

### 3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### Основные формулы

Закон Кулона

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2},$$

где  $F$  - сила взаимодействия точечных зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $r$  - расстояние между зарядами;  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость;  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная.

Напряжённость электрического поля и потенциал

$$E = F/Q, \quad \varphi = \Pi/Q,$$

где  $\Pi$  - потенциальная энергия точечного положительного заряда  $Q$ , находящегося в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электрическом поле, и потенциальная энергия этого заряда

$$F = QE, \quad \Pi = Q\varphi.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей),

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i,$$

где  $E_i$ ,  $\varphi_i$  - напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого  $i$ -м зарядом.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}$$

где  $r$  - расстояние от заряда  $Q$  до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиусом  $R$  на расстоянии  $r$  от центра сферы:

$$\text{а) } E = 0; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} \quad (\text{при } r < R);$$

$$\text{б) } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} \quad (\text{при } r = R);$$

$$\text{в) } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r} \quad (\text{при } r > R);$$

где  $Q$  - заряд сферы.

Линейная плотность заряда

$$\tau = Q/\ell.$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = Q/S.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами. Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью  $\tau$ , то на линии выделяется малый участок длиной  $d\ell$  с зарядом  $dQ = \tau d\ell$ . Такой заряд можно рассматривать как точечный и применять формулы

$$dE = \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \frac{r}{r}, \quad d\varphi = \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

где  $r$  - радиус-вектор, направленный от выделенного элемента  $d\ell$  к точке, в которой вычисляется напряженность.

Используя принцип суперпозиции электрических полей, находим интегрированием напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  поля, создаваемого распределенным зарядом:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{\ell} \frac{d\ell}{r^2} \frac{r}{r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{\ell} \frac{d\ell}{r}.$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины  $\ell$  заряженной линии (см. пр. 5 и 8).

Напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной линией или бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где  $r$  - расстояние от нити или оси цилиндра до точки, напряженность поля в которой определяется.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon},$$

Связь потенциала с напряженностью:

а)  $E = -\text{grad}\varphi$ , или  $E = -\left(i \frac{\partial\varphi}{\partial x} + j \frac{\partial\varphi}{\partial y} + k \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$  - в общем случае;

б)  $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d$  - в случае однородного поля;

в)  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$  - в случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией.

Электрический момент диполя

$$p = |Q|l,$$

где  $Q$  - заряд;  $l$  - плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

Работа сил поля по перемещению заряда  $Q$  из точки поля с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$

$$A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Емкость

$$C = Q/\varphi, \text{ или } C = Q/U,$$

где  $\varphi$  - потенциал проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю);  $U$  - разность потенциалов пластин конденсатора.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0\epsilon S/d,$$

где  $S$  - площадь пластины (одной) конденсатора;  $d$  - расстояние между пластинами

Емкость батареи конденсаторов:

а)  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$  - при последовательном соединении;

$$\text{б) } C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \text{ - при параллельном соединении,}$$

где  $N$  - число конденсаторов в батарее.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = QU/2, \quad W = CU^2/2, \quad W = Q^2/(2C).$$

Сила постоянного тока

$$I = Q/t$$

где  $Q$  - заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время  $t$ .

Плотность тока

$$j = I/S,$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения проводника.

Связь плотности тока со средней скоростью  $\langle v \rangle$  направленного движения заряженных частиц

$$j = Qn\langle v \rangle$$

где  $Q$  - заряд частицы;  $n$  - концентрация заряженных частиц.

Закон Ома:

$$\text{а) } I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R} \text{ - для участка цепи, не содержащего ЭДС, где } \varphi_1 - \varphi_2 = U \text{ -}$$

разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи;  $R$  - сопротивление участка;

$$\text{б) } I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}}{R} \text{ - для участка цепи, содержащего ЭДС, где } \mathcal{E} \text{ - ЭДС источника}$$

тока;  $R$  - полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

$$\text{в) } I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i} \text{ - для замкнутой (полной) цепи, где } R \text{ - внешнее сопротивление}$$

цепи;  $R_i$  - внутреннее сопротивление цепи.

Законы Кирхгофа:

$$\text{а) } \sum I_i = 0 \text{ - первый закон;}$$

$$\text{б) } \sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i \text{ - второй закон,}$$

где  $\sum I_i$  - алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле;  $\sum I_i R_i$  - алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков;  $\sum \mathcal{E}_i$  - алгебраическая сумма ЭДС

Сопротивление  $R$  и проводимость  $G$  проводника

$$R = \rho \ell / S, \quad G = \gamma S / \ell,$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление;  $\gamma$  - удельная проводимость;  $\ell$  - длина проводника;  $S$  - площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление системы проводников:

$$\text{а) } R = \sum R_i \text{ - при последовательном соединении;}$$

$$\text{б) } \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} \text{ - при параллельном соединении, где } R_i \text{ - сопротивление } i\text{-го про-}$$

водника.

Работа тока:

$$A = IUt, \quad A = I^2 R t, \quad A = U^2 t / R.$$

Первая формула справедлива для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение  $U$ , последние две - для участка, не содержащего ЭДС.

Мощность тока:

$$P = IU, P = I^2R, P = U^2/R.$$

Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2Rt.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \gamma E.$$

где  $\gamma$  - удельная проводимость;  $E$  - напряженность электрического поля;  $j$  - плотность тока.

Связь удельной проводимости  $\gamma$  с подвижностью  $b$  заряженных частиц (ионов)

$$\gamma = Qn(b_+ + b_-),$$

где  $Q$  - заряд иона;  $n$  - концентрация ионов;  $b_+$  и  $b_-$  - подвижности положительных и отрицательных ионов

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Два точечных заряда  $9Q$  и  $-Q$  закреплены на расстоянии  $l = 50$  см друг от друга. Третий заряд  $Q_1$  может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда  $Q_1$ , при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда  $Q_1$  равновесие будет устойчивым?

Решение. Заряд  $Q_1$  находится в равновесии в том случае, если геометрическая сумма сил, действующих на него, равна нулю. Это значит, что на заряд  $Q_1$  должны действовать две силы, равные по модулю и противоположные по направлению. Рассмотрим, на каком из трех участков I, II, III (рис.10) может быть выполнено это условие. Для определенности будем считать, что заряд  $Q_1$  - положительный.

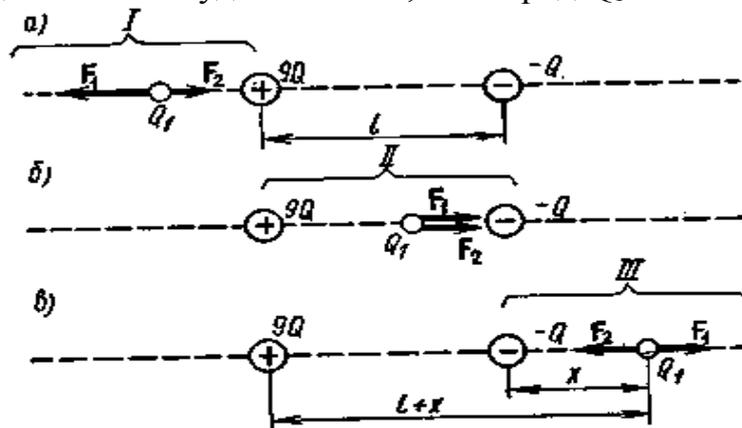


Рис. 10

На участке I (рис.10а) на заряд  $Q_1$  будут действовать две противоположно направленные силы:  $F_1$  и  $F_2$ . Сила  $F_1$ , действующая со стороны заряда  $9Q$ , в любой точке этого участка больше силы  $F_2$ , действующей со стороны заряда  $-Q$ , так как больший заряд  $9Q$  находится всегда ближе к заряду  $Q_1$ , чем меньший (по модулю) заряд  $-Q$ . Поэтому равновесие на этом участке невозможно.

На участке II (рис.10б) обе силы  $F_1$  и  $F_2$  направлены в одну сторону - к заряду  $-Q$ . Следовательно, и на втором участке равновесие невозможно.

На участке III (рис.10в) силы  $F_1$  и  $F_2$  направлены в противоположные стороны, так же как и на участке I, но в отличие от него меньший заряд  $-Q$  всегда находится

ближе к заряду  $Q_1$ , чем больший заряд  $9Q$ . Это значит, что можно найти такую точку на прямой, где силы  $F_1$  и  $F_2$  будут одинаковы по модулю, т. е.

$$F_1 = F_2 \quad (1)$$

Пусть  $x$  и  $\ell + x$  - расстояние от меньшего и большего зарядов до заряда  $Q_1$ . Выражая в равенстве (1)  $F_1$  и  $F_2$  в соответствии с законом Кулона, получим.  $9QQ_1/(\ell+x)^2 = QQ_1/x^2$ , или  $\ell + x = \pm 3x$ , откуда

$$x_1 = + \ell/2, \quad x_2 = - \ell/4.$$

Корень  $x_2$  не удовлетворяет физическому условию задачи (в этой точке силы  $F_1$  и  $F_2$  хотя и равны по модулю, но сонаправлены).

Определим знак заряда  $Q_1$ , при котором равновесие будет устойчивым. Равновесие называется устойчивым, если при смещении заряда от положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия. Рассмотрим смещение заряда  $Q_1$  в двух случаях: когда заряд положителен и отрицателен.

Если заряд  $Q_1$  положителен, то при смещении его влево обе силы  $F_1$  и  $F_2$  возрастают. Так как сила  $F_1$  возрастает медленнее, то результирующая сила, действующая на заряд  $Q_1$ , будет направлена в ту же сторону, в которую смещен этот заряд, т.е. влево. Под действием этой силы заряд  $Q_1$  будет удаляться от положения равновесия. То же происходит и при смещении заряда  $Q_1$  вправо. Сила  $F_2$  убывает быстрее, чем  $F_1$ . Геометрическая сумма сил в этом случае направлена, вправо. Заряд под действием этой силы также будет перемещаться вправо, т.е. удаляться от положения равновесия. Таким образом, в случае положительного заряда равновесие является неустойчивым.

Если заряд  $Q_1$  отрицателен, то его смещение влево, вызовет увеличение сил  $F_1$  и  $F_2$ , но сила  $F_1$  возрастает медленнее, чем  $F_2$ , т.е.  $|F_2| > |F_1|$ . Результирующая сила будет направлена вправо. Под ее действием заряд  $Q_1$  возвращается к положению равновесия. При смещении  $Q_1$  вправо сила  $F_2$  убывает быстрее, чем  $F_1$ , т.е.  $|F_1| > |F_2|$ , результирующая сила направлена влево и заряд  $Q_1$  опять будет возвращаться к положению равновесия. При отрицательном заряде равновесие является устойчивым. Величина самого заряда  $Q_1$  не существенна.

**Пример 2.** Три точечных заряда  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$  нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $Q_4$  нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

**Решение.** Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например  $Q_1$ , находился в равновесии. Заряд  $Q_1$  будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (рис.11)

$$F_2 + F_3 + F_4 = F + F_4 = 0, \quad (1)$$

где  $F_2, F_3, F_4$  - силы, с которыми соответственно действуют на заряд  $Q_1$  заряды  $Q_2, Q_3, Q_4$ ;  $F$  - равнодействующая сил  $F_2$  и  $F_3$ .

Так как силы  $F$  и  $F_4$  направлены по одной прямой в противоположные стороны, то векторное равенство (1) можно заменить скалярным:  $F - F_4 = 0$ , откуда  $F_4 = F$ . Выразив в последнем равенстве  $F$  через  $F_2$  и  $F_3$  и учиты-

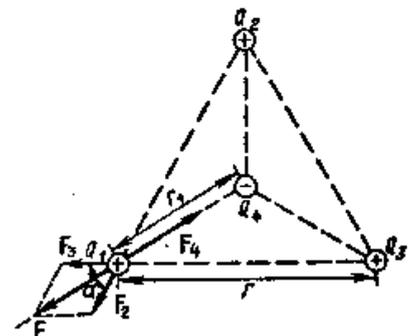


Рис. 11

вая, что  $F_3 = F_2$ , получим

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Применив закон Кулона и имея в виду, что  $Q_2 = Q_3 = Q_1$ , найдем

$$\frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} \quad (2)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2 \cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos 60^\circ = 1/2.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = Q_1 / \sqrt{3}.$$

Произведем вычисления:

$$Q_4 = 10^{-2} / \sqrt{3} \text{ Кл} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 577 \text{ пКл}$$

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым

**Пример 3.** На тонком стержне длиной  $\ell = 20$  см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии  $a = 10$  см от ближайшего конца находится точечный заряд  $Q_1 = 40$  нКл, который взаимодействует со стержнем с силой  $F = 6$  мкН. Определить линейную плотность  $\tau$  заряда на стержне.

**Решение.** Сила взаимодействия  $F$  заряженного стержня с точечным зарядом  $Q_1$  зависит от линейной плотности  $\tau$  заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить  $\tau$ . При вычислении силы  $F$  следует иметь в виду, что заряд на стержне не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом. Выделим из стержня (рис.12) малый участок  $dr$  с зарядом  $dQ = \tau dr$ . Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона,

$$dF = \frac{Q_1 \tau dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Рис. 12

Интегрируя это выражение в пределах от  $a$  до  $a + \ell$ , получаем

$$F = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+\ell} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell} \right) = \frac{Q_1 \tau \ell}{4\pi\epsilon_0 a(a+\ell)},$$

откуда

$$\tau = \frac{4\pi\epsilon_0 a(a+\ell)F}{Q_1 \ell}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу линейной плотности электрического заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\begin{aligned} \frac{[\epsilon_0][a][a+l][F]}{[Q][l]} &= \frac{1\Phi / \text{м} \cdot 1\text{м} \cdot 1\text{м} \cdot 1\text{Н}}{1\text{Кл} \cdot 1\text{м}} = \frac{1\Phi \cdot 1\text{Н}}{1\text{Кл}} = \\ &= \frac{1\text{Кл} / \text{В} \cdot 1\text{Н}}{1\text{Кл}} = \frac{1\text{Н}}{1\text{В}} = \frac{1\text{Н}}{1\text{Дж} / \text{Кл}} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{Кл}}{1\text{Н} \cdot \text{м}} = 1\text{Кл} / \text{м} \end{aligned}$$

Найденная единица является единицей линейной плотности заряда.

Произведем вычисления:

$$\tau = \frac{0,1(0,1 + 0,2) \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2} \text{Кл/м} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{Кл/м} = 2,5 \text{нКл/м}.$$

**Пример 4.** Два точечных электрических заряда  $Q_1 = 1 \text{ нКл}$  и  $Q_2 = -2 \text{ нКл}$  находятся в воздухе на расстоянии  $d = 10 \text{ см}$  друг от друга. Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  поля, создаваемого этими зарядами в точке  $A$ , удаленной от заряда  $Q_1$  на расстояние  $r_1 = 9 \text{ см}$  и от заряда  $Q_2$  на  $r_2 = 7 \text{ см}$ .

**Решение.** Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность  $E$  электрического поля в искомой точке может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей  $E_1$  и  $E_2$  полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:  $E = E_1 + E_2$ . Напряженности электрического поля, создаваемого в воздухе ( $\epsilon = 1$ ) зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ ,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}, \quad (1) \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (2)$$

Вектор  $E_1$  (рис.13) направлен по силовой линии от заряда  $Q_1$ , т.к. этот заряд положителен; вектор  $E_2$  направлен также по силовой линии, но к заряду  $Q_2$ , т.к. этот заряд отрицателен.

Модуль вектора  $E$  найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos\alpha}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $E_1$  и  $E_2$ , который может быть найден из треугольника со сторонами  $r_1$ ,  $r_2$  и  $d$ :  $\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$ . В данном случае во избежание громоздких за-

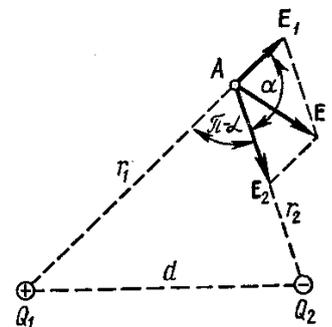


Рис. 13

писей удобно значение  $\cos\alpha$  вычислить отдельно:

$$\cos\alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Подставляя выражение  $E_1$  из (1) и  $E_2$  из (2) в (3) и вынося общий множитель  $1/(4\pi\epsilon_0)$  за знак корня, получаем.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos\alpha}. \quad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал  $\varphi$  результирующего поля, создаваемого двумя зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ , равен алгебраической сумме потенциалов;

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (5)$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом  $Q$

на расстоянии  $r$  от чего, выражается формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6)$$

В нашем случае согласно формулам (5) и (6) получим

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} = \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,07)^4} + 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2}} (-0,238) \text{ В/м} = \\ &= 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м}; \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} \left( \frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = -157 \text{ В}. \end{aligned}$$

**Пример 5.** По тонкому кольцу равномерно распределен заряд  $Q = 40$  нКл с линейной плотностью  $\tau = 50$  нКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное половине радиуса.

**Решение.** Совместим координатную плоскость  $xOy$  с плоскостью кольца, а ось  $Oz$  — с осью кольца (рис.14). На кольце выделим малый участок длиной  $d\ell$ . Так как заряд  $dQ = \tau d\ell$ , находящийся на этом участке, можно считать точечным, то напряженность  $dE$  электрического поля, создаваемого этим зарядом, может быть записана в виде

$$dE = \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{r},$$

где  $r$  - радиус-вектор, направленный от элемента  $d\ell$  к точке  $A$ .

Разложим вектор  $dE$  на две составляющие:  $dE_1$ , перпендикулярно плоскости кольца (сонаправленную с осью  $Oz$ ), и  $dE_2$ , параллельную плоскости кольца (плоскости  $xOy$ ), т.е.

$$dE = dE_1 + dE_2.$$

Напряженность  $E$  электрического поля в точке  $A$  найдем интегрированием.

$$E = \int_L E_1 + \int_L E_2,$$

где интегрирование ведется по всем элементам заряженного кольца. Заметим, что для каждой пары зарядов  $dQ$  и  $dQ'$  ( $dQ = dQ'$ ), расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы  $dE_2$  и  $dE_2'$  в точке  $A$  равны по модулю и противоположны по направлению:  $dE_2 = -dE_2'$ . Поэтому векторная сумма (интеграл)  $\int_L dE_2 = 0$ .

