ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат краткое теоретическое введение по отдельным разделам оптики и 21 пример решения задач: интерференция света - 5 (два источника, клин, кольца Ньютона), дифракция - 3 (на круглом отверстии, на щели, на дифракционной решетке), поляризация - 3 (закон Малюса, закон Брюстера, вращение плоскости поляризации), квантовая оптика - 10 (тепловое излучение, эффект Комптона, фотоэффект).

1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Скорость света в среде:

$$\upsilon = \frac{c}{n},$$

где *c* – скорость света в вакууме, *n* – показатель преломления среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = n\ell,$$

где ℓ – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления *n*.

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2 .$$

Зависимость разности фаз от оптической разности хода световых волн

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right),$$

где λ – длина световой волны.

Условие максимального усиления света при интерференции

$$\Delta = \pm k\lambda \; (k = 0,1,2,\ldots)$$

Условие максимального ослабления света при интерференции

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от тонкой пленки

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta = 2dn\cos i_2 \pm \frac{\lambda}{2},$$

где *d* –толщина пленки; *n* – показатель преломления пленки; i_1 – угол падения; i_2 – угол преломления света в пленке.

Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{(2k-1)\frac{R\lambda}{2}} \; (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны поверхности линзы.

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}\ .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.1. Расстояние d между отверстиями в опыте Юнга равно 0,50 мкм (рис.1). Расстояние от отверстий до экрана L = 1,0 м. Найти координаты y_3 и y_3' третьих светлой и темной полос на экране при освещении монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,50 мкм.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$d = 5{,}0\cdot10^{-4}$ м
L = 1,0 м
$\lambda = 5{,}0\cdot10^{-7}$ мкм
y_3 - ?; y_3' - ?

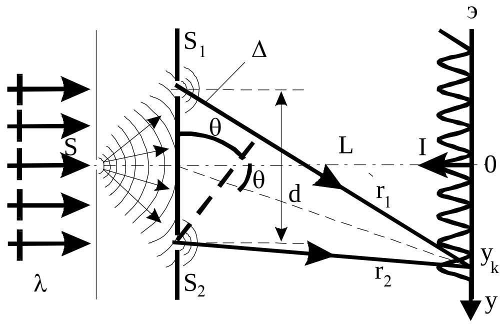

Рис. 1

В опыте Юнга параллельный пучок света падает на экран с малым отверстием S. За отверстием вследствие дифракции образуется расходящийся пучок лучей, которые падают на экран с двумя малыми отверстиями S_1 и S_2. Эти отверстия действуют как вторичные точечные источники света. Исходящие от них волны накладываются и создают на экране Э интерференционную картину.

Лучи r_1 и r_2 от когерентных источников S_1 и S_2 создают на экране в точке с координатой y_k колебания с постоянной разностью фаз. В установке выполняется условие:

$$d << L.$$

Поэтому, опустив из S_1 на луч r_1 перпендикуляр, мы получим отрезок Δ – оптическую разность хода лучей r_1 и r_2 в точку y_k. Так как в данном случае:

$$\sin\theta \approx \mathrm{tg}\theta \approx \theta,$$

то

$$\theta = \frac{\Delta}{d} = \frac{y_k}{L}.$$

Отсюда:

$$\Delta = \frac{d \cdot y_k}{L}. \qquad (1)$$

Если в точке с координатой y_k – максимум, то :

$$\Delta = k\lambda. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), имеем для координаты k-той светлой полосы:

$$\frac{d \cdot y_k}{L} = k \cdot \lambda,$$

$$\boxed{y_k = \frac{L\lambda}{d}k}, \; k = 0, \pm1, \pm2, \pm3,\ldots \qquad (3)$$

Если в точке с координатой y_k' – минимум, то:

$$\Delta = (2k' - 1)\frac{\lambda}{2}, \quad k' = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (4)$$

Приравнивая (1) и (4), имеем для k-той темной полосы:

$$\frac{dy_k'}{L} = (2k' - 1)\frac{\lambda}{2},$$

$$\boxed{y_k' = \frac{L\lambda}{2d}(2k' - 1)}, \; k' = \pm1, \pm2, \pm3,\ldots \qquad (5)$$

Подставляя численные значения величин в (3) и (5), получим для 3-ей светлой и 3-ей темной полос соответствующие координаты:

$$y_k = \frac{1{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-7}}{5{,}0 \cdot 10^{-4}} \cdot 3 = 3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ (м)},$$

$$y_k' = \frac{1{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-4}}(2 \cdot 3 - 1) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Ответ: $y_k = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ м; $y_k' = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Пример 1.2. На тонкую плоскопараллельную пластинку толщиной d = $0,8\cdot 10^{-6}$ мкм с показателем преломления n = 1,5 падает белый свет под углом α = 30°. Доказать, что для световой волны с длиной волны λ_1 = 450 нм в отраженных лучах имеет место максимальное ослабление в результате интерференции. Определить, для каких длин волн видимого диапазона ($\lambda_ф$ = 400 нм, $\lambda_к$ = 780 нм) свет в проходящих лучах будет максимально усилен.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
d = $0,8\cdot 10^{-6}$ мкм
n = 1,5
α = 30°
1) отраженные лучи
   $I = I_{min}$
   $\lambda_1 = 4,5\cdot 10^{-7}$ нм
2) проходящие лучи
   $I = I_{max}$

---

1) z = 2k + 1 - ?
2) λ - ?

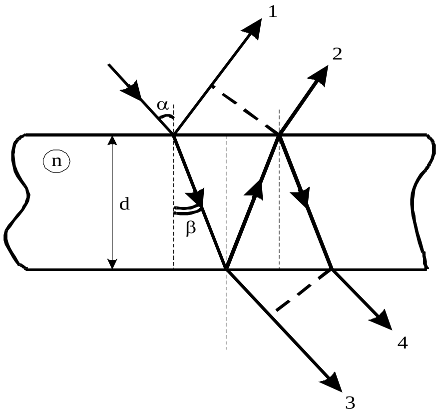

Рис. 2

1) Лучи 1 и 2, отраженные от верхней и нижней поверхностей пластинки (рис. 2) имеют оптическую разность хода:

$$\Delta_{12} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda_1}{2} \qquad (1)$$

Пусть на этой разности укладывается целое число z полуволн:

$$\Delta_{12} = z\frac{\lambda_1}{2},\ z = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda_1}{2} = z\frac{\lambda_1}{2}.$$

Разделив выражение на $\frac{\lambda_1}{2}$, получим:

$$z = \frac{4d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\lambda_1} + 1. \qquad (3)$$

Подставим численные значения величин:

$$z = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{-7}\sqrt{1{,}5^2 - 0{,}5^2}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} + 1 = 11.$$

Так как оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна нечетному числу полуволн:

$$\Delta_{12} = 11\frac{\lambda_1}{2},$$

то в отраженном свете для длины волны λ_1 (λ_1 = 450 нм) имеет место минимум интенсивности. Что и требовалось доказать.

2) Для лучей 3 и 4 в проходящем свете оптическая разность хода:

$$\Delta_{34} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

При интерференции колебания от этих лучей будут усиливаться, если оптическая разность хода будет равна целому числу длин волн:

$$\Delta_{34} = k\lambda,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \qquad (5)$$

Приравняв (4) и (5), получим:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = k\lambda,$$

$$\lambda = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{k}. \qquad (6)$$

Подставляя численные значения величин, имеем:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-7}\sqrt{1{,}5^2 - 0{,}5^2}}{k} = \frac{22{,}64 \cdot 10^{-7}}{k} \text{ (м)}$$

k = 1	$\rightarrow$	λ = 2264 нм	ИК лучи
k = 2	$\rightarrow$	λ = 1132 нм	ИК лучи
k = 3	$\rightarrow$	λ = 754 нм	Видимый свет
k = 4	$\rightarrow$	λ = 566 нм	Видимый свет
k = 5	$\rightarrow$	λ = 453 нм	Видимый свет
k = 6	$\rightarrow$	λ = 377 нм	УФ лучи

Таким образом, в проходящих лучах в результате интерференции будут усилены световые волны с длинами волн:

$$\lambda = 453 \text{ нм}$$
$$\lambda = 566 \text{ нм}$$
$$\lambda = 754 \text{ нм}$$

Ответ: 1) $I = I_{min}$, т. к. $z = 11$;

2) $\lambda = 453$ нм; $\lambda = 566$ нм; $\lambda = 754$ нм.

Пример 1.3. На тонкий стеклянный ($n = 1{,}5$) клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}60$ мкм. В возникающей при этом интерференционной картине на отрезке длиной $\ell = 1$ см наблюдается 10 полос. Определить ширину b интерференционной полосы и преломляющий угол α клина.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\lambda = 6{,}0 \cdot 10^{-7}$ м
$\ell = 10^{-2}$ м
$N = 10$
$n = 1{,}5$

b - ?; α - ?

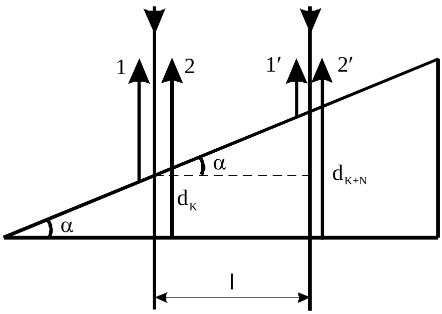

Рис. 3

Так как преломляющий угол клина мал, то на отдельном участке клина он подобен плоскопараллельной тонкой пленке. Поэтому нормально падающий луч света при отражении от двух поверхностей клина дает практически параллельные между собой когерентные лучи 1 и 2 (рис.3). В отраженном свете возникает интерференционная картина, имеющая вид чередующихся темных и светлых полос, параллельных ребру клина.

