Министерство образования и науки
Российской Федерации

Новомосковский институт (филиал)
ФГБОУ ВПО "Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева"

**Бездомников А.В., Дмитриева Р.П.,
Семенкова О.М.**

[illegible]

Методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения

Новомосковск
2013

УДК 517
ББК 22.11
И-73

Рецензенты:

кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» НИ (филиал) ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева» *Соболев А.В.*,
кандидат технических наук, доцент кафедры «ВТИТ» НИ (филиал) ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева» *Силин А.В.*

Составители: Бездомников А. В., Дмитриева Р. П., Семенкова О. М.

И-73 Интегральное исчисление функции одной переменной. Методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения/ Новомосковский институт (филиал) ФГБОУ ВПО "РХТУ им. Д.И. Менделеева"; Сост.: С.В. Морозова, П.Ю. Бабкин, Новомосковск, 2013. –36 с.

Предлагаемые методические указания по дисциплине «Математика» дают базовые понятия интегрального исчисления, описывают основные методы интегрирования и знакомят с приложениями интегралов на практике. Также указания содержат таблицу основных интегралов и библиографический список, на базе которого студенты могут осуществлять самостоятельную работу.

УДК 517
ББК 22.11

Оглавление

Введение

Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала с примерами решения типовых задач по разделу математики «Интегральное исчисление функции одной переменной».

. Здесь же приведены задания для выполнения контрольной работы №3 для студентов заочной формы обучения (10 вариантов по 9 задач в каждом). Имеется приложение, содержащее таблицу неопределенных интегралов и основные формулы, необходимые для решения типовых задач по данному разделу математики, а также приведены задачи с решениями, которые необходимо разобрать перед выполнением контрольной работы. Для более глубокого усвоения теоретического материала можно использовать литературу, список которой приведен в конце пособия.

Целью данных указаний является обеспечение студентов-заочников необходимым и достаточным материалом для решения типовых задач по данному разделу математики и усвоения основных положений теоретического курса.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВПО 2010. Следует учесть, что при подготовке к экзаменам данного объема теоретического материала недостаточно, так как изложение теории носит справочный характер, необходимый для решения задач. Поэтому для подробного изучения разделов необходимо использовать учебные пособия по математике, рекомендованные библиографическим списком данных методических указаний.

Данные методические указания рекомендованы студентам-заочникам первого курса всех специальностей для облегчения понимания учебного материала.

1.Интегральное исчисление функции одной переменной

Понятие определенного интеграла можно ввести на примере задачи о нахождении площади криволинейной трапеции. Рассмотрим фигуру, ограниченную осью OX, прямыми x=a и y=b, а также графиком функции y=f(x) (рис.1). Для нахождения площади S этой фигуры произведем разбиение отрезка [a,b] на элементы $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем в каждом элементе Δx_i произвольно точки $c_i \in \Delta x_i$ и составим произведения $f(c_i)\Delta x_i$.

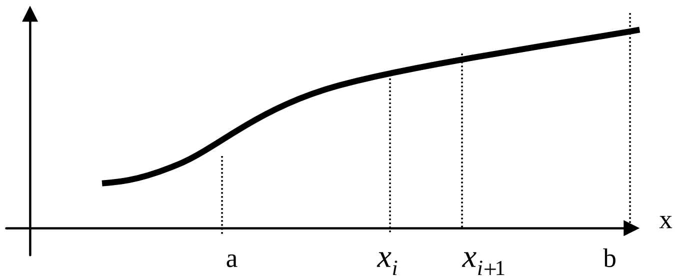

Рис.1

По смыслу эта произведения есть площади прямоугольников с основанием Δx_i. Если нарисовать все такие прямоугольники, то получим ступенчатую фигуру, которая приближенно выражает площадь криволинейной трапеции:

$$S_{mp} \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Обозначим через $d = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ диаметр разбиения отрезка [a,b]. Чем меньше d, тем точнее приближенное равенство. Переходя к пределу $d \to 0$ (при этом $n \to \infty$), получим точное значение S_{mp}:

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Рассмотренная задача и многие ей подобные приводят к важному понятию математического анализа - понятию интеграла.

Рассмотрим функцию y=f(x). Выполним следующие операции:

1. Выберем отрезок [a,b].
2. Произведем разбиение его точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на элементы Δx_i. Назовем

множество $\{\Delta x_i\} = T$ разбиением отрезка [a,b], а $d = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ диаметром разбиения Т.