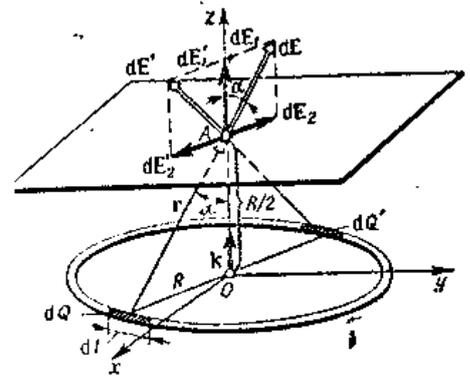


Рис. 14

Составляющие  $dE_1$  для всех элементов кольца сонаправлены с осью  $Oz$  (единичным вектором  $k$ ), т.е.  $dE_1 = kdE_1$ . Тогда

$$E = k \int_L dE_1.$$

Так как  $dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r}$ ,  $r = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = \sqrt{5} R/2$  и  $\cos\alpha = (R/2)/r = 1/\sqrt{5}$ ,

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}} dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Таким образом,

$$E = k \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2} = k \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 R}.$$

Из соотношения  $Q = 2\pi R\tau$  определим радиус кольца:  $R = Q/(2\pi\tau)$ . Тогда

$$E = k \frac{2\tau 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q} = k \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q}.$$

Модуль напряженности

$$|E| = \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q} \quad (1)$$

Проверим, дает ли правая часть полученного равенства единицу напряженности (В/м):

$$\frac{[\tau^2]}{[\epsilon_0][Q]} = \frac{(1\text{Кл/м})^2}{1\text{Ф/м} \cdot 1\text{Кл}} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф} \cdot 1\text{м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Выразим физические величины, входящие в формулу (1), в единицах СИ ( $\tau = 5 \cdot 10^{-8}$  Кл/м,  $Q = 4 \cdot 10^{-8}$  Кл,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м) и произведем вычисления:

$$E = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}} \text{ В/м} = 7,92 \text{ кВ/м}.$$

**Пример 6.** Две концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1 = 6$  см и  $R_2 = 10$  см несут соответственно заряды  $Q_1 = 1$  нКл и  $Q_2 = -0,5$  нКл. Найти напряженность  $E$ : поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях  $r_1 = 5$  см,  $r_2 = 9$  см,  $r_3 = 15$  см. Построить график  $E(r)$ .

**Решение.** Заметим, что точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех областях (рис.15): область I ( $r_1 < R_1$ ), область II ( $R_1 < r_2 < R_2$ ), область III ( $r_3 > R_2$ ).

1. Для определения напряженности  $E_1$  в области I проведем гауссову поверхность  $S_1$  радиусом  $r_1$  и воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0$$

(так как суммарный заряд, находящийся внутри гауссовой поверхности, равен нулю). Из соображений симметрии  $E_n = E_i = \text{const}$ . Следовательно,  $E_i \oint_{S_1} dS = 0$  и  $E_1$  (напряженность поля в

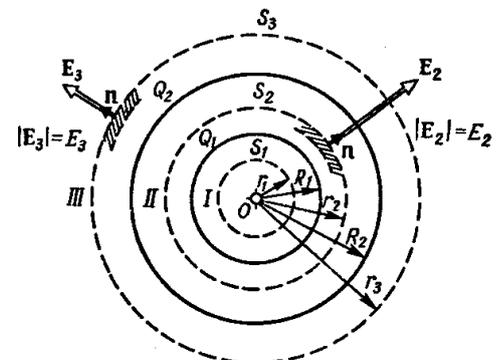


Рис. 15

области I) во всех точках, удовлетворяющих условию  $r_1 < R_1$ , будет равна нулю.

2. В области II гауссову поверхность проведем радиусом  $r_2$ . В этом случае\*

$$\oint_{S_2} E_n dS = Q_1/\epsilon_0,$$

(так как внутри гауссовой поверхности находится только заряд  $Q_1$ ).

Так как  $E_n = E = \text{const}$ , то  $E$  можно вынести за знак интеграла:

$$E_i \oint_{S_2} dS = Q_1/\epsilon_0, \text{ или } ES_2 = Q_1/\epsilon_0.$$

Обозначив напряженность  $E$  для области II через  $E_2$ , получим

$$E_2 = Q_1/(\epsilon_0 S_2),$$

где  $S_2 = 4\pi r_2^2$  — площадь гауссовой поверхности. Тогда

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (1)$$

3. В области III гауссова поверхность проводится радиусом  $r_3$ . Обозначим напряженность  $E$  области III через  $E_3$  и учтем, что в этом случае гауссова поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд будет равен  $Q_1 + Q_2$ . Тогда

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$$

Заметив, что  $Q_2 < 0$ , это выражение можно переписать в виде

$$E_3 = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}. \quad (2)$$

Убедимся в том, что правая часть равенств (1) и (2) дает единицу напряженности:

$$\frac{[Q]}{[\epsilon_0][r^2]} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф/м} \cdot 1\text{м}^2} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{Ф} \cdot 1\text{м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ( $Q_1 = 10^{-9}$  Кл,  $Q_2 = -0.5 \cdot 10^{-9}$  Кл,  $r_1 = 0,09$  м,  $r_2 = 0,15$  м,  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  м/Ф) и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0,09)^2} \text{ В/м} = 1,11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5)10^{-9}}{(0,15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

Построим график  $E(r)$ . В области I ( $r_1 < R_1$ )  $E = 0$ . В области II ( $R_1 \leq r < R_2$ )  $E_2(r)$  изменяется по закону  $1/r^2$ . В точке  $r = R_1$  напряженность  $E_2(R_1) = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1^2) = 2,5$  кВ/м. В точке  $r = R_2$  ( $r$  стремится к  $R_2$  слева)  $E_2(R_2) = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,9$  кВ/м. В области III ( $r > R_2$ )  $E_3(r)$  изменяется по закону  $1/r^2$ , причем в точке  $r = R_2$  ( $r$  стремится к  $R_2$  справа)  $E_3(R_2) = (Q_1 - |Q_2|)/(4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,45$  кВ/м. Таким образом, функция  $E(r)$  в точках  $r = R_1$  и  $r = R_2$  терпит разрыв.

График зависимости  $E_r$  представлен на рис.16.

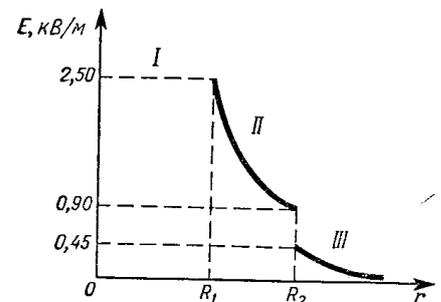


Рис. 16

\* Диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  среды будем считать равной единице (вакуум).

**Пример 7.** Точечный заряд  $Q = 25$  нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом  $R = 1$  см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью  $\sigma = 0,2$  нКл/см<sup>2</sup>. Определить силу  $F$ , действующую на заряд, если его расстояние от оси цилиндра  $r = 10$  см.

**Решение.** Значение силы  $F$ , действующей на точечный заряд  $Q$ , находящийся в поле, определяется по формуле

$$F = QE, \quad (1)$$

где  $E$  — напряженность поля.

Как известно, напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (2)$$

где  $\tau$  - линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность  $\tau$  через поверхностную плотность  $\sigma$ . Для этого выделим элемент цилиндра длиной  $\ell$  и выразим находящийся на нем заряд  $Q$  двумя способами:  $Q = \sigma S = \sigma 2\pi R \ell$ ,  $Q = \tau \ell$ . Приравняв правые части этих формул и сократив полученное равенство на  $\ell$ , найдем  $\tau = 2\pi R \sigma$ . С учетом этого формула (2) примет вид  $E = R\sigma/(\epsilon_0 r)$ . Подставив выражение  $E$  в (1), получим

$$F = \frac{Q\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Сила  $F$  сонаправлена с напряженностью  $E$ , которая в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) перпендикулярна поверхности цилиндра.

**Пример 8.** По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 10$  нКл/м. Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\phi$  электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина  $\ell$  нити составляет  $1/3$  длины окружности и равна 15 см.

**Решение.** Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось  $Oy$  была бы симметрично расположена относительно концов дуги (рис.17). На нити выделим элемент длины  $d\ell$ . Заряд  $dQ = \tau d\ell$ , находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке  $O$ . Для этого найдем сначала напряженность  $dE$  поля, создаваемого зарядом  $dQ$ :

$$dE = \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{r},$$

где  $r$  - радиус-вектор, направленный от элемента  $d\ell$  к

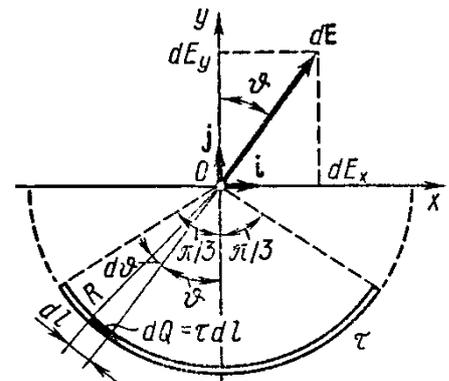


Рис. 17

точке, в которой вычисляется напряженность.

Выразим вектор  $dE$  через проекции  $dE_x$  и  $dE_y$  на оси координат:

$$dE = i dE_x + j dE_y,$$

где  $i$  и  $j$  - единичные векторы направлений (орты).

Напряженность  $E$  найдем интегрированием:

$$E = \int_{\ell} dE = i \int_{\ell} dE_x + j \int_{\ell} dE_y.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной  $\ell$ . В силу симметрии  $\int_{\ell} dE_x = 0$ . Тогда

$$E = j \int_{\ell} dE_y \quad (1)$$

где  $dE_y = dE \cos \vartheta = \tau d\ell \cos \vartheta / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ . Так как  $r = R = \text{const}$ ,  $d\ell = R d\vartheta$ , то

$$dE_y = \frac{\tau R d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \vartheta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \vartheta d\vartheta.$$

Подставим выражение  $dE_y$  в (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси  $Oy$ , пределы интегрирования возьмем от 0 до  $\pi/3$ , а результат удвоим:

$$E = j \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/3} \cos \vartheta d\vartheta = j \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \sqrt{3}/2$$

Выразив радиус  $R$  через длину  $\ell$  нити ( $3\ell = 2\pi R$ ), получим

$$E = j \frac{\tau}{6\epsilon_0 \ell} \sqrt{3}. \quad (2)$$

Из этой формулы видно, что напряженность поля по направлению совпадает с осью  $Oy$ .

Найдем потенциал электрического поля в точке  $O$ . Сначала найдем потенциал  $d\varphi$ , создаваемый точечным зарядом  $dQ$  в точке  $O$ :

$$d\varphi = \tau d\ell / (4\pi\epsilon_0 r).$$

Заменим  $r$  на  $R$  и проведем интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\ell} d\ell = \frac{\tau \ell}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Так как  $\ell = 2\pi R/3$ , то

$$\varphi = \tau / (6\epsilon_0). \quad (3)$$

Произведем вычисления по формулам (2) и (3):

$$E = \frac{10^{-8} \cdot 1,73}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15} \text{ В/м} = 2,18 \text{ кВ/м},$$

$$\varphi = \frac{10^{-8}}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 188 \text{ В}.$$

**Пример 9.** На тонком стержне длиной  $\ell$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 10$  нКл/м. Найти потенциал  $\varphi$ , созданный распределенным зарядом в точке  $A$ , расположенной на оси стержня и удаленной от его ближайшего конца на расстояние  $\ell$ .

**Решение.** В задаче рассматривается поле, создаваемое распределенным зарядом. В

этом случае поступают следующим образом. На стержне выделяют малый участок длиной  $dx$ . Тогда на этом участке будет сосредоточен заряд  $dQ = \tau dx$ , который можно считать точечным. Потенциал  $d\varphi$ , создаваемый этим точечным зарядом в точке А (рис.18), можно определить по формуле

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке А, найдем интегрирование этого выражения:

$$\varphi = \int_{\ell}^{2\ell} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell}^{2\ell} \frac{dx}{x}.$$

Выполним интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_{\ell}^{2\ell} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ ( $\tau = 10 \cdot 10^{-9}$  Кл/м,  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  м/Ф) и произведем вычисления:

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693 \text{ В} = 62,4 \text{ В}.$$

**Пример 10.** На пластинах плоского конденсатора находится заряд  $Q = 10$  нКл. Площадь  $S$  каждой пластины конденсатора равна  $100 \text{ см}^2$ , диэлектрик — воздух. Определить силу  $F$ , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Решение. Заряд  $Q$  одной пластины находится в поле напряженностью  $E$ , созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 19)

$$F = QE. \quad (1)$$

Так как

$$E = \sigma/(2\epsilon_0) = Q/(2\epsilon_0 S),$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда пластины, то формула (1) примет вид

$$F = Q^2/(2\epsilon_0 S).$$

Произведём вычисления:

$$F = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

**Пример 11.** Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом  $R = 1$  см, равномерно заряженным с линейной плотностью  $\tau = 20$  нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этой поля, находящихся на расстоянии  $a_1 = 0,5$  см и  $a_2 = 2$  см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала:  $E = -\text{grad}\varphi$ . Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно запи-

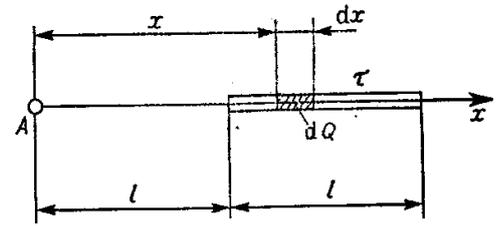


Рис. 18

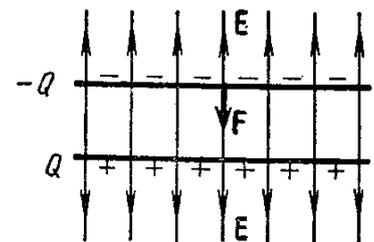


Рис. 19

сать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E dr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциала двух точек, отстоящих на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси цилиндра:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (1)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r).$$

Подставив выражение  $E$  в (1), получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

Произведем вычисления, учитывая, что величины  $r_1$  и  $r_2$ , входящие в формулу (2) в виде отношения, можно выразить в сантиметрах ( $r_1 = R + a_1 = 1,5$  см,  $r_2 = R + a_2 = 3$  см):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \cdot \ln(3/1,5) = 3,6 \cdot 10^2 \cdot 2,3 \cdot \ln 2 \quad \text{В} = 250 \text{ В}.$$

**Пример 12.** Электрическое поле создается двумя зарядами  $Q_1 = 4$  мкКл и  $Q_2 = -2$  мкКл, находящимися на расстоянии  $a = 0,1$  м друг от друга. Определить работу  $A_{1,2}$  сил поля по перемещению заряда  $Q = 50$  нКл из точки 1 в точку 2 (рис.20).

Решение. Для определения работы  $A_{1,2}$  сил поля воспользуемся соотношением

$$A_{1,2} = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Применяя принцип суперпозиции электрических полей, определим потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  точек 1 и 2 поля:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} = \frac{2(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_1\sqrt{2} + Q_2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Тогда

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} [2(Q_1 + Q_2) - (Q_1\sqrt{2} + Q_2)],$$

или

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ Q_1 \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + Q_2 \right].$$

Проверим, дает ли правая часть равенства единицу работы (Дж):

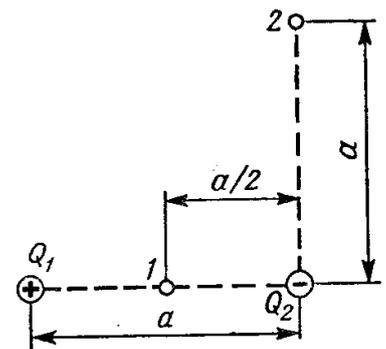


Рис. 20

$$\frac{[Q][Q_1]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{1\text{Кл} \cdot 1\text{Кл}}{1\text{Ф/м} \cdot 1\text{м}} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ ( $Q = 50 \cdot 10^{-9}$  Кл,  $Q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$  Кл,  $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл,  $a = 0,1$  м,  $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  м/Ф) и произведем вычисления:

$$A_{1,2} = \frac{60 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,1} \left[ 4 \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2 \right] \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 14,3 \text{ мДж}.$$

**Пример 13.** Определить ускоряющую разность потенциалов  $U$ , которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью  $v_1 = 10^6$  м/с, чтобы скорость его возросла в  $n = 2$  раза.

**Решение.** Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу  $A$  сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда  $e$  на разность потенциалов  $U$ :

$$A = eU: \quad (1)$$

Работа сил электростатического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  - кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля;  $m$  - масса электрона;  $v_1$  и  $v_2$  - начальная и конечная скорости его.

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$eU = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mn^2v_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где  $n = v_2/v_1$ .

Отсюда искомая разность потенциалов

$$U = \frac{mv_1^2(n^2 - 1)}{2e}$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{ В} = 8,53 \text{ В}.$$

**Пример 14.** С поверхности бесконечного равномерно заряженного ( $\tau = 50$  нКл/м) прямого цилиндра вылетает  $\alpha$ -частица ( $v_0 = 0$ ). Определить кинетическую энергию  $T_2$   $\alpha$ -частицы (кэВ) в точке 2 на расстоянии  $8R$  от поверхности цилиндра (рис.21).

**Решение.** Так как силы электростатического поля являются консервативными, то для определения кинетической энергии  $\alpha$ -частицы в точке 2 воспользуемся законом сохранения энергии, записанном в виде  $E_1 = E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  - полные энергии  $\alpha$ -частицы в точках 1 и 2.

Так как  $E_1 = T_1 + U_1$  и  $E_2 = T_2 + U_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  - кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы в точках 1 и 2)

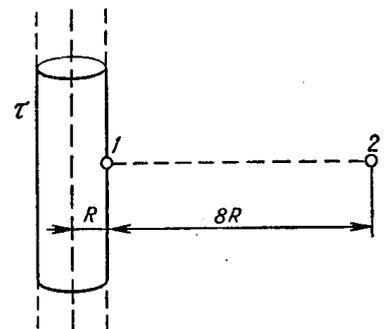


Рис. 21

тические энергии  $\alpha$ -частицы;  $U_1$  и  $U_2$  - потенциальные), то, учитывая, что  $T_1 = 0$  ( $v_0 = 0$ ), можно записать  $U_1 = T_2 + U_2$ , откуда  $T_2 = U_1 - U_2 = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$  ( $Q$  - заряд  $\alpha$ -частицы;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - потенциалы точек 1 и 2).

Используя решение примера 11, запишем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Тогда

$$T_2 = \frac{Q\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Проверка единиц аналогична проведенной в примере 11.

Выразим все величины в единицах СИ ( $Q = 2,1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $\tau = 50 \cdot 10^{-9}$  Кл/м  $1/(2\pi\epsilon_0) = 18 \cdot 10^9$  м/Ф) и произведем вычисления ( $1/(1,60 \cdot 10^{-19})$  – коэффициент перевода из Дж в эВ):

$$T_2 = 18 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^{-9}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \cdot 2,20 \text{ эВ} = 3,96 \text{ кэВ}.$$

**Пример 15.** Конденсатор емкость  $C_1 = 3$  мкФ был заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 40$  В. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью  $C_2 = 5$  мкФ. Какая энергия  $W'$  израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

**Решение.** Энергия, израсходованная на образование искры,

$$W' = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где  $W_1$  – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора;  $W_2$  – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{1}{2}CU^2, \quad (2)$$

где  $C$  – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии  $W_1$  и  $W_2$  по формуле (2) и приняв во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим:

$$W' = \frac{1}{2}C_1U_1^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_2^2, \quad (3)$$

где  $U_2$  – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсаторов остался прежним, выразим разность потенциалов  $U_2$  следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Подставив выражение  $U_2$  в (3), найдем

$$W' = \frac{C_1U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)C_1^2U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

Произведем вычисления:

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$$

**Пример 16.** Потенциометр сопротивлением  $R = 100$  Ом подключен к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 150$  В и внутренним сопротивлением  $R_i = 50$  Ом. Определить: 1) показание вольтметра сопротивлением  $R_v = 500$  Ом, соединенного с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом, установленным посередине потенциометра; 2) разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключении вольтметра.

Решение. 1. Показание вольтметра, подключенного к точкам А и В (рис.22), определим по формуле

$$U_1 = I_1 R_1,$$

где  $R_1$  – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра;  $I_1$  – суммарная сила тока в ветвях этого соединения (она равна силе тока в неразветвленной части цепи).