Согласно условию задачи на отрезке длиной ℓ наблюдается N интерференционных (например, темных) полос. Поэтому ширина одной полосы определится:

$$b = \frac{\ell}{N}. \qquad (1)$$

Пусть в том месте, где наблюдается k-тая темная полоса, толщина клина – d_k. Тогда оптическая разность хода лучей 1 и 2 (рис.3) определится:

$$\Delta_{12} = 2d_k n + \frac{\lambda}{2}, \qquad (2)$$

где $\lambda/2$ учитывает тот факт, что луч 1 отражается от среды оптически более плотной (с показателем преломления n = 1,5), фаза колебаний меняется на π, что эквивалентно изменению оптического пути на $\lambda/2$. Согласно условию минимума при интерференции (темная полоса):

$$\Delta_{12} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (3)$$

где k – номер полосы.

Приравнивая (2) и (3), получаем:

$$2d_k n + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$2d_k n = k\lambda,$$

$$d_k = \frac{\lambda}{2n}k. \qquad (4)$$

Полученное выражение связывает толщину клина d_k с номером k соответствующей полосы. Поэтому для полосы с номером k + N имеем:

$$d_{k+N} = \frac{\lambda}{2n}(k+N). \qquad (5)$$

Для малых углов ($\alpha < 8°$) выполняется соотношение:

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha,$$

где α выражается в радианах.

Как видно из рис.3, преломляющий угол α определится:

$$\alpha = \frac{d_{k+N} - d_k}{\ell}. \qquad (6)$$

Подставляя (4) и (5) в (6), получаем:

$$\alpha = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\lambda}{2\pi}(k+N) - \frac{\lambda}{2n}k\right),$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda N}{2\ell n}}. \tag{7}$$

Подставляя численные значения величин в (1) и (7), получим:

$$b = \frac{10^{-2}}{10} = 10^{-3}(м),$$

$$\alpha = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}5} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}.$$

В данном случае угол α выражен в радианах. Одна секунда в радианах:

$$1'' = \frac{3{,}14}{180 \cdot 60 \cdot 60}.$$

Поэтому:

$$\alpha = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{3{,}14} = 41{,}3''$$

Ответ: $b = 1$ мм; $\alpha = 41{,}3''$.

Пример 1.4. Расстояние между шестым и двадцать девятым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 9,2 мм. Радиус кривизны линзы R = 14 м. Найти длину волны монохроматического света, падающего на установку.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$r_{29} - r_6 = 9{,}2 \cdot 10^{-3}$ м
R = 14 м

λ - ?

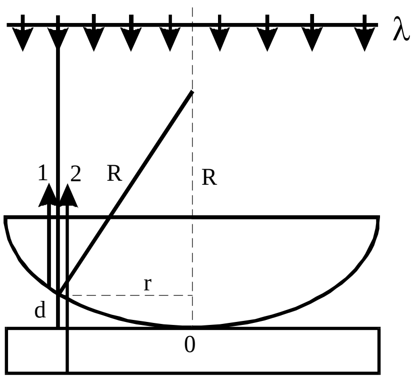

Рис. 4

Интерференционная картина в виде колец Ньютона наблюдается на установке, изображенной на рис. 4.

Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает нормально на тонкую воздушную прослойку между стеклянной пластинкой и плосковыпуклой линзой (радиус кривизны поверхности R). Толщина воздушного зазора растет с увеличением расстояния r от точки O соприкосновения линзы с пластиной. Вблизи этой точки соприкосновения толщина d растет так медленно, что на отдельных участках воздушный клин можно принять за плоскопараллельную тонкую воздушную пленку.

Луч, падающий нормально на воздушный зазор толщиной d (рис.4), частично отражается от верхней его поверхности (луч 1), частично от нижней (луч 2). Отраженные лучи когерентны и практически параллельны между собой. Поэтому оптическая разность хода между ними:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

где $\lambda/2$ учитывает отражение луча 2 от среды оптически более плотной (от стекла с показателем преломления n = 1,5). При таком отражении фаза колебания в луче меняется на π, что эквивалентно изменению оптического пути на $\lambda/2$.

Если толщина d зазора, находящегося на расстоянии r от точки соприкосновения O, такова, что:

$$\Delta = k\lambda, \quad k = 1,2,3,... \tag{2}$$

то в результате интерференции лучей 1 и 2 в отраженном свете колебания в данном месте усиливаются. Данной толщине d будет соответствовать светлое пятно в отраженном свете. Данная толщина d воздушного клина соответствует точкам окружности радиуса r. Поэтому всем таким точкам в отраженном свете будет соответствовать светлая интерференционная полоса (равной толщины) радиуса r.

Если же толщина d воздушного клина такова, что:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \; k = 1,2,3,... \tag{3}$$

то в отраженном свете лучи 1 и 2 дают минимум в результате интерференции и будет наблюдаться темная интерференционная полоса в виде окружности радиуса r.

Приравняв (1) и (3), мы получим соотношение, определяющее толщины d воздушной прослойки, соответствующие темным кольцам Ньютона:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$d = \frac{1}{2}k\lambda, \quad k = 0,1,2,3,... \tag{4}$$

Из рис. 4 видно:

$$R^2 = r^2 + (R-d)^2$$

$$R^2 = r^2 + R^2 - 2Rd + d^2. \tag{5}$$

Так как d^2 очень мало ($d^2 << r^2$; $d^2 << 2Rd$), то выражение (5) принимает вид:

$$2Rd = r^2$$

$$d = \frac{r^2}{2R}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получим:

$$\frac{r^2}{2R} = \frac{1}{2}k\lambda$$

$$r_k = \sqrt{R\lambda k} \quad k = 0,1,2,3,... \tag{7}$$

Полученное выражение определяет радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете.

В соответствии с (7) и условием задачи имеем:

$$r_{29} - r_6 = \sqrt{R\lambda \cdot 29} - \sqrt{R\lambda \cdot 6},$$

$$r_{29} - r_6 = \sqrt{R\lambda}\left(\sqrt{29} - \sqrt{6}\right),$$

$$\sqrt{R\lambda} = \frac{r_{29} - r_6}{\sqrt{29} - \sqrt{6}},$$

$$\lambda = \frac{(\mathrm{r}_{29} - \mathrm{r}_6)^2}{\mathrm{R}(\sqrt{29} - \sqrt{6})^2}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$\lambda = \frac{9{,}2^2 \cdot 10^{-6}}{14\left(\sqrt{29}-\sqrt{6}\right)^2} = 700 \cdot 10^{-9}\,(м).$$

Ответ: λ = 700 нм.

Пример 1.5. На стеклянную плосковогнутую линзу $Л_1$ с радиусом кривизны поверхности R_1 = 2,0 м, положили плосковыпуклую линзу $Л_2$ с радиусом кривизны R_2 = 1,0 м, как показано на рис.5. Пространство между линзами заполнено жидкостью с показателем преломления n = 1,3. Чему равны радиус второго светлого кольца Ньютона в отраженном свете и третьего светлого кольца в проходящем свете (λ = 0,60 мкм)?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
R_1 = 1,0 м
R_2 = 2,0 м
n = 1,3
$\lambda = 6{,}0\cdot 10^{-7}$ м
1) отражен.
2) проходящ.

1) r_2 - ?
2) r_3 - ?

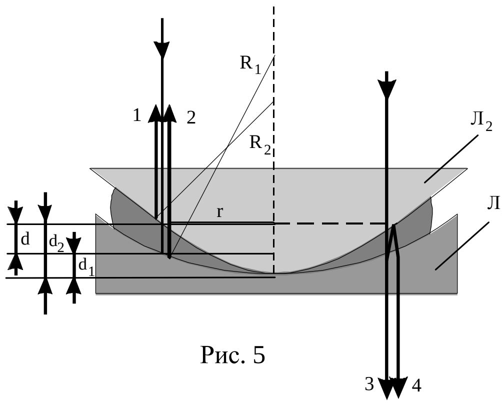

Рис. 5

Оптическая разность хода лучей 1 и 2, отраженных от нижней и верхней поверхностей жидкого клина, как видно из рис. 5, определится:

$$\Delta_{12} = 2dn + \frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

где

$$d = d_2 - d_1. \qquad (2)$$

Применяя теорему Пифагора, можно получить:

$$R_1^2 = \left(R_1 - d_1\right) + r^2,$$

$$R_1^2 = R_1^2 - 2R_1 d_1 + d_1^2 + r^2.$$

Учитывая, что $d_1^2 \approx 0$, имеем:

$$d_1 = \frac{r^2}{2R_1}\ . \tag{3}$$

Аналогично можно получить:

$$d_2 = \frac{r^2}{2R_2}. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (2), имеем:

$$d = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$d = \frac{r^2(R_1 - R_2)}{2R_1R_2}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), получим:

$$\Delta_{12} = \frac{r^2(R_1 - R_2)n}{R_1R_2} + \frac{\lambda}{2}. \tag{6}$$

Для светлых колец (условие максимума):

$$\Delta_{12} = k\lambda. \tag{7}$$

Приравнивая (6) и (7), получим:

$$\frac{r^2(R_1 - R_2)n}{R_1R_2} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\boxed{r_k = \sqrt{\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda R_1 R_2}{(R_1 - R_2)n}}}. \tag{8}$$

Полученное выражение определяет радиусы светлых колец в отраженном свете.