3. Внутри каждого элемента Δx_i выберем точки $c_i \in \Delta x_i$. Множество пар элементов $\dot{T} = \{c_i, \Delta x_i\}$ назовем размеченным разбиением отрезка [a,b]. Предполагается, что x_i, c_i произвольны.

4. На размеченном разбиении $\dot{T}$ составим величину $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которую назовем интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a,b].

<u>*Определение:*</u> Если существует предел интегральной суммы при любом размеченном разбиении $\dot{T}$, когда диаметр разбиения $d \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом для функции f(x) по промежутку интегрирования [a,b] и обозначается:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Здесь символ «$\int$ » называют интегралом, a и b его пределами интегрирования (нижним и верхним), f(x) – подинтегральной функцией, x – переменной интегрирования, f(x)dx – подинтегральным выражением.

Из определения интеграла видно, что он является числом, а операция интегрирования выполняет действие над функцией. Таким образом, имеет место отображение функции f(x) в число I:

$$f(x) \xrightarrow{\int_a^b} I\ .$$

Такое отображение называют функционалом (в отличие от функции, когда числа отображаются в числа, и оператора, когда векторы отображаются в векторы).

1.1 Свойства интеграла

Интеграл как математическая операция обладает свойством линейности, т. е.

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + [c_2 f_2(x)]]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx\ .$$

Кроме свойства линейности операции интегрирования отметим еще свойство аддитивности интеграла по промежутку интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Это свойство обычно используется, если f(x) на отрезках [a,c] и [c,b] определяется разными формулами

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in [a,c] \\ f_2(x), x \in [c,b] \end{cases}$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$$

Из формулы (3), определяющей интеграл вытекает:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (т.к. \quad x_{i+1} - x_i = -(x_i - x_{i+1}))$$

Из геометрических соображений следует, что при $f(x) \equiv 1$

$\int_a^b dx = b - a$ (площадь прямоугольника высотой h=1 численно равна основанию).

Для четных функций интеграл с симметричными пределами обладает свойством (рис.2):

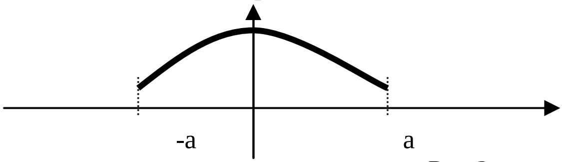

Рис.2

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Пусть $f_1(x) \geq f_2(x), (f_1(x) \neq f_2(x))$ тогда

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx$$

в частности, если f(x)<0, то $\int_a^b f(x)dx < 0$. Учитывая, что геометрически интеграл выражает площадь фигуры, можно сказать, что это алгебраическая площадь, т.е. выражается числом со знаком плюс или минус. В результате может оказаться, что $\int\limits_a^b f\ (x)dx = 0$, хотя $f(x) \neq 0$. Например, это имеет место для нечетных функций в случае симметричных пределов интегрирования (рис.3).

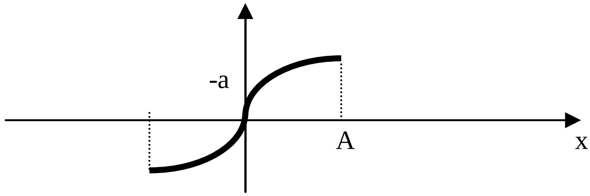

Рис.3

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -I + I = 0$$

На практике для вычисления определенных интегралов используется формула Ньютона- Лейбница:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\Big|$, здесь функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$ называется первообразной для подинтегральной функции. Таким образом, определенный интеграл по промежутку интегрирования [a,b] равен приращению первообразной подинтегральной функции на этом промежутке.

1.2 Неопределенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление интеграла к нахождению первообразной функции. Оказалось, что при нахождении первообразных часто встречаются труднопреодолимые сложности, кроме того, задача нахождения первообразной часто имеет самостоятельный интерес. Поэтому эта задача выделена в самостоятельный раздел математического анализа.

