\alpha = 60^o$. Найти изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ через поверхность, ограниченную кольцом, и заряд Q, который пройдет по кольцу. Сопротивление кольца R = 3,14 Ом.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$r = 1{,}0$ см $= 1{,}0\cdot 10^{-2}$ м
$B = 0{,}020$ Тл
$\alpha = 60^o$
$R = 3{,}14$ Ом

$\Delta\Phi$ - ?; Q - ?



1. Изменение магнитного потока через площадь контура

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Если магнитное поле однородное, то магнитный поток через площадь S контура

$$\Phi = BS\cos\varphi,$$

где $S = \pi r^2$ - площадь, охватываемая кольцом, α - угол между направлением векторов $\vec{n}$ к поверхности и магнитной индукцией $\vec{B}$.

В нашей задаче $\alpha_1 = 0$, т.к. линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости кольца.

$$\alpha_2 = \alpha$$

$$\Phi_1 = B\pi r^2\cos 0^o = B\pi r^2;\ \Phi_2 = B\pi r^2\cos\alpha$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B\pi r^2\cos\alpha - B\pi r^2 = B\pi r^2(\cos\alpha - 1) =>$$

$$=> \Delta\Phi = -B\pi r^2(1 - \cos\alpha)$$

$$\Delta\Phi = -0{,}020\cdot 3{,}14\cdot(1{,}0\cdot 10^{-2})^2\cdot(1 - \cos 60^0) = -3{,}14\cdot 10^{-6}\ \text{Вб}$$

Так как кольцо пронизывается изменяющемся магнитным потоком, то в нем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Под действием ЭДС индукции в кольце идет индукционный ток. По закону Ома для замкнутой цепи

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{d\Phi}{R\,dt}$$

Заряд dQ, который проходит через поперечное сечение проводника

$$dQ = I_i dt = -\frac{d\Phi}{R\,dt}\cdot dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

Интегрируем:

$$Q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{B\pi\cdot r^2(1-\cos\alpha)}{R} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{B\pi\cdot r^2(1-\cos\alpha)}{R}$$

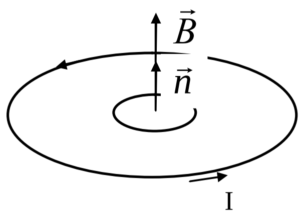
$$Q = \frac{0{,}020\cdot 3{,}14\cdot(1{,}0\cdot 10^{-2})^2(1-\cos 60^o)}{3{,}14} = 1{,}0\cdot 10^{-6}\ \text{Кл}$$

<u>Задача 5.4</u>. Два проводника в форме витков радиусами r_1 = 31,4 см и r_2 = 2,0 см лежат в одной плоскости. Центры витков совпадают. По внешнему витку идет ток I = 10 А. Сопротивление внутреннего витка R = 0,10 Ом. Найти изменение магнитного потока ΔΦ и заряд Q, который проходит через меньший проводник, если ему придать форму квадрата.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
r_1 = 31,4 см = 0,314 м
B = 0,020 Тл
I = 10 А
R = 0,10 Ом

ΔΦ ?; Q - ?



1. Индукция магнитного поля в центре витка с током B = I/2r_1. Так как радиус внутреннего витка r_2 много меньше радиуса внешнего витка, то можно считать, что индукция магнитного поля внутри малого витка есть величина постоянная.
Тогда поток магнитной индукции через площадь витка

$$\Phi_1 = BS_1\cos\alpha,$$

где $S_1 = \pi r_2^2$ - площадь, охватываемая малым витком, $\alpha = 0$ - угол между направлением векторов $\vec{n}$ плоскости витка и индукцией магнитного поля $\vec{B}$, направление которой узнаем по правилу буравчика.

Тогда $$\Phi_1 = BS_1 = \frac{I}{2r_1}\pi r_2^2.$$

где $S_1 = \pi r_2^2$ - площадь, охватываемая малым витком, $\alpha = 0$ - угол между направлением векторов $\vec{n}$ плоскости витка и индукцией магнитного поля $\vec{B}$, направление которой узнаем по правилу буравчика.

Тогда $$\Phi_1 = BS_1 = \frac{I}{2r_1}\pi r_2^2.$$

Аналогично поток магнитной индукции через площадь квадрата

$$\Phi_2 = BS_2\cos\alpha,$$

где $S_2 = a^2$ - площадь квадрата; a - его сторона.