Оптическая разность хода лучей 3 и 4 в проходящем свете (рис.5) определится:

$$\Delta_{34} = 2dn \tag{9}$$

Для светлых колец в проходящем свете также выполняется условие максимума:

$$\Delta_{34} = k\lambda \ . \qquad (10)$$

Приравняв (9) и (10), получим:

$$2dn = k\lambda \ . \qquad (11)$$

Подставив в (11) выражение (5), получим выражение для радиусов светлых колец в проходящем свете:

$$\frac{r^2 (R_1 - R_2) n}{R_1 R_2} = k\lambda ,$$

$$\boxed{r_k = \sqrt{\frac{k\lambda R_1 R_2}{(R_1 - R_2) n}}} . \qquad (12)$$

Подставляя численные значения величин в (8) и (12), имеем:

$$r_2 = \sqrt{\frac{(2 - 0{,}5) \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 1}{(2 - 1) \cdot 1{,}3}} = 3{,}73 \cdot 10^{-3} (м) ,$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 1}{(2 - 1) \cdot 1{,}3}} = 5{,}25 \cdot 10^{-3} (м) .$$

Ответ: $r_2 = 3{,}73 \cdot 10^{-3} м$; $r_3 = 5{,}25 \cdot 10^{-3} м$.

2. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции на одной щели, определяется из условия:

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\ (k = 0,1,2,3,\ldots),$$

где *a* – ширина щели, *k* – порядковый номер максимума.

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции света на дифракционной решетке, определяется из условия:

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda\ \ (k = 0,1,2,3,\ldots),$$

где *d* – период дифракционной решетки.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 2.1. На диафрагму с круглым отверстием радиуса r = 1,0 мм падают нормально параллельные лучи света с длиной волны λ = 0,50 мкм (рис. 6). При каком расстоянии *b* от отверстия до экрана на отверстии укладывается *m* = 3 зоны Френеля? Темное или светлое пятно будет наблюдаться в центре экрана?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$r = 1{,}0\cdot10^{-3}$ м
$\lambda = 5{,}0\cdot10^{-7}$ м
m = 3

b - ?

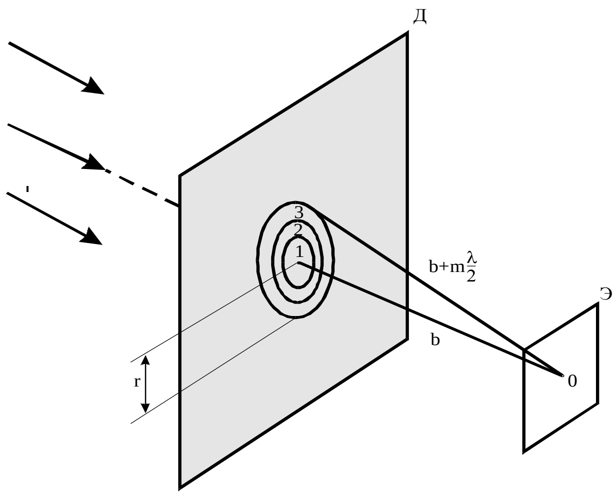

Рис. 6

Так как на диафрагму падают параллельные лучи, то это означает, что фронт падающей световой волны плоский. Первая зона Френеля – круг, вторая и третья – концентрические кольца (рис. 6). В отверстии диафрагмы укладывается нечетное число зон Френеля (m = 3), следовательно в центральной точке **О** на экране **Э** будет наблюдаться светлое пятно.

Расстояние от края **m**–ой зоны до центра экрана равно $b + m\frac{\lambda}{2}$. По теореме Пифагора:

$$\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = b^2 + r^2$$

или

$$b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = b^2 + r^2.$$

Так как $\lambda \ll b$ и $\lambda \ll r$, то в последнем выражении пренебрегаем членом, содержащим λ^2:

$$bm\lambda = r^2.$$

Отсюда:

$$b = \frac{r^2}{m\lambda}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$b = \frac{\left(1{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2}{3 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-7}} = 0{,}67\ (м)$$

Ответ: b = 0,67 м.

Пример 2.2. Щель шириной a = 0,10 мм (рис.7) освещается падающим нормально параллельным пучком монохроматического света (λ = 0,60 мкм). За щелью находится собирающая линза, а на расстоянии L = 1,0 м от линзы – экран. Определить: 1) на каком расстоянии b от центра экрана будет находиться центр второй светлой полосы (k = 2); 2) Светом какой длины волны λ' следует освещать щель, чтобы в том же месте экрана оказался минимум второго порядка.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$a = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ м
$\lambda = 6{,}0 \cdot 10^{-7}$ м
L = 1,0 м
1) k = 2
2) k′ = 2
b – ? λ′ – ?

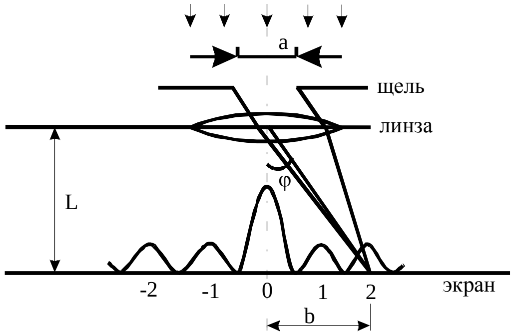

Рис. 7

1) Максимум интенсивности на экране будет наблюдаться для тех углов φ, для которых на ширине щели укладывается нечетное число зон Френеля. Максимуму первого порядка (k = 1) соответствуют три зоны, второго (k = 2) – пять зон, и т. д. Условие максимума при дифракции на щели имеет вид:

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{1}$$

Отсюда угол дифракции, под которым наблюдается максимум второго порядка:

$$\sin\varphi = \frac{(2k+1)\lambda}{2a}.$$

$$\sin\varphi = \frac{(2\cdot 2+1)\cdot 6{,}0\cdot 10^{-7}}{2\cdot 1{,}0\cdot 10^{-4}} = 0{,}015.$$

Как видно из рисунка 7, расстояние b от центрального максимума (k = 0) до второго определится:

$$b = L\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Для малых углов (φ < 8°; sin φ < 0,14) sin φ ≈ tg φ. Поэтому:

$$b = L\sin\varphi,$$

$$b = 1{,}0\cdot 0{,}015 = 0{,}015\,(м).$$

2) Минимумы интенсивности на экране наблюдаются под теми углами, для которых на ширине щели укладывается четное число зон Френеля. Минимуму первого порядка (k′ = 1; находится между нулевым и первым максимумами) соответствуют две зоны, второго порядка (k′ = 2) – четыре зоны, и т. д. Условие минимума при дифракции на щели имеет вид:

$$a\sin\varphi = 2k'\frac{\lambda'}{2},\ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (2)$$

Так как максимум второго порядка (k = 2) для длины волны λ и минимум второго порядка (k′ = 2) для длины волны λ′ видны под одним и тем же углом, то из (1) и (2) следует:

$$(2k+1)\frac{\lambda}{2} = 2k'\frac{\lambda'}{2},$$

или

$$\lambda' = \lambda\frac{2k+1}{2k'}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$\lambda' = 6{,}0\cdot 10^{-7}\cdot\frac{2\cdot 2+1}{2\cdot 2} = 7{,}5\cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

Ответ: b = 0,015 м; λ′ = 750 нм.

Пример 2.3. На дифракционную решетку, имеющую число штрихов на единицу длины n = 400 мм$^{-1}$, нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны λ = 0,60 мкм. Помещенная вблизи линза проецирует дифракционную картину на экран. Определить: 1) Общее число максимумов, которое дает эта решетка; 2) Максимальный угол отклонения лучей φ_{max}, соответствующий последнему дифракционному максимуму.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$n = 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ м$^{-1}$
$\lambda = 6{,}0 \cdot 10^{-7}$ м

N - ?; φ_{max} - ?

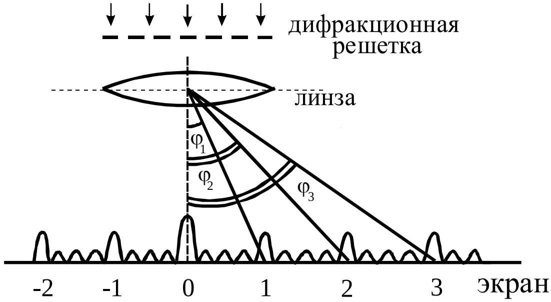

Рис. 8

Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k-тому главному дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

где k – порядок максимума. Постоянная d решетки и число n штрихов на единицу длины связаны соотношением:

$$d = \frac{1}{n} \ . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$k = \frac{\sin \varphi}{n\lambda}. \qquad (3)$$

Как видно из рис.8, с ростом номера k максимума растет и угол φ, под которым он виден на экране. Последний максимум с номером $k_{\max}$ виден под углом, близким к 90°. Для этого максимума выражение (3) примет вид:

$$k_{\max} \leq \frac{\sin 90^\circ}{n\lambda}$$

или

$$k_{\max} \leq \frac{1}{n\lambda}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$k_{\max} \le \frac{1}{4{,}0 \cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-7}} = 4{,}17,$$

$$k_{\max} = 4.$$

Округление проводится в сторону ближайшего меньшего целого числа, так как sin φ в (3) не может быть больше единицы.

Общее число N максимумов на экране включает симметричные максимумы, расположенные слева и справа от центрального (их общее количество $2k_{\max}$). Если учесть и центральный нулевой максимум, то общее число максимумов:

$$N = 2k_{\max} + 1.$$

Подставляя $k_{\max} = 4$, получим:

$$N = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Из выражения (3) следует:

$$\sin\varphi_{\max} = k_{\max} n\lambda \ ,$$

$$\sin\varphi_{\max} = 4 \cdot 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-7} = 0{,}96,$$

$$\varphi_{\max} = 73^\circ 45'.$$

Ответ: $N = 9$, $\varphi_{\max} = 73^\circ 45'$.

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Закон Малюса

$$J = J_0 \cos^2 \alpha ,$$

где J_0 - интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; J - интенсивность этого света после анализатора; α - угол между направлением колебаний электрического вектора света, падающего на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора (если колебания электрического вектора падающего света совпадают с этой плоскостью, то анализатор пропускает данный свет без ослабления).