Неопределенным интегралом для функции f(x) называется множество всех ее первообразных. То, что функция имеет не единственную первообразную, видно из примера:

$\left(x^3\right)' = 3x^2; \left(x^3 + 2\right)' = 3x^2;$ Легко видеть, что для функции $y = 3x^2$ можно указать бесконечное множество ее первообразных вида $y = x^3 + c$, c=const – произвольная постоянная. Неопределенный интеграл для функции f(x) обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ ,где } F'(x) = f(x), C = const$$

Из определения вытекают следующие свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Действительно, $\left(F(x) + c\right)' = F'(x) = f(x)$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,т.к.

$$d\left(F(x) + c\right) = \left(F(x) + c\right)' dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + c \quad \left(\int d\left(F(x)\right) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c\right)$

. Из свойств 1-3 видно, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными.

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(u)du = F(u) + c$ т. е. справедливость формулы (1) остается справедливой, если переменную интегрирования x заменить на если переменную интегрирования u . Свойство 4 не является формальным, т. к. переменная u может быть промежуточным аргументом u(x).

5. Из формулы Ньютона-Лейбница, которая привела к понятию первообразной и свойств определенного интеграла вытекает свойство линейности неопределенного интеграла:

$$\int \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx.$$

1.3 Таблица неопределенных интегралов

Учитывая, что операция нахождения первообразной является операцией, обратной операции дифференцирования, некоторые первообразные. А, следовательно, и неопределенные интегралы можно получить из таблицы производных, читая их справа налево. Например, $(\sin x)' = \cos x$. Значит, если f(x)=cosx, то F(x)=sinx, т. к. $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Множество всех первообразных для функции F(x)=sinx+c. Таким образом,

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

По аналогии можно получить еще ряд формул на основе таблицы производных:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Более полная таблица неопределенных интегралов приведена в приложении.

1.4 Основные методы интегрирования

Суть всех методов интегрирования сводится к тому, чтобы используя свойства интеграла и алгебраические преобразования привести его к табличному виду.

Пример1. Найти неопределенный интеграл

Решение:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{6}} dx - \int 5x dx + \int \frac{3}{x} dx = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{2} x^2$$
$$+ 3\ln|x| + C$$

1.4.1 Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad ,$$

Затем найти интеграл из правой части формулы и вернуться к исходной переменной x. Такой способ называется методом замены переменной или методом подстановки. Отметим, что при замене

$x=\varphi(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями определения функций $\varphi(t)$ и $f(x)$.

Пример2. Найти неопределенный интеграл $\int x\sqrt{x-1}dx$.

Решение: Введем новую переменную t по формуле $t=\sqrt{x-1}$.

Тогда $x=t^2+1$, $dx=2tdt$,

$$\int x\sqrt{x-1}dx=\int\left(t^2+1\right)t2tdt=2\int\left(t^4+t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$$

При интегрировании некоторых функций часто целесообразно осуществлять переход к новой с помощью подстановки $t=\phi(x)$, а не $x=\varphi(t)$

Пример3. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos xdx$

Решение: Применим подстановку $1+\sin x=t$. Тогда $\cos xdx=dt$ и

$$\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos xdx=\int t^{1/3}dt=\frac{3}{4}t^{4/3}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4}+C$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int e^{-x^3}x^2dx$

Решение: Применим подстановку $-x^3=t$. Тогда $-3x^2dx=dt$, $x^2dx=-\frac{1}{3}t$, и

$$\int e^{-x^3}x^2dx=\int e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$$

1.4.2 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Где u(x), v(x) непрерывные дифференцируемые функции. Формула называется формулой интегрирования по частям. Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для интегрирования, чем исходный. В некоторых случаях рекомендуется использовать формулу интегрирования по частям несколько раз.

Метод интегрирования по частям целесообразно использовать для нахождения интегралов от функций $x^k\sin\alpha x$, $x^k\cos\alpha x$, $x^k e^{\alpha x}$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Пример 5. Найти $\int \ln x dx$

Решение:

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, v=x \end{vmatrix} = x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$$

Пример 6. Найти $\int\left(x^2+2x\right)\cos 2x dx$

Решение:

$$\int\left(x^2+2x\right)\cos 2x dx=\begin{vmatrix} u=x^2+2x, du=(2x+2)dx \\ dv=\cos 2x dx, v=\int\cos 2x dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\sin 2x-\int(x+1)\sin 2x dx=\begin{vmatrix} u=x+1, du=dx \\ dv=\sin 2x dx, v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\sin 2x-\left(-(x+1)\frac{1}{2}\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

