Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

Дифференциальное исчисление

Методические указания

Новомосковск
2012

УДК 512.8
ББК 22.151.5
Д 456

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *Матвеев В.А.*
кандидат технических наук, доцент *Емельянов В.И.*
(НИ (филиал) ГОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева»)

Составители: Исаков В.Ф., Лупу В.Н., Ребенков А.С.
Д 456 **Дифференциальное исчисление**. Методические указания / ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал); Новомосковск 2012. – 40 с.

В настоящем пособии приведены необходимые теоретические сведения для выполнения контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление». Даны определения всех используемых величин, приведены необходимые формулы, приведены рисунки для лучшего понимания, прочитанного материала.

Подробно разобраны решения задач по пределам и производным и функциям нескольких переменных. В конце каждого раздела приведены решения задач и задачи для самостоятельного и домашнего задания.

Данное пособие предназначено для выполнения контрольной работы №2 студентами 1-го курса заочного отделения НИ РХТУ и содержит 10 вариантов по 5 задачам .

Табл. 8. ил. 3. библиогр. 4 назв.

УДК 512.8
ББК 22.151.5

1. **Пределы**

1.1. Понятие предела последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ.

Пусть каждому натуральному числу n=1,2,...,n,.. приведено в соответствие в силу некоторого закона число x_n, то есть x_n это функция на множестве N. В этом случае говорят, что определена последовательность чисел $x_1, x_2,..$ или короче последовательность $\{x_n\}$.

Примеры. 1) $\{n\}=\{1,2,...\}$; 2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}...\right\}$; 3) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3}...\right\}$; 4) $\{(-1)^n\}=\{-1,1,-1...\}$

Число ***a*** называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что для всех n>N выполняется неравенство $\boxed{|x_n - a| < \varepsilon}$ ...(1)

Если ***a*** есть предел $\{x_n\}$, то пишут $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$ или $x_n \to a$ и говорят, что переменная x_n стремится к ***a*** или сходится к числу ***a***. Неравенство (1) равносильно неравенствам $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε - окрестности точки ***a***.

Покажем, что переменная 2) имеет предел равный нулю. Зададим $\varepsilon > 0$ и составим равенство $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Это неравенство верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех n>N, где $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$. Аналогично рассуждая можно доказать, что $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0}$ и так далее.

Переменная 3) стремится к единице потому, что

$|1-x_n| = \left|1-\frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для всех n>N, где $N > \frac{1}{\varepsilon}$

Замечание 1. Предел постоянной равен самой постоянной.

Замечание 2. Переменная величина не может иметь двух пределов.

Замечание 3. Не каждая переменная величина имеет предел.

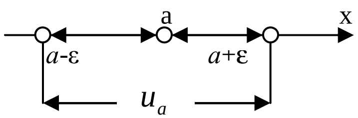
Переменная 4) не имеет предела.

Переменная β_n называется бесконечно большой величиной, если для любого M>0 найдется такое N, что $|\beta_n| > M$ при n>N. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \infty$ *или* $\beta_n \to \infty$ и говорят, что β_n стремится к бесконечности.

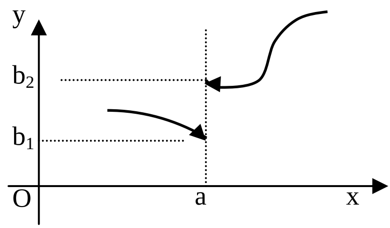
1.2. Предел функции

Если каждому значению переменной ***x***, принадлежащему некоторой области, соответствует по некоторому закону (правилу) *f* одно определенное значение другой переменной ***y***, то ***y*** есть функция от ***x*** и обозначается *y=f(x)*.

Переменная ***x*** называется аргументом, а ***y*** – функцией.



Под окрестностью u_a точки ***a*** будем понимать множество значений ***x***, удовлетворяющих условию $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, из которого удалена точка ***a***.



Пусть функция *y=f(x)* определена в окрестности u_a.

Число ***b*** называется пределом функции *y=f(x)* при *x→a*, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, что для всех ***x***, при которых $|x-a| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$

Если ***b*** есть предел функции f(x) при *x→a*, то пишут: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b}$

<u>*Замечание 1.*</u> Если f(x) стремится к пределу b_1 при *x→a* и *x<a*, то пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1 *пределом функции f(x) в точке **a** слева.*

Если f(x) стремится к пределу b_2 при *x→a* и *x>a*, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции f(x) в точке **a** справа.*

<u>*Замечание 2.*</u> Для существования предела при *x→a* не требуется чтобы функция была определена в точке *x=a*.

Функция стремится к пределу $\boldsymbol{b}$ при $x\to\infty$, если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\boldsymbol{M}$>0, что для всех $|x|>M$, будет выполнятся неравенство $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon$

1.3. Бесконечно малые функции

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$

Например, функция $\alpha(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x\to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$.

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ представляется в виде суммы постоянного числа $\boldsymbol{b}$ и бесконечно малой функции α: $y = b + \alpha$, то $\lim\limits_{x\to a} y = b$ или $\lim\limits_{x\to\infty} y = b$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} y = b$, то можно написать $y = b + \alpha$, где α - бесконечно малая функция.

Теорема 2. Если $\alpha = \alpha(x)$ стремится к нулю при $x\to a$ (или при $x\to\infty$) и не обращается в нуль, то $y=1/\alpha$ стремится к бесконечности.

В примере ранее было показано, что функция $y = (x-1)^2$ является бесконечно малой при $x\to 1$ $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, а функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ будет бесконечно большой $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty}$.

1.4. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел определенного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_n$$

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + 0 = 1$

Теорема 2. Предел определенного числа функций равен произведению пределов этих функций: $\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_n$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim(C \cdot u) = C \cdot \lim u$.

Теорема 3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$

Примеры. 1) $\lim\limits_{x \to 0} 5x = 5 \lim\limits_{x \to 0} x = 5 \cdot 0 = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2 - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 0}(x+1)}{\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - 2)} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

1.5. Замечательные пределы

Первый замечательный предел имеет вид $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1}$

Примеры. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cdot \sin\frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828...}$ - формула второго замечательного предела.

С помощью подстановки $y = \frac{1}{x}$, получим $\lim\limits_{y \to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ (при $x \to \infty$ $y \to 0$).

Логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным логарифмом и обозначается *ln(x)*.

При вычислении пределов полезно знать следующие формулы $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$

Пример. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e$

1. 6. Непрерывность функции в точке

Пусть функция *y=f(x)* определена при некотором значении x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Дадим аргументу ***x*** приращение Δx, тогда он примет значение $x = x_0 + \Delta x$ и функция получит приращение Δy. Наращенное значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Вычитая из наращенного значения начальное, получим $\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$...(1)

Функция называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в этой точке и её окрестности U_{x_0} и если $\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$ или

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)\Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$...(2), но $x_0=\lim\limits_{x\to x_0} x$

Следовательно, последнее равенство можно записать так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$

Это значит, что если $x\to x_0$ и нужно найти предел непрерывной функции, то нужно в выражение функции подставить x_0.

Пример 1. Докажем, что функция $y=\cos x$ непрерывна в произвольной точке x_0.

□ Составим приращение функции $y=\cos x$, используя равенство (1)

$$\Delta y=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=-2\sin x_0\cdot 0=0 \ ♦$$

Рассуждая аналогично можно доказать непрерывность любой элементарной функции в произвольной точке, в которой она определена.

Теорема. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Пример 2. Функция $y=x^n$ непрерывна в любой точке x_0 и поэтому

$$\lim_{x\to 2} x^3=2^3=8 \quad (\lim_{x\to x_0} x^n=x_0^n)$$

1.7. Непрерывность функций на отрезке. Точки разрыва.