Силу тока  $I_1$  найдем по закону Ома для полной цепи:

$$I_1 = \varepsilon / (R_e + R_i) \quad (1)$$

где  $R_e$  – сопротивление внешней цепи. Это сопротивление есть сумма двух сопротивлений:

$$R_e = R/2 + R_1. \quad (2)$$

Сопротивление  $R_1$  найдем по формуле параллельного соединения проводников  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R/2}$ , откуда

$$R_1 = \frac{R R_v}{R + 2R_v}.$$

Подставив в (1) выражение  $R_e$  по (2), найдем

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R/2 + R_1 + R_i}.$$

В данном случае решение задачи в общем виде было бы громоздким. Поэтому удобно вычисление величин провести отдельно:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом};$$

$$I_1 = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ А} = 1,03 \text{ А};$$

$$U_1 = 1,03 \cdot 45,5 \text{ В} = 46,9 \text{ В}.$$

2. Разность потенциалов между точками А и В при отключенном вольтметре равна произведению силы тока  $I_2$  на половину сопротивления потенциометра:

$$U_2 = I_2 R/2, \quad (3)$$

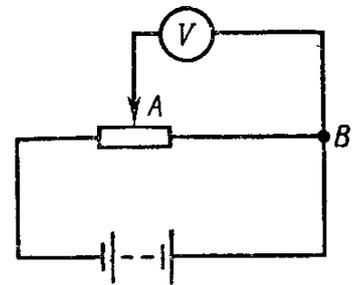


Рис. 22

где  $I_2$  - сила тока в цепи при отключенном вольтметре. Ее определим по формуле

$$I_2 = \varepsilon / (R + R_i).$$

Подставив выражение  $I_2$  в (3), найдем

$$U_2 = \varepsilon / (R + R_i) \cdot R / 2.$$

Произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{150}{100 + 50} \cdot \frac{100}{2} \text{ В} = 50 \text{ В}.$$

**Пример 17.** Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом нарастает в течение времени  $\Delta t = 2$  с по линейному закону от  $I_0 = 0$  до  $I = 6$  А (рис.23). Определить теплоту  $Q_1$ , выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, и  $Q_2$  - за вторую, а также найти отношение  $Q_2/Q_1$ .

**Решение.** Закон Джоуля-Ленца в виде  $Q = I^2 R t$  справедлив для постоянного тока ( $I = \text{const}$ ). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R dt. \quad (1)$$

Здесь сила тока  $I$  является некоторой функцией времени. В данном случае

$$I = kt, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения силы тока:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \text{ А/с} = 3 \text{ А/с}.$$

С учетом (2) формула (1) примет вид

$$dQ = k^2 R t^2 dt. \quad (3)$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный интервал времени  $\Delta t$ , выражение (3) надо проинтегрировать в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3).$$

Произведем вычисления

$$Q_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20(1 - 0) \text{ Дж} = 60 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20(8 - 1) \text{ Дж} = 420 \text{ Дж}.$$

Следовательно,

$$Q_2/Q_1 = 420/60 = 7,$$

т.е. за вторую секунду выделится теплоты в семь раз больше, чем за первую.

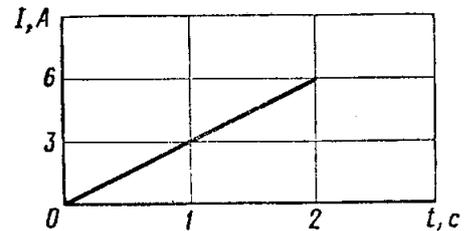


Рис. 23

### Задачи для самостоятельного решения

1. Два шарика массой  $m = 1$  г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити  $\ell = 10$  см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол  $\alpha = 60^\circ$ ? [79 нКл]

2. Расстояние между зарядами  $Q_1 = 100$  нКл и  $Q_2 = -50$  нКл равно  $d = 10$  см. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_3 = 1$  мкКл, отстоящую на  $r_1 = 12$  см от заряда  $Q_1$  и на  $r_2 = 10$  см от заряда  $Q_2$ . [51 мН]

3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 1,5$  нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии  $d = 12$  см от его конца находится точечный заряд  $Q = 0,2$  мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. [2,25 мН]

4. Длинная прямая тонкая проволока несет равномерно распределенный заряд. Вычислить линейную плотность  $\tau$  заряда, если напряженность поля на расстоянии  $r = 0,5$  м от проволоки против ее середины  $E = 2$  В/см. [5,55 нКл/м]

5. С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 2$  мкКл/м<sup>2</sup>? [0,23 Н/м<sup>2</sup>]

6. Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы получить скорость  $v = 8$  Мм/с? [182 В]

7. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma = 10$  нКл/м<sup>2</sup>. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние  $a = 10$  см. [56,6 В]

8. Электрон с начальной скоростью  $v = 3$  Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью  $E = 150$  В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Определить: 1) силу, действующую на электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через  $t = 0,1$  мкс. [24 аН; 26,4 Тм/с<sup>2</sup>; 4 Мм/с]

9. К батарее с ЭДС  $\varepsilon = 300$  В включены два плоских конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  пФ и  $C_2 = 3$  пФ. Определить заряд  $Q$  и напряжение  $U$  на пластинках конденсаторов при последовательном и параллельном соединениях. [1) 0,36 нКл; 180 В; 120 В; 2) 0,6 нКл; 0,9 кВ; 300 В]

10. Конденсатор емкостью  $C_1 = 600$  пФ зарядили до разности потенциалов  $U_1 = 1,5$  кВ и отключили от источника напряжения. Затем к нему параллельно присоединили незаряженный конденсатор емкостью  $C_2 = 400$  пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов. [0,27 мДж]

11. На концах медного провода длиной  $\ell = 5$  м поддерживается напряжение  $U = 1$  В. Определить плотность тока  $j$  в проводе. [ $1,18 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>]

12. Резистор сопротивлением  $R_1 = 5$  Ом, вольтметр и источник тока соединены параллельно. Вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 10$  В. Если заменить резистор другим с сопротивлением  $R_2 = 12$  Ом, то вольтметр покажет напряжение  $U_2 = 12$  В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Током через вольтметр пренебречь. [14 В; 2 Ом]

13. Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением  $R = 3$  Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от  $U_1 = 2$  В до  $U_2 = 4$  В в течение  $t = 20$  с. [20 Кл]

14. Определить силу тока в цепи, состоящей из двух элементов с ЭДС  $\varepsilon_1 = 1,6$  В и  $\varepsilon_2 = 1,2$  В и внутренними сопротивлениями  $R_1 = 0,6$  Ом и  $R_2 = 0,4$  Ом, соединенных

одноименными полюсами. [0,4 А]

15. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление  $R_1 = 0,5$  Ом силу тока  $I_1 = 0,2$  А. Если внешнее сопротивление заменить на  $R_2 = 0,8$  Ом, то элемент дает силу тока  $I_2 = 0,15$  А. Определить силу тока короткого замыкания. [0,45 А]

16. К источнику тока с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В присоединена нагрузка. Напряжение  $U$  на клеммах источника стало при этом равным 8 В. Определить КПД источника тока. [68 %]

17. Внешняя цепь источника тока потребляет мощность  $P = 0,75$  Вт. Определить силу тока в цепи, если ЭДС источника тока  $\varepsilon = 2$  В и внутреннее сопротивление  $R = 1$  Ом. [0,5 и 1,5 А]

18. Какая наибольшая полезная мощность  $P_{\max}$  может быть получена от источника тока с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В и внутренним сопротивлением  $R = 1$  Ом? [36 Вт]

19. При выключении источника тока сила тока в цепи убывает по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$  ( $I_0 = 10$  А,  $\alpha = 5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ ). Определить количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением  $R = 5$  Ом после выключения источника тока. [0,5 Дж]

### Контрольная работа № 3

(вариант – две последние цифры шифра)

Вариант	Номера задач (метод. указ. 1987 г.)						Вариант	Номера задач (метод. указ. 1987 г.)					
	312	334	350	356	362	374		313	332	347	355	359	375
00	312	334	350	356	362	374	01	313	332	347	355	359	375
02	308	340	342	354	361	373	03	311	333	343	357	364	372
04	301	339	346	360	370	377	05	305	334	345	356	365	378
06	304	332	341	352	362	379	07	318	336	347	355	368	376
08	316	340	348	353	361	372	09	303	333	343	354	364	377
10	301	339	346	357	367	374	11	308	332	349	351	370	379
12	305	337	350	356	365	375	13	318	331	342	353	368	373
14	316	340	348	352	359	376	15	303	339	345	357	361	372
16	304	333	343	360	362	374	17	311	334	344	356	367	377
18	308	337	341	355	370	379	19	301	336	350	352	365	375
20	318	339	349	357	364	372	21	305	331	348	351	368	374
22	312	334	345	356	362	373	23	313	333	347	354	359	379
24	316	332	341	355	367	376	25	311	336	342	357	365	375
26	318	340	349	352	361	378	27	308	337	344	356	370	377
28	312	333	350	354	368	373	29	301	331	345	355	364	379
30	316	339	348	357	362	374	31	313	336	342	351	359	376
32	304	334	346	360	367	375	33	305	337	344	354	361	378
34	318	331	350	355	368	372	35	308	332	341	353	370	377
36	303	340	343	357	365	376	37	311	339	348	360	359	379
38	301	333	347	352	367	374	39	313	337	349	354	364	378
40	305	332	345	356	362	377	41	304	334	346	355	368	375
42	318	340	341	357	370	372	43	316	333	342	353	365	374
44	312	331	343	360	359	376	45	301	336	347	351	367	379
46	303	339	344	352	362	375	47	305	332	350	356	361	373
48	313	340	348	353	364	377	49	316	331	345	355	368	378
50	304	336	349	351	359	379	51	308	334	346	357	365	375
52	312	337	343	356	367	374	53	301	339	342	353	361	376
54	305	340	341	360	364	373	55	316	331	347	354	368	377
56	313	334	344	351	370	379	57	304	336	346	356	359	374
58	318	337	350	353	365	378	59	308	332	349	352	367	376
60	303	340	343	354	361	375	61	316	331	341	360	368	372
62	305	333	348	351	364	373	63	301	334	345	355	359	377

64	311	337	350	353	370	379	65	312	336	346	352	362	378
66	303	331	342	357	361	375	67	316	339	341	351	367	372
68	308	333	344	356	365	376	69	318	340	348	354	359	377
70	304	332	347	352	368	378	71	305	331	346	353	362	374
72	313	337	350	360	370	375	73	311	336	341	351	364	376
74	312	340	342	356	367	373	75	316	332	349	357	359	379
76	303	334	347	355	361	378	77	301	331	343	360	365	372
78	308	336	345	351	370	376	79	305	333	344	353	364	374
80	318	339	346	356	368	379	81	316	332	350	354	367	373
82	313	331	347	352	359	375	83	311	334	343	351	365	377
84	303	336	348	360	361	374	85	312	337	345	357	364	372
86	301	340	344	355	368	376	87	305	333	349	352	370	378
88	318	332	347	354	362	373	89	313	339	346	360	365	374
90	304	337	343	356	359	375	91	303	340	342	355	364	379
92	308	336	350	357	361	377	93	301	331	349	353	368	378
94	316	334	344	354	362	373	95	312	339	345	360	365	372
96	305	333	346	355	367	379	97	311	337	342	351	364	374
98	308	332	347	356	361	377	99	303	340	341	354	359	378

301. Точечные заряды  $Q_1 = 20$  мкКл,  $Q_2 = -10$  мкКл находятся на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, удаленной на  $r_1 = 3$  см от первого и на  $r_2 = 4$  см от второго заряда. Определить также силу  $F$ , действующую в этой точке на точечный заряд  $Q = 1$  мкКл.

302. Три одинаковых точечных заряда  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$  нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $a = 10$  см. Определить модуль и направление силы  $F$ , действующей на один из зарядов со стороны двух других.

303. Два положительных точечных заряда  $Q$  и  $9Q$  закреплены на расстоянии  $d = 100$  см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения зарядов возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

304. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол  $\alpha$ . Шарика погружают в масло. Какова плотность  $\rho$  масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков  $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, диэлектрическая проницаемость масла  $\epsilon = 2,2$ .

305. Четыре одинаковых заряда  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$  нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см. Найти силу  $F$ , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.

306. Точечные заряды  $Q_1 = 30$  мкКл и  $Q_2 = -20$  мкКл находятся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга. Определить напряженность электрического поля  $E$  в точке, удаленной от первого заряда на расстояние  $r_1 = 30$  см, а от второго — на  $r_2 = 15$  см.

307. В вершинах правильного треугольника со стороной  $a = 10$  см находятся заряды  $Q_1 = 10$  мкКл,  $Q_2 = 20$  мкКл и  $Q_3 = 30$  мкКл. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_1$  со стороны двух других зарядов.

308. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$  Кл. Какой отрицательный заряд  $Q$  нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

309. На расстоянии  $d = 20$  см находятся два точечных заряда:  $Q_1 = -50$  нКл и  $Q_2 = 100$  нКл. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_3 = -10$  нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние, равное  $d$ .

310. Расстояние  $d$  между двумя точечными зарядами  $Q_1 = 2$  нКл и  $Q_2 = 4$  нКл равно 60 см. Определить точку, в которую нужно поместить третий заряд  $Q_3$  так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить заряд  $Q_3$  и его знак. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?

311. Тонкий стержень длиной  $\ell = 20$  см несет равномерно распределенный заряд  $\tau = 0,1$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его конца.

312. По тонкому полукольцу радиуса  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

313. Тонкое кольцо несет распределенный заряд  $Q = 0,2$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние  $r = 20$  см. Радиус кольца  $R = 10$  см.

314. Треть тонкого кольца радиуса  $R = 10$  см несет распределенный заряд  $Q = 50$  нКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

315. Бесконечный тонкий стержень, ограниченный с одной стороны, несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью  $\tau = 0,5$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его начала.

316. По тонкому кольцу радиусом  $R = 20$  см равномерно распределен с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , находящейся на оси кольца на расстоянии  $h = 2R$  от его центра.

317. По тонкому полукольцу равномерно распределен заряд  $Q = 20$  мкКл с линейной плотностью  $\tau = 0,1$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

318. Четверть тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несет равномерно распределенный заряд  $Q = 0,05$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

319. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд  $Q = 10$  нКл с линейной плотностью  $\tau = 0,01$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное радиусу кольца.

320. Две трети тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несут, равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

321. На двух concentрических сферах радиусом  $R$  и  $2R$  равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис.24). Требуется: 1) используя теорему Остроградского-Гаусса, найти зависимость  $E(r)$  напряженности электрического поля от расстояния для трех областей: I, II и III. Принять  $\sigma_1 = 4\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ; 2) вычислить напряженность  $E$  в точке, удаленной от центра на расстояние  $r$ , и указать направление вектора  $E$ . Принять  $\sigma = 30 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ ; 3) построить график  $E(r)$ .

322. См. условие задачи 321. В п.1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$ ,  $r = 3R$ .

323. См. условие задачи 321. В п.1 принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ .

324. См. условие задачи 321. В п.1 принять  $\sigma_1 = -2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$ ,  $r = 3R$ .

325. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис.25). Требуется: 1) используя теорему Остроградского-Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражение  $E(x)$  напряженности электрического поля в трех областях: I, II и III. Принять  $\sigma_1 = 2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ; 2) вычислить напряженность  $E$  поля в точке, расположенной слева от плоскостей, и указать направление вектора  $E$ ; 3) построить график  $E(x)$ .

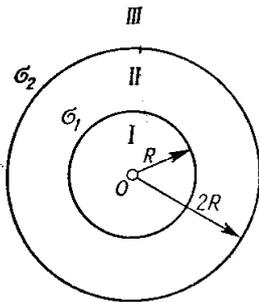


Рис. 24

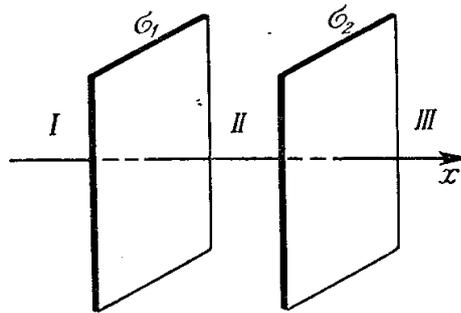


Рис. 25

326. См. условие задачи 325. В п.1 принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 40 \text{ нКл/м}^2$  и точку расположить между плоскостями.

327. См. условие задачи 325. В п.1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -2\sigma$ , В п.2 принять  $\sigma = 20 \text{ нКл/м}^2$  и точку расположить справа от плоскостей.

328. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами  $R$  и  $2R$  равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис.26). Требуется: 1) используя теорему Остроградского-Гаусса: найти зависимость  $E(r)$  напряженности электрического поля от расстояния для трех областей I, II и III. Принять  $\sigma_1 = -2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ; 2) вычислить напряженность  $E$  в точке, удаленной от оси цилиндров на расстояние  $r$ , и указать направление вектора  $E$ . Принять  $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ ; 3) построить график  $E(r)$ .

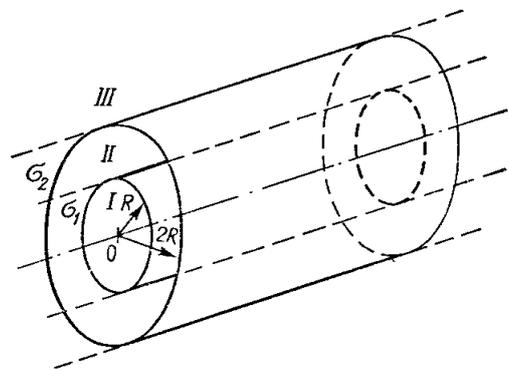


Рис. 26

329. См. условие задачи 328. В п.1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 60$

нКл/м<sup>2</sup>,  $r = 3R$ .

330. См. условие задачи 328. В п.1 принять  $\sigma_1 = -\sigma$ ,  $\sigma_2 = -4\sigma$ . В п.2 принять  $\sigma = 30$  нКл/м<sup>2</sup>,  $r = 4R$ .

331. Два точечных заряда  $Q_1 = 6$  нКл и  $Q_2 = 3$  нКл находятся на расстоянии  $d = 60$  см друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

332. Электрическое поле создано заряженным проводящим шаром, потенциал  $\varphi$  которого 300 В. Определить работу сил поля по перемещению заряда  $Q = 0,2$  мкКл из точки 1 в точку 2 (рис.27).

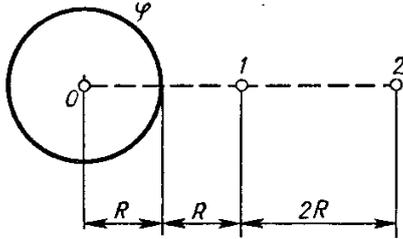


Рис. 27

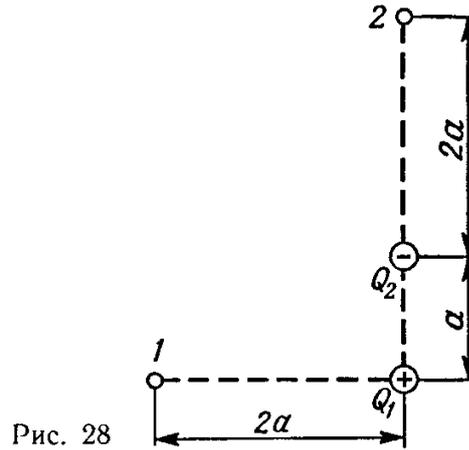


Рис. 28

333. Электрическое поле создано зарядами  $Q_1 = 2$  мкКл и  $Q_2 = -2$  мкКл, находящимися на расстоянии  $a = 10$  см друг от друга. Определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда  $Q = 0,5$  мкКл из точки 1 в точку 2 (рис.28).

334. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых  $\sigma_1 = 2$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = -0,8$  мкКл/м<sup>2</sup>, находятся на расстоянии  $d = 0,6$  см друг от друга. Определить разность потенциалов  $U$  между плоскостями.

335. Диполь с электрическим моментом  $p = 100$  пКл·м свободно установился в свободном электрическом поле напряженностью  $E = 200$  кВ/м. Определить работу внешних сил, которую необходимо совершить для поворота диполя на угол  $\alpha = 180^\circ$ .

336. Четыре одинаковых капли ртути, заряженных до потенциала  $\varphi = 10$  В, сливаются в одну. Каков потенциал  $\varphi_1$  образовавшейся капли?

337. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом  $R = 10$  см. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 800$  нКл/м. Определить потенциал  $\varphi$  в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии  $h = 10$  см от его центра.

338. Поле образовано точечным диполем с электрическим моментом  $p = 200$  пКл·м. Определить разность потенциалов  $U$  двух точек поля, расположенных симметрично относительно диполя на его оси на расстоянии  $r = 40$  см от центра диполя.

339. Электрическое поле образовано бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой  $\tau = 20$  пКл/м. Определить разность потенциалов  $U$  двух точек поля, отстоящих от нити на расстоянии  $r_1 = 8$  см и  $r_2 = 12$  см.

340. Тонкая квадратная рамка равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau = 200$  пКл/м. Определить потенциал  $\varphi$  поля в точке пересечения диагоналей.

341. Пылинка массой  $m = 200$  мкг, несущая на себе заряд  $Q = 40$  нКл, влетела в электрическое поле в направлении силовых линий. После прохождения разности по-

тенциалов  $U = 200$  В пылинка имела скорость  $v = 10$  м/с. Определить скорость  $v_0$  пылинки до того, как она влетела в поле.

342. Электрон, обладавший кинетической, энергией  $T = 10$  эВ, влетел в однородное электрическое поле в направлении силовых линий поля. Какой скоростью будет обладать электрон, пройдя в этом поле разность потенциалов  $U = 8$  В?

343. Найти отношение скоростей ионов  $\text{Cu}^{++}$  и  $\text{K}^+$ , прошедших одинаковую разность потенциалов.

344. Электрон с энергией  $T = 400$  эВ (в бесконечности) движется вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом  $R = 10$  см. Определить минимальное расстояние  $a$ , на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если заряд ее  $Q = -10$  нКл.

345. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость  $v = 10^5$  м/с. Расстояние между пластинами  $d = 8$  мм. Найти: 1) разность потенциалов  $U$  между пластинами; 2) поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на пластинах.

346. Пылинка массой  $m = 5$  нг, несущая на себе  $N = 10$  электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов  $U = 1$  МВ. Какова кинетическая энергия  $T$  пылинки? Какую скорость  $v$  приобрела пылинка?

347. Какой минимальной скоростью  $v_{\min}$  должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала  $\varphi = 400$  В металлического шара (рис.29)?

348. В однородное электрическое поле напряженностью  $E = 200$  В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью  $v_0 = 2$  Мм/с. Определить расстояние  $\ell$ , которое пройдет электрон до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной.

349. Электрическое поле создано бесконечной заряженной прямой линией с равномерно распределенным зарядом ( $\tau = 10$  нКл/м). Определить кинетическую энергию  $T_2$  электрона в точке 2, если в точке 1 его кинетическая энергия  $T_1 = 200$  эВ (рис.30).

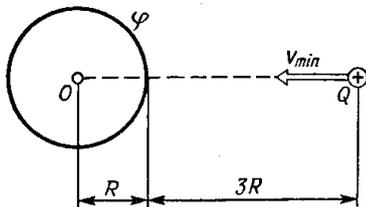


Рис. 29

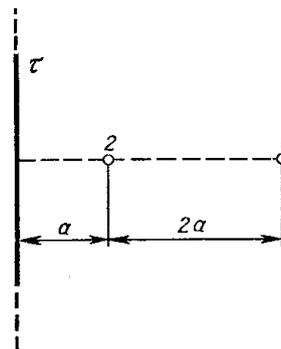


Рис. 30

350. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом  $\varphi_1 = 100$  В электрон имел скорость  $v_1 = 6$  Мм/с. Определить потенциал  $\varphi_2$  точки поля, дойдя до которой электрон потеряет половину своей скорости.

351. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 5$  мкФ и  $C_2 = 10$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 60$  В и  $U_2 = 100$  В соответственно. Определить напряжение на обкладках

конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими одноименные заряды.

352. Конденсатор емкостью  $C_1 = 10$  мкФ заряжен до напряжения  $U = 10$  В. Определить заряд на обкладках этого конденсатора после того, как параллельно ему был подключен другой, незаряженный, конденсатор емкостью  $C_2 = 20$  мкФ.

353. Конденсаторы емкостями  $C_1 = 2$  мкФ,  $C_2 = 5$  мкФ и  $C_3 = 10$  мкФ соединены последовательно и находятся под напряжением  $U = 850$  В. Определить напряжение и заряд на каждом из конденсаторов.

354. Два конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 5$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 100$  В и  $U_2 = 150$  В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими разноименные заряды.

355. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью  $C = 100$  пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определить, на сколько изменится емкость  $C$  батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить парафином.

356. Два конденсатора емкостями  $C_1 = 5$  мкФ и  $C_2 = 8$  мкФ соединены последовательно и присоединены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 80$  В. Определить заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  конденсаторов и разности потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  между их обкладками.

357. Плоский конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом  $R = 10$  см каждая. Расстояние между пластинами  $d = 2$  мм. Конденсатор присоединен к источнику напряжения  $U = 80$  В. Определить заряд  $Q$  и напряженность  $E$  поля конденсатора в двух случаях: а) диэлектрик — воздух; б) диэлектрик — стекло.

358. Два металлических шарика радиусами  $R_1 = 5$  см и  $R_2 = 10$  см имеют заряды  $Q_1 = 40$  нКл и  $Q_2 = -20$  нКл соответственно. Найти энергию  $W$ , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

359. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: стекла толщиной  $d_1 = 0,2$  см и слоем парафина толщиной  $d_2 = 0,3$  см. Разность потенциалов между обкладками  $U = 300$  В. Определить напряженность  $E$  поля и падение потенциала в каждом из слоев.

360. Плоский конденсатор с площадью пластин  $S = 200$  см<sup>2</sup> каждая заряжен до разности потенциалов  $U = 2$  кВ. Расстояние между пластинами  $d = 2$  см. Диэлектрик - стекло. Определить энергию  $W$  поля конденсатора и плотность энергии  $w$  поля.

361. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К клеммам катушки присоединен вольтметр с сопротивлением  $r = 4$  кОм. Амперметр показывает силу тока  $I = 0,3$  А, вольтметр - напряжение  $U = 120$  В. Определить сопротивление  $R$  катушки. Определить относительную погрешность  $\varepsilon$ , которая будет допущена при измерении сопротивления, если пренебречь силой тока, текущего через вольтметр.

362. ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 80$  В, внутреннее сопротивление  $R_1 = 5$  Ом. Внешняя цепь потребляет мощность  $P = 100$  Вт. Определить силу тока  $I$  в цепи, напряжение  $U$ , под которым находится внешняя цепь, и ее сопротивление  $R$ .

363. От батареи, ЭДС которой  $\mathcal{E} = 600$  В, требуется передать энергию на расстояние  $\ell = 1$  км. Потребляемая мощность  $P = 5$  кВт. Найти минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводных проводов  $d = 0,5$  см.

364. При внешнем сопротивлении  $R_1 = 8$  Ом сила тока в цепи  $I_1 = 0,8$  А, при сопротивлении  $R_2 = 15$  Ом сила тока  $I_2 = 0,5$  А. Определить силу тока  $I_{кз}$ , короткого за-

мыкания источника ЭДС.

365. ЭДС батареи  $\varepsilon = 24$  В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея,  $I_{\max} = 10$  А. Определить максимальную мощность  $P_{\max}$ , которая может выделяться во внешней цепи.

366. Аккумулятор с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В заряжается от сети постоянного тока с напряжением  $U = 15$  В. Определить, напряжение на клеммах аккумулятора, если его внутреннее сопротивление  $R_1 = 10$  Ом.

367. От источника с напряжением  $U = 800$  В необходимо передать потребителю мощность  $P = 10$  кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери энергии в ней превышали 10 % от передаваемой мощности?

368. При включении электромотора в сеть с напряжением  $U = 220$  В он потребляет ток  $I = 5$  А. Определить мощность, потребляемую мотором, и его КПД, если сопротивление  $R$  обмотки мотора равно 6 Ом.

369. В сеть с напряжением  $U = 100$  В подключили катушку с сопротивлением  $R_1 = 2$  кОм и вольтметр, соединенные последовательно. Показание вольтметра  $U_1 = 80$  В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал  $U_2 = 60$  В. Определить сопротивление  $R_2$  другой катушки.

370. ЭДС батареи  $\varepsilon = 12$  В. При силе тока  $I = 4$  А КПД батареи  $\eta = 0,6$ . Определить внутреннее сопротивление  $R_1$  батареи.

371. За время  $t = 20$  с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике сопротивлением  $R = 5$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 4$  кДж. Определить скорость нарастания силы тока, если сопротивление проводника  $R = 5$  Ом.

372. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$ , где  $I_0 = 20$  А,  $\alpha = 10^2$  с<sup>-1</sup>. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время  $t = 10^{-2}$  с.

373. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за время  $t = 50$  с равномерно нарастает от  $I_1 = 5$  А до  $I_2 = 10$  А. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за это время в проводнике.

374. В проводнике за время  $t = 10$  с при равномерном возрастании силы тока от  $I_1 = 1$  А до  $I_2 = 2$  А выделилось количество теплоты  $Q = 5$  кДж. Найти сопротивление  $R$  проводника.

375. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ . Найти заряд  $Q$ , проходящий через поперечное сечение проводника за время  $t$ , равное половине периода  $T$ , если начальная сила тока  $I_0 = 10$  А, циклическая частота  $\omega = 50\pi$  с<sup>-1</sup>.

376. За время  $t = 10$  с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике выделилось количество теплоты  $Q = 40$  кДж. Определить среднюю силу тока  $\langle I \rangle$  в проводнике, если его сопротивление  $R = 25$  Ом.

377. За время  $t = 8$  с при равномерно возрастающей силе тока в проводнике сопротивлением  $R = 8$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 500$  Дж. Определить заряд  $q$ , проходящий в проводнике, если сила тока в начальный момент времени равна нулю.

378. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за время  $t = 10$  с в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом, если сила тока в нем, равномерно уменьшаясь,

изменилась от  $I_1 = 10$  А до  $I_2 = 0$ .

379. Сила тока в цепи изменяется по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ . Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за время, равное четверти периода (от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = T/4$ , где  $T = 10$  с).

380. Сила тока в цепи изменяется со временем по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$ . Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом за время, в течение которого ток уменьшится в  $e$  раз. Коэффициент  $\alpha$  принять равным  $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

#### 4. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

##### Основные формулы

Связь -магнитной индукции  $\mathbf{B}$  с напряженностью  $\mathbf{H}$  магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H},$$

где  $\mu$  - магнитная проницаемость изотропной среды;  $\mu_0$  - магнитная постоянная. В вакууме  $\mu = 1$ , и тогда магнитная индукция в вакууме

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} [d\mathbf{l}r] \frac{I}{r^3} \text{ или } d\mathbf{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} d\mathbf{l},$$

где  $d\mathbf{B}$  - магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной  $d\mathbf{l}$  с током  $I$ ;  $r$  - радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция;  $\alpha$  - угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе провода.

Магнитная индукция в центре кругового тока

$$B = \frac{\mu \mu_0 I}{2R}$$

где  $R$  - радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где  $h$  - расстояние от центра витка до точки, в которой определяем магнитная индукция.

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \mu \mu_0 I / (2\pi r_0),$$

где  $r_0$  - расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током (см. рис.31а и пример 1),

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Обозначения ясны из рисунка. Направление вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  обозначено точкой - это значит, что  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

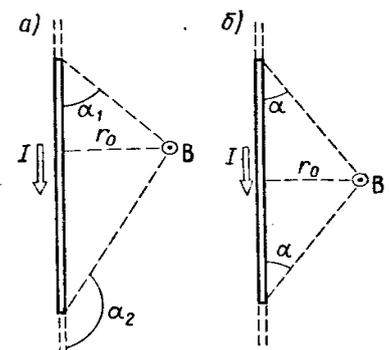


Рис. 31

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис.31б),  $-\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 = \cos\alpha$ , тогда

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\alpha.$$

Магнитная индукция поля соленоида

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где  $n$  - отношение числа витков соленоида к его длине.

Сила, действующая на провод с током в магнитном поле (закон Ампера),

$$\mathbf{F} = I[\ell\mathbf{B}], \text{ или } F = IB\ell\sin\alpha,$$

Где  $\ell$  - длина провода;  $\alpha$  - угол между направлением тока в проводе и вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Это выражение справедливо для однородного магнитного поля и прямого отрезка провода. Если поле неоднородно и провод не является прямым, то закон Ампера можно применять к каждому элементу провода в отдельности:

$$d\mathbf{F} = I[d\ell\mathbf{B}].$$

Магнитный момент плоского контура с током

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{n}/S,$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура;  $I$  - сила тока, протекающего по контуру;  $S$  - площадь контура.

Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m\mathbf{B}], \text{ или } M = p_m B \sin\alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

Потенциальная энергия (механическая)\* контура с током в магнитном поле

$$\Pi_{\text{мех}} = -\mathbf{p}_m\mathbf{B}, \text{ или } \Pi_{\text{мех}} = -p_m B \cos\alpha$$

Отношение магнитного момента  $p_m$  к механическому  $L$  (моменту импульса) заряженной частицы, движущейся по крутой орбите,

$$\frac{p_m}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{m}.$$

где  $Q$  - заряд частицы;  $m$  - масса частицы.

Сила Лоренца\*\*

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \text{ или } F = QvB\sin\alpha,$$

где  $\mathbf{v}$  - скорость заряженной частицы;  $\alpha$  - угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности

$$\Phi = BS\cos\alpha \text{ или } \Phi = B_n S$$

где  $S$  - площадь контура;  $\alpha$  - угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции:

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

\* Часть полной потенциальной энергии, которая обусловлена существованием механического (вращательного) момента (см.: Савельев И. В. Курс общей физики. М., 1978. Т.2. С.129).

\*\* Если частица находится одновременно в электрическом и магнитном полях, то под силой Лоренца понимают выражение

$$\mathbf{F} = QE + Q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$$

(интегрирование ведется по всей поверхности).

Потокоцепление (полный поток)

$$\psi = N\Phi.$$

Эта формула верна для соленоида и тороида с равномерной намоткой плотно прилегающих друг к другу  $N$  витков.

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi.$$

ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Разность потенциалов на концах провода, движущегося со скоростью  $v$  в магнитном поле,

$$U = B\ell v \sin\alpha,$$

где  $\ell$  - длина провода;  $\alpha$  - угол между векторами  $v$  и  $B$ .

Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур,

$$Q = \Delta\Phi/R, \text{ или } Q = N\Delta\Phi/R = \Delta\psi/R,$$

где  $R$  - сопротивление контура.

Индуктивность контура

$$L = \Phi/I.$$

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где  $n$  - отношение числа витков соленоида к его длине;  $V$  - объем соленоида.

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ :

а)  $I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})$  (при замыкании цепи), где  $\varepsilon$  - ЭДС источника тока;  $t$  - время, прошедшее после замыкания цепи;

б)  $I = I_0 e^{-Rt/L}$  (при размыкании цепи), где  $I_0$  - сила тока в цепи при  $t = 0$ ;  $t$  - время, прошедшее с момента размыкания цепи.

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему)

$$\omega = BH/2, \text{ или } \omega = B^2/(2\mu\mu_0), \text{ или } \omega = \mu\mu_0 H^2/2,$$

где  $B$  - магнитная индукция;  $H$  - напряженность магнитного поля.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** По отрезку прямого провода длиной  $\ell = 80$  см течет ток  $I = 50$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, создаваемого этим током, в точке  $A$ , равноудаленной от концов отрезка провода и находящейся на расстоянии  $r_0 = 30$  см от его

середины.

**Решение.** Для решения задач воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей. Закон Био-Савара-Лапласа позволяет определить магнитную индукцию  $d\mathbf{B}$ , создаваемую элементом тока  $I d\ell$ . Заметим, что вектор  $d\mathbf{B}$  в точке  $A$  направлен за плоскость чертежа. Принцип суперпозиции позволяет для определения  $\mathbf{B}$  воспользоваться геометрическим суммированием (интегрированием):

$$\mathbf{B} = \int_{\ell} d\mathbf{B}, \quad (1)$$

где символ  $\ell$  означает, что интегрирование распространяется на всю длину провода.

Запишем закон Био-Савара-Лапласа в векторной форме:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\ell \mathbf{r}],$$

где  $d\mathbf{B}$  - магнитная индукция, создаваемая элементом провода длиной  $d\ell$  с током  $I$  в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mu_0$  - магнитная постоянная;  $\mu$  - магнитная проницаемость среды, в которой находится провод (в нашем случае  $\mu = 1^*$ ). Заметим,

что векторы  $d\mathbf{B}$  от различных элементов тока сонаправлены (рис.32), поэтому выражение (1) можно переписать в скалярной форме:

$$B = \int_{\ell} dB,$$

где  $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2} d\ell$ .

В скалярном выражении закона Био-Савара-Лапласа угол  $\alpha$  есть угол между элементом тока  $I d\ell$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ . Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \frac{\sin \alpha}{r^2} d\ell. \quad (2)$$

Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы была одна переменная – угол  $\alpha$ . Для этого выразим длину элемента провода  $d\ell$  через угол  $d\alpha$ :  $d\ell = r d\alpha / \sin \alpha$  (рис.32).

Тогда подынтегральное выражение  $\frac{\sin \alpha}{r^2} d\ell$  запишем

в виде  $\frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{d\alpha}{r}$ . Заметим, что переменная  $r$  также зависит от  $\alpha$ , ( $r = r_0 / \sin \alpha$ ); следовательно,

$$\frac{d\alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{r_0} d\alpha.$$

Таким образом, выражение (2) можно переписать в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha.$$

\* Во всех задачах, где это специально не оговорено, следует считать, что средой является воздух, для которого магнитная проницаемость принимается равной единице

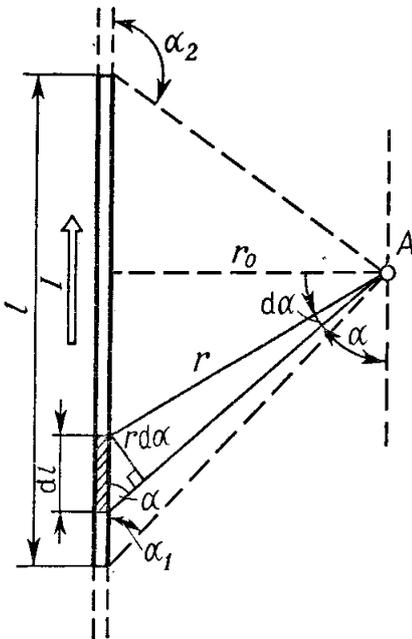


Рис. 32

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - пределы интегрирования.