1.4.3 Интегралы от рациональных дробей

Функция $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m соответственно называется рациональной дробью. Если n<m, то дробь называется правильной, если $n\geq m$, то дробь называется неправильной. Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена, называемого целой частью и рациональной правильной дроби по аналогии с числовыми дробями: $\dfrac{37}{8}=4+\dfrac{5}{8}$. Целую часть, или неполное частное можно получить делением числителя на знаменатель. Пусть, например, $f(x)=\dfrac{2x^5-5x^3+8x-2}{x^3+x^2+7}$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5-5x^3+8x-2 & x^3+x^2+7 \\
\underline{-\;2x^5+2x^4+14x^2} & \overline{2x^2-2x-3} \\
\quad -2x^4-5x^3-14x^2 & \\
\quad \underline{-\;-2x^4-2x^3-14x^2} & \\
\quad\quad -3x^3-14x^2+14x-2 & \\
\quad\quad \underline{-\;-3x^3-3x^2-21} & \\
\quad\quad\quad -11x^2+14x+19 &
\end{array}
$$

Имеем $\quad f(x)=2x^2-2x-3+\dfrac{-11x^2+14x+19}{x^3+x^2+7}$.

Т. к. интегрирование многочлена является тривиальной задачей, то в дальнейшем будем рассматривать интегралы от правильных дробей. Предварительно рассмотрим четыре дроби, называемые простейшими, и интегралы от них:

$$1)\frac{A}{x+m};\quad 2)\frac{A}{(x+m)^k};\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+m^2};\quad 4)\frac{Ax+B}{\left(x^2+m^2\right)^k};$$

$$1)\int\frac{Adx}{x+m}=A\ln|x+m|+C;$$

$$2)\int\frac{Adx}{(x+m)^k}=A\int(x+m)^{-k}d(x+m)=A\cdot\frac{(x+m)^{-k+1}}{-k+1}+C=-\frac{A}{(k-1)(x+m)^{k-1}}+C$$

$$3)\int\frac{Ax+B}{x^2+m^2}dx=A\int\frac{xdx}{x^2+m^2}+B\int\frac{dx}{x^2+m^2}=\frac{1}{2}A\ln\left|x^2+m^2\right|+\frac{B}{m}arctg\frac{x}{m}+C$$

$$4)\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+m^2\right)^k}dx=A\int\frac{xdx}{\left(x^2+m^2\right)^k}+B\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^k}=AI+BI_k$$

$$I=\frac{1}{2}\int\left(x^2+m^2\right)^{-k}d\left(x^2+m^2\right)=\frac{1}{2}\frac{(x+m)^{-k+1}}{-k+1}+C=-\frac{1}{2(k-1)\left(x+m^2\right)^{k-1}}+C$$

$$I_k=\frac{x}{2m^2(k-1)(x^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dx}{(x^2+m^2)^{k-1}}$$

- рекуррентная формула, позволяющая свести интеграл к табличному:

$$\int\frac{dx}{x^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{x}{m}+C$$

Таким образом, интегралы от простейших дробей выражаются через простейшие дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.

Если в знаменателе полные трехчлены ax^2+bx+c, то они при наличии вещественных корней x_1 и x_2 представимы в виде $a(x-x_1)(x-x_2)$.

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{t-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{t-b}{2a}\right)+c=a\frac{t^2-2bt+b^2}{4a^2}+\frac{b}{2a}\cdot t-\frac{b^2}{2a}+c=$$

$$=\frac{t^2-2bt+b^2+2bt-2b^2+4ac}{4a}=\frac{t^2-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{1}{4a}\left(t^2-D\right)$$

Если дискриминант трехчлена $D=b^2-4ac<0$, то следует выполнить замену $\left(ax^2+bx+c\right)'=t=2ax+c\Rightarrow x=\frac{t-b}{2a};\quad dx=\frac{1}{2a}dt$.

Т.к. D<0 то, обозначив $D=-m^2$, получим $ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left(t^2+m^2\right)$.

Проделанные выкладки называют приведением квадратного трехчлена к каноническому виду.

Дальнейшее решение задачи интегрирования дробей зависит от возможности разложить знаменатель дроби $Q_m(x)$ на множители не выше второго порядка. Эта задача сводится к нахождению корней многочлена $Q_m(x)$. Ответ на вопрос о корнях многочлена дает основная теорема алгебры.