Если функция y=f(x) непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a,b), то она непрерывна на этом интервале.

Если функция определена при *x=a* и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то говорят, что f(x) непрерывна в точке *x=a* справа.

Если функция определена при *x=b* и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, то говорят, что f(x) непрерывна в точке *x=b* слева.

Если функция f(x) непрерывна на интервале (a,b) и на концах интервала соответственно справа и слева, то функция непрерывна на отрезке [a,b].

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то точка $x=x_0$ называется точкой устранимого разрыва.

Если $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то точка $x=x_0$ называется точкой скачка функции.

Величина $f(x_0-0)-f(x_0+0)$ называется скачком функции в точке $x=x_0$.

Если выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, то $x=x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

Пример 3. Показать, что при x=4 функция $y=\dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

 Найдем пределы в точке x=4 слева и справа $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty$. Следовательно, точка x=4 является точкой разрыва второго рода.♦

Пример 4. Определить характер разрыва функции $y=arctg\,1/(x-3)$ в точке x=3.

 Найдем пределы в точке x=3 слева и справа $\lim\limits_{x\to 3-0} arctg\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 3+0} arctg\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, точка x=3 является точкой разрыва первого рода. $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ - величина скачка функции в точке x=3. ♦

1.8. Сравнение бесконечно малых функций (БМФ)

Пусть бесконечно малые функции $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x),\ldots$ стремятся к нулю при $x\to a$ или $x\to\infty$.

Если $\lim(\beta/\alpha)=A\neq 0$, то бесконечно малые β и α называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ ($\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$), то бесконечно малая β называется бесконечно малой функцией высшего порядка, чем бесконечно малая α, а бесконечно малая α называется бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая β.

Если $\boxed{\lim(\beta/\alpha)=1}$, то бесконечно малые β и α называются эквивалентными.

Обозначение: $\boxed{\alpha\approx\beta \text{ или } \alpha\sim\beta}$

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x\sim x$ *при* $x\to 0$	2. $tgx\sim x$ *при* $x\to 0$	3. $\arcsin x\sim x$ *при* $x\to 0$
4. $arctgx\sim x$ *при* $x\to 0$	5. $e^x-1\sim x$ *при* $x\to 0$	6. $a^x-1\sim x\ln a$ *при* $x\to 0$
7. $\ln(1+x)\sim x$ *при* $x\to 0$	8. $\log_a(1+x)\sim x\log_a e$ *при* $x\to 0$	
9. $(1+x)^n-1\sim nx$ *при* $x\to 0$ $(n>0)$		

Пример. Если α=x, а β=arcsin(x) ,бесконечно малые функции при $x \to 0$, то $\alpha \sim \beta$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

Пример. □ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\left|\begin{matrix}\sin\alpha x\sim\alpha x\\ \sin\beta x\sim\beta x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ♦

Пример. □ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\left|\ln(1+\alpha x)\sim\alpha x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha$ ♦

1.9. Задачи по разделу «Пределы»

1.9.1. Решение задач.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-5}{1-x^2+x^3}$

Решение. Отметим, что $\infty\pm c=\infty$, c- const, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot c=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty-\infty=\infty$ - неопределённость, ∞/∞ - неопределённость, $0/0$ - неопределённость. Воспользуемся равенством $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$(см. непрерывность функции в точке). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(3x^2-2)-5}{1-x^2(1-x)}=\dfrac{\infty\cdot\infty-5}{1-\infty\cdot\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}$ - неопределённость.

Для раскрытия неопределённости разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 (наивысшая степень $\boldsymbol{x}$) и воспользуемся равенствами $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ (см. понятие предела последовательности).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-5}{1-x^2+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}+1}=\left|\text{Теоремы о пределах}\right|=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}-5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x_3}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+1}=$$

$$\frac{3-2\cdot 0-5\cdot 0}{0-0+1}=\frac{3}{1}=3$$

Ответ: 3

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$

Решение. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}=\dfrac{(-3)^2+7(-3)+12}{(-3)^2-9}=\dfrac{0}{0}$ - неопределённость.

Легко видеть, что х=-3 есть корень многочленов $x^2+7x+12$ и x^2-9. Разложим их на множители. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+4}{x-3}=\frac{-3+4}{-3-3}=\frac{1}{-6}$. *Ответ:* $-\frac{1}{6}$

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{0+2}-\sqrt{2}}{0}=\frac{0}{0}$ - неопределённость.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$ и воспользуемся формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$ *Ответ:* $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos9x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos9x}{x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ - неопределённость.

Преобразуем разность косинусов в произведение синусов.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos9x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(-2)\sin\frac{3x+9x}{2}\sin\frac{3x-9x}{2}}{x^2}=-2\lim_{x\to0}\frac{\sin6x\cdot\sin(-3x)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin6x\cdot\sin3x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\cdot6\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3=2\cdot1\cdot6\cdot1\cdot3=36.$$ *Ответ:* 36.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}\right)^x$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}\right)^x=1^\infty$ - неопределённость.

Преобразуем ко второму замечательному пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2{,}71828...$.

Для этого выделим единицу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+4}{x^2-x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+4-x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+5}{x^2-x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+5}{x^2-x-1}\right)^{\frac{x^2-x-1}{3x+5}\cdot\frac{3x+5}{x^2-x-1}\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3x+5}{x^2-x-1}\right)^{\frac{x^2-x-1}{3x+5}}\right\}^{\frac{3x+5}{x^2-x-1}\cdot x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x^2-x-1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{x^2-x-1}} = e^{\frac{3+0}{1-0-0}} = e^3.$$ *Ответ:* e^3.

6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 4x}{(4x)^2}\cdot 4^2 = 32\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\right)^2 = 32\cdot 1^2 = 32$

Ответ: 32.

1.9.2. *Задачи для самостоятельного решения и домашнего задания*

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 4. $\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3+20x^2+100x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$ 10. $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8})$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ 13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{2x^2+1}$ 15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое последовательность? Дайте определение предела последовательности.
2. Какая переменная называется бесконечно большой? Запишите бесконечно большую величину математически.
3. Что такое функция? Дайте определение окрестности точки.
4. Дайте определение предела функции.
5. Дайте определение предела функции в точке ***a*** слева и справа.
6. Что такое бесконечно малая функция? Приведите пример.
7. Покажите на примере, что обратная величина бесконечно малой функции есть функция бесконечно большая.
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
9. Запишите формулы первого и второго замечательных пределов.
10. Какие формулы пределов вы знаете?
11. Дайте определение непрерывности функции в точке. Как найти предел непрерывной функции в точке?

12. Дайте определение точки разрыва первого рода.

13. Что такое точка разрыва второго рода?

14. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?

15. Запишите несколько важнейших эквивалентностей, которые используются при вычислении пределов.

2. Производная

2.1. Определение производной

Пусть дана функция $y = f(x)$ определенная на отрезке [a,b]. Дадим аргументу $\boldsymbol{x}$ приращение Δx. Тогда функция получит приращение Δy. Таким образом: при значении аргумента $\boldsymbol{x}$ значение функции $y = f(x)$, при значении аргумента $x + \Delta x$ значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Найдем приращение Δy:

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)} \qquad (1)$$

Составим отношение $\Delta y / \Delta x$, которое характеризует среднюю скорость изменения функции $f(x)$ на отрезке [x,x+Δx]: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (2)

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует, то его называют производной данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$.