Выполним интегрирование:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (3)$$

Заметим, что при симметричном расположении точки А относительно отрезка провода  $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$ . С учетом этого формула (3) примет вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\alpha_1. \quad (4)$$

Из рис.32 следует

$$\cos\alpha_1 = \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + r_0^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{4r_0^2 + \ell^2}}.$$

Подставив выражение  $\cos\alpha_1$  в формулу (4), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{4r_0^2 + \ell^2}}. \quad (5)$$

Произведя вычисления по формуле (5), найдем

$$B = 26,7 \text{ мкТл.}$$

Направление вектора магнитной индукции  $B$  поля, создаваемого прямым током, можно определить по правилу буравчика (правилу правого винта). Для этого проводим магнитную силовую линию (штриховая линия на рис.33) и по касательной к ней в интересующей нас точке проводим вектор  $B$ . Вектор магнитной индукции  $B$  в точке А (рис.32) направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас.

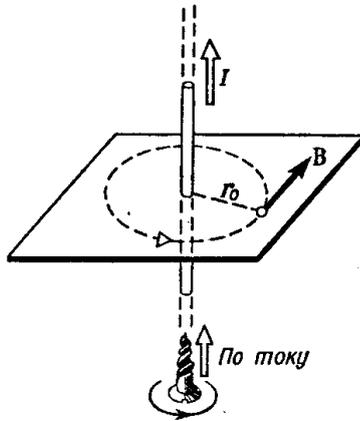


Рис. 33

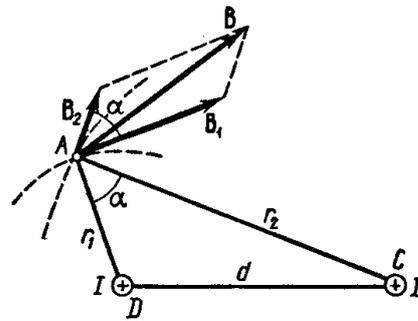


Рис. 34

**Пример 2.** Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении электрические токи силой  $I = 60 \text{ А}$ , расположены на расстоянии  $d = 10 \text{ см}$  друг от друга. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, создаваемого проводниками с током в точке А (рис.34), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии  $r_1 = 5 \text{ см}$ , от другого -  $r_2 = 12 \text{ см}$ .

**Решение.** Для нахождения магнитной индукции  $B$  в точке А воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций  $B_1$  и  $B_2$  полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль вектора  $B$  может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ .

Магнитные индукции  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  выражаются соответственно через силу тока  $I$  и расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от проводов до точки  $A$ :

$$B_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1); \quad B_2 = \mu_0 I / (2\pi r_2).$$

Подставляя выражения  $B_1$  и  $B_2$  в формулу (1) и вынося  $\mu_0 I / (2\pi)$  за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \alpha} \quad (2)$$

Вычислим  $\cos \alpha$ . Заметив, что  $\alpha = \angle DAC$  (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha,$$

где  $d$  - расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = 23/40.$$

Подставим в формулу (2) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 12} \cdot \frac{23}{40}} \text{ Тл} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 308 \text{ мкТл}.$$

**Пример 3.** По тонкому проводящему кольцу радиусом  $R = 10$  см течет ток  $I = 80$  А. Найти магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние  $r = 20$  см.

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\ell \mathbf{r}]}{r^2},$$

где  $d\mathbf{B}$  - магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока  $I d\ell$  в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ .

Выделим на кольце элемент  $d\ell$  и от него в точку  $A$  проведем радиус-вектор  $\mathbf{r}$  (рис.35). Вектор  $d\mathbf{B}$  направим в соответствии с правилом буравчика.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в точке  $A$  определяется интегрированием:

$$\mathbf{B} = \int_{\ell} d\mathbf{B},$$

где интегрирование ведется по всем элементам  $d\ell$  кольца.

Разложим вектор  $d\mathbf{B}$  на две составляющие:

$d\mathbf{B}_{\perp}$ , перпендикулярную плоскости кольца, и

$d\mathbf{B}_{\parallel}$ , параллельную плоскости кольца, т.е.

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_{\perp} + d\mathbf{B}_{\parallel}.$$

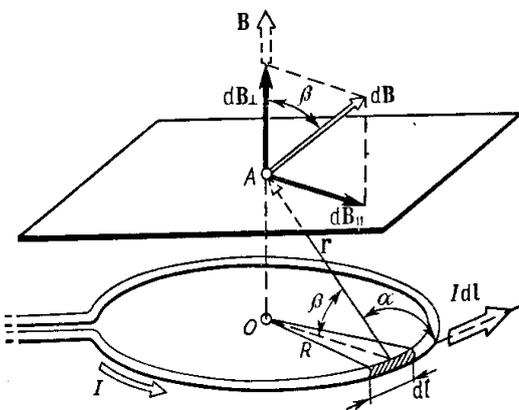


Рис. 35

Тогда:

$$\mathbf{B} = \int_{\ell} d\mathbf{B}_{\perp} + \int_{\ell} d\mathbf{B}_{\parallel}.$$

Заметив, что  $\int_{\ell} d\mathbf{B}_{\parallel} = 0$  из соображений симметрии и что векторы  $d\mathbf{B}_{\perp}$  от различных элементов  $d\ell$  сонаправлены, заменим векторное суммирование (интегрирование) скалярным:

$$B = \int_{\ell} dB_{\perp},$$

где  $dB_{\perp} = dB \cos \beta$  и  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\ell}{r^2}$  (поскольку  $d\ell$  перпендикулярен  $r$  и, следовательно,  $\sin \alpha = 1$ ). Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot 2\pi R}{4\pi r^2}.$$

После сокращения на  $2\pi$  и замены  $\cos \beta$  на  $R/r$  (рис.35) получим

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}.$$

Проверим, дает ли правая часть равенства единицу магнитной индукции (Тл):

$$\frac{[\mu_0][I][R^2]}{[r^3]} = \frac{1\text{Гн} \cdot 1\text{А} \cdot 1\text{м}^2}{\text{м} \cdot 1\text{м}^3} = \frac{1\text{Гн} \cdot 1\text{А}^2}{1\text{А} \cdot 1\text{м}^2} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{А} \cdot 1\text{м}^2} = \frac{1\text{Н} \cdot 1\text{м}}{1\text{А} \cdot 1\text{м}^2} = 1\text{Тл}.$$

Здесь мы воспользовались определяющей формулой для магнитной индукции:

$$B = M_{\max}/p.$$

Тогда

$$1 \text{ Тл} = \frac{1\text{Н} \cdot 1\text{м}}{1\text{А} \cdot 1\text{м}^2}.$$

Выразим все величины в единицах СИ и произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot (0,1)^2}{2 \cdot (0,2)^3} \text{ Тл} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}, \quad \text{или } B = 62,8 \text{ мкТл}.$$

Вектор  $\mathbf{B}$  направлен по оси кольца (пунктирная стрелка на рис.35) в соответствии с правилом буравчика.

**Пример 4.** Длинный провод с током  $I = 50 \text{ А}$  изогнут под углом  $\alpha = 2\pi/3$ . Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке А (рис.36). Расстояние  $d = 5 \text{ см}$ .

**Решение.** Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых соединены в точке О (рис.37). В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в точке А будет равна геометрической сумме магнитных индукций  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  полей, создаваемых отрезками длинных проводов 1 и 2, т.е.  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ . Магнитная индукция  $\mathbf{B}_2$  равна нулю. Это следует из закона Био-Савара-Лапласа, согласно которому в точках, лежащих на оси провода,  $d\mathbf{B} = 0$  ( $[d\ell \mathbf{r}] = 0$ ).

Магнитную индукцию  $\mathbf{B}_1$  найдем, воспользовавшись соотношением (3), найденным в примере 1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

где  $r_0$  - кратчайшее расстояние от провода I до точки A (рис. 37).

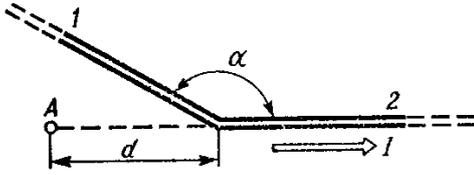


Рис. 36

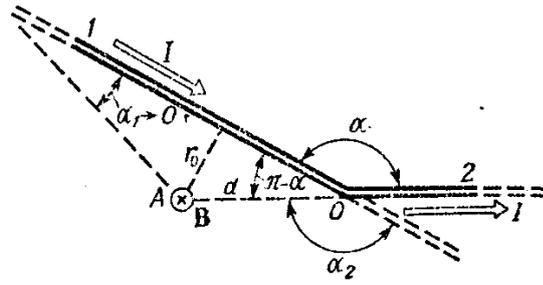


Рис. 37

В нашем случае  $\alpha_1 \rightarrow 0$  (провод длинный),  $\alpha_2 = \alpha = 2\pi/3$  ( $\cos\alpha_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$ ). Расстояние  $r_0 = d \sin(\pi - \alpha) = d \sin(\pi/3) = d\sqrt{3}/2$ . Тогда магнитная индукция

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d \sqrt{3}/2} (1 + 1/2).$$

Так как  $B = B_1$  ( $B_2 = 0$ ), то

$$B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi d}.$$

Вектор  $\mathbf{B}$  сонаправлен с вектором  $\mathbf{B}_1$  и определяется правилом правого винта. На рис.37 это направление отмечено крестиком в кружочке (перпендикулярно плоскости чертежа, от нас).

Проверка единиц аналогична выполненной в примере 3. Произведем вычисления:

$$B = \frac{\sqrt{3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 34,6 \text{ мкТл}.$$

**Пример 5.** Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом (рис.38). По проводам текут токи  $I_1 = 80 \text{ А}$  и  $I_2 = 60 \text{ А}$ . Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке A, одинаково удаленной от обоих проводов.

**Решение.** В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция  $\mathbf{B}$  поля, создаваемого токами  $I_1$  и  $I_2$ , определяется выражением  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , где  $\mathbf{B}_1$  - магнитная индукция поля, созданного в точке A током  $I_1$ ;  $\mathbf{B}_2$  - магнитная индукция поля, созданного в точке A током  $I_2$ .

Заметим, что векторы  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  взаимно перпендикулярны (их направления находятся по правилу буравчика и изображены в двух проекциях на рис.39). Тогда модуль вектора  $\mathbf{B}$  можно определить по теореме Пифагора:

$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

где  $B_1$  и  $B_2$  определяются по формулам расчета магнитной индукции для бесконечно

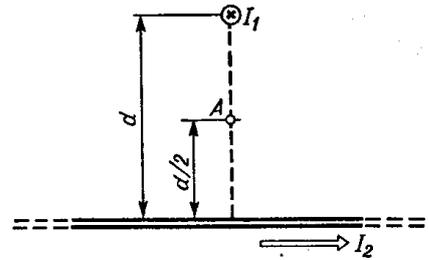


Рис. 38

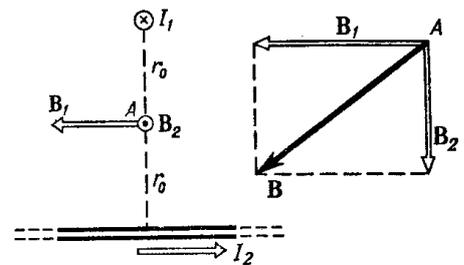


Рис. 39

длинного прямолинейного провода с током:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0} \text{ и } B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_0}.$$

В нашем случае  $r_0 = d/2$ . Тогда

$$B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}.$$

Проверка единиц величин аналогична выполненной в примере 3.

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-1}} \sqrt{80^2 + 60^2} \text{ Тл} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 400 \text{ мкТл}.$$

**Пример 6.** Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис.40. Радиус  $R$  дуги окружности равен 10 см. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  поля, создаваемого в точке  $O$  током  $I = 80$  А, текущим по этому проводу.

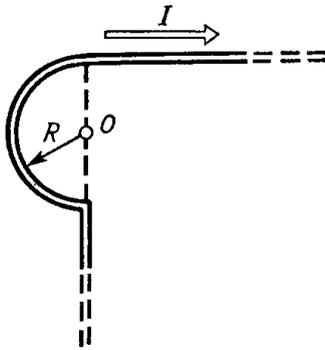


Рис. 40

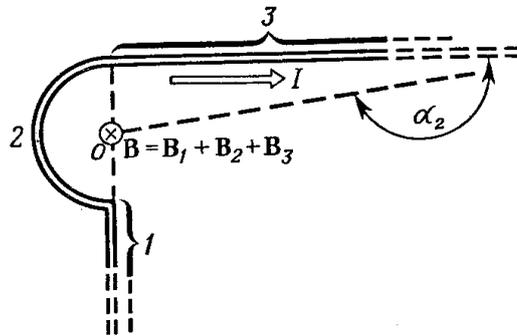


Рис. 41

**Решение.** Магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $O$  найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей:  $\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i$ . В нашем случае провод можно разбить на три части (рис.41): два прямолинейных провода (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиуса  $R$ . Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3,$$

где  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{B}_3$  - магнитные индукции в точке  $O$ , создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

Так как точка  $O$  лежит на оси провода 1, то  $\mathbf{B}_1 = 0$  и тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Учитывая, что векторы  $\mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{B}_3$  направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнитную индукцию  $B_2$  найдем, воспользовавшись выражением для магнитной индукции в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

В нашем случае магнитное поле в точке  $O$  создается лишь половиной такого кругового тока, поэтому

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнитную индукцию  $B_3$  найдем, воспользовавшись соотношением (3), выведенным в примере 1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

В нашем случае  $r_0 = R$ ,  $\alpha_1 = \pi/2$  ( $\cos\alpha_1 = 0$ ),  $\alpha_2 \rightarrow \pi$  ( $\cos\alpha_2 = -1$ ). Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Используя найденные выражения для  $B_2$  и  $B_3$ , получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi + 1).$$

Проверка единиц величин аналогична выполненной в примере 3.

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80}{4\pi \cdot 0,1} (\pi + 1) \text{ Тл} = 3,31 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 331 \text{ мкТл}.$$

**Пример 7.** По двум параллельным прямым проводам длиной  $\ell = 2,5$  м каждый, находящимся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга, текут одинаковые токи  $I = 1$  кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

**Решение.** Взаимодействие двух проводов, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой провод.

Предположим, что оба тока (обозначим их для удобства  $I_1$  и  $I_2$ ) текут в одном направлении. Ток  $I_1$  создает в месте расположения второго провода (с током  $I_2$ ) магнитное поле.

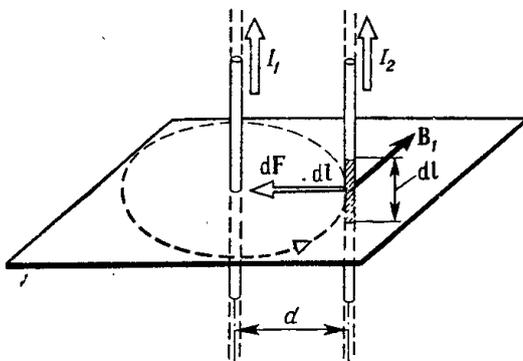


Рис. 42

Проведем линию магнитной индукции (пунктир на рис.42) через второй провод и по касательной к ней — вектор магнитной индукции  $B_1$ . Модуль магнитной индукции  $B_1$  определяется соотношением

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (1)$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго провода с током  $I_2$  длиной  $d\ell$  действует в магнитном поле сила

$$dF = I_2 B_1 d\ell \sin(d\ell \hat{B}).$$

Так как вектор  $d\ell$  перпендикулярен вектору  $B_1$ , то  $\sin(d\ell \hat{B}) = 1$  и тогда

$$dF = I_2 B_1 d\ell.$$

Подставив в это выражение  $B_1$  согласно (1), получим

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} d\ell.$$

Силу  $F$  взаимодействия проводов с током найдем интегрированием:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^{\ell} d\ell = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \ell.$$

Заметив, что  $I_1 = I_2 = I$ , получим

$$F = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi d}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу силы (Н):

$$\frac{[\mu_0][I^2][\ell]}{[d]} = \frac{1 \text{ Гн/м} \cdot (1 \text{ А})^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} \text{ Н} = 2,5 \text{ Н}.$$

Сила  $F$  сонаправлена с силой  $dF$  (рис.42) и определяется (в данном случае проще) правилом левой руки.

**Пример 8.** Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов  $U = 600 \text{ В}$ , влетел в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,3 \text{ Тл}$  и начал двигаться по окружности. Вычислить радиус  $R$  окружности.

**Решение.** Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле будет происходить по окружности только в том случае, когда частица влетит в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ . Так как сила Лоренца перпендикулярна вектору  $\mathbf{v}$ , то она сообщит частице (протону) нормальное ускорение  $a_n$ .

Согласно второму закону Ньютона,

$$\mathbf{F}_л = m\mathbf{a}_n, \quad (1)$$

где  $m$  - масса протона.

На рис.43 совмещена траектория протона с плоскостью чертежа и дано (произвольно) направление вектора  $\mathbf{v}$ . Силу Лоренца направим перпендикулярно вектору  $\mathbf{v}$  к центру окружности (векторы  $\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{F}_л$  сонаправлены). Используя правило левой руки, определим направление магнитных силовых линий (направление вектора  $\mathbf{B}$ ).

Перепишем выражение (1) в скалярной форме (в проекции на радиус):

$$F_л = ma_n. \quad (2)$$

В скалярной форме  $F_л = QvB\sin\alpha$ . В нашем случае  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$  и  $\sin\alpha = 1$ , тогда  $F_л = QvB$ . Так как нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$ , то выражение (2) перепишем следующим образом:

$$QvB = mv^2/R.$$

Отсюда находим радиус окружности:

$$R = mv/(QB).$$

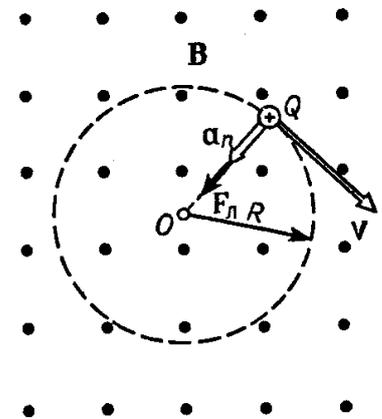


Рис. 43

Заметим, что  $mv$  есть импульс протона ( $p$ ), это выражение можно записать в виде

$$R = p/(QB). \quad (3)$$

Импульс протона найдем, воспользовавшись связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии протона, т.е.  $A = \Delta T$ , или

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2 - T_1,$$

где  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  - ускоряющая разность потенциалов или ускоряющее напряжение  $U$ ;  $T_1$  и  $T_2$  - начальная и конечная кинетические энергии протона.