<u>Основная теорема алгебры:</u> Многочлен n-го порядка имеет ровно n вещественных или комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

Комплексными корнями называют числа вида a+bi, где a и b – вещественные числа, а i – мнимая единица, определяемая условием $i^2=-1$.

Например, $Q_m(x)=Q_2(x)=x^2-2x-3\Rightarrow x_1=-1, x_2=3$ - корни вещественные и различные;

$Q_m(x)=Q_2(x)=x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2\Rightarrow x_1=x_2=3$ - двукратный корень;

$Q_m(x)=Q_2(x)=x^2-2x-3\Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3$ - комплексные корни.

Нахождение корней $Q_m(x)$ при $m\geq3$ является самостоятельной задачей, которую ввиду ее сложности решать не будем, за исключением простейших случаев, когда корни являются рациональными числами. Пусть $Q_m(x)$ удалось разложить на множители не выше второго порядка. Рассмотрим следующие случаи.

1. Корни знаменателя – вещественно простые.

Для простоты рассмотрим вопрос на конкретных примерах.

Пример 6: найти $\int \frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$ эта дробь могла появиться в результате сложения дробей, знаменатели которых (x-1), (x+2), (x-3). Чтобы найти числители, применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-3} \text{ или}$$

$$2x^2-5x+7 = a(x+2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x+2) \text{ .}$$

Подставляя в тождество корни знаменателя, получим:

$$\begin{array}{r|l} x=1 & -6a=4, a=-\dfrac{2}{3} \\ x=-2 & 15b=25, b=\dfrac{5}{3} \\ x=3 & 10c=10, c=1 \end{array}$$

Теперь можно найти интеграл :

$$\int f(x)dx = \frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+2} +$$

$$\int\frac{dx}{x-3} = -\frac{2}{3}\ln|x-1| +$$

$$+\frac{2}{3}\ln|x+2| + = \ln|x-3| + C$$

Замечание: по виду знаменателя можно записать

$$\int\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx = a\ln|x-1| + b\ln|x+2| + c\ln|x-3| + C$$

Правило нахождения a, b, и c состоит в удалении из знаменателя дроби соответствующей скобки и подстановки вместо x величины корня этой скобки:

$$a = \left.\frac{2x^2-5x+7}{(x+2)(x-3)}\right|_{x=1} = \frac{2-5+7}{3(-2)} = -\frac{2}{3}; \quad b = \left.\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-3)}\right|_{x=-2} = \frac{5}{3}; c\big|_{x=3} = 1$$

2. Случай кратных корней знаменателя

Выражение $(x-a)^n$ - называют биномом n –й степени. Если его разложить в многочлен $P_n(x)$, то его корнем будет x=a, при этом полагают, что он имеет кратность, равную n , т. е. уравнение $P_n(x) \equiv (x-a)^n = 0$ имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$. Пусть знаменатель дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ разложен на произведение биномов (двучленов) различной кратности. Поставим задачу разложения такой дроби на сумму простейших дробей. Вначале решим обратную задачу: сложим несколько простейших дробей, среди знаменателей которых имеются кратные корни:

$$\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)+3(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Как видно, при приведении дробей к общему знаменателю бином с меньшим показателем (x-1) поглотился биномом с большим показателем $(x-1)^2$. Это обстоятельство следует учитывать при составлении суммы простейших дробей, раскладывая дробь на простейшие слагаемые. Так как при этом можно определить лишь знаменатели, вместо числителей запишем неопределенные величины:

$\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$, освобождаясь от знаменателя, получим тождество: $4x^2+3x-1=a(x+2)+b(x-1)(x+2)+c(x-1)^2$.

Относительно a, b, c можно получить уравнения, во-первых, подставляя в тождество произвольные значения x. Наиболее целесообразно подставлять корни знаменателя, т. к. при этом получаются более простые уравнения. Так при x=1 имеем 3a=6 (при x=0 имеем 2a-2b+c=9 – более сложное уравнение). Недостающие уравнения получаем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|r|r|} x=1 & 3a=6 & a=2 \\ x=-2 & 9c=9 & c=1 \\ x^2 & b+c=4 & b=3 \end{array}$$

Полученные значения a, b, и c подтвердили правильность решения поставленной задачи:

$$\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

применительно к интегрированию рациональной дроби имеем:

$$\int\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx=2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+$$
$$\ln|x+2|+C$$

3. Случай комплексных корней знаменателя.