По определению производной имеем $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ (3)

В общем случае производная является функцией от $\boldsymbol{x}$ и обозначается $f'(x)$, y', y'_x, dy/dx. Конкретное значение производной при $x=a$ обозначается $f'(a)$ или $y'_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Замечание. Значение производной $f'(x)$ при данном $\boldsymbol{x}$ равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ох касательной к графику $y = f(x)$ в точке *M(x,y),* то есть $f'(x) = tg\alpha$.

2.2. Правила дифференцирования функций

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{x}$, то производные суммы, разности, произведения и частного этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) определяются по формулам:

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v', \left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \ldots(1)$$

Следствие 1. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$. *Следствие 2.* $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$, где C=const.

Производная от сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$, где u – промежуточный аргумент.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = F(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $F[\varphi(x)]$ имеет производную, в точке x_0 определяемую по формуле: $y'_x = F'_u(u) \cdot \varphi'(x)$

Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть значения двух переменных ***x*** и ***y*** связаны между собой уравнением ***F(x,y)=0***. Такое задание функции называется неявным. При дифференцировании неявной функции используют правило дифференцирования сложной функции (***y*** есть функция от ***x***).

Пример. Дана функция $y^6 - y - x^2 = 0$. Найти y`.

□ $6y^5 \cdot y' - y' - 2x = 0 \Rightarrow y'\left(6y^5 - 1\right) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$ ♦

Дифференцирование обратной функции

Теорема. Если для дифференцируемой функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, имеющая производную $\varphi'(y) \neq 0$, то имеет место равенство $f'(x) = 1/\varphi'(y)$

□ Дифференцируем обе части равенства $x = \varphi(y)$ по ***x***, считая ***y*** функцией от ***x***. Получим $1 = \varphi'(y) \cdot y'_x$. Откуда $y'_x = 1/\varphi'(y)$ ♦

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть функция ***y*** от ***x*** задана параметрическими уравнениями: $\left.\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}\right\} \; t_0 \leq t \leq T$. Производная такой функции определяется по формуле

$$\boxed{y'_x = y'_t / x'_t}$$

Пример. Дана функция $x = t^3$, $y = t^2$. Найти y'_x.

*Решение***.** Имеем $x' = 3t^2$, $y' = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{3t^2}$.

2.3. Таблица основных формул дифференцирования

$u = u(x)$- дифференцируемая функция

1. $y = C \quad \mapsto \quad y' = 0$
2. $y = u^n \quad \mapsto y' = nu^{n-1}u'$
3. $y = \sqrt{u} \quad \mapsto \quad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
4. $y = \dfrac{u'}{u} \quad \mapsto y' = -\dfrac{u'}{u^2}$
5. $y = \sin(u) \quad \mapsto \quad y' = \cos(u)u'$
6. $y = \cos(u) \quad \mapsto \quad y' = -\sin(u)u'$
7. $y = tg(u) \quad \mapsto y' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$
8. $y = ctg(u) \quad \mapsto \quad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2(u)}$
9. $y = \arcsin(u) \quad \mapsto \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. $y = \arccos(u) \mapsto \quad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $y = arctg(u) \quad \mapsto \quad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
12. $y = arcctg(u) \mapsto \quad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
13. $y = a^u \quad \mapsto \quad y' = a^u \ln(a)u'$
14. $y = e^u \quad \mapsto \quad y' = e^u u'$
15. $y = \log_a(u) \mapsto \quad y' = \dfrac{u'}{u}\log_a(e)$
16. $y = \ln(u) \quad \mapsto \quad y' = \dfrac{u'}{u}$
17. $y = sh(u) \quad \mapsto \quad y' = ch(u)u'$
18. $y = ch(u) \quad \mapsto \quad y' = sh(u)u'$

19. $y = th(u) \quad \mapsto \; y' = \dfrac{u'}{ch^2(u)}$

20. $y = cth(u) \mapsto \; y' = -\dfrac{u'}{sh^2(u)}$

2.4. Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке [a,b]. Дифференциал этой функции определяется по формуле $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал независимого переменного ***dx*** совпадает с его приращением Δx: *dx=Δx*. Поэтому последнее равенство можно записать так: $dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Приращение функции отличается от дифференциала функции на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δx $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$. Поэтому в вычислениях иногда пользуются приближенным равенством $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной. Поэтому большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняет свою силу и для дифференциалов.

1) $d(u+v) = du + dv$ 2) $d(uv) = vdu + udv$ 3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Пример. Дана функция $y = tg^2(x)$. Найти dy.

Решение. $dy = 2tg(x)\dfrac{1}{\cos^2(x)}dx = \dfrac{2tg(x)}{\cos^2(x)}dx$ ♦

Пример. Дана функция $y=x^3$. Определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98. Оценить погрешность приближенного вычисления.

Решение. Если x есть точное значение измеряемой величины, «a» – приближенное значение этой величины, то Δ=|x-a| называется абсолютной погрешностью, а $\delta = \Delta/|a|$ относительной погрешностью измеряемой величины.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$

$$= +3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = 3\cdot 2^2 \cdot (-0{,}02) + 3\cdot 2\cdot(-0{,}02)^2 + (-0{,}02)^3 =$$

=0,2376. Здесь x=2, Δx=1,98-2=-0,02

$y`=3x^2$, $dy=3x^2dx=3\cdot 2^2\cdot(-0{,}02)=-0{,}24$

$\Delta=|-0{,}24+0{,}2376|=0{,}0024$ $\qquad \delta = \dfrac{0{,}0024}{0{,}2376}\cdot 100\% \approx 1\%$

2.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируемая на отрезке [a,b]. Производная $f'(x)$ в общем случае есть функция от **x**. Дифференцируя эту функцию, мы получаем вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной функции $f(x)$ называется второй производной от этой функции и обозначается $y'' = (y')' = f''(x)$

По индукции, производной **n**-го порядка от функции $f(x)$, называется производная от производной **(n-1)**–го порядка и обозначается $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$

Примеры. 1). Дана функция $y = x^m$. *Найти* $y^{(n)}$.

$y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2},..., y^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}$

2). $y = a^x$, $y^{(n)} = ?$

$y' = a^x \ln(a), \; y'' = a^x \ln^2(a),..., \; y^{(n)} = a^x \ln^n(a)$

Имеют место очевидные формулы:

$(u+v)^n = u^{(n)} + v^{(n)}$; $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

y=uv y'=y'v+v'u y''=u''v+2u'v'+uv'' …

$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + ... + uv^{(n)}$ - формула Лейбница.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется дифференциалом второго порядка и обозначается $d(dy) = d^2y$

Найдем выражение второго дифференциала $d^2y = [f'(x)dx]'dx$

Так как dx не зависит от **x**, то dx выносится за знак производной, и мы получаем $d^2y = f''(x)dx^2$

По индукции, дифференциалом **n**-го порядка называется дифференциал от дифференциала (**n-1**) – го порядка: $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$

2.6. Раскрытие неопределенностей

Теорема 1 (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке [a,b] удовлетворяют условиям теоремы Коши $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Замечание 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi'(x)=0$ и производные f'(x) и φ'(x) на отрезке [a,b] удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то, применяя эту теорему к отношению $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и так далее.

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в случае когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$

Примеры: 1) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-Sin(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-Sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}=\frac{1+1}{1}=2$$

2) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{x+3}$. *Решение* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}}{1}=1$

Раскрытие неопределенностей вида ∞/∞

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы при всех $x\neq a$ в окрестности точки **a**, причем $\varphi'(x)\neq 0$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, и если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$

Замечание 1. Последнее равенство справедливо и при A=∞

Замечание 2. Доказанная теорема распространяется на случай, когда x→∞

Замечание 3. Полученные формулы справедливы лишь тогда, когда предел, стоящий справа (конечный или бесконечный) существует.