Учитывая, что длина окружности $\ell = 2\pi r^2$ равна периметру квадрата $\ell = 4a$, имеем:

$$2\pi r^2 = 4a \Rightarrow a = \pi r^2/2$$

$$S_2 = a^2 = \pi^2 r_2^2/4.$$

$$\Phi_2 = BS_2\cos\alpha = \frac{I}{2r_1}\cdot\frac{\pi^2 r_2^2}{4}\cdot\cos 0^o = \frac{I\pi^2 r_2^2}{8r_1}.$$

Изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{I\pi^2 r_2^2}{8r_1} - \frac{I\pi\cdot r_2^2}{2r_1} = \frac{I\pi\cdot r_2^2}{2r_1}\left(\frac{\pi}{4}-1\right) \Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{I\pi\cdot r_2^2}{2r_1}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Delta\Phi = -\frac{10\cdot 3{,}14\cdot(2{,}0\cdot 10^{-2})^2}{2r_1}\left(1-\frac{3{,}14}{4}\right) = -2{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{Вб}.$$

2. При изменении формы (площади) внутренний виток пронизывается изменяющимся магнитным потоком, поэтому в нем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

По закону Ома для замкнутой цепи индукционный ток в малом витке

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{d\Phi}{R\,dt}$$

Заряд, который протекает через этот виток

$$dQ = Idt = -\frac{d\Phi}{R\,dt}dt = -\frac{d\Phi}{R} = -\frac{d(BS\cos\alpha)}{R} = -\frac{B\cos\alpha dS}{R}$$

Интегрируем, учитывая, что $\alpha = 0$ и $\cos 0^o = 1$

$$Q = -\frac{B}{R}\int dS = -\frac{B}{R}(S_2 - S_1) = -\frac{B}{R}(a^2 - \pi \cdot r_2^2) = -\frac{I}{2r_1R}\left(\frac{\pi^2 r_2^2}{4} - \pi \cdot r_2^2\right) =>$$

$$=> Q = \frac{I\pi \cdot r_2^2}{2r_1R}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right);\ Q = \frac{10 \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 0{,}314 \cdot 0{,}10}\left(1 - \frac{3{,}14}{4}\right) = 2{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{Кл.}$$

<u>Задача 5.5</u>. Соленоид объемом V = 125 см^3 с магнитным сердечником намотан в один слой проводом диаметром d = 1,0 мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Когда через соленоид пропустили ток I = 0,50 А, то энергия магнитного поля внутри соленоида оказалась W = 31,4 мДж. Найти магнитную проницаемостьμ материала сердечника.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
V = 125 см^3 = $125 \cdot 10^{-6}$ м^3
d = 1,0 мм = $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м
I = 0,50 А
W = 31,4 мДж = $31{,}4 \cdot 10^{-3}$ Дж

μ - ?

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \omega V,$$

где ω - объемная плотность энергии магнитного поля соленоида, V - его объем.

$$\omega = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где H - напряженность магнитного поля соленоида,

$$H = nI$$

n - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида,

n = N/ℓ, где N - число витков соленоида, ℓ - его длина.

Так как витки плотно прилегают друг к другу, то N = ℓ/d, d - диаметр провода.

Тогда $n = N/\ell = \ell/d\ell = 1/d.$

$$H = nI = I/d$$

$$\omega = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 I^2}{2d^2}.$$

$$W = \omega V = \frac{\mu\mu_0 I^2 V}{2d^2} => \mu = \frac{2Wd^2}{\mu_0 I^2 V}$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 31{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot (0{,}50)^2 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 1{,}6 \cdot 10^3$$

<u>Задача 5.6</u>. В центре короткой катушки, состоящей из N = 20 витков провода, находится стальной шарик диаметром d = 2,0 мм. По катушке идет ток I = 10 А. Найти энергию W магнитного поля внутри шарика, если радиус витков R = 10 см.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
N = 20 витков
$d = 2{,}0$ мм $= 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ м
I = 10 А
R = 10 см = 0,10 м

W - ?

Так как радиус шарика мал по сравнению с радиусом витков катушки, то магнитное поле внутри шарика можно считать однородным. В этом случае энергия магнитного поля внутри шарика

$$W = \omega V, \quad (1)$$

где ω - объемная плотность энергии магнитного поля внутри шарика;
V - объем шарика, $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$, r - радиус шарика.

$$\omega = BH/2,$$

B - индукция магнитного поля внутри шарика, H - напряженность магнитного поля, которое создается короткой катушкой с током.

$$H = NH_1 = NI/2R; \quad H = (20 \cdot 10)/(2 \cdot 0{,}10) = 1000 \text{ А/м}.$$

Напряженность магнитного поля в вакууме и в магнетике одинакова, поэтому по графику зависимости B(H) для стали находим, что при H = 1000 А/м B = 1,1 Тл.

$$(1) \Rightarrow W = \omega V = \frac{BH}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{BH\pi \cdot d^3}{12}$$

$$W = \frac{1{,}1 \cdot 1000 \cdot 3{,}14 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 2{,}3 \text{ мкДж}.$$