Комплексное число имеет вид a+bi, где a и b – вещественные числа, i – мнимая единица, такая, что $i^2 = -1$. Через комплексные числа выражаются в частности решения уравнений $x^2 + px + q = 0$, если его дискриминант $p^2 - 4q < 0$.

Например, $x^2 - 4x + 13 = 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$, трехчлен с квадратными корнями неразложим на линейные множители на множестве вещественных чисел. В этом случае при разложении простейшая дробь имеет вид $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $\left(b^2 - 4ac < 0\right)$.

Принцип разложения рациональной дроби, содержащей в знаменателе комплексные корни на сумму простейших дробей , такой же, как и для вещественных корней знаменателя.

Пример 7: вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{7x^2 - 3x + 2}{x^3 + 8} dx$

Решение: Разложим подинтегральную дробь на сумму простейших

$$\frac{7x^2 - 3x + 2}{x^3 + 8} = \frac{7x^2 - 3x + 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим тождество:

$$7x^2 - 3x + 2 = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r|c|c} x = -2 & 12A = 36 & A = 3 \\ x^2 & A + B = 7 & B = 4 \\ x^0(x = 0) & 4A + 2C = 2 & C = -5 \end{array}$$

$$\int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{4x - 5}{x^2 - 2x + 4} \right) dx = 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{4x - 5}{x^2 - 2x + 4} dx = 3\ln|x + 2| + I_1$$

для вычисления интеграла I_1 приведем знаменатель к каноническому виду подстановкой

$$ax^2 + bx + c \to \frac{1}{2a}\left(ax^2 + bx + c\right)' = t, \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 4\right)' = \frac{1}{2}(2x - 2) \Rightarrow x - 1 = t,$$

$dx = dt$

$$I_1 = \int \frac{4(t+1) - 5}{t^2 + 2t + 1 - 2t - 2 + 4} dt = \int \frac{4t - 1}{t^2 + 3} dt = 4\int \frac{t}{t^2 + 3} dt - \int \frac{dt}{t^2 + 3} = 4 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + 3\right| -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = 2\ln\left(x^2 - 2x + 4\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

Окончательно:

$$\int \frac{7x^2-3x+2}{x^3+8}dx = 3\ln|x+2| + 2\ln\left(x^2-2x+4\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Анализ всех случаев корней знаменателя рациональных дробей показывает, что интегралы от них выражаются через три вида функций: рациональные дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.

2. Вычисление определенного интеграла

Вычисление определенного интеграла производится с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$ где $F(X)$ - первообразная, $F'(x) = f(x)$

Рассмотрим формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

для определенного интеграла имеем:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример 8: вычислить интеграл $\int_1^e x\ln^2 xdx$

Решение:

$$\int_1^e x\ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx, v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx, v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right)$$

2.1 Замена переменных в определенном интеграле

Пусть дана функция f(x). Положим $x=\varphi(t)$. Если $a\le x\le b$, то $a\le\varphi(t)\le b$, причем $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$.

Пусть далее

$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ непрерывна на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Пример9: вычислить интеграл $\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$

Решение: выполним подстановку $x=a\sin t$, $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$, $dx=a\cos tdt$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

2.2 Вычисление площадей в декартовых координатах

С помощью определенного интеграла можно вычислять площади областей ограниченных графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Если область D задана системой неравенств

$$\begin{cases} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{cases}$$

то площадь области D вычисляется по формуле

$$S_D=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$$

Если неравенства, определяющие область D, неизвестны и неизвестно какая из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$, больше на промежутке интегрирования, то необходимо предварительно выполнить следующие операции:

1. Найти a и b как абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е. решить уравнение

$$f_1(x) = f_2(x)$$

2. Исследовать знак разности $f_1(x) - f_2(x)$ на $[a;b]$. Для этого достаточно вычислить $f_1(x) - f_2(x)$ в какой-либо точке из $[a;b]$. Если оно положительно, то $f_1(x) \geq f_2(x)$, если отрицательно - $f_1(x) \leq f_2(x)$.