К предыдущим случаям сводятся случаи других неопределенностей, которые символически записывают так:

a) $0\cdot\infty$; b) 0^0; c) ∞^0; d) 1^∞; e) $\infty-\infty$, и смысл которых состоит в следующем.

a). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, требуется найти $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]$. Это, неопределенность типа $0\cdot\infty$, которое легко преобразуется к неопределенности вида $0/0$ *или* ∞/∞. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$

b). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, требуется найти $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ или, как говорят, раскрыть неопределенность вида 0^0. Положив $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, прологарифмируем обе части равенства $\ln y=\varphi(x)\ln[f(x)]$. Определив

$\lim\limits_{x\to a}\ln(y)=\ln\left(\lim\limits_{x\to a}(y)\right)$, и если $\ln\left(\lim\limits_{x\to a}(y)\right)=b$, то очевидно, что $\lim\limits_{x\to a}(y)=e^b$. Если b=+∞, то $\lim\limits_{x\to a}(y)=+\infty$, если b=-∞, то $\lim\limits_{x\to a}(y)=0$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^x\right)$. Положив $y=x^x$, находим:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(y)\right)=\lim_{x\to 0}(\ln(y))=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(x^x\right)\right)=\lim_{x\to 0}(x\ln(x))==\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}x=0,$$

следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(y)\right)=0$. Откуда $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$

2.7. Задачи по разделу «Производная»

2.7.1. Решение задач.

1. Найти производную функции $y=6\sqrt[3]{x^2}-7tgx$

Решение. $y'=\left(6\sqrt[3]{x^2}\right)'-(7tgx)'=6\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'-7(tgx)'=6\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-7\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-\frac{7}{\cos^2 x}$

2. Найти производную функции $y=\frac{3x^3}{e^x}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{3x^3}{e^x}\right)'=\frac{3\left(x^3\right)'\cdot e^x-3x^3\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{3\cdot 3x^2e^x-3x^3e^x}{e^{2x}}=\frac{3x^2e^x(3-x)}{e^{2x}}=\frac{3x^2(3-x)}{e^x}$$

3. Найти производную функции $y=\left(2x^2-x+1\right)\cdot e^{2x}$

Решение. $y'=\left(2x^2-x+1\right)'\cdot e^{2x}+\left(2x^2-x+1\right)\cdot\left(e^{2x}\right)'=(4x-1)e^{2x}+\left(2x^2-x+1\right)\cdot e^{2x}(2x)'$

$$y'=(4x-1)e^{2x}+\left(2x^2-x+1\right)\cdot e^{2x}(2x)'=(4x-1)e^{2x}+\left(2x^2-x+1\right)\cdot e^{2x}2$$

$$y'=e^{2x}\left(4x-1+4x^2-2x+2\right)=e^{2x}\left(4x^2+2x+1\right)$$

4. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=arctg(1+t)\\ y=\sqrt{t^2+2t+2}\end{cases}$. *Решение.* Применим формулу $y'_x=y'_t/x'_t$.

$$x'_t=\frac{1}{1+(1+t)^2}(1+t)'=\frac{1}{2+2t+t^2}\cdot 1=\frac{1}{2+2t+t^2},$$

$$y'_t=\frac{1}{2\sqrt{t^2+2t+2}}\left(t^2+2t+2\right)'=\frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+2}}=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}$$

$$y'_x=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\Bigg/\frac{1}{2+2t+t^2}=\frac{(t+1)\left(2+2t+t^2\right)}{\sqrt{t^2+2t+2}}=(t+1)\sqrt{t^2+2t+2}$$

5. Найти производную функции, заданной неявно $y^2+5x^2+2xy+13=0$

Найдём производную от обеих частей равенства, считая ***y*** функцией ***x***.

$2yy' + 5\cdot 2x + (2x)' y + 2x\cdot 1\cdot y' + 0 = 0 \rightarrow 2yy' + 10x + 2y + 2xy' = 0$

Слагаемые с множителем y' оставим в левой части равенства, а два других перенесём в правую часть с противоположным знаком. $2yy' + 2xy' = -10x - 2y$

$y'(2y + 2x) = -10x - 2y \rightarrow y' = -(10x + 2y)/(2y + 2x) = -(5x + y)/(y + x)$.

6. Найти производную функции сложной функции $y = arcctg\left(e^{5x}\right)$

Применим формулу $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$. В нашем случае $u = e^{5x}$.

Получаем $y' = arcctg\left(e^{5x}\right)' = \frac{\left(e^{5x}\right)'}{1+\left(e^{5x}\right)^2} = \frac{e^{5x}(5x)'}{1+e^{10x}} = \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}$. Здесь мы применили правило дифференцирования сложной функции.

7. Найти производную функции $y = (\cos x)^{tgx}$.

Прологарифмируем данную функцию $\ln y = tgx\ln(\cos x)$. Найдём производную от обеих частей равенства

$$\frac{y'}{y} = (tgx)'\ln(\cos x) + (tgx)(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\cos x) + tgx\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} + tgx\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} - tg^2 x \rightarrow y' = y\left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} - tg^2 x\right) = \cos x$$

8. Найти производную функции $y = x\ln\sqrt{x^2 + a^2}$

Решение.

$$y' = x'\cdot\ln\sqrt{x^2+a^2} + x\left(\ln\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \ln\sqrt{x^2+a^2} + x\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\left(x^2+a^2\right)'$$

$$y' = \ln\sqrt{x^2+a^2} + x\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\left(x^2+a^2\right)' = \ln\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{x^2+a^2}$$

2.7.2. Задачи для самостоятельного решения и домашнего задания

Найти производные в точке ***x***:

1. $y = 2x^7 - 5x^2 + 2\sqrt{x} + 1$	2. $y = 7/x^2$	3. $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$
2. $y = \sqrt[7]{x}\ln x$	5. $y = 3x^2\ln x - x^2$	6. $y = 3^{2x}\cdot 2^{-3x}$
7. $y = 2x^2\sin x$	8. $y = 4^x tgx$	9. $y = \sqrt[3]{x}\cdot 3^x$
10. $y = x^3\arcsin x$	11. $y = x/(x^2 - 1)$	12. $y = \sqrt{x}/(\sqrt{x} + 1)$
13. $y = (1 + e^x)/(1 - e^x)$	14. $y = x^2/(x^2 + 1)$	15. $y = \sqrt{1 - x^2}$
16. $y = \sin(x/4)$	17. $y = \ln\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$	18. $y = \ln\frac{x+2}{x-2}$
19. $y = 3^{\cos^2 x}$	20. $y = \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$	21. $y = \ln\frac{x^2}{1 - x^2}$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите приращение функции. Дайте определение производной.
2. Что такое дифференцирование функции? Каков геометрический смысл производной?
3. Запишите правила дифференцирования функций.
4. Как найти производную от сложной функции? Покажите на примере.
5. Дифференцирование неявной функции.
6. Дифференцирование обратной функции.
7. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями.
8. Приведите формулы дифференцирования тригонометрических функций.
9. Приведите формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций.
10. Приведите формулы дифференцирования степенной, показательной и логарифмической функций.
11. Что называется дифференциалом? Чем отличается дифференциал от приращения функции?
12. Приведите формулы нахождения дифференциала от суммы, произведения и частного.
13. Дайте определения производной второго порядка. Покажите на примере нахождение производной второго порядка.

3. Исследование функций с помощью производных

3.1. Убывание и возрастание функций. Точки экстремума.