Пренебрегая начальной кинетической энергией протона ( $T_1 \approx 0$ ) и выразив кинетическую энергию  $T_2$  через импульс  $p$  получим

$$QU = p^2/(2m).$$

Найдем из этого выражения импульс  $p = \sqrt{2mQU}$  и подставим его в формулу (3):

$$R = \frac{\sqrt{2mQU}}{QB},$$

или

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{2mU/Q}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу длины (м):

$$\begin{aligned} \frac{[m^{1/2}][U^{1/2}]}{[B][Q^{1/2}]} &= \frac{1}{1\text{Тл}} \left( \frac{1\text{кг} \cdot 1\text{В}}{1\text{Кл}} \right)^{1/2} = \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot 1\text{А} \cdot \text{м}^2 \cdot (1\text{Дж})^{1/2}}{1\text{Дж} \cdot 1\text{Кл}} = \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1\text{Дж})^{1/2} \cdot 1\text{с}} \\ &= \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}/\text{с} \cdot \text{с}} = 1\text{м}. \end{aligned}$$

Подставим в формулу (4) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$R = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 600}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 0,0118 \text{ м} = 11,8 \text{ мм}.$$

**Пример 9.** Электрон, влетев в однородное магнитное поле ( $B = 0,2$  Тл), стал двигаться по окружности радиуса  $R = 5$  см. Определить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока.

**Решение.** Электрон начинает двигаться по окружности, если он влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. На рис.44 линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости чертежа и направлены «от нас» (обозначены крестиками).

Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, который в данном случае определяется выражением

$$I_{\text{эkv}} = \frac{|e|}{T},$$

где  $e$  - заряд электрона;  $T$  - период его обращения.

Период обращения можно выразить через скорость электрона  $v$  и путь, прохо-

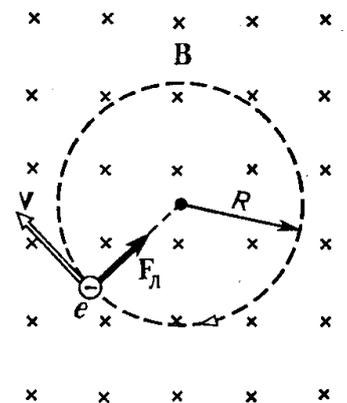


Рис. 44

димый электроном за период  $T = \upsilon/(2\pi R)$ . Тогда

$$I_{\text{экв}} = |e|\upsilon/(2\pi R). \quad (1)$$

Зная  $I_{\text{экв}}$ , найдем магнитный момент эквивалентного кругового тока. По определению, магнитный момент контура с током выражается соотношением

$$p_m = I_{\text{экв}} S, \quad (2)$$

где  $S$  - площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном ( $S = \pi R^2$ ).

Подставив  $I_{\text{экв}}$  из (1) в выражение (2), получим

$$p_m = \frac{|e|\upsilon}{2\pi R} \pi R^2.$$

Сократим на  $\pi R$  и перепишем это выражение в виде:

$$p_m = \frac{1}{2} |e|\upsilon R \quad (3)$$

В полученном выражении известной является скорость электрона, которая связана с радиусом  $R$  окружности, по которой он движется, соотношением  $R = m\upsilon/(Q\mathcal{B})$  (см. пример 8). Заменяя  $Q$  на  $|e|$ , найдем интересующую нас скорость  $\upsilon = |e|BR/m$  и подставим ее в формулу (3):

$$p_m = \frac{|e|^2 BR^2}{2m}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу магнитного момента ( $\text{А}\cdot\text{м}^2$ ):

$$\frac{[e^2][\mathcal{B}][R^2]}{[m]} = \frac{(\text{Кл})^2 \cdot \text{Тл} \cdot (\text{м})^2}{\text{кг}} = \frac{(\text{Кл})^2 \cdot \text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}} = \frac{(\text{А})^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ А}\cdot\text{м}^2.$$

Произведем вычисления:

$$p_m = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,2 \cdot (0,05)^2}{1,9,1 \cdot 10^{-31}} \text{ А}\cdot\text{м}^2 = 7,03 \text{ пА}\cdot\text{м}^2.$$

**Пример 10.** Электрон движется в однородном магнитном поле ( $\mathcal{B} = 10 \text{ мТл}$ ) по винтовой линии, радиус  $R$  которой равен 1 см и шаг  $h = 6 \text{ см}$ . Определить период  $T$  обращения электрона и его скорость  $\upsilon$ .

**Решение.** Электрон будет двигаться по винтовой линии, если он влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом ( $\alpha \neq \pi/2$ ) к линиям магнитной индукции. Разложим, как это показано на рис.45, скорость  $\mathbf{v}$  электрона на две составляющие: параллельную вектору  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{v}_{\parallel}$ ) и перпендикулярную ему ( $\mathbf{v}_{\perp}$ ). Скорость  $\mathbf{v}_{\parallel}$  в магнитном поле не изменяется и обеспечивает перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость  $\mathbf{v}_{\perp}$  в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению ( $\mathbf{F}_L \perp \mathbf{v}_{\perp}$ ) (в отсутствие параллельной составляющей ( $\mathbf{v}_{\parallel} = 0$ ) движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитным силовым линиям). Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении со скоростью  $\upsilon_{\parallel}$  и равномерном движении по окружности со скоростью  $\upsilon_{\perp}$ .

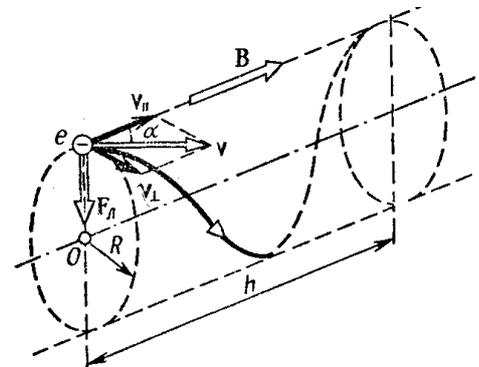


Рис. 45

Период обращения электрона связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = 2\pi R/v_{\perp}. \quad (1)$$

Найдем отношение  $R/v_{\perp}$ . Для этого воспользуемся тем, что сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение  $a_n = v_{\perp}^2/R$ . Согласно второму закону Ньютона можно написать

$$F_L = ma_n,$$

или

$$|e|v_{\perp}B = mv_{\perp}^2/R, \quad (2)$$

где  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

Сократив (2) на  $v_{\perp}$ , выразим соотношение  $R/v_{\perp}$  ( $R/v_{\perp} = m/|e|B$ ) и подставим его в формулу (1):

$$T = 2\pi \frac{m}{|e|B}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу времени (с):

$$\frac{[m]}{[e][B]} = \frac{1\text{кг}}{1\text{Кл} \cdot 1\text{Тл}} = \frac{1\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{1\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1\text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{1\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = 1 \text{ с}.$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \text{ с} = 3,57 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,57 \text{ нс}.$$

Модуль скорости  $v$ , как это видно из рис. 45, можно выразить через  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ :

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}.$$

Из формулы (2) выразим перпендикулярную составляющую скорости:

$$v_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Параллельную составляющую скорости  $v_{\parallel}$  найдем из следующих соображений. За время, равное периоду обращения  $T$ , электрон пройдет вдоль силовой линии расстояние, равное шагу винтовой линии, т.е.  $h = Tv_{\parallel}$  откуда

$$v_{\parallel} = h/T.$$

Подставив вместо  $T$  правую часть выражения (2), получим

$$v_{\parallel} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{|e|B}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу скорости (м/с). Для этого заметим, что  $R$  и  $h$  имеют одинаковую единицу - метр (м). Поэтому в квадратных скобках мы поставим только одну из величин (например,  $R$ ):

$$\frac{[e][B]}{[m]} [R^2]^{1/2} = \frac{1\text{Кл} \cdot 1\text{Тл}}{1\text{кг}} (\text{м}^2)^{1/2} = \frac{1\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{с}}{1\text{кг}} = \frac{1\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ м/с}.$$

Произведем вычисления

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[ (0,01)^2 + \left( \frac{0,06}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ м/с} = 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с} = 24,6 \text{ Мм/с}.$$

**Пример 11.** Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 104 \text{ В}$  и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ( $E = 10 \text{ кВ/м}$ ) и магнитное ( $B = 0,1 \text{ Тл}$ ) поля. Найти отношение заряда альфа-частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

**Решение.** Для того чтобы найти отношение заряда  $Q$  альфа-частицы к ее массе  $m$  воспользуемся связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии частицы:

$$QU = mv^2/2,$$

откуда

$$Q/m = v^2/(2U) \quad (1)$$

Скорость  $v$  альфа-частицы найдем из следующих соображений. В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

а) сила Лоренца  $F_L = Q[vB]$ , направленная перпендикулярно скорости  $v$  и вектору магнитной индукции  $B$ ;

б) кулоновская сила  $F_K = QE$ , сонаправленная с вектором напряженности  $E$  электростатического поля ( $Q > 0$ ). На рис.46 направим вектор магнитной индукции  $B$  вдоль оси  $Oz$ , скорость  $v$  - в положительном направлении оси  $Ox$ , тогда  $F_L$  и  $F_K$  будут направлены так, как показано на рисунке.

Альфа-частица не будет испытывать отклонения, если геометрическая сумма сил  $F_L = F_K$  будет равна нулю. В проекции на ось  $Oy$  получим следующее равенство (при этом учтено, что  $v \perp B$  и  $\sin \alpha = 1$ ):

$$QE - QvB = 0,$$

откуда

$$v = E/B.$$

Подставив это выражение скорости в формулу (1), получим

$$Q/m = E^2/(2UB^2).$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу удельного заряда (Кл/кг):

$$\frac{[E^2]}{[U][B^2]} = \frac{(1\text{В/м})^2}{1\text{В} \cdot (1\text{Тл})^2} = \frac{(1\text{В} \cdot \text{А})^2}{1\text{В} \cdot (1\text{Н})^2} = \frac{1\text{Дж} \cdot \text{Кл}}{(1\text{Н} \cdot \text{с})^2} = \frac{1\text{Кл} \cdot \text{м}}{1\text{Н} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ Кл/кг}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{Q}{m} = \frac{(10^4)^2}{2 \cdot 104(0,1)^2} \text{ Кл/кг} = 4,81 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг} = 48,1 \text{ МКл/кг}.$$

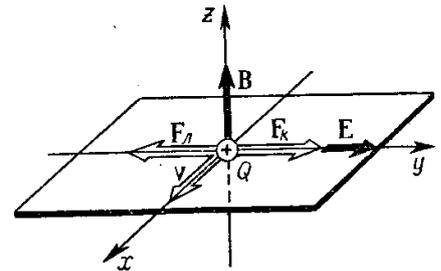


Рис. 46

**Пример 12.** Короткая катушка, содержащая  $N = 10^3$  витков, равномерно вращается с частотой  $n = 10 \text{ с}^{-1}$  относительно оси  $AB$ , лежащей в плоскости катушки и перпенди-

кулярной линиям однородного магнитного поля ( $B = 0,04$  Тл). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с линиями поля. Площадь  $S$  катушки равна  $100 \text{ см}^2$ .

**Решение.** Мгновенное значение ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1)$$

Потокосцепление  $\Psi = N\Phi$ , где  $N$  - число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком  $\Phi$ . Подставив выражение  $\Psi$  в формулу (1), получим

$$\varepsilon_i = - N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

При вращении катушки магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку в момент времени  $t$ , изменяется по закону  $\Phi = BScos\omega t$ , где  $B$  - магнитная индукция;  $S$  - площадь катушки;  $\omega$  - угловая скорость катушки. Подставив в формулу (2) выражение магнитного потока  $\Phi$  и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin\omega t.$$

Заметив, что угловая скорость  $\omega$  связана с частотой вращения  $n$  катушки соотношением  $\omega = 2\pi n$  и что угол  $\omega t = \pi/2 - \alpha$  (рис.47), получим (учтено, что  $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ )

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу ЭДС (В):

$$[n] [B] [S] = \frac{1\text{Тл} \cdot 1\text{м}^2}{1\text{с}} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{м}^2}{1\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}} = 1 \text{ В}.$$

Произведем вычисления:

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \text{ В} = 25,1 \text{ В}.$$

**Пример 13.** Квадратная проволочная рамка со стороной  $a = 5$  см и сопротивлением  $R = 10$  мОм находится в однородном магнитном поле ( $B = 40$  мТл). Нормаль к плоскости рамки составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с линиями магнитной индукции. Определить заряд  $Q$ , который пройдет, по рамке, если магнитное поле выключить.

**Решение.** При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникнет ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить воспользовавшись законом Ома для полной цепи  $I_i = \varepsilon_i / R$ , где  $R$  - сопротивление рамки. Тогда

$$I_i R = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

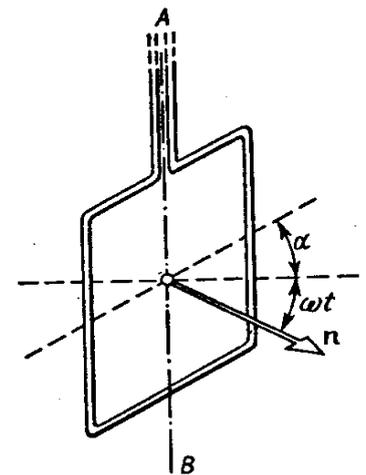


Рис. 47

Так как мгновенное значение силы индукционного тока  $I_1 = \frac{dQ}{dt}$ , то это выражение можно переписать в виде

$$\frac{dQ}{dt} R = - \frac{d\Phi}{dt}, \text{ откуда } dQ = - \frac{d\Phi}{R} \quad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1), найдем

$$\int_0^Q dQ = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi, \text{ или } Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметив, что при выключенном поле (конечное состояние)  $\Phi_2 = 0$ , последнее равенство переписывается в виде

$$Q = \Phi_1 / R. \quad (2)$$

Найдем магнитный поток  $\Phi_1$ . По определению магнитного потока имеем

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

где  $S$  - площадь рамки.

В нашем случае (рамка квадратная)  $S = a^2$ . Тогда

$$\Phi_1 = Ba^2 \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$Q = \frac{Ba^2}{R} \cos \alpha.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу заряда (Кл):

$$\frac{[B][a^2]}{[R]} = \frac{1 \text{Тл} \cdot (1\text{м})^2}{1 \text{Ом}} = \frac{1 \text{Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{1 \text{Дж}}{1 \text{В}} = 1 \text{ Кл}.$$

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{3}/2}{0,01} \text{ Кл} = 8,67 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 8,67 \text{ мКл}.$$

**Пример 14.** Плоский квадратный контур со стороной  $a = 10$  см, по которому течет ток  $I = 100$  А, свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 1$  Тл). Определить работу  $A$ , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1)  $\varphi_1 = 90^\circ$ ; 2)  $\varphi_2 = 3^\circ$ . При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

**Решение.** Как известно, на контур с током в магнитном поле действует момент силы (рис.48)

$$M = p_m B \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $p_m = IS = Ia^2$  - магнитный момент контура;  $B$  - магнитная индукция;  $\varphi$  - угол между векторами  $p_m$  (направлен по нормали к контуру) и  $B$ .

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитное поле. При этом момент силы равен нулю ( $M = 0$ ), а значит  $\varphi = 0$ , т.е. векторы  $p_m$  и  $B$  сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил [см. (1)] будет стремиться вернуть кон-

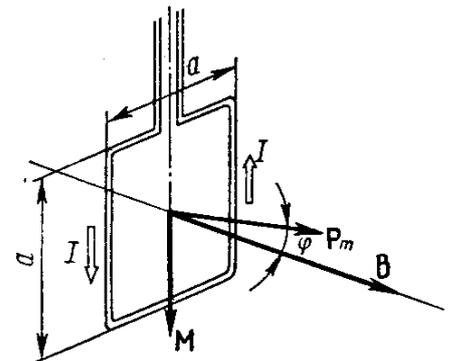


Рис. 48

тур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменной (зависит от угла поворота  $\varphi$ ), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме  $dA = M d\varphi$ . Учитывая формулу (1), получаем

$$dA = IB^2 \sin\varphi d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi d\varphi, \quad (2)$$

Работа при повороте на угол  $\varphi_1 = 90^\circ$

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = IBa^2 [(-\cos\varphi)]_0^{\pi/2} = IBa^2, \quad (3)$$

Выразим числовые значения величин в единицах СИ ( $I = 100$  А,  $B = 1$  Тл,  $a = 10$  см =  $0,1$  м) и подставим в (3):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Работа при повороте на угол  $\varphi_2 = 3^\circ$ . В этом случае, учитывая, что угол  $\varphi_2$  мал, заменим в выражении (2)  $\sin\varphi \approx \varphi$ :

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2. \quad (4)$$

Выразим угол  $\varphi_2$  в радианах. После подстановки числовых значений величин в (4) найдем

$$A_2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,0523)^2 \text{ Дж} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,37 \text{ мДж}.$$

Задачу можно решить и другими способами:

1. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, пронизывающего контур:

$$A = -I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где  $\Phi_1$  - магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения;  $\Phi_2$  - то же, после перемещения.

Если  $\varphi_1 = 90^\circ$ , то  $\Phi_1 = BS$ ,  $\Phi_2 = 0$ . Следовательно,

$$A = IBS = IBa^2,$$

что совпадает с (3).

2. Воспользуемся выражением для механической потенциальной энергии контура с током в магнитном поле

$$\Pi(\varphi) = -p_m B \cos\varphi.$$

Тогда работа внешних сил

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1,$$

или

$$A = p_m B (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Так как  $p_m = Ia^2$ ,  $\cos\varphi_1 = 1$  и  $\cos\varphi_2 = 0$ , то

$$A = IBa^2,$$

что также совпадает с (3).

**Пример 15.** Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит  $N = 1200$  витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока  $I = 4$  А магнитный поток  $\Phi = 6$  мкВб. Определить индуктивность  $L$  соленоида и энергию  $W$  магнитного поля соленоида.