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \alpha_Б = n_{21},$$

где $\alpha_Б$ - угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика луч полностью поляризован; n_{21} - относительный показатель преломления второй среды относительно первой. Относительный показатель преломления:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 - абсолютные показатели преломления соответственно первой и второй сред.

Угол поворота плоскости поляризации монохроматического света при прохождения через оптически активное вещество:

а) $\varphi = \alpha \cdot d$ (в твердых телах),

где α - постоянная вращения; d - длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) $\varphi = [\alpha] c d$ (в растворах),

где $[\alpha]$ - удельное вращение; c - массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1. Угол между плоскостями поляризаторов $П_1$ и $П_2$ равен $\varphi = 60°$. Потери интенсивности света на отражение и поглощение в каждом поляризаторе составляют $К_1 = 5$ % и $К_2 = 10$ % соответственно. На первый поляризатор падает плоскополяризованный свет, плоскость колебаний в котором составляет угол $\alpha = 45°$ с плоскостью этого поляризатора.
Во сколько раз ослабляется интенсивность света после прохождения обоих поляризаторов.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\varphi = 60°$
$К_1 = 0{,}05$
$К_2 = 0{,}10$
$\alpha = 45°$

$\dfrac{J_1}{J_3} - ?$

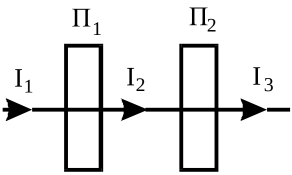

Рис. 9

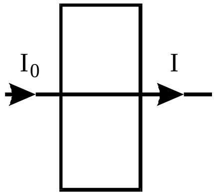

Рис. 10

Как показано на рисунке 9, J_1 - интенсивность света, падающего на первый поляризатор, J_2 - на второй, J_3 - интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора. По условию задачи необходимо определить отношение J_1 к J_3.

На рисунке 10 J_0 - интенсивность света, падающего на пластину из прозрачного вещества. За счет отражения, рассеяния и поглощения в пластине интенсивность света на выходе уменьшается: $J < J_0$. По определению, коэффициент потерь:

$$К = \frac{J_0 - J}{J_0},$$

откуда:

$$J = J_0(1 - К). \qquad (1)$$

По закону Малюса:

$$J_2' = J_1 \cos^2\alpha, \qquad (2)$$

где α - угол между плоскостью колебаний в луче интенсивностью J_1 и плоскостью первого поляризатора. Такой была бы интенсивность на выходе из первого поляризатора при отсутствии потерь. С учетом потерь в нем (выражение (1)), имеем для интенсивности света на выходе из поляризатора $П_1$:

$$J_2 = J_2'(1-K_1)$$

или, с учетом (2):

$$J_2 = J_1(1-K_1)\cos^2\alpha. \tag{3}$$

Это есть интенсивность плоскополяризованного света, падающего на второй поляризатор. Применяя закон Малюса ко второму поляризатору, получим:

$$J_3' = J_2\cos^2\varphi \quad , \tag{4}$$

где φ - угол между плоскостью колебаний в луче, падающем на второй поляризатор и плоскостью этого поляризатора. Такой была бы интенсивность после второго поляризатора $П_2$, если бы не было в нем потерь. С учетом потерь (выражение (1)), имеем:

$$J_3 = J_3'(1-K_2)$$

или с учетом (4):

$$J_3 = J_2(1-K_2)\cos^2\alpha. \tag{5}$$

Подставляя в (5) выражение (3), имеем:

$$J_3 = J_1(1-K_1)(1-K_2)\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi,$$

$$\frac{J_1}{J_3} = \frac{1}{(1-K_1)(1-K_2)\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$\frac{J_1}{J_3} = \frac{1}{(1-0{,}05)(1-0{,}10)\cdot\cos^2 45°\cdot\cos^2 60°} = 9{,}4.$$

Ответ: $\dfrac{J_1}{J_3} = 9{,}4$.

Пример 3.2. Предельный угол $\beta_{пр}$ полного внутреннего отражения света от поверхности алмаз-жидкость равен 32,5°. Чему равен угол Брюстера при отражении света от поверхности жидкость-стекло? Показатели преломления света в стекле и алмазе равны соответственно $n_2 = 1{,}50$ и $n_3 = 2{,}42$. Определить скорость υ распространения света в жидкости.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\beta_{пр} = 32{,}5°$
$n_2 = 1{,}50$
$n_3 = 2{,}42$

$\alpha_Б$ - ?
υ - ?

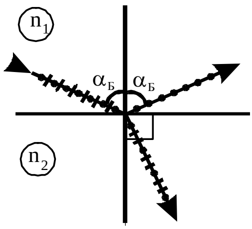

Рис. 11

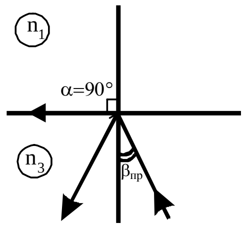

Рис. 12

При падении естественного света на границу раздела двух сред под углом Брюстера (рис.11) отраженные лучи полностью поляризованы. Согласно закону Брюстера:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_Б = n_{21}, \tag{1}$$

где n_{21} - относительный показатель преломления второй среды относительно первой. При этом:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{2}$$

где n_1 и n_2 - абсолютные показатели преломления соответствующих сред (жидкости и стекла). При падении лучей света из жидкости в алмаз выполняется закон преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{31}, \tag{3}$$

где α и β - соответственно углы падения и преломления, $n_{31} = \dfrac{n_3}{n_1}$ - относительный показатель преломления алмаза относительно жидкости.

При этом, так как $n_3 > n_1$, то α всегда больше β. Вследствие закона обратимости хода лучей при падении лучей из алмаза в жидкость выражение (3) остается справедливым. Но теперь β - угол падения, α - угол преломления. Если при таком ходе лучей увеличивать β до некоторого значения $\beta_{пр}$, то α при этом становится равным 90° (рис.12). В этом случае нет преломленных лучей, есть только отраженные. Такое явление носит название явление полного внутреннего отражения.

Для $\beta_{пр}$ выражение (3) примет вид:

$$\frac{\sin 90°}{\sin\beta_{пр}} = \frac{n_3}{n_1},$$

$$n_1 = n_3 \sin\beta_{пр}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), а затем в (1), получим:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_3 \sin\beta_{пр}},$$

$$tg\alpha_Б = \frac{n_2}{n_3 \sin\beta_{пр}}. \qquad (5)$$

По определению показатель преломления жидкости:

$$n_1 = \frac{c}{\upsilon},$$

где c - скорость света в вакууме ($c = 3\cdot10^8$ м/с), υ - скорость в жидкости. Поэтому:

$$\upsilon = \frac{c}{n},$$

и с учетом (4):

$$\upsilon = \frac{c}{n_3 \sin\beta_{пр}}. \qquad (6)$$

Подставляя численные значения величин в (5) и (6), получим:

$$tg\alpha_Б = \frac{1,5}{2,42\cdot\sin 32,5°} = 1,154,$$

$$\alpha_Б = 49°,$$

$$\upsilon = \frac{3\cdot10^8}{2,42\cdot\sin 32,5°} = 2,31\cdot10^8 (м/с).$$

Ответ: $\alpha_Б = 49°$; $\upsilon = 2,31\cdot10^8$ м/с.

Пример 3.3. Между скрещенными поляризатором П и анализатором А помещены определенным образом вырезанная кварцевая пластинка К и трубка с раствором сахара С (рис.13). Постоянная вращения кварца α = 26,5 град/мм, толщина пластинки d = 1,5 мм, удельное вращение сахара $[\alpha]$ = 66,5 (град·см^3)/(дм·г), длина трубки ℓ = 1дм. Какой минимальной концентрации следует взять раствор сахара, чтобы интенсивность света на выходе из анализатора была максимальна? Потерями на поглощение и рассеяние света пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
α = 26,5 град/мм
d = 1,5 мм
$[\alpha] = 66{,}5\ \dfrac{\text{град} \cdot \text{см}^3}{\text{дм} \cdot \text{г}}$
ℓ = 1 дм
φ = 90°

c - ?

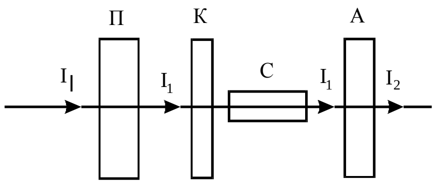

Рис.13

Согласно условию задачи, поляризатор П и анализатор А скрещены. Это означает, что угол φ между их плоскостями равен 90°. В отсутствие кварца и сахара свет на выходе из анализатора отсутствует. Чтобы интенсивность на выходе из системы была максимальна, кварц и раствор сахара совместно должны повернуть плоскость колебаний в луче, вышедшем из поляризатора, на φ = 90°:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{1}$$

где φ_1 - угол поворота пластиной, φ_2 - раствором сахара. При этом

$$\varphi_1 = \alpha \cdot d,$$

$$\varphi_2 = [\alpha] \cdot c \cdot \ell. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\alpha \cdot d + [\alpha] \cdot c \cdot \ell = \varphi,$$

$$c = \frac{\varphi - \alpha \cdot d}{[\alpha]\ell}. \tag{3}$$

Подставляя численные значения величин, получаем:

$$c = \frac{90 - 26{,}5 \cdot 1{,}5}{66{,}5 \cdot 1} = 0{,}76(\text{г}/\text{см}^3) = 760(\text{кг}/\text{м}^3)$$

Ответ: $c = 760$ кг/м^3.

4. КВАНТОВАЯ ОПТИКА

4.1. Тепловое излучение.

Поток Ф энергии через некоторую площадку - это количество энергии, переносимое через эту площадку за единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \qquad \text{или} \qquad \Phi = \frac{W}{t},$$

где W - энергия, переносимая за время t.