Функция называется строго возрастающей на отрезке [a,b], если $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция называется строго убывающей на отрезке [a,b], если $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

f'(x)	Поведение функции
+	возрастает
-	убывает

Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет максимум, если в окрестности точки x_1 выполняется условие $f(x_1+\Delta x)< f(x_1)$.

Функция $f(x)$ в точке x_2 имеет минимум, если в окрестности точки x_2 выполняется условие $f(x_2+\Delta x)> f(x_2)$.

Максимумы и минимумы функции называют экстремумами функции.

Если производная, не существует в какой – либо точке, то в этой точке производная терпит разрыв.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими точками.

Знаки f'(x) при переходе через критическую точку x_1			Характер критической точки
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ или разрывна	-	Точка максимума
-	$f'(x_1)=0$ или разрывна	+	Точка минимума
+	$f'(x_1)=0$ или разрывна	+	Функция возрастает
-	$f'(x_1)=0$ или разрывна	-	Функция убывает

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	-	max
0	+	min
0	0	-

Пример. Дана функция $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.

Решение. Найдём производную функции: $y'=x^2-5x+6$. Вычислим значения **x**, при которых $y'=0$: $x^2-5x+6=0 \rightarrow x_1=2$, $x_2=3$. Точки $x_1=2$ и $x_2=3$ являются критическими. Рассмотрим промежутки: $(-\infty,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$ определим знак производной в каждом из них. Пусть $x=0$ $y'(0)=0^2-0\cdot x+6=6>0$. На промежутке $(-\infty,2)$ $y'>0$. Положим $x=2{,}5$ $y'(2{,}5)=2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+6=-0{,}25<0$. На промежутке $(2,3)$ $y'<0$. Пусть теперь $x=4$, тогда $y'(4)=4^2-5\cdot 4+6=2>0$.

Следовательно, на промежутке $(2,3)$ функция убывает, а на множестве $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ функция возрастает. При переходе через критическую точку $x_1=2$ производная меняет знак с + на -, а при переходе через критическую точку $x_2=3$ производная меняет знак с - на +. Из таблицы следует, что в точке $x_1=2$ функция имеет максимум, а в точке $x_2=3$ - минимум

При нахождении наибольшего значения на отрезке [a,b] некоторой функции f(x) необходимо:

- найти все максимумы функции на отрезке;
- определить значения функции на концах отрезка, то есть вычислить f(a) и f(b);
- из всех полученных значений функции выбрать наибольшее. Аналогично определяется и наименьшее значение функции на отрезке.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на отрезке $[-2;1]$.

Решение. Находим критические точки данной функции $f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$; $f'(x)=0 \to 12x^2(x+1)=0 \to x_1=0$, $x_2=-1$. $x_1 \in [2;1]$ и $x_2 \in [2;1]$. Находим $f(0)=1$, $f(-1)=3-4+1=0$, $f(-2)=48-32+1=17$, $f(1)=8$. Итак, $f_{наим}=0$ в точке $x=-2$, $f_{наиб}=17$ в точке $x=-1$

3.2. Выпуклость и вогнутость графика функции

Кривая называется выпуклой на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется вогнутой на интервале (b,c), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой или отделяющая вогнутую часть кривой от выпуклой, называется точкой перегиба.

f''(x)	Характеристика кривой
+	вогнутая ∪
-	выпуклая ∩

Пример. Исследовать функцию $y=x^5-x+5$ на выпуклость и вогнутость и найти точки перегиба графика этой функции.

Решение. Найдём вторую производную от данной функции и приравняем её к нулю: $y'=5x^4-1$, $y'''=20x^3$, $20x^3=0 \to x=0$. Отмечаем $y'''>0$ при $x>0$; $y'''<0$ при $x<0$.

Следовательно, график функции $y=x^5-x+5$ в интервале $(-\infty,0)$ выпуклый, а в интервале $(0,\infty)$ вогнутый. Точка $(0;5)$ есть точка перегиба.

3.3. Асимптоты

Часто приходится исследовать форму кривой y=f(x) при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно.

Прямая А называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки М кривой до прямой при удалении точки М в бесконечность стремится к нулю.

Прямая x=a называется вертикальной асимптотой кривой y=f(x), если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Прямая y=b называется горизонтальной асимптотой кривой y=f(x), если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ *или* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$

Теорема. Если прямая y=kx+b является наклонной асимптотой кривой $y=kx+b$, то k и b вычисляются по формулам

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]\ \ldots(1)$$

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=x\cdot e^{x}$.

Решение. Так как функция определена для всех значений аргумента, то вертикальных асимптот нет.

По определению горизонтальной асимптоты имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{x}=\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^{x}=\left|x=-t,\ t\to+\infty\right|=\lim_{t\to+\infty}(-t)\cdot e^{-t}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}=0\cdot$$

Следовательно, прямая $y=0$ есть горизонтальная асимптота. Наклонных асимптот нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}=\infty$

3.4. Построение графиков функций по характерным точкам

Исследование функции и построение графика производится в следующем порядке:

1. найти область определения функции;
2. исследовать функцию на четность и нечетность;
3. найти точки пересечения графика с осями координат;
4. исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой;
5. найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;
6. найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой;
7. построить график по характерным точкам.

Иногда порядок исследования целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором отрезке? Покажите на примере.
2. Как определить интервалы возрастания и убывания функции с помощью производной? Покажите на примере.
3. Что называется минимумом (максимумом) функции на некотором интервале?
4. Какие точки называются критическими?
5. Как определить точки максимума и минимума функции с помощью первой производной? Покажите на примере.
6. Как определить точки экстремума функции с помощью второй производной? Покажите на примере.

7. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой) на некотором интервале?
8. Что такое точки перегиба и как их найти?
9. Что называется асимптотой? Какие асимптоты могут быть?
10. Приведите формулы нахождения вертикальной и наклонной асимптот.
11. Приведите формулы определения наклонной асимптоты.

4. Функции нескольких переменных

4.1. Общие понятия

Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин ***x*** и ***y***, из некоторой области их изменения ***D***, соответствует определенное значение величины ***z***, то говорят, что ***z*** есть функция двух независимых переменных ***x*** и ***y***, определенная в области ***D***.

Обозначение: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$.

Совокупность пар (x, y) значений ***x*** и ***y***, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения этой функции (ООФ)

ООФ геометрически представляет собой совокупность точек на плоскости или всю плоскость.

Линию, ограничивающую какую-либо часть плоскости (области) будем называть *границей* области.

Точки области, не лежащие на границе, будем называть *внутренними* точками области.

Если к области относятся внутренние точки и точки границы, то область называется *замкнутой*.

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*.

Область называется *ограниченной*, если существует такое постоянное число c, что для любой точки ***M*** области выполняется неравенство $|OM| < c$, где O - начало координат.

Примеры: 1. $z = 5x + 2y$. ООФ – вся плоскость. 2. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. ООФ круг с центром в начале координат и радиусом равным 3.

3.2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ (1), определенную в области ***D*** на плоскости Oxy и систему декартовых координат $Oxyz$

В каждой точке (x,y) восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок равный $f(x,y)$. Тогда получим в пространстве точку P с координатами $x, y, z = f(x,y)$.

Множество точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называются *графиком* функции двух переменных.

Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение (1) в пространстве определяет некоторую поверхность. Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, которая проектируется на плоскость Oxy в область определения функции ***D***.

4.3. Частное и полное приращение функции. Частные производные. Полный дифференциал

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, заданную в области ***D*.** Дадим ***x*** приращение Δx, а ***y*** будет const, тогда ***z*** получить приращение, которое называют *частным приращением z по* ***x*** и обозначают через $\Delta_x z$, так что $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ …(2).