**Решение.** Индуктивность  $L$  связана с потокоцеплением  $\Psi$  и силой тока  $I$  соотношением

$$\Psi = LI. \quad (1)$$

Потокоцепление, в свою очередь, может быть определено через поток  $\Phi$  и число витков  $N$  (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим индуктивность соленоида:

$$L = N\Phi/I. \quad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Выразив  $L$  согласно (3), получим

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I. \quad (4)$$

Подставим в формулы (3) и (4) значения физических величин и произведем вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ Гн} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \text{ Дж} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Напряженность магнитного поля  $H = 100$  А/м. Вычислить магнитную индукцию  $B$  этого поля в вакууме. [126 мкТл]

2. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи  $I_1 = 10$  А и  $I_2 = 15$  А. Расстояние между проводами  $A = 10$  см. Определить напряженность  $H$  магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на  $r_1 = 8$  см и от второго на  $r_2 = 6$  см. [44,5 А/м]

3. Решить задачу 2 при условии, что токи текут в противоположных направлениях, точка удалена от первого провода на  $r_1 = 15$  см и от второго на  $r_2 = 10$  см. [17,4 А/м]

4. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной  $a = 10$  см, идет ток  $I = 20$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в центре шестиугольника. [138 мкТл]

5. Обмотка соленоида содержит два слоя плотно прилегающих друг к другу витков провода диаметром  $d = 0,2$  мм. Определить магнитную индукцию  $B$  на оси соленоида, если по проводу идет ток  $I = 0,5$  А. [6,28 мТл]

6. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл помещен прямой проводник длиной  $\ell = 20$  см (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу  $F$ , действующую на проводник, если по нему течет ток  $I = 50$  А, а угол  $\varphi$  между направлением тока и вектором магнитной индукции равен  $30^\circ$ . [50 мН]

7. Рамка с током  $I = 5$  А содержит  $N = 20$  витков тонкого провода. Определить магнитный момент  $p_m$  рамки с током, если ее площадь  $S = 10$  см<sup>2</sup>. [0,1 А·м<sup>2</sup>]

8. По витку радиусом  $R = 10$  см течет ток  $I = 50$  А. Виток помещен в однородное

магнитное поле ( $B = 0,2$  Тл). Определить момент силы  $M$ , действующей на виток, если плоскость витка составляет угол  $\varphi = 60^\circ$  с линиями индукции. [0,157 Н м]

9. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу радиусом  $R = 10$  см. Определить скорость  $v$  протона, если магнитная индукция  $B = 1$  Тл. [9,57 Мм/с]

10. Определить частоту  $n$  обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле ( $B = 1$  Тл). [ $2,8 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ]

11. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии радиусом  $R = 5$  см и шагом  $h = 20$  см. Определить скорость  $v$  электрона, если магнитная индукция  $B = 0,1$  мТл. [ $1,04 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ ]

12. Кольцо радиусом  $R = 10$  см находится в однородном магнитном поле ( $B = 0,318$  Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол  $\varphi = 30^\circ$ . Вычислить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий кольцо. [5 мВб]

13. По проводнику, согнутому в виде квадрата со стороной.  $a = 10$  см, течет ток  $I = 20$  А. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным силовым линиям поля. Определить работу  $A$ , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить проводник за пределы поля. Магнитная индукция  $B = 0,1$  Тл. Поле считать однородным. [0,02 Дж]

14. Проводник длиной  $\ell = 1$  м движется со скоростью  $v = 5$  м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить магнитную индукцию  $B$ , если на концах проводника возникает разность потенциалов  $U = 0,02$  В. [4 мТл]

15. Рамка площадью  $S = 50 \text{ см}^2$ , содержащая  $N = 100$  витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B = 40$  мТл). Определить максимальную ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{max}}$ , если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка вращается с частотой  $n = 960$  об/мин. [2,01 В]

16. Кольцо из проволоки сопротивлением  $R = 1$  мОм находится в однородном магнитном поле ( $B = 0,4$  Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол  $\varphi = 90^\circ$ . Определить заряд  $Q$ , который протечет по кольцу, если его выдернуть из поля. Площадь кольца  $S = 10 \text{ см}^2$ . [0,4 Кл]

17. Соленоид содержит  $N = 4000$  витков провода, по которому течет ток  $I = 20$  А. Определить магнитный поток  $\Phi$  и потокосцепление  $\Psi$ , если индуктивность  $L = 0,4$  Гн. [2 мВб; 8 Вб]

18. На картонный каркас длиной  $\ell = 50$  см и площадью сечения  $S = 4 \text{ см}^2$  намотан в один слой провод диаметром  $d = 0,2$  мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Определить индуктивность  $L$  получившегося соленоида. [6,28 мГн]

19. По обмотке соленоида индуктивностью  $L = 0,2$  Гн течет ток  $I = 10$  А. Определить энергию  $W$  магнитного поля соленоида. [10 Дж]

### Контрольная работа № 4

(вариант – две последних цифры шифра)

Ва- ри- ант	Номера задач (метод. указ. 1987 г.)						Ва- ри- ант	Номера задач (метод. указ. 1987 г.)					
	404	411	438	443	452	463		401	414	435	448	453	468
00	404	411	438	443	452	463	01	401	414	435	448	453	468
02	405	413	434	450	456	462	03	402	412	436	449	454	467
04	410	415	440	446	451	470	05	409	411	433	441	458	466

06	404	414	437	445	457	463	07	401	416	431	443	459	468
08	408	412	434	442	452	461	09	403	413	438	449	453	462
10	402	411	435	448	456	466	11	410	415	433	450	454	463
12	406	414	439	441	458	470	13	405	412	440	445	459	467
14	409	413	431	446	457	462	15	408	418	438	442	452	466
16	402	416	437	443	453	461	17	403	411	436	441	451	468
18	401	414	434	449	458	464	19	405	415	435	445	456	470
20	404	418	433	446	454	466	21	409	412	438	442	459	463
22	410	411	431	443	453	462	23	408	416	439	450	452	461
24	403	414	436	441	458	464	25	401	413	437	446	456	466
26	402	418	440	442	457	468	27	404	412	435	445	451	462
28	406	416	434	443	454	470	29	405	411	438	448	452	464
30	410	413	436	450	453	467	31	403	414	437	446	459	468
32	409	418	439	449	457	463	33	401	416	433	443	456	462
34	402	415	440	441	451	464	35	408	413	434	445	458	470
36	405	414	435	450	454	461	37	404	411	438	442	453	467
38	410	418	436	443	457	462	39	409	412	431	449	456	466
40	403	413	437	446	452	470	41	408	415	440	445	458	461
42	402	414	435	450	451	468	43	405	416	434	441	453	467
44	401	418	433	449	459	464	45	409	411	439	443	457	466
46	404	412	436	442	452	470	47	406	415	431	448	458	468
48	403	413	438	441	456	467	49	410	414	437	449	454	462
50	401	416	433	446	453	461	51	409	411	439	442	459	470
52	408	418	436	448	451	463	53	402	412	431	450	458	464
54	406	414	434	449	457	462	55	403	415	435	445	454	461
56	410	413	440	441	456	468	57	409	418	437	448	453	470
58	401	412	436	443	451	463	59	405	414	433	450	459	462
60	404	416	438	446	458	466	61	402	411	434	449	457	464
62	406	415	431	445	454	467	63	408	412	437	442	456	468
64	409	414	440	443	451	470	65	410	416	439	441	459	463
66	405	413	433	448	452	461	67	402	415	435	449	457	467
68	403	418	436	442	453	462	69	404	414	438	446	456	464
70	401	411	434	441	454	468	71	406	413	440	443	458	461
72	409	416	439	449	451	463	73	402	418	435	450	459	462
74	403	412	436	446	457	464	75	408	414	433	442	452	468
76	401	415	431	441	453	466	77	406	416	437	443	456	470
78	405	413	439	448	451	462	79	404	411	435	445	458	461
80	409	418	440	446	457	467	81	410	414	436	442	452	468
82	403	416	434	441	459	470	83	408	412	433	448	453	466
84	406	413	439	445	456	464	85	404	418	431	446	451	467
86	402	411	440	442	458	463	87	410	416	436	449	457	468
88	409	412	438	441	459	470	89	408	414	435	443	454	461
90	406	415	434	445	456	462	91	403	411	433	442	451	467
92	401	416	439	446	458	466	93	410	412	436	441	457	463
94	405	414	438	443	452	468	95	409	413	435	445	454	470
96	404	411	434	448	453	462	97	402	416	431	450	456	467
98	408	415	437	442	451	464	99	403	412	439	449	459	466

401. Бесконечно длинный провод с током  $I = 100$  А изогнут так, как это показано на рис.49. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R = 10$  см.

402. Магнитный момент  $p_m$  тонкого проводящего кольца  $p_m = 5$  А·м<sup>2</sup>. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , находящейся на оси кольца и удаленной от точек кольца на расстояние  $r = 20$  см (рис.50).

403. По двум скрещенным под прямым углом бесконечно длинным проводам текут токи  $I$  и  $2I$  ( $I = 100$  А). Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$  (рис.51). Расстояние  $d = 10$  см.

404. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на

рис.52, течет ток  $I = 200$  А. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R = 10$  см.

405. По тонкому кольцу радиусом  $R = 20$  см течёт ток  $I = 100$  А. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  на оси кольца в точке  $A$  (рис.53). Угол  $\beta = \pi/3$ .

406. По двум бесконечно длинным проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи  $I_1$  и  $I_2 = 2I_1$  ( $I_1 = 100$  А). Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $A$ , равноудаленной от проводов на расстояние  $d = 10$  см (рис.54).

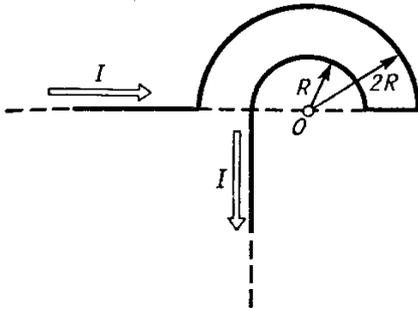


Рис. 49

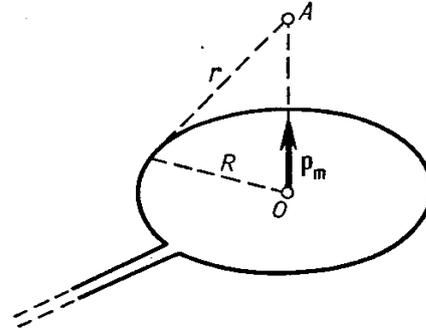


Рис. 50

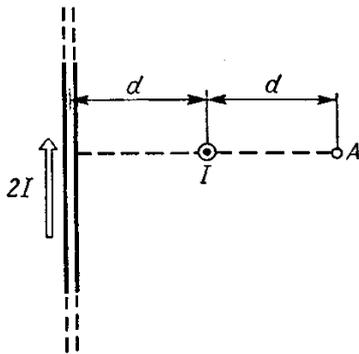


Рис. 51

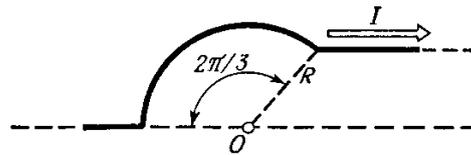


Рис. 52

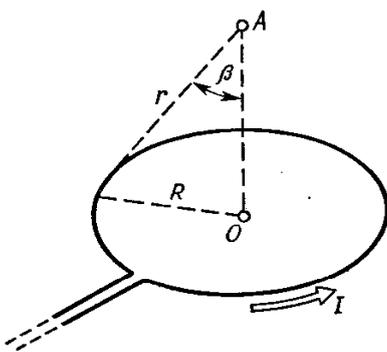


Рис. 53

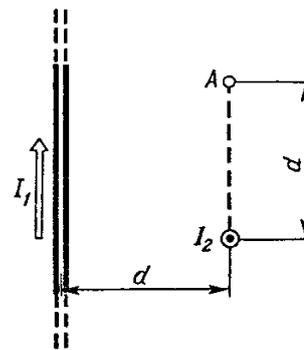


Рис. 54

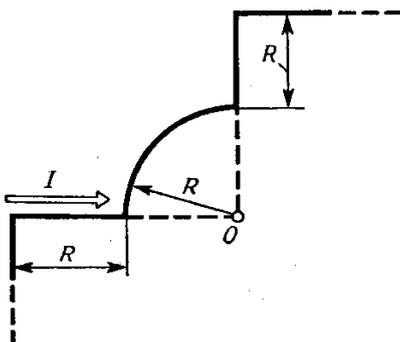


Рис. 55

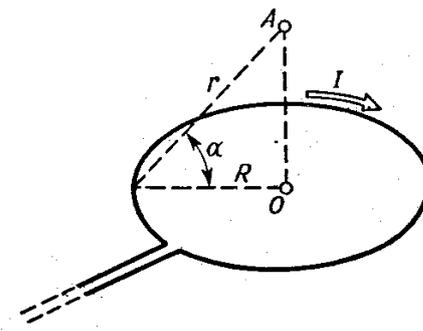


Рис. 56

407. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на рис.55, течет ток  $I = 200$  А. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R = 10$  см.

408. По тонкому кольцу течет ток  $I = 80$  А. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $A$ , равноудаленной от точек кольца на расстояние  $r = 10$  см (рис.56). Угол  $\alpha = \pi/6$ .

409. По двум бесконечно длинным, прямым параллельным проводам текут одинаковые токи  $I = 60$  А. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $A$  (рис.57), равноудаленной от проводов на расстояние  $d = 10$  см. Угол  $\beta = \pi/3$ .

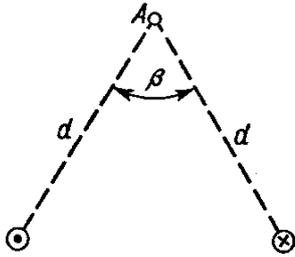


Рис. 57

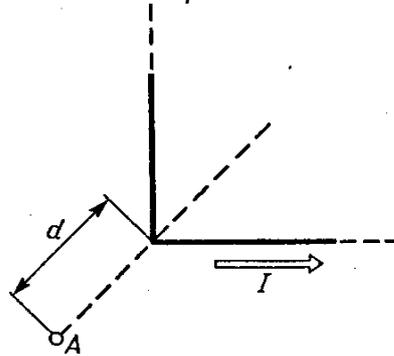


Рис. 58

410. Бесконечно длинный провод с током  $I = 50$  А изогнут так, как это показано на рис.58. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в точке  $A$ , лежащей на биссектрисе прямого угла на расстоянии  $d = 10$  см от его вершины.

411. По двум параллельным проводам длиной  $\ell = 3$  м каждый текут одинаковые токи  $I = 500$  А. Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Определить силу  $F$  взаимодействия проводов.

412. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии  $d = 20$  см друг от друга, текут одинаковые токи  $I = 400$  А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить для каждого из проводов отношение силы, действующей на него, к его длине.

413. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи  $I = 200$  А. Определить силу  $F$  действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее длине.

414. Короткая катушка площадью поперечного сечения  $S = 250$  см<sup>2</sup>, содержащая  $N = 500$  витков провода, по которому течет ток  $I = 5$  А, помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H = 1000$  А/м. Найти: 1) магнитный момент  $p_m$  катушки; 2) вращающий момент  $M$ , действующий на катушку, если ось катушки составляет угол  $\varphi = 30^\circ$  с линиями поля.

415. Тонкий провод длиной  $\ell = 20$  см изогнут в виде полукольца и помещен в магнитное поле ( $B = 10$  мТл) так, что площадь полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. По проводу пропустили ток  $I = 50$  А. Определить силу  $F$ , действующую на провод. Подводящие провода направлены вдоль линий магнитной индукции.

416. Шины генератора длиной  $\ell = 4$  м находятся на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга. Найти силу взаимного отталкивания шин при коротком замыкании, если

ток  $I_{кз}$  короткого замыкания равен 5 кА.

417. Квадратный контур со стороной  $a = 10$  см, по которому течет ток  $I = 50$  А, свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 10$  мТл). Определить изменение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии контура при повороте вокруг оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\vartheta = 180^\circ$ .

418. Тонкое проводящее кольцо с током  $I = 40$  А помещено в однородное магнитное поле ( $B = 80$  мТл). Плоскость кольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. Радиус  $R$  кольца равен 20 см. Найти силу  $F$ , растягивающую кольцо.

419. Квадратная рамка из тонкого провода может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон. Масса  $m$  рамки равна 20 г. Рамку поместили в однородное магнитное поле ( $B = 0,1$  Тл), направленное вертикально вверх. Определить угол  $\alpha$ , на который отклонилась рамка от вертикали, когда по ней пропустили ток  $I = 10$  А.

420. По круговому витку радиусом  $R = 5$  см течет ток  $I = 20$  А. Виток расположен в однородном магнитном поле ( $B = 40$  мТл) так, что нормаль к плоскости контура составляет угол  $\vartheta = \pi/6$  с вектором  $\mathbf{B}$ . Определить изменение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии контура при его повороте на угол  $\varphi = \pi/2$  в направлении увеличения угла  $\vartheta$ .

421. По тонкому кольцу радиусом  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 50$  нКл/м. Кольцо вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, с частотой  $n = 10$  с<sup>-1</sup>. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением кольца.

422. Диск, радиусом  $R = 8$  см несет равномерно распределенный по поверхности заряд ( $\sigma = 100$  нКл/м<sup>2</sup>). Определить магнитный момент  $p_m$  обусловленный вращением диска, относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Угловая скорость вращения диска  $\omega = 60$  рад/с.

423. Стержень длиной  $\ell = 20$  см заряжен равномерно распределенным зарядом с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м. Стержень вращается с частотой  $n = 10$  с<sup>-1</sup> относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить магнитный момент  $p_m$  обусловленный вращением стержня.

424. Протон движется по окружности радиусом  $R = 0,5$  см с линейной скоростью  $v = 10^6$  м/с. Определить магнитный момент  $p_m$  создаваемый эквивалентным круговым током.

425. Тонкое кольцо радиусом  $R = 10$  см несет равномерно распределенный заряд  $Q = 80$  нКл. Кольцо вращается с угловой скоростью  $\omega = 50$  рад/с относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца. Найти магнитный момент  $p_m$  обусловленный вращением кольца.

426. Заряд  $Q = 0,1$  мкКл равномерно распределен по стержню длиной  $\ell = 50$  см. Стержень вращается с угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент  $p_m$  обусловленный вращением стержня.

427. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра (протона) по окружности радиусом  $R = 53$  пм. Определить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока.

428. Сплошной цилиндр радиусом  $R = 4$  см и высотой  $h = 15$  см несет равномерно распределенный по объему заряд ( $\rho = 0,1$  мкКл/м<sup>3</sup>). Цилиндр вращается с ча-

стотой  $n = 10 \text{ с}^{-1}$  относительно оси, совпадающей с его геометрической осью. Найти магнитный момент  $p_m$  цилиндра, обусловленный его вращением.

429. По поверхности диска радиусом  $R = 15 \text{ см}$  равномерно распределен заряд  $Q = 0,2 \text{ мкКл}$ . Диск вращается с угловой скоростью  $\omega = 30 \text{ рад/с}$  относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением диска.

430. По тонкому стержню длиной  $\ell = 40 \text{ см}$  равномерно распределен заряд  $Q = 60 \text{ нКл}$ . Стержень вращается с частотой  $n = 12 \text{ с}^{-1}$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии  $a = \ell/3$  одного из его концов. Определить магнитный момент  $p_m$  обусловленный вращением стержня.

431. Два иона разных масс с одинаковыми зарядами влетели в однородное магнитное поле, стали двигаться по окружностям радиусами  $R_1 = 3 \text{ см}$  и  $R_2 = 1,73 \text{ см}$ . Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

432. Однозарядный ион натрия прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 1 \text{ кВ}$  и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное поле ( $B = 0,5 \text{ Тл}$ ). Определить относительную атомную массу  $A$  иона, если он описал окружность радиусом  $R = 4,37 \text{ см}$ .

433. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 800 \text{ В}$  и, влетев в однородное магнитное поле  $B = 47 \text{ мТл}$ , стал двигаться по винтовой линии с шагом  $h = 6 \text{ см}$ . Определить радиус  $R$  винтовой линии.

434. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 300 \text{ В}$  и, попав в однородное магнитное поле, стала двигаться по винтовой линии радиусом  $R = 1 \text{ см}$  и шагом  $h = 4 \text{ см}$ . Определить магнитную индукцию  $B$  поля.

435. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 100 \text{ В}$  и, влетев в однородное магнитное поле ( $B = 0,1 \text{ Тл}$ ), стала двигаться по винтовой линии с шагом  $h = 6,5 \text{ см}$  и радиусом  $R = 1 \text{ см}$ . Определить отношение заряда частицы к ее массе.

436. Электрон влетел в однородное магнитное поле ( $B = 200 \text{ мТл}$ ) перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить силу эквивалентного кругового тока  $I_{\text{экв}}$ , создаваемого движением электрона в магнитном поле.

437. Протон прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 300 \text{ В}$  и влетел в однородное магнитное поле ( $B = 20 \text{ мТл}$ ) под углом  $\alpha = 30^\circ$  к линиям магнитной индукции. Определить шаг  $h$  и радиус  $R$  винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.