Энергетическая светимость или *излучательность* R_T - поток энергии всех длин волн, испускаемый единицей поверхности излучающего тела в пределах телесного угла 2π стерадиан:

$$R_T = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dS \cdot dt} \qquad \text{или} \qquad R_T = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{S \cdot t}.$$

Спектральная плотность энергетической светимости или *излучательности*:

$$r_{\lambda T} = \frac{dW_\lambda}{d\lambda \cdot dS \cdot dt},$$

где dW_λ - энергия, излучаемая с поверхности dS за время dt в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Спектральная плотность энергетической светимости $r_{\lambda T}$ связана с энергетической светимостью R_T соотношением:

$$R_T = \int_0^\infty r_{\lambda T} \cdot d\lambda .$$

Графически зависимость $r_{\lambda T}$ от λ имеет вид:

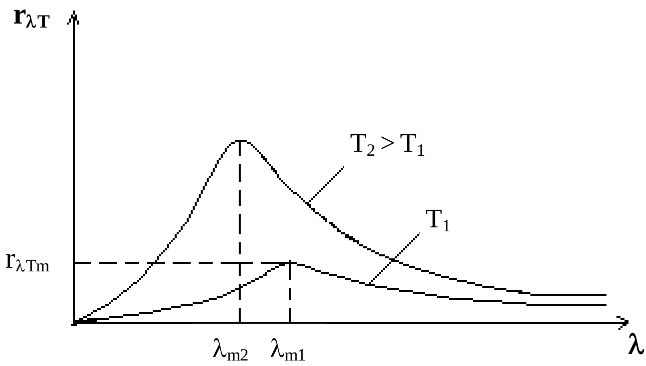

рис.14

Площадь под кривой зависимости есть $R_т$.
Поглощательная способность:

$$a_{\lambda T} = \frac{d\Phi'_{\lambda}}{d\Phi_{\lambda}} \quad \text{или} \quad a_{\lambda T} = \frac{\Phi'_{\lambda}}{\Phi_{\lambda}},$$

где Φ_{λ} - поток, в интервале от λ до λ+dλ, падающий на некоторую поверхность, Φ'_{λ} - поток, поглощаемый этой поверхностью в этом интервале длин волн. У абсолютно черного тела $a_{\lambda т} = 1$, у серого $a_{\lambda T} < 1$ (величина постоянная для всех длин волн).

Закон Стефана-Больцмана для абсолютно черного тела, имеющего температуру T:

$$R_T = \sigma \cdot T^4,$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана ($\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4)).

Закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\lambda_1 T}}{a_{\lambda_1 T}} = \frac{r_{\lambda_2 T}}{a_{\lambda_2 T}} = \cdots = f(\lambda, T),$$

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\ell^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1},$$

где $f(\lambda,T)$ - формула Планка, представляет собой спектральную плотность энергетической светимости для абсолютно черного тела; h - постоянная Планка ($h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с); c - скорость света в пустоте ($c = 3\cdot10^{8}$ м/с); k - постоянная Больцмана ($k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К).

Закон смещения Вина (Рис.14)

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m - длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости при данной температуре T абсолютно черного тела, b - постоянная в законе смещения Вина ($b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К).

Второй закон Вина:

$$r_{\lambda Tm} = c \cdot T^5,$$

где $r_{\lambda Tm}$- максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости при данной температуре в зависимости от длины волны; **c** - константа Вина (**c** $= 1{,}3\cdot10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5)).

При решении задач, где речь идет о длинах волн с $\lambda >> \lambda_m$ показатель экспоненты в формуле Планка много меньше единицы. В этом случае можно использовать разложение в ряд функции ℓ^x по малому параметру x:

$$\ell^x \approx 1 + x.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.1.1. Максимум спектральной плотности излучательности $r_{\lambda Tm}$ Солнца соответствует длине волны $\lambda_m = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить:

1. Энергетическую светимость R_T Солнца;
2. Поток энергии Ф, излучаемый Солнцем, если за время t = 1 мин оно излучает энергию $W = 23\cdot10^{27}$ Дж.

Принять радиус r Солнца равным $6{,}95\cdot10^{8}$ м.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\lambda_m = 5{,}0\cdot10^{-7}$ м
$r = 6{,}95\cdot10^{8}$ м
$W = 2{,}3\cdot10^{28}$ Дж
$t = 60$ с

R_T - ?
Ф - ?

Энергетическая светимость R_T абсолютно черного тела связана с его температурой законом Стефана-Больцмана:

$$R_T = \sigma\cdot T^4 \qquad (1)$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана.

Согласно закону смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \qquad (2)$$

где λ_m - соответствует максимуму в зависимости спектральной плотности энергетической светимости от длины волны (рис.14); b - постоянная Вина. Из (2)

$$T = \frac{b}{\lambda_m}$$

и, подставляя в (1) , получим:

$$R_T = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4. \qquad (3)$$

Так как:

$$R_T = \frac{\Phi}{S},$$

где Ф - поток, испущенный с поверхности S, то

$$\Phi = R_T \cdot S. \qquad (4)$$

Площадь поверхности сферы:

$$S = 4\pi r^2.$$

Подставляя в (4), получим:

$$\Phi = 4\pi r^2 R_T$$

или, с учетом (3):

$$\Phi = 4\pi r^2\sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4. \qquad (5)$$

С другой стороны, по определению:

$$\Phi = \frac{W}{t}, \qquad (6)$$

где W - энергия, испущенная со всей поверхности за время t.

Подставляя численные значения величин в (3), (5) и (6), получим:

$$R_T = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{5{,}0 \cdot 10^{-7}}\right)^4 = 6{,}4 \cdot 10^5 (Вт/м^2),$$

$$\Phi = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}95^2 \cdot 10^{16} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{5{,}0 \cdot 10^{-7}}\right)^4 = 3{,}9 \cdot 10^{26} (Вт),$$

$$\Phi = \frac{2{,}3 \cdot 10^{28}}{60} = 3{,}9 \cdot 10^{26} (Вт).$$

Как и следует оба последних результата одинаковы.

Ответ: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^5$ Вт/м^2; $\Phi = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

Пример 4.1.2. Найти относительное изменение η максимальной спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при уменьшении его температуры от $T_1 = 1500$ К до $T_2 = 1000$ К.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$T_1 = 1500$ К
$T_2 = 1000$ К
η-?

Согласно условию задачи требуется найти:

$$\eta = \frac{r_{\lambda Tm1} - r_{\lambda Tm2}}{r_{\lambda Tm1}}$$

где $r_{\lambda Tm1}$ и $r_{\lambda Tm2}$ – максимальные спектральные плотности энергетической светимости соответствующие температурам T_1 и T_2 . Согласно закону Вина:

$$r_{\lambda Tm} = c \cdot T^5 \cdot \qquad (2)$$

С учетом (3) выражение (2) примет вид:

$$\eta = 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 .$$

Подставляя численные значения величин, имеем:

$$\eta = 1 - \left(\frac{1000}{1500}\right)^5 = 0{,}87.$$

Ответ: $\eta = 0{,}87$.

Пример 4.1.3. Температура T_1 первого из двух абсолютно черных тел равна 2500 К. Длина волны, отвечающая максимуму энергии излучения первого тела на $\Delta\lambda_m$ = 0,50 мкм меньше длины волны, соответствующей максимуму энергии излучения второго тела. Определить:

1. Температуру T_2 второго тела;
2. Разность ΔR_T излучательностей тел;
3. Максимальные спектральные плотности излучательностей $r_{\lambda Tm1}$ и $r_{\lambda Tm2}$ тел;
4. Спектральные плотности излучательностей $r_{\lambda T1}$ и $r_{\lambda T2}$ тел для длины волны λ = 80 мкм.

РЕШЕНИЕ:

Дано:	
T_1 = 2500 К $\Delta\lambda_m$ = 0,50 мкм = $50\cdot10^{-8}$ м λ_1 = 80 мкм = $80\cdot10^{-6}$ м	Согласно закону смещения Вина: $\lambda_m = \frac{b}{T}$, следовательно: $\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1}$ и $\lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}$.
T_2 -? ΔR_T -? $r_{\lambda Tm1}$- ? $r_{\lambda Tm2}$ -? $r_{\lambda T1}$ -? $r_{\lambda T2}$ -?	

Поэтому:

$$\Delta\lambda_m = \lambda_{m2} - \lambda_{m1}$$

или

$$\Delta\lambda_m = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1}.$$

Отсюда:

$$\frac{b}{T_2} = \frac{b}{T_1} + \Delta\lambda_m,$$

и

$$T_2 = \frac{bT_1}{b + T_1 \cdot \Delta\lambda_m}. \qquad (1)$$

Согласно закону Стефана-Больцмана:

$$R_{T1} = \sigma \cdot T_1^4,$$

$$R_{T2} = \sigma \cdot T_2^4.$$

Следовательно:

$$\Delta R_T = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right),$$

$$\Delta R_T = \sigma \cdot T_1^4 \left[1 - \left(\frac{b}{b + T_2 \Delta\lambda_m}\right)^4\right]. \qquad (2)$$

Согласно закону Вина:

$$r_{\lambda Tm1} = c \cdot T_1^5, \qquad (3)$$
$$r_{\lambda Tm2} = c \cdot T_2^5.$$

Используя закон смещения Вина, оценим λ_{m1}, соответствующую первому телу:

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1}; \qquad \lambda_{m1} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}}{2500} = 1{,}16 \cdot 10^{-6} (\text{м}).$$

Считая, что выполняется условие $\lambda_{m1} >> \lambda$ и $\lambda_{m2} >> \lambda$, выражение для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела:

$$r_{\lambda 1} = f(\lambda \cdot T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\ell^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \qquad (4)$$