Аналогично, если ***x*** сохраняет постоянное значение, а ***y*** получает приращение, то приращение $\Delta_y z$ называют *частным приращением* ***z*** *по* ***y***
$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ …(3).

Дав аргументу ***x*** приращение Δx, а аргументу ***y*** приращение Δy, получим для ***z*** приращение Δz, которое называется *полным приращением функции z*:
$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$...(4)

Частной производной по ***x*** функции $z = f(x,y)$ называется предел отношения $\Delta_x z$ к приращению Δx при $\Delta x \to 0$. Обозначение: z'_x, $f'_x(x,y)$, $\partial z/\partial x$, $\partial f/\partial x$.

По определению $$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Частной производной по ***y*** функции $z = f(x,y)$ называется предел отношения $\Delta_y z$ к приращению Δy при $\Delta y \to 0$. Обозначение: z'_y, $f_y{}'(x,y)$, $\partial z/\partial y$, $\partial f/\partial y$.

По определению $$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Полное приращение функции $z = f(x,y)$ имеет вид вид:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\Delta y + \gamma_1\cdot\Delta x + \gamma_2\cdot\Delta y \qquad \ldots(1).$$

Сумма двух последних слагаемых является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy и представляет собой *главную* часть приращения.

Главная часть приращения функции $z = f(x,y)$ называется полным дифференциалом и обозначается dz или df.

С учетом сказанного, равенство (1) принимает вид:

$dz = f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y$, но $\Delta z = dz + \gamma_1\cdot\Delta x + \gamma_2\cdot\Delta y$, тогда $\Delta z \approx dz$.

Приращения независимых переменных будем называть дифференциалами независимых переменных x и y и обозначать dx и dy

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ - выражение полного дифференциала функции двух переменных *z=f(x,y)*.

4.4. Поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент.

Пусть в пространстве R_3 имеется область V, в которой задана функция $u = u(x,y,z)\ldots(1)$. В этом случае говорят, что задано *скалярное поле* в области V.

Рассмотрим точки в области V, в которых функция $u(x,y,z)$ имеет постоянное значение c: $u(x,y,z) = c \quad \ldots(2)$.

Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Давая c различные значения, получим различные поверхности, которые называются *поверхностями уровня*.

Пример. Определить линии уровня функции $z = 1 - x^2 - y^2$.

Решение. Линиями уровня будут линии с уравнениями $1 - x^2 - y^2 = c$. Это окружности с радиусом $\sqrt{1-c}$. В частности при $c = 0$ имеем $x^2 + y^2 = 1$.

Производная функции $u = u(x,y,z)$ *по направлению вектора* S *в произвольной точке M(x,y,z)* имеет вид $\boxed{\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma}$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ - частные производные в точке М.

Пусть в области V задана функция $u = u(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные.

Градиентом функции $u(x, y, z)$ называется вектор, определяемый по формуле: $\boxed{gradu = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k}$

Пример. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$ и точка $M(1,1,1)$. Найти $(gradu)_M$, $(\partial u / \partial (gradu))_M$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$, $gradu = 2xi + 2yj + 2zk$

$(gradu)_M = 2i + 2j + 2k$

$|gradu|_M = 2\sqrt{3}$ $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$, $\cos\gamma = 1/\sqrt{3}$

$\frac{\partial u}{\partial (gradu)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial (gradu)} = |gradu|$.

Замечание. Если $u = u(x, y)$, то градиент равен $gradu = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$ и лежит в плоскости Oxy.

4.5. Частные производные различных порядков. Экстремумы.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ являются функциями переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Поэтому от них можно снова находить частные производные. Обозначения вторых частных производных: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ имеет *максимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в окрестности этой точки выполняется условие $f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в окрестности этой точки выполняется условие $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то $\partial f(x_0, y_0)/\partial x = 0$, $\partial f(x_0, y_0)/\partial y = 0$ или $\partial f(x_0, y_0)/\partial x$ и $\partial f(x_0, y_0)/\partial y$ не существует.

Точки, в которых $\partial z/\partial x = 0$ и $\partial z/\partial y = 0$ (или не существует), называются *критическими* точками функции $z = f(x, y)$.

Введем обозначения $\left(\partial^2 f/\partial x^2\right)_{M_0} = A$, $\left(\partial^2 f/\partial x\partial y\right)_{M_0} = B$, $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)_{M_0} = C$.

Теорема 2. Если в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$ $\partial f(x_0, y_0)/\partial x = 0$, $\partial f(x_0, y_0)/\partial y = 0$, то при $x = x_0$, $y = y_0$.

1. $f(x, y)$ имеет *максимум,* если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$;
2. $f(x, y)$ имеет *минимум,* если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$;
3. $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если $AC - B^2 < 0$;
4. Требуется дополнительное исследование, если $AC - B^2 = 0$.

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Решение.

1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2 \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

2. $$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

Следовательно, в точке $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ данная функция имеет минимум $z_{\min} = -\frac{4}{3}$.

Замечание. Теория максимумов и минимумов функции нескольких переменных является основной для *метода наименьших квадратов.*

4.6. Метод наименьших квадратов

В основе метода наименьших квадратов (МНК), используемого для получения формул функциональных зависимостей на основании экспериментальных данных, лежит теория экстремумов функции нескольких переменных.

Пусть на основании эксперимента требуется установить (1) функциональную зависимость величины ***y*** от величины ***x***: ***y=*** φ ***(x)***

В результате эксперимента получено “***n***” значений функции ***y*** при соответствующих значениях ***x***. См. таблицу

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

Вид функции ***y=*** $\varphi(x)$ устанавливается или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих экспериментальным значениям.

Если точки расположены на координатной плоскости как показано на рисунке **a**, то функцию ***y=φ(x)*** следует искать в виде ***y = ax+b*** . Если точки (x_i, y_i)

расположены как показано на рисунке 8 ***б***, то функция ***y= φ(x)*** ищется в виде ***y=ax*** ^{b} **.**

При выбранном виде функции ***y = φ(x,a,b, …m)*** необходимо подобрать параметры ***a,b, …m*** *по методу наименьших квадратов*. Рассмотрим сумму квадратов разностей значений y_i и функции ***φ (x,a,b,…m)*** в соответствующих точках: $S(a,b,...m)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,..m)]^2$ …(2)

Параметры ***a,b, …m*** подбираются так, чтобы сумма ***S*** имела наименьшее значение: $\boxed{S(a,b,...m)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,...m)]^2=\min}$ …(3)

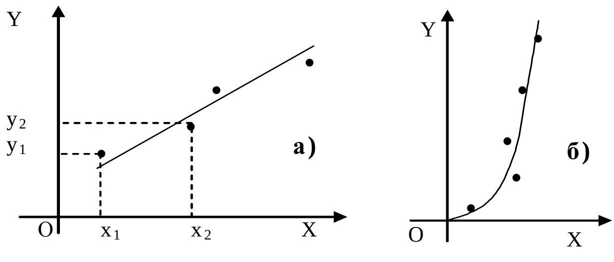


Рис. Пояснение к выбору формулы по расположению экспериментальных данных (точек) на плоскости ОХУ.

Функция ***S(a,b, …m)*** имеет ***min***, если $\frac{\partial S}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b}=0,\ ,\cdots\ \frac{\partial S}{\partial m}=0\cdots$ (4)

И мы имеем ***n*** уравнений с ***n*** неизвестными. Решая полученную систему, находим ***a,b, …m***

Пусть ***y=ax+b***. Составим сумму квадратов разностей значений y_i и функции ax_i+b. $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2$ … (5)

Найдём частные производные функции $S(a,b)$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]x_i=0\\ \frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]=0\end{cases}$$

Сделаем преобразования системы уравнений.