438. Альфа-частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U$ , стала двигаться в однородном магнитном поле ( $B = 50 \text{ мТл}$ ) по винтовой линии с шагом  $h = 5 \text{ см}$  и радиусом  $R = 1 \text{ см}$ . Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла альфа-частица.

439. Ион с кинетической энергией  $T = 1 \text{ кэВ}$  попал в однородное магнитное поле ( $B = 21 \text{ мТл}$ ) и стал двигаться по окружности. Определить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока.

440. Ион, попав в магнитное поле ( $B = 0,01 \text{ Тл}$ ) стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию  $T$  (в эВ) иона, если магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока равен  $1,6 \cdot 10^{-4} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

441. Протон влетел в скрещенные под углом  $\alpha = 120^\circ$  магнитное ( $B = 50 \text{ мТл}$ ) и

электрическое ( $E = 20$  кВ/м) поля. Определить ускорение  $\mathbf{a}^*$  протона, если его скорость  $\mathbf{v}$  ( $|\mathbf{v}| = 4 \cdot 10^5$  м/с) перпендикулярна векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

442. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 645$  В, влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $B = 1,5$  мТл) и электрическое ( $E = 200$  В/м) поля. Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.

443. Альфа-частица влетела в скрещенные под прямым углом магнитное ( $B = 5$  мТл) и электрическое ( $E = 30$  кВ/м) поля. Определить ускорение  $\mathbf{a}^*$  альфа-частицы, если ее скорость  $\mathbf{v}$  ( $|\mathbf{v}| = 2 \cdot 10^6$  м/с) перпендикулярна векторам  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ , причем силы, действующие со стороны этих полей, противоположны.

444. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 1,2$  кВ, попал в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Определить напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля, если магнитная индукция  $\mathbf{B}$  поля равна 6 мТл.

445. Однородные магнитное ( $B = 2,5$  мТл) и электрическое ( $E = 10$  кВ/м) поля скрещены под прямым углом. Электрон, скорость  $v$  которого равна  $4 \cdot 10^6$  м/с, влетает в эти поля так, что силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, сонаправлены. Определить ускорение  $\mathbf{a}^*$  электрона.

446. Однозарядный ион лития массой  $m = 7$  а.е.м. прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 300$  В и влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  поля, если траектория иона в скрещенных полях прямолинейна. Напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля равна 2 кВ/м.

447. Альфа-частица, имеющая скорость  $v = 2$  Мм/с, влетает под углом  $\alpha = 30^\circ$  к сонаправленному магнитному ( $B = 1$  мТл) и электрическому ( $E = 1$  кВ/м) полям. Определить ускорение  $\mathbf{a}^*$  альфа-частицы.

448. Протон прошел некоторую ускоряющую разность потенциалов  $U$  и влетел в скрещенные под прямым углом однородные поля: магнитное ( $B = 5$  мТл) и электрическое ( $E = 20$  кВ/м). Определить разность потенциалов  $U$ , если протон в скрещенных полях движется прямолинейно.

449. Магнитное ( $B = 2$  мТл) и электрическое ( $E = 1,6$  кВ/м) поля сонаправлены. Перпендикулярно векторам  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  влетает электрон со скоростью  $v = 0,8$  Мм/с. Определить ускорение  $\mathbf{a}^*$  электрона.

450. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $H = 1$  МА/м) и электрическое ( $E = 50$  кВ/м) поля влетел ион. При какой скорости  $v$  иона (по модулю и направлению) он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно?

451. Плоский контур площадью  $S = 20$  см<sup>2</sup> находится в однородном магнитном поле ( $B = 0,03$  Тл). Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол  $\varphi = 60^\circ$  с направлением линий индукций.

452. Магнитный поток  $\Phi$  сквозь сечение соленоида равен 50 мкВб. Длина соленоида  $l = 50$  см. Найти магнитный момент  $p_m$  соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

453. В средней части соленоида, содержащего  $n = 8$  витков/см, помещен круговой виток диаметром  $d = 4$  см. Плоскость витка расположена под углом  $\varphi = 60^\circ$

\* Ускорение  $\mathbf{a}$  определяется в момент вхождения заряженной частицы в область пространства, где локализованы однородные магнитное и электрическое поле.

к оси соленоида. Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий виток, если по обмотке соленоида течет ток  $I = 1$  А.

454. На длинный картонный каркас диаметром  $d = 5$  см уложена однослойная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром  $d = 0,2$  мм. Определить магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый таким соленоидом при силе тока  $I = 0,5$  А.

455. Квадратный контур со стороной  $a = 10$  см, в котором течет ток  $I = 6$  А, находится в магнитном поле ( $B = 0,8$  Тл) под углом  $\alpha = 50^\circ$  к линиям индукции. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

456. Плоский контур с током  $I = 5$  А свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 0,4$  Тл). Площадь контура  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\alpha = 40^\circ$ . Определить совершенную при этом работу  $A$ .

457. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока  $I = 60$  А, свободно установился в однородном магнитном поле ( $B = 20$  мТл). Диаметр витка  $d = 10$  см. Какую работу  $A$  нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол  $\alpha = \pi/3$ ?

458. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Поддерживая в контуре постоянную силу тока  $I = 50$  А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если при перемещении контура была совершена работа  $A = 0,4$  Дж.

459. Плоский контур с током  $I = 50$  А расположен в однородном магнитном поле ( $B = 0,6$  Тл) так, что нормаль к контуру перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить работу, совершаемую силами поля при медленном повороте контура около оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\alpha = 30^\circ$ .

460. Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий соленоид, если его длина  $\ell = 50$  см и магнитный момент  $p_m = 0,4$  Вб.

461. В однородном магнитном поле ( $B = 0,1$  Тл) равномерно с частотой  $n = 5$  с<sup>-1</sup> вращается стержень длиной  $\ell = 50$  см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям напряженности, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов  $U$ .

462. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл вращается с частотой  $n = 10$  с<sup>-1</sup> стержень длиной  $\ell = 20$  см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов  $U$  на концах стержня.

463. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. При этом по цепи прошел заряд  $Q = 50$  мкКл. Определить изменение магнитного потока  $\Delta\Phi$  через кольцо, если сопротивление цепи гальванометра  $R = 10$  Ом.

464. Тонкий медный провод массой  $m = 5$  г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ( $B = 0,2$  Тл) так, что его плоскость перпендикулярна линиям поля. Определить заряд  $Q$ , который потечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

465. Рамка из провода сопротивлением  $R = 0,04$  Ом равномерно вращается в

однородном магнитном поле ( $B = 0,6$  Тл). Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Определить заряд  $Q$ , который потечет по рамке при изменении угла между нормалью к рамке и линиями индукции: 1) от  $0$  до  $45^\circ$ ; 2) от  $45$  до  $90^\circ$ .

466. Проволочный виток диаметром  $D = 5$  см и сопротивлением  $R = 0,02$  Ом находится в однородном магнитном поле ( $B = 0,3$  Тл). Плоскость витка составляет угол  $\varphi = 40^\circ$  с линиями индукции. Какой заряд  $Q$  протечет по витку при выключении магнитного поля?

467. Рамка, содержащая  $N = 200$  витков тонкого провода, может свободно вращаться относительно оси, лежащей в плоскости рамки. Площадь рамки  $S = 50$  см<sup>2</sup>. Ось рамки перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля ( $B = 0,05$  Тл). Определить максимальную ЭДС  $\varepsilon_{\max}$ , которая индуцируется в рамке при ее вращении с частотой  $n = 40$  с<sup>-1</sup>.

468. Прямой проводящий стержень длиной  $\ell = 40$  см находится в однородном магнитном поле ( $B = 0,1$  Тл). Концы стержня замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи  $R = 0,5$  Ом. Какая мощность  $P$  потребуется для равномерного перемещения стержня перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью  $v = 10$  м/с?

469. Проволочный контур площадью  $S = 500$  см<sup>2</sup> и сопротивлением  $R = 0,1$  Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B = 0,5$  Тл). Ось вращения лежит в плоскости кольца и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную мощность  $p_{\max}$ , необходимую для вращения контура с угловой скоростью  $\omega = 50$  рад/с.

470. Кольцо из медного провода массой  $m = 10$  г помещено в однородное магнитное поле ( $B = 0,5$  Тл) так, что плоскость кольца составляет угол  $\beta = 60^\circ$  с линиями магнитной индукции. Определить заряд  $Q$ , который пройдет по кольцу, если снять магнитное поле.

471. Соленоид сечением  $S = 10$  см<sup>2</sup> содержит  $N = 10^3$  витков. При силе тока  $I = 5$  А магнитная индукция  $B$  поля внутри соленоида равна  $0,05$  Тл. Определить индуктивность  $L$  соленоида.

472. На картонный каркас длиной  $\ell = 0,8$  м и диаметром  $D = 4$  см намотан в один слой провод диаметром  $d = 0,25$  мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность  $L$  получившегося соленоида.

473. Катушка, намотанная на магнитный цилиндрический каркас, имеет  $N = 250$  витков и индуктивность  $L_1 = 36$  мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до  $L_2 = 100$  мГн, обмотку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки?

474. Индуктивность  $L$  соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна  $0,5$  мГн. Длина  $\ell$  соленоида равна  $0,6$  м, диаметр  $D = 2$  см. Определить отношение  $n$  числа витков соленоида к его длине.

475. Соленоид содержит  $N = 800$  витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала)  $S = 10$  см<sup>2</sup>. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией  $B = 8$  мТл. Определить среднее значение ЭДС  $\langle \varepsilon_s \rangle$  самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время  $\Delta t = 0,8$  мс.

476. По катушке индуктивностью  $L = 8 \text{ мкГн}$  течет ток  $I = 6 \text{ А}$ . Определить среднее значение ЭДС  $\langle \mathcal{E}_s \rangle$  самоиндукции, возникающей в контуре, если сила тока изменится практически до нуля за время  $\Delta t = 5 \text{ мс}$ .

477. В электрической цепи, содержащей резистор сопротивлением  $R = 20 \text{ Ом}$  и катушку индуктивностью  $L = 0,06 \text{ Гн}$ , течет ток  $I = 20 \text{ А}$ . Определить силу тока  $I$  в цепи через  $\Delta t = 0,2 \text{ мс}$  после ее размыкания.

478. Цепь состоит из катушки индуктивностью  $L = 0,1 \text{ Гн}$  и источника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепи. Время, через которое сила тока уменьшится до  $0,001$  первоначального значения, равно  $t = 0,07 \text{ с}$ . Определить сопротивление катушки.

479. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 0,2 \text{ Гн}$ . Через какое время сила тока в цепи достигнет  $50 \%$  максимального значения?

480. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением  $R = 20 \text{ Ом}$ . Через время  $t = 0,1 \text{ с}$  сила тока  $I$  в катушке достигла  $0,95$  предельного значения. Определить индуктивность  $L$  катушки.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## 1. Основные физические постоянные (округление значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	G	6,67·10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /(кг·с <sup>2</sup> )
Постоянная Авогадро	N <sub>A</sub>	6,01·10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Стандартный объем*	V <sub>m</sub>	22,4·10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup> /моль
Постоянная Больцмана	k	1,38·10 <sup>-23</sup> Дж/К
Элементарный заряд	e	1,60·10 <sup>-19</sup> Кл
Скорость света в вакууме	c	3,00·10 <sup>8</sup> м/с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	5,67·10 <sup>-8</sup> Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> )
Постоянная закона смещения Вина	b	2,90·10 <sup>-3</sup> м·К
Постоянная Планка	h ħ	6,63·10 <sup>-34</sup> Дж·с 1,05·10 <sup>-34</sup> Дж·с
Постоянная Ридберга	R	1,10·10 <sup>7</sup> м <sup>-1</sup>
Радиус Бора	a	0,529·10 <sup>-10</sup> м
Комптоновская длина волны электрона	λ	2,43·10 <sup>-12</sup> м
Магнетон Бора	μ <sub>B</sub>	0,927·10 <sup>-23</sup> А·м <sup>2</sup>
Энергия ионизации атома водорода	E <sub>i</sub>	2,18·10 <sup>-18</sup> Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а.е.м.	1,660·10 <sup>-27</sup> кг
Электрическая постоянная	ε <sub>0</sub>	8,85·10 <sup>-12</sup> Ф/м
Магнитная постоянная	μ <sub>0</sub>	4π·10 <sup>-7</sup> Гн/м

## 2. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	6,37·10 <sup>6</sup> м
Масса Земли	5,98·10 <sup>24</sup> кг
Радиус Солнца	6,95·10 <sup>8</sup> м
Масса Солнца	1,98·10 <sup>30</sup> кг
Радиус Луны	1,74·10 <sup>6</sup> м
Масса Луны	7,33·10 <sup>22</sup> кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	1,49·10 <sup>11</sup> м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	3,84·10 <sup>8</sup> м

## 3. Плотность твердых тел

\* Молярный объем идеального газа при нормальных условиях.

Твердое тело	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Твердое тело	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$	Медь	$8,93 \cdot 10^3$
Барий	$3,50 \cdot 10^3$	Никель	$8,90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6,02 \cdot 10^3$	Свинец	$11,3 \cdot 10^3$
Вмсмут	$9,80 \cdot 10^3$	Серебро	$10,5 \cdot 10^3$
Железо	$7,88 \cdot 10^3$	Цезий	$1,90 \cdot 10^3$
Литий	$0,53 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

## 4. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Жидкость	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Вода при 4 °С	$1,00 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1,26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

## 5. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Газ	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

## 6. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей

Жидкость	Коэффициент, мН/м	Жидкость	Коэффициент, мН/м
Вода	72	Ртуть	500
Мыльная пена	40	Спирт	22

## 7. Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, м	Газ	Диаметр, м
Азот	$3,0 \cdot 10^{-10}$	Гелий	$1,9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Кислород	$2,7 \cdot 10^{-10}$

## 8. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0

## 9. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление,	Металл	Удельное сопротивление,

	Ом·м		Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$

## 10. Энергия ионизации

Вещество	$E_i$ , Дж	$E_i$ , эВ
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

11. Подвижность ионов в газах,  $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ 

Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

## 12. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

## 13. Работа электронов

Металл	$A$ , Дж	$A$ , эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

14. Относительные атомные массы (округление значения)  $A_r$   
и порядковые номера  $Z$  некоторых элементов

Элемент	Символ	$A_r$	$Z$	Элемент	Символ	$A_r$	$Z$
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

15. Массы атомов легких изотопов

Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.	Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.
Нейтрон	${}_0^1n$	1,00867	Бор	${}_{5}^{10}B$	10,01294
Водород	${}_1^1H$	1,00783		${}_{5}^{11}B$	11,00930
	${}_1^2H$	2,01410	Углерод	${}_6^{12}C$	12,00000
	${}_1^3H$	3,01605		${}_6^{13}C$	13,00335
Гелий	${}_2^3He$	3,01603		${}_6^{14}C$	14,00324
	${}_2^4He$	4,00260	Азот	${}_7^{14}N$	14,00307
Литий	${}_3^6Li$	6,01513	Кислород	${}_8^{16}O$	15,99491
	${}_3^7Li$	7,01601		${}_8^{17}O$	16,99913
Бериллий	${}_4^7Be$	7,01693			
	${}_4^9Be$	9,01219			

## 16. Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	10 суток
Йод	$^{131}_{53}\text{I}$	8 суток
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 г
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	10 мин.
Радий	$^{226}_{88}\text{Ra}$	1620 лет
Родон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут.
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	27 лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	14,3 сут.
Церий	$^{144}_{58}\text{Ce}$	285 сут.

## 17. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	$m_0$		$E_0$	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
$\alpha$ -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный $\pi$ -мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

## 18. Единицы СИ, имеющие специальные наименования

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы
<b>Основные единицы</b>				
Длина	L	метр	м	
Масса	M	килограмм	кг	
Время	T	секунда	с	
Сила электрического тока	I	ампер	A	
Термодинамическая температура	$\theta$	кельвин	K	
Количество вещества	N	моль	моль	
Сила света	J	кандела	кд	
<b>Дополнительные единицы</b>				
Плоский угол	-	радиан	рад	
Телесный угол	-	стерадиан	ср	
<b>Производные единицы</b>				
Частота	$T^{-1}$	герц	Гц	$c^{-1}$
Сила, вес	$LM T^{-2}$	ньютон	Н	$m \cdot kg \cdot c^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$m^{-1} \cdot kg \cdot c^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	Дж	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2}$
Мощность, поток энергии	$L^2 M T^{-3}$	ватт	Вт	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	$c \cdot A$
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2 M T^{-3} I^{-1}$	вольт	В	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-3} \cdot A^{-1}$
Электрическая ёмкость	$L^{-2} M^{-1} T^4 I^2$	фарад	Ф	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot c^4 \cdot A^2$
Электрическое сопротивление	$L^2 M T^{-3} I^{-2}$	ом	Ом	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-3} \cdot A^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2} M^{-1} T^3 I^2$	сименс	См	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot c^3 \cdot A^2$
Магнитный поток	$L^2 M T^{-2} I^{-1}$	вебер	Вб	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
Магнитная индукция	$M T^{-2} I^{-1}$	тесла	Тл	$kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2 M T^{-2} I^{-2}$	генри	Гн	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	кд·ср
Освещенность	$L^{-2} J$	люкс	лк	$m^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность изотопа (активность нуклида в радиоактивном источнике)	$T^{-1}$	беккерель	Бк	$c^{-1}$
Поглощенная доза излучения	$L^2 I^{-2}$	грей	Гр	$m^2 \cdot c^{-2}$

Примечания:

1. Кроме температуры Кельвина (обозначение  $T$ ) допускается применять также температуру Цельсия (обозначение  $t$ ), определяемую выражением  $t = T - T_0$ , где  $T_0 = 273,15$  К. Температура Кельвина выражается в Кельвинах, температура Цельсия - в градусах Цельсия (обозначение международное и русское  $^{\circ}\text{C}$ ). По размеру градус Цельсия равен Кельвину.

2. Интервал или разность температур Кельвина выражают в Кельвинах. Интервал или разность температур Цельсия допускается выражать как в Кельвинах, так и в градусах Цельсия.

### 19. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	$10^{18}$	деци	д	$10^{-1}$
пэта	П	$10^{15}$	санتي	с	$10^{-2}$
тера	Т	$10^{12}$	милли	м	$10^{-3}$
гига	Г	$10^9$	микро	мк	$10^{-6}$
мега	М	$10^6$	нано	н	$10^{-9}$
кмло	к	$10^3$	пико	п	$10^{-12}$
гекто	г	$10^2$	фемто	ф	$10^{-15}$
дека	да	$10^1$	атто	а	$10^{-18}$

### 20. Греческий алфавит

Обозначение букв	Название букв	Обозначение букв	Название букв
А, $\alpha$	альфа	Ν, $\nu$	ню
В, $\beta$	бета	Ξ, $\xi$	кси
Г, $\gamma$	гамма	Ο, $\omicron$	омикрон
Д, $\delta$	дэльта	Π, $\pi$	пи
Е, $\epsilon$	эпсилон	Ρ, $\rho$	ро
Ζ, $\zeta$	дзета	Σ, $\sigma$	сигма
Η, $\eta$	эта	Τ, $\tau$	тау
Θ, $\theta$	тэта	Υ, $\upsilon$	ипсилон
Ι, $\iota$	иота	Φ, $\phi$	фи
Κ, $\kappa$	каппа	Χ, $\chi$	хи
Λ, $\lambda$	ламбда	Ψ, $\psi$	пси
Μ, $\mu$	ми	Ω, $\omega$	омега