можно упростить, так как:

$$\frac{hc}{\lambda kT} << 1$$

и

$$\ell^{\frac{hc}{\lambda KT}} \approx \frac{hc}{\lambda kT} + 1. \qquad (5)$$

С учетом (5) выражение (4) примет вид:

$$f(\lambda T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda kT}{hc}, \qquad (6)$$
$$f(\lambda T) = \frac{2\pi kTc}{\lambda^4}.$$

Таким образом:

$$r_{\lambda T1} = \frac{2\pi kT_1 c}{\lambda^4}, \qquad (7)$$
$$r_{\lambda T2} = \frac{2\pi kT_2 c}{\lambda^4}.$$

Подставляя численные значения величин в (1), (2), (3), (7) получим:

$$T_2 = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}\cdot 2500}{2{,}9\cdot 10^{-3} + 2500\cdot 50\cdot 10^{-8}} = 1750(К)\ ,$$

$$\Delta R_T = 5{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 2500^4\left[1-\left(\frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{2{,}9\cdot 10^{-3} + 2500\cdot 50\cdot 10^{-8}}\right)^4\right] =$$

$$= 1{,}7\cdot 10^6 (Вт/м^2)\ ,$$

$$r_{\lambda Tm1} = 1{,}3\cdot 10^{-5}\cdot 25000^5 = 5{,}1\cdot 10^{11}(Вт/м^3)\ ,$$

$$r_{\lambda Tm2} = 1{,}3\cdot 10^{-5}\cdot 1750^5 = 2{,}1\cdot 10^{11}(Вт/м^3)\ ,$$

$$r_{\lambda T1} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 2500\cdot 3\cdot 10^8}{8^4\cdot 10^{-20}} = 1{,}6\cdot 10^6 (Вт/м^3)\ ,$$

$$r_{\lambda T2} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 1750\cdot 3\cdot 10^8}{8^4\cdot 10^{-20}} = 1{,}1\cdot 10^6 (Вт/м^3)\ .$$

Ответ: T_2 = 1750 К; ΔR_T = $1{,}7\cdot 10^6$ Вт/м^2; $r_{\lambda Tm1}$ = $5{,}1\cdot 10^{11}$ Вт/м^3; $r_{\lambda Tm2}$ = $2{,}1\cdot 10^{11}$ Вт/м^3; r $r_{\lambda T1}$ = $1{,}6\cdot 10^6$ Вт/м^3; $r_{\lambda T2}$ = $1{,}1\cdot 10^6$ Вт/м^3.

4.2. Фотоэффект

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda,$$

где h - постоянная Планка, ν - частота фотона, λ – его длина волны, c - скорость света в пустоте.

Масса фотона

$$m = \varepsilon/c^2 = h/(c\lambda).$$

Импульс фотона

$$P = mc = h/\lambda.$$

Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T_{max} = A + (m\upsilon^2_{max})/2,$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A - работа выхода электрона с поверхности металла; T_{max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = hc/A \quad \text{или} \quad \nu_0 = A/h,$$

где λ_0 – максимальная длина волны света, при которой ещё возможен фотоэффект; ν_0 – минимальная частота света, при которой ещё возможен фотоэффект; h - постоянная Планка; c - скорость света в вакууме.

Если между фотокатодом и анодом приложить запирающее напряжение, то выполняется условие:

$$eU_З = T_{max} = (m\upsilon^2_{max})/2,$$

где e - заряд фотоэлектрона ($e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл), $U_З$ - запирающее напряжение.

Спектральная чувствительность металла (фотокатода):

$$j = I_Н/\Phi_\lambda,$$

где $I_Н$ - фототок насыщения, создаваемый монохроматическим световым потоком Φ_λ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.2.1. При освещении серебряной пластины монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_1 = 200$ нм необходимо приложить некоторое запирающее напряжение $U_З$, для прекращения фототока. Во сколько раз n_2 изменится запирающее напряжение, если длина волны освещающего монохроматического света уменьшится в $n_1 = 2$ раза?

РЕШЕНИЕ

Дано:
$A = 4{,}7$ эВ
$\lambda_1 = 200$ нм
$n_1 = 2$

$n_2 = ?$

Согласно Эйнштейну энергия ε фотона падающего на поверхность металла фотокатода, расходуется на работу A выхода электрона из данного металла (для серебра $A = 4{,}7$ эВ) и на сообщение ему максимальной энергии T_{max}:

$$\varepsilon = A + T_{max}. \qquad (1)$$

Даже при отсутствии напряжения между фотокатодом и анодом фототок не равен нулю. Для его прекращения необходимо приложить запирающее напряжение U_3. При этом:

$$T_m = eU_3, \qquad (2)$$

где e - заряд электрона.

Энергия фотона связана с длиной волны λ соотношением:

$$\varepsilon = hc/\lambda, \qquad (3)$$

где h - постоянная Планка, c - скорость света в пустоте.

С учётом (3) и (2) выражение (1) примет для двух длин волн вид:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_3,$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_3 \qquad (4)$$

Отсюда:

$$U_{31} = \frac{1}{c}\left(\frac{hc}{\lambda_1} - A\right), \quad U_{32} = \frac{1}{c}\left(\frac{hc}{\lambda_2} - A\right)$$

и

$$n = \frac{U_{32}}{U_{31}} = \frac{\frac{hc}{\lambda_2} - A}{\frac{hc}{\lambda_1} - A}$$

или:

$$n_2 = \frac{(hc - A\lambda_2)\lambda_1}{(hc - A\lambda_1)\lambda_2}. \qquad (5)$$

Так как:

$$\lambda_2 = \lambda_1/n_1,$$

то выражение (5) примет вид:

$$n_2 = \frac{hcn_1 - A\lambda_1}{hc - A\lambda_1}. \qquad (6)$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$n_2 = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}\cdot2 - 4{,}7\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-7}}{6{,}63\cdot10^{-34}3\cdot10^{8} - 4{,}7\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-7}} = 5{,}1.$$

Ответ: $n_2 = U_{31}/U_{32} = 5{,}1$.

Пример 4.2.2. Фотон с длиной волны λ = 200 нм падает на серебряную пластину, заряженную с поверхностной плотностью заряда σ = 5,0 нКл/м^2. На какое максимальное расстояние может удалиться фотоэлектрон от поверхности металла?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
A = 4,7 эВ
λ = 200 нм
σ = 5,0 нКл/м^2

ℓ_{max} - ?

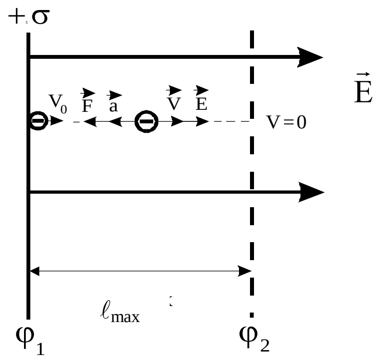

Рис.15

В однородном поле равномерно заряженной положительным зарядом плоскости на вылетевшие фотоэлектроны действует тормозящая сила. На наибольшее расстояние ℓ_{max} от заряженной поверхности отлетит электрон, скорость которого перпендикулярна этой поверхности.

Так как электрон движется равнозамедленно, то:

$$\ell_{max} = \upsilon_0 t - at^2/2, \qquad (1)$$

где υ_0 - начальная скорость, с которой вылетает фотоэлектрон ($\upsilon_0 = \upsilon_{max}$), a - ускорение, с которым он движется, t - время движения до остановки. Уравнение скорости для этого времени примет вид:

$$0 = \upsilon_0 - at \qquad (2)$$

Отсюда:

$$t = \upsilon_0/a$$

и, подставляя в (1), получим:

$$\ell_{max} = \upsilon_0^2/2a. \qquad (3)$$

Начальная скорость υ_0, с которой вылетают фотоэлектроны из поверхности металла, есть максимальная скорость υ_{max} в уравнении Эйнштейна:

$$\varepsilon = A + T_m$$

или

$$hc/\lambda = A + m\upsilon_m^2/2 \qquad (4)$$

где ε – энергия фотона, падающего на поверхность металла, A – работа выхода электрона из этого металла, T_m - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, h - постоянная Планка ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с), с - скорость света в пустоте ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), λ - длина волны падающего фотона, m - масса вылетающего электрона. Из (4):

$$\upsilon_0^2 = \upsilon_m^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right). \qquad (5)$$

По 2-му закону Ньютона сила $F_э$, действующая на электрон со стороны электрического поля, сообщает ему ускорение a:

$$F_э = ma \qquad (6)$$

С другой стороны эта сила:

$$F_э = eE, \qquad (7)$$

где E - напряженность поля, создаваемого заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (8)$$

где σ - поверхностная плотность заряда плоскости, ε_0 - электрическая постоянная.

Подставляя (8) в (7), имеем:

$$F_э = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (9)$$

Приравнивая (9) и (8), получаем:

$$ma = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0},$$

откуда:

$$a = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m} \qquad (10)$$

Подставляя (5) и (10) в (3), получаем:

$$\ell_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}{\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m}}$$

откуда:

$$\ell_m = \frac{2\varepsilon_0}{e\sigma}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right).$$

Подставляя численные значения величин, имеем:

$$\ell_m = \frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-9}}\left(\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2{,}0 \cdot 10^{-7}} - 4{,}7 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\right) = 5{,}4 \cdot 10^{-3} (м).$$

Ответ: $\ell_m = 5{,}4$ мм.

Пример 4.2.3. Спектральная чувствительность некоторого материала (фотокатода) на длине волны $\lambda = 450$ нм равна $j = 3{,}7$ мА/Вт. Определить фототок насыщения, если за каждую минуту на поверхность фотокатода падает количество фотонов $N_ф = 3 \cdot 10^{18}$. Какая часть падающих фотонов вырывает электроны с поверхности данного металла?

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
$j = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ А/Вт
$N_ф = 3 \cdot 10^{18}$
$t = 60$ с

$I_н$ - ? $N_e/N_ф$ - ?