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\\ a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\end{cases} \quad \ldots(6)$$

Введём обозначения $A=\sum_{i=1}^{n} x_i$, $B=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$, $C=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, $D=\sum_{i=1}^{n} y_i$

Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases}Ba + Ab = C\\ Aa + nb = D\end{cases} \quad \ldots(7)$$

Решая систему (7), например, по формулам Крамера, легко можем найти неизвестные параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задача. Методом наименьших квадратов определить зависимость между величинами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по экспериментальным данным.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	0.33	0.49	0.59	0.65	0.71	0.75	0.87	0.81

Решение. Для записи системы (7) вычислим суммы $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Составим таблицу

X	1	2	3	4	5	6	7	8	**36**
Y	0.33	0.49	0.59	0.65	0.71	0.75	0.77	0.81	**5.1**
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	**204**
$x_i y_i$	0.33	0.98	1.77	2.60	3.55	4.50	5.39	6.48	**25.6**

Получаем систему уравнений $\begin{cases}204a + 36b = 25.6\\ 36a + 8b = 5.1\end{cases}$. В результате решения этой системы получаем, *a≈0,063, b≈0,354.* Уравнение зависимости величины у от величины х принимает следующий вид $y = 0{,}063x + 0{,}354$.

4.7. Задачи по разделу «Функции нескольких переменных»

4.7.1. Решение задач.

1. Найти частные производные функции двух переменных $z = x^2 - y^3 - 2x + 12y$.

Решение. Вычисляем производную по $\boldsymbol{x}$, считая $\boldsymbol{y}$ константой.

$$z'_x = \left(x^2\right)' - \left(y^3\right)' - 2(x)' + 12(y)' = 2x - 0 - 2 + 0 = 2x - 2$$

Теперь вычисляем производную по $\boldsymbol{y}$, считая $\boldsymbol{x}$ константой.

$$z'_y = \left(x^2\right)' - \left(y^3\right)' - 2(x)' + 12(y)' = 0 - 3y^2 - 0 + 12 = -3y^2 + 12.$$

Ответ: $z'_x = 2x - 2$, $z'_y = -3y^2 + 12$.

2. Найти частные производные z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy} функции $z = x^3 + 7x^2 + 8x - y^2 + 4y$ в точке M(1;1).

Решение. Вычисляем производную по ***x***, считая ***y*** константой.

$z'_x = 3x^2 + 14x + 8 - 0 + 0 = 3x^2 + 14x + 8$.

Вычисляем производную по ***y***, считая ***x*** константой.

$z'_y = 0 + 0 + 0 - 2y + 4 = 2y + 4$.

Теперь вычисляем производную от производной первого порядка $z'_x = 3x^2 + 14x + 8$ по переменной ***x***: $z''_{xx} = \left(3x^2 + 14x + 8\right)'_x = 6x + 14$

Вычисляем производную от производной первого порядка $z'_y = 2y + 4$ по переменной у: $z''_{yy} = \left(2y + 4\right)'_y = 2$.

Наконец вычисляем производную от производной первого порядка $z'_x = 3x^2 + 14x + 8$ по переменной ***y***: $z''_{xy} = \left(6x + 14\right)'_y = 0$.

Вычислим значения производных в точке M: $\left(z''_{xx}\right)_M = \left(6x + 14\right)_M = 6 \cdot 1 + 14 = 20$

Ответ: $z''_{xx} = 20$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = 0$

3. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x + y + z}$, если $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

Решение. Применим формулу $\left(\ln u\right)' = u'/u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)'_x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2 - 3xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 3\frac{x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = 3\frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz}{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)},$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x + y + z}$. Что и т. д.

4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

Решение. Применим формулу $\left(arctgu\right)' = u'/u$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\frac{0-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'=-\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Что и т. д.

5. Даны функции $z=2x^3+3x^2y+y^2+xy$ точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a}=4i-3j$. Найти: 1) $gradz$ в точке A; 2) производную в точке А по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение. 1) Применим формулу вычисления $gradz$ в точке A.

$$\left(gradu\right)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cdot i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cdot j$$

Вычислим частные производные в точке A:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A=\left(6x^2+6xy+y\right)_A=6\cdot 1+6\cdot 1\cdot 1+1=13,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A=\left(3x^2+2y+x\right)_A=3\cdot 1+2\cdot 1+1=6$$

$$\left(gradu\right)_A=13i+6j$$

2) Применим формулу вычисления производной по направлению вектора $\vec{a}$ в точке A: $\left(\frac{\partial u}{\partial S}\right)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cdot\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cdot\cos\beta$.

Частные производные в точке A найдены: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A=13$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A=6$. Вычислим направляющие косинусы вектора $\vec{a}=4i-3j$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-3}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_A = 13 \cdot \frac{4}{5} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

Ответ: 1) $(gradu)_A = 13i + 6j$, 2) $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_A = 6{,}8$

4.7.2. Задачи для самостоятельного решения и домашнего задания

Найти частные производные от функций:

1. $z = 2x^2 - xy^2 + 3x^2y$
2. $u = yx^2 + xz^2 + y^2z$
3. $z = x^3 \cos 4y$
4. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}$
5. $z = \ln(x^2 + y^2)$
6. $z = \frac{xy}{x + y}$
7. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{-z}{y}}$
8. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$
9. $z = xye^{x+2y}$

Найти производные приведённых функций по направлению вектора $\vec{a}$ в заданной точке:

1. $z = x^3y - 5xy^2 + 8$, $\vec{a} = i + j$ в точке М(1;1)
2. $z = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$, $\vec{a} = 6i + 8j$ в точке М(1;2)
3. $z = \ln(e^x + e^y)$, $\vec{a} = i + j$ в точке М(0;0)

Найти $gradz$ и $|gradz|$:

1. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ в точке М(0;3)
2. $z = (x - y)^2$ в точке М(1;1)
3. $z = \frac{e^{x^2+y^2}}{2xy}$ в точке М(1;1).

Найти экстремумы функции двух переменных:

1. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$
2. $z = 6x^3 + 6xy + y^2$
3. $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3$
4. $z = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
5. $z = x^2 - y^3 - 2x + 12y$
6. $z = -2x^3 + 6xy + 3y^2$
7. $z = x^3 + 7x^2 + 8x - y^2 + 4y$
8. $z = x^3 - 9xy + y^3$

9. $z=-xy+(2/x)+(4/y)$

10. $z=x^2+3y^3-2x-9y$

11. $z=xy+\dfrac{9}{x}+\dfrac{3}{y}$

12. $z=2x^2+y^3-4x-27y$

13. $z=-x^3-8y^3+6xy$

14. $z=-xy+\dfrac{9}{x}+\dfrac{3}{y}$

15. $z=12x^3-6xy+0.5y^2$

16. $z=2x^3+6xy^2-30x-24y$

17. $z=6x^2y+2y^3-24x-30y$

18. $z=x^3-6xy-8y^3+1$

19. $z=x^3-xy^2+3x^2+y^2-1$

20. $z=e^{-2x^2\left(x-y^2\right)}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции двух переменных.
2. Что такое область определения функции двух переменных.
3. Какая область называется замкнутой, открытой, ограниченной?
4. Что называется графиком функции двух переменных?
5. Запишите частное и полное приращение двух переменных.
6. Дайте определение частных производных. Запишите формулу полного дифференциала двух переменных.
7. Чем отличается полный дифференциал от полного приращения функции?
8. Запишите формулу расчета производной по направлению.
9. Дайте определение градиента.
10. Дайте определение максимума и минимума функции двух переменных.
11. В чём сущность метода наименьших квадратов?