По определению:

$$j = I_н/\Phi_\lambda\,, \qquad (1)$$

где $I_н$ - фототок насыщения, создаваемый монохроматическим световым потоком Φ_λ с длиной волны λ.

Из (1):

$$I_н = j \cdot \Phi_\lambda, \qquad (2)$$

где Φ_λ определяется:

$$\Phi_\lambda = W_\lambda/t\,, \qquad (3)$$

W_λ - энергия излучения, падающего на поверхность за время t.

Эта энергия связана с энергией отдельного фотона:

$$W_\lambda = \varepsilon_\lambda N_ф, \tag{4}$$

где $N_ф$ - число падающих фотонов за время t.

Энергия фотона:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{hc}{\lambda}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), затем в (3) и (2), получим:

$$I_н = \frac{jNhc}{\lambda t}, \tag{6}$$

Так как $I_н$ в (1) равняется:

$$I_н = \frac{Q}{t} = \frac{eN_e}{t}, \tag{7}$$

где Q - заряд, вылетающий с фотокатода за время t, e - заряд электрона, N_e - количество электронов, вылетающих за время t.

С учётом (5) и (4) выражение (3) примет вид:

$$\Phi_\lambda = \frac{hcN_ф}{\lambda t}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (1), получаем:

$$j = \frac{eN_e \lambda t}{tN_ф hc}$$

или

$$j = \frac{e\lambda}{hc} \cdot \frac{N_e}{N_ф},$$

откуда:

$$\frac{N_e}{N_ф} = \frac{jhc}{e\lambda}. \tag{9}$$

Подставляя в (6) и (9) значения физических величин, получаем:

$$I_н = \frac{jNhc}{\lambda t}; \quad I_н = \frac{3{,}7 \cdot 10^{-3} 3{,}0 \cdot 10^{18} 6{,}63 \cdot 10^{-34} 3 \cdot 10^{8}}{4{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 60} = 0{,}82 \cdot 10^{-4} (А),$$

$$\frac{N_e}{N_ф} = \frac{jhc}{e\lambda}; \quad \frac{N_e}{N_ф} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} 4{,}5 \cdot 10^{-7}} = 0{,}01.$$

Ответ: $I_н$ = 82 мкА; $N_e/N_ф$ = 0,01.

Пример 4.2.4. Фотон с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ нм падает на серебряную пластину под углом $\alpha = 60^0$ к поверхности. Фотоэлектрон вылетает под углом $\beta = 30^0$ к поверхности. Импульсы фотона и фотоэлектрона лежат в плоскости, перпендикулярной поверхности пластины. Определить импульсы, полученные пластиной и фотоэлектроном, если последний вылетает со скоростью, составляющей $\eta = 0{,}03$ от максимально возможной при данных условиях.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ нм
$A = 7{,}5^{-19}$ Дж
$\alpha = 60^0$
$\beta = 30^0$
$\eta = 0{,}03$

$P_н$-? $P_э$-?

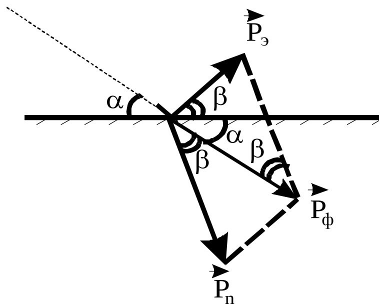

Рис.16

Согласно условию:

$$\frac{\upsilon_э}{\upsilon_{эm}} = \eta, \qquad (1)$$

где $\upsilon_э$ - скорость вылетающего фотоэлектрона, $\upsilon_{эm}$ - максимально возможная в данных условиях скорость.

Так как по определению импульс объекта связан с его массой:

$$\vec{P} = \vec{m}\vec{\upsilon},$$

то выражение (1) примет вид:

$$\frac{m\upsilon_э}{m\upsilon_{эm}} = \eta$$

или

$$P_э = \eta P_{эm}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия (максимальная), которую фотоэлектрон может приобрести при фотоэффекте, определяется согласно формуле Эйнштейна:

$$\varepsilon = A + T_m \qquad (3)$$

или

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{m\upsilon_m^2}{2}, \qquad (3)$$

где ε - энергия фотона, падающего на металл; A - работа выхода из металла; T_m – максимально возможная кинетическая энергия электрона, h - постоянная Планка, c - скорость света в пустоте, λ - длина волны фотона. Так как:

$$T_m = \frac{m\upsilon_{эm}^2}{2} = \frac{(m\upsilon_{эm})^2}{2m} = \frac{P_{эm}^2}{2m},$$

то:

$$P_{эm} = \sqrt{2mT_m}$$

и согласно (2)

$$P_э = \eta\sqrt{2mT_m}. \qquad (4)$$

Из (3) следует:

$$T_m = \frac{hc}{\lambda} - A. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), имеем:

$$P_э = \eta\sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}. \qquad (6)$$

Согласно закону сохранения импульса:

$$\vec{P}_ф = \vec{P}_э + \vec{P}_п$$

Как следует из рис.16:

$$P_п = \sqrt{P_ф^2 - P_э^2}, \qquad (7)$$

где $P_ф$ определяется:

$$P_ф = \frac{h}{\lambda}. \qquad (8)$$

Подставляя (6) и (8) в (7), получим:

$$P_п = \sqrt{\frac{h^2}{\lambda^2} + 2m\eta^2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}. \qquad (9)$$

Подставляя численные значения величин в (6) и (9), имеем:

$$P_э = 0{,}03\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\left(\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{-7}} - 7{,}5\cdot 10^{-19}\right)} = 2{,}00\cdot 10^{-26}\ \ (кг\cdot м)/с$$

$$P_n = \sqrt{\frac{6{,}63^2\cdot 10^{-68}}{2^2\cdot 10^{-14}} + 2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}03^2\cdot\left(\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{-7}} - 7{,}5\cdot 10^{-19}\right)} =$$

$$= 2{,}03\cdot 10^{-26}\ (кг\cdot м)/с.$$

Ответ: $P_э = 2{,}00\cdot 10^{-26}$ (кг·м)/с; $P_н = 2{,}03\cdot 10^{-26}$ (кг·м)/с.

4.3. Эффект Комптона

Эффект Комптона - увеличение длины волны фотона при его рассеянии на свободном покоящемся электроне (протоне):

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

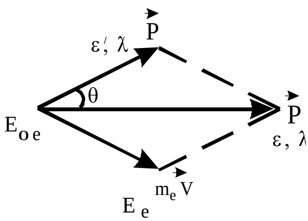

Рис. 17

где λ и λ'- длина волны фотона до и после рассеяния, λ_c - Комптоновская длина волны (λ_c = $2{,}4\cdot 10^{-12}$ м), θ - угол рассеяния фотона.

При взаимодействии фотона с электроном (протоном) выполняется закон сохранения импульса:

$$\vec{P} = \vec{P}' + m_e\vec{\upsilon}. \qquad (2)$$

и энергии (в релятивистской форме):

$$\varepsilon + E_{oe} = \varepsilon' + E_e. \qquad (3)$$

На рис.17 отображён закон сохранения импульса: $\vec{P}$ - импульс фотона до рассеяния, $\vec{P}'$ и $m_e\vec{\upsilon}$ - импульсы фотона и электрона отдачи после рассеяния. В выражении (3): ε и ε' – энергия фотона до и после рассеяния, E_{oe} и E_e - энергия покоящегося и движущегося электрона (протона).

В выражении (1) разность λ'-λ иногда называют Комптоновским смещением:

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$$

Комптоновская длина волны:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_{oe} \cdot c},$$

где h - постоянная Планка ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с), m_{oe}- масса покоя электрона ($m_{oe} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг), с - скорость света в пустоте ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Физические величины в (2) и (3) связанны с характеристиками фотона и электрона:

$$P = h/\lambda; \quad P' = h/\lambda'; \quad \varepsilon = hc/\lambda; \quad \varepsilon' = hc/\lambda';$$

$$E_{oe} = m_{oe} \cdot c^2; \quad E = m_e \cdot c^2.$$

Энергия покоя электрона E_{oe}= 0,51 МэВ (1МэВ = 10^6 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж). Релятивистская масса m_e электрона:

$$m_e = \frac{m_{oe}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

где υ - скорость движения электрона.

В релятивистской механике кинетическая энергия:

$$T = E_e - E_{oe},$$

а импульс электрона P_e ($\vec{P}_e = m_e \vec{\upsilon}$) связан с кинетической энергией и энергией покоя:

$$P_e = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_{oe} + T) \cdot T}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.3.1. В результате рассеяния γ-фотона, имеющего энергию ε = 0,80 МэВ, на свободном покоящемся электроне, длина волы λ' рассеянного фотона оказалось равной комптоновской длине волны электрона $\lambda_c = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м. Определить: 1) длину волны λ падающего фотона; 2) массу m падающего фотона; 3)величину $\Delta\lambda$ комптоновского смещения; 4) угол θ рассеяния фотона; 5) какую часть E_{oe}/ε энергии фотона уносит электрон отдачи.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
ε = 0,80 МэВ = $1{,}3 \cdot 10^{-13}$ Дж
$\lambda' = \lambda_c$ = 2,4 пм = $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м

1) λ - ?; 2) m - ?; 3) $\Delta\lambda$ - ?;
4) θ - ?; 5) $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ - ?

Энергия ε фотона связана с длиной волны λ соотношением:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (1)$$

где h - постоянная Планка, c- скорость света в пустоте.