5. Задачи контрольного задания

Задачи №1-10. Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x$

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x}{2-x+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$

Задачи №11-20. Найти производные данных функций

11. 1. $y=3x^5-\sin x$ 2. $y=\sqrt{x}\cdot tgx$ 3. $y=\left(x^2+2x-1\right)\cdot e^{2x}$

4. $\begin{cases}x=\arcsin(2t)\\ y=1/(1-4t^2)\end{cases}$ 5. $y^3-3x^2-2xy-12=0$

12. 1. $y=4x^4+e^x$ 2. $y=\sin x\cdot\ln x$ 3. $y=\left(x^2+2x-1\right)\cdot e^{-x}$

4. $\begin{cases}x=(1-t)^2\\ y=\cos(t-1)^2\end{cases}$ 5. $3y^2-2x^3+5xy-8=0$

13. 1. $y=3\sqrt[3]{x}-\ln x$ 2. $y=e^x\cdot\arcsin x$ 3. $y=\left(x^2+2x-1\right)\cdot e^{-2x}$

4. $\begin{cases}x=(t-1)^2\\ y=\sin(t-1)^2\end{cases}$ 5. $y^4+3x^3-2x^2y=0$

14. 1. $y=5x^2-\arcsin x$ 2. $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\ln x$ 3. $y=\left(x^2+2x-1\right)\cdot e^{-3x}$

4. $\begin{cases}x=tg\left(t^2\right)\\ y=t^2-5\end{cases}$ 5. $2y^3+x^3-5xy^2+2=0$

15. 1. $y=4\sqrt[4]{x}+arctgx$ 2. $y=\frac{\ln x}{4-3\cos x}$ 3. $y=\left(3x^2+x-5\right)\cdot e^{4x}$

4. $\begin{cases}x=7+t^2\\ y=ctg\left(3t^2\right)\end{cases}$ 5. $3y^4+4x^3-4x^2y+7=0$

16. 1. $y=5\sqrt[5]{x}-7arctgx$ 2. $y=\frac{3x^5}{e^x}$ 3. $y=\left(2x^2+5x-9\right)\cdot e^{-x}$

4. $\begin{cases} x = \ln(1 - t^4) \\ y = \arccos(t^2) \end{cases}$ 5. $y^2 + 5x^3 + 4xy + 6 = 0$

17. 1. $y = 10x^3 + 2\cos x$ 2. $y = \dfrac{x^2}{ctgx}$ 3. $y = (2x^2 - x + 1) \cdot e^{2x}$ 4. $\begin{cases} x = 3/(1 + t^2) \\ y = arcctg(t) \end{cases}$ 5. $2y^4 - x^3 - 3xy^2 + 6 = 0$

18. 1. $y = 10x^3 + 2\cos x$ 2. $y = \dfrac{x^2}{ctgx}$ 3. $y = (2x^2 - x + 1) \cdot e^{2x}$

4. $\begin{cases} x = 3/(1 + t^2) \\ y = arcctg(t) \end{cases}$ 5. $2y^4 - x^3 - 3xy^2 + 6 = 0$

19. 1. $y = x^5 \cdot e^x$ 2. $y = \dfrac{ctgx}{x^4}$ 3. $y = (2x^2 + 5x - 9) \cdot e^{-2x}$

4. $\begin{cases} x = tg(t^2) \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$ 5. $3y^2 + x^3 + 4xy^2 + 1 = 0$

20. 1. $y = 6\sqrt[3]{x^2} - 7tgx$ 2. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$ 3. $y = (x^2 - 3x + 4) \cdot e^{-3x}$

4. $\begin{cases} x = arctg(1 + t)^2 \\ y = \sqrt{t^2 + 2t + 2} \end{cases}$ 5. $2y^3 + 3x^2 + x^2 y + 11 = 0$

Задачи №21-30. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить её график.

21. $y = 4x/(4 + x^2)$
22. $y = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$
23. $y = x^3/(x^2 + 1)$
24. $y = (x^2 - 5)/(x - 3)$
25. $y = 4x^3/(x^3 - 1)$
26. $y = (\ln x)/x$
27. $y = e^{2x - x^2}$
28. $y = \ln(x^2 - 4)$
29. $y = \ln(x^2 + 1)$

30. $y=\ln(9-x^2)$

Задачи №31-40. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

31. Дана функция $z=y/(x^2-y^2)^5$. Показать, что $\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy}=\frac{z}{y^2}$

32. Дана функция $z=y^2/(3x)+\arcsin(xy)$. Показать, что $x^2\frac{dz}{dx}-xy\frac{dz}{dy}+y^2=0$

33. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$

34. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\frac{d^2z}{dx^2}-2xy\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}+2xy=0$

35. Дана функция $z=\ln(x+e^{-y})$. Показать, что $\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}=0$

36. Дана функция $z=x/y$. Показать, что $x\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{dz}{dy}=0$

37. Дана функция $z=x^y$. Показать, что $y-\frac{d^2y}{dxdy}=(1+y\ln x)\frac{dz}{dx}$

38. Дана функция $z=xe^{y/x}$. Показать, что $x^2\frac{d^2z}{dx^2}+2xy\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}=0$

39. Дана функция $z=\sin(x+ay)$. Показать, что $\frac{d^2z}{dy^2}=a\frac{d^2z}{dx^2}$

40. Дана функция $z=\cos y+(y-x)\sin y$. Показать, что $(x-y)\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{dz}{dy}$

Задачи №41-50. Даны функции $z=z(x,y)$, точка $A(x_0,y_0)$ и вектор a. Найти: 1) $gradz$ в точке A; 2) производную в точке А по направлению вектора a

41. $z=x^2+xy+y^2$ A(1;1) $\vec{a}=2i-j$

42. $z=2x^2+3xy+y^2$ A(2;1) $\vec{a}=3i-4j$

43. $z=\ln(5x^2+3y^2)$ A(1;1) $\vec{a}=3i+2j$

44. $z=\ln(5x^2+4y^2)$ A(1;1) $\vec{a}=2i-j$

45. $z=5x^2+6xy$ A(2;1) $\vec{a}=i+2j$

46. $z=arctg\left(xy^2\right)$ A(2;3) $\vec{a}=4i-3j$

47. $z = \arcsin(x^2/y)$ A(1;2) $\vec{a} = 5i - 12j$

48. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ A(1;3) $\vec{a} = 2i - j$

49. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$ A(-1;2) $\vec{a} = 4i - 3j$

50. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$ A(1;1) $\vec{a} = 2i + j$

Задачи №51-60. Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$

51	X	1	2	3	4	5
	y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3
52	X	1	2	3	4	5
	y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5
53	X	1	2	3	4	5
	y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7
54	X	1	2	3	4	5
	y	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9
55	X	1	2	3	4	5
	y	5,1	6,1	4,6	2,6	4,1
56	X	1	2	3	4	5
	y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9
57	x	1	2	3	4	5
	y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2
58	x	1	2	3	4	5
	y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5
59	x	1	2	3	4	5
	y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7
60	x	1	2	3	4	5
	y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для Втузов, в 2 тт. М.,-Наука.-2003,2004.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1984.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. М.: Высшая школа, 2009,2007.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие. СПб., Наука, 2001. – 432с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Дифференциальное исчисление

Методические указания

Составители:
Исаков Владимир Филиппович
Лупу Вера Николаевна
Ребенков Александр Степанович

Редактор Туманова Е.М.
Подписано в печать Формат 60*84 1/16
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 2,09. Уч. изд.л. 1,4 .
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульской обл., Дружбы, 8.