Отсюда длина волны падающего фотона:

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}. \qquad (2)$$

Из релятивистского соотношения между массой и энергией:

$$\varepsilon = mc^2$$

масса падающего фотона определится:

$$m = \varepsilon/c^2. \qquad (3)$$

Изменение длины волны в результате эффекта Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

или, с учётом условия задачи и (2):

$$\Delta\lambda = \lambda_c - \frac{hc}{\varepsilon}. \qquad (4)$$

Согласно формуле Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (5)$$

где θ - угол рассеяния фотона (рис.17). Из (5) с учётом (4) имеем:

$$1 - \cos\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c},$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\lambda_c - \frac{hc}{\varepsilon}}{\lambda_c},$$

$$\cos\theta = \frac{hc}{\varepsilon\lambda_c}. \qquad (6)$$

Закон сохранения энергии при эффекте Комптона имеет вид:

$$\varepsilon + E_{oe} = \varepsilon' + E_e,$$

где ε и ε′ – энергия фотона до и после рассеяния, E_{oe} - энергия покоя электрона, E_e – энергия электрона отдачи.

В результате рассеяния фотон потерял энергию:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'.$$

Следовательно:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \qquad (7)$$

Согласно (1):

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda_c}. \qquad (8)$$

Подставляя численные значения величин в (2), (3), (4), (6) и (9), получим:

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}, \qquad \lambda = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}3\cdot10^{-13}} = 1{,}53\cdot10^{-12} \text{ м},$$

$$m = \varepsilon/c^2, \quad m = \frac{1{,}3\cdot10^{-13}}{3^2\cdot10^{16}} = 1{,}44\cdot10^{-30} \text{ кг},$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \frac{hc}{\varepsilon}, \quad \Delta\lambda = 2{,}4\cdot10^{-12} - \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}3\cdot10^{-13}} = 0{,}9\cdot10^{-12} \text{ м},$$

$$\cos\theta = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}3\cdot10^{-13}\cdot2{,}4\cdot10^{-12}} = 0{,}64; \theta = 54^0,$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}3\cdot10^{-13}\cdot2{,}4\cdot10^{-12}} = 0{,}36..$$

Ответ: $\lambda = 1{,}53\cdot10^{-12}$ м; $m = 1{,}44\cdot10^{-30}$ кг; $\Delta\lambda = 0{,}9\cdot10^{-12}$ м; $\theta = 54^0$; $\Delta\varepsilon/\varepsilon = 0{,}36$.

Пример 4.3.2. Фотон рассеян на свободном электроне на угол $\theta = \pi/2$. Угол между направлением движения падающего фотона и направлением движения электрона отдачи $\varphi = 30^0$. Определить:

1) энергию ε фотона до рассеяния;
2) импульс P фотона до рассеяния;
3) энергию ε' фотона после рассеяния;
4) импульс P' фотона после рассеяния.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\theta = \pi/2$
$\varphi = 30^0$
1) ε -?; 2) P-?;
3) ε'-?; 4) P'-?

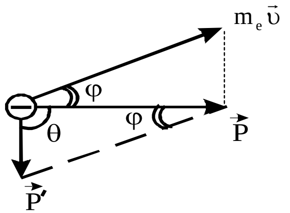

Рис.18

На рис.18 отражён закон сохранения импульса при эффекте Комптона:

$$\vec{P} = \vec{P}\,' + m_e\vec{\upsilon}\,, \qquad (1)$$

где m_e – масса электрона отдачи, $\vec{\upsilon}$ - его скорость.

При эффекте Комптона фотон испытывает рассеяние на свободном электроне, в результате чего возрастает его длина волны. Согласно формуле Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (2)$$

где λ' и λ - длина волны фотона до и после рассеяния, λ_c - комптоновская длина волны электрона ($\lambda_c = 2{,}4\cdot10^{-12}$ м), θ - угол рассеяния фотона.

С учетом условия ($\theta = \pi/2$) выражение (2) примет вид:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c. \qquad (3)$$

Энергия и импульс фотона связаны с длиной волны:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{hc}{\lambda}, \\ \varepsilon' &= \frac{hc}{\lambda'}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{h}{\lambda}, \\ P' &= \frac{h}{\lambda'}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где h- постоянная Планка, с- скорость света в вакууме. Из рис. 18:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = P'/P$$

С учетом (5) последнее равенство примет вид:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \lambda/\lambda',$$

а с учетом условия задачи ($\varphi = 30^0$; $\mathrm{tg}\,30^0 = 1/\sqrt{3}$):

$$\lambda/\lambda' = 1/\sqrt{3}, \quad \lambda' = \lambda\sqrt{3}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (3), имеем:

$$\lambda\sqrt{3} - \lambda = \lambda_c, \quad \lambda = \lambda_c/\left(\sqrt{3} - 1\right). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$\lambda' = \sqrt{3}\lambda_c/(\sqrt{3} - 1). \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (4) и (5), получаем окончательно:

$$\varepsilon = \frac{hc\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\lambda_c}; \qquad \varepsilon' = \frac{hc\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3}\lambda_c};$$

$$P = \frac{h\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\lambda_c}; \qquad P' = \frac{h\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3}\lambda_c}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2{,}4 \cdot 10^{-12}} = 6{,}0 \cdot 10^{-14}\,(\text{Дж}),$$

$$\varepsilon' = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-12}} = 3{,}5 \cdot 10^{-14}\,(\text{Дж}),$$

$$P = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2{,}4 \cdot 10^{-12}} = 2{,}0 \cdot 10^{-22}\ (\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с},$$

$$P' = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-12}} = 1{,}2 \cdot 10^{-22}\,(\text{кг} \cdot \text{м})/\text{с}.$$

Ответ: $\varepsilon = 6{,}0 \cdot 10^{-14}$ Дж; $\varepsilon' = 3{,}5 \cdot 10^{-14}$ Дж; $P = 2{,}0 \cdot 10^{-22}$ (кг·м)/с;
$P' = 1{,}2 \cdot 10^{-22}$ (кг·м)/с.

Пример 4.3.3. Фотон, имеющий длину волны $\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-12}$ м, рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^0$. Определить:

1) длину волны λ' рассеянного фотона;
2) энергию ε фотона до рассеяния;
3) энергию E_e электрона отдачи;
4) импульс P_e электрона отдачи.

РЕШЕНИЕ:

Дано:
$\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-12}$ м
$\theta = 90^0$
1) λ' - ?; 2) ε - ?
3) E_e - ?; 4) P_e - ?

При эффекте Комптона, в результате рассеяния фотона на свободном электроне возрастает его длина волны. Согласно формуле Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

где λ и λ' – длина волны до и после рассеяния, λ_c - комптоновская длина волны электрона, θ - угол рассеяния фотона (рис.17).

С учётом условия ($\theta = 90^0$; $\cos\theta = 0$) выражение (1) примет вид:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c \text{ или } \lambda' = \lambda + \lambda_c. \qquad (2)$$

Энергия фотона до и после рассеяния связана с длиной волны:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (3)$$

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'},$$

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda + \lambda_c}. \qquad (4)$$

Закон сохранения энергии при эффекте Комптона имеет вид:

$$\varepsilon + E_{oe} = \varepsilon' + E_e,$$

где E_{oe}- энергия покоя электрона ($E_{oe} = 8{,}16 \cdot 10^{-14}$ Дж), E_e - энергия электрона отдачи.

Из последнего выражения следует:

$$E_e = \varepsilon - \varepsilon' + E_{oe}. \qquad (5)$$

Подставляя (3) и (4) в (5), имеем:

$$E_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \lambda_c} + E_{oe}. \qquad (6)$$

Рис.18 отображает закон сохранения импульса при эффекте Комптона:

$$\vec{P} = \vec{P}' + m_e \vec{\upsilon},$$

где $m_e \upsilon' = P_e$ – импульс электрона отдачи, P и P′ – импульс фотона до и после отдачи. Из рис.18 следует:

$$P_e = \sqrt{P^2 + P'^2}. \tag{7}$$

Импульс фотона связан с длиной волны:

$$P = h/\lambda,\ P' = h/(\lambda + \lambda_c). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим:

$$P_e = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda + \lambda_c}\right)},$$

$$P_e = h\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda + \lambda_c)^2}}. \tag{9}$$

Подставляя численные значения величин в (2), (3), (6) и (9), получаем:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c$$

$$\lambda' = 5{,}0 \cdot 10^{-12} + 2{,}4 \cdot 10^{-12} = 7{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ (м)},$$

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5{,}0 \cdot 10^{-12}} = 4{,}0 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)},$$

$$E_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \lambda_c} + E_{oe},$$

$$E_e = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5{,}0 \cdot 10^{-12}} - \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{(5{,}0 + 2{,}4) \cdot 10^{-12}} + 8{,}16 \cdot 10^{-14} = 9{,}5 \cdot 10^{-14} \text{(Дж)},$$

$$P_e = h\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda + \lambda_c)^2}},$$

$$P_e = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \sqrt{\frac{1}{5{,}0^2 \cdot 10^{-24}} + \frac{1}{(5{,}0+2{,}4)^2 \cdot 10^{-24}}} = 1{,}6 \cdot 10^{-22} \text{ (кг·м)/с}$$

Ответ: $\lambda' = 7{,}4 \cdot 10^{-12}$ м; $\varepsilon = 4{,}0 \cdot 10^{-14}$ Дж; $E_e = 9{,}5 \cdot 10^{-14}$ Дж;
$P_e = 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ (кг·м)/с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. Высшая школа, М.: 1988. 496 с.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. Наука, М.: 1990. 400 с.
3. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общему курсу физики. Наука, М.: 1972. 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ………………………………………………………. 3

1. Интерференция света ………………………………………. 4

2. Дифракция света ……………………………………………… 17

3. Поляризация света ……………………………………………. 23

4. Квантовая оптика ……………………………………………... 29

   4.1. Тепловое излучение …………………………………… 29

   4.2. Фотоэффект ……………………………………………. 36

   4.3. Эффект Комптона ……………………………………... 45

5. Библиографический список ………………………………….. 54