Пример10: Вычислить площадь области, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = -x^2 + 2x + 3$

Решение: Находим абсциссы a и b точек пересечения графиков. Для этого решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3$, получаем $a = 0, b = 3$. Далее исследуем знак функции $\varphi = x^2 - 4x + 3 - (-x^2 + 2x + 3)$ на отрезке $[0;3]$. Для этого придадим x любое значение, например, $x = 1$. Получим $\varphi(1) = -4$. Следовательно, $\varphi < 0$ при $x \in [0;3]$. Поэтому $x^2 - 4x + 3 \leq -x^2 + 2x + 3$ и область D определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

Тогда площадь искомой области равна

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - 4x + 3 - (-x^2 + 2x + 3)\right)dx = \int_0^3 \left(-2x^2 + 6x\right)dx = 9ед^2 .$$

2.3 Вычисление объемов тел вращения

С помощью определенного интеграла также можно вычислять объем тела вращения, образованного вращением области, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Объем тела, образованного вращением области, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, т. е. области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{cases}$$

вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f_2(x)^2-f_1(x)^2\right)dx$$

Если неравенства, определяющие область D, неизвестны и неизвестно какая из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$, больше на промежутке интегрирования, то необходимо предварительно выполнить следующие операции:

1. Найти a и b как абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е. решить уравнение

$$f_1(x)=f_2(x)$$

2. Исследовать знак разности $f_1(x)-f_2(x)$ на $[a;b]$. Для этого достаточно вычислить $f_1(x)-f_2(x)$ в какой-либо точке из $[a;b]$. Если оно положительно, то $f_1(x)\geq f_2(x)$, если отрицательно - $f_1(x)\leq f_2(x)$.

Пример11: Вычислить объем тела, образованного вращением области, ограниченной графиками функций $y=x^3$ и $y=\sqrt{x}$

Решение: Находим абсциссы a и b точек пересечения графиков. Для этого решая уравнение $x^3=\sqrt{x}$, получаем $a=0, b=1$. Поскольку на отрезке $[0;1]$ $\sqrt{x}\geq x^3$, то объем тела равен

$$V=\pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-(x^3)^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(x-x^6\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right)_0^1\Bigg|=\frac{5\pi}{14}\,ед^3$$

2.4 Вычисление дуги кривой

Длину дуги кусочно-гладкой кривой (т. е. заданной непрерывными функциями, имеющими непрерывные производные) $y=f(x)$, ограниченной точками с абсциссами х=а и х=в можно вычислить по формуле:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

При этом величина $dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$ называется дифференциалом дуги кривой

Пример12: вычислить длину дуги кривой

$y=x^2, \quad 0\leq x\leq 2$

Решение: найдем дифференциал дуги кривой $dl=\sqrt{1+\left(\left(x^2\right)'\right)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$, тогда длина дуги будет равна

$$\int_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=\begin{vmatrix} t=2x & dt=2dx \\ x=0,t=0 & x=2,t=4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{1+t^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\Bigg|_0^4=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln\left|4+\sqrt{17}\right|ед$$

3. Несобственные интегралы

Ранее говоря об определенных интегралах мы подразумевали, что интервал интегрирования конечен и подинтегральная функция на нем непрерывна. Однако, в прикладных задачах электродинамики, механики, теории вероятностей и т. д. часто возникает необходимость распространения понятия определенного интеграла на случаи бесконечного интервала интегрирования и разрывной подинтегральной функции. Такие интегралы называются несобственными интегралами I и II рода соответственно.

3.1 Несобственные интегралы I рода

Пусть функция f(x) непрерывна на луче $[a;+\infty)$. По определению положим:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, будем говорить, что несобственный интеграл I рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ существует или сходится. Если же указанный предел не существует или является бесконечным, то будем говорить, что несобственный интеграл I рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится. Подобным образом определяются и другие аналогичные несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

где a и b изменяются одновременно и независимо друг от друга. Очевидно, что для существования последнего интеграла необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ при произвольном выборе т. с.

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Пример 13: исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, где p>0.

Решение: пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

Если p<1, то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) = +\infty$$

т. е. интеграл расходится.

Если p>1, то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{p-1}$$

т. е. интеграл сходится.

Если p=1, то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty \Rightarrow \text{ интеграл расходится.}$$

Выяснение вопроса о сходимости несобственных интегралов значительно усложняется, если первообразная функция неизвестна. В таких случаях иногда удается установить, сходится или расходится интеграл, пользуясь специальными признаками сходимости, не требующими знания первообразной. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 1. Пусть для всех $x \ge a$ справедливо неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тогда:

1) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

2) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$. Отметим, что всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится.

В качестве функций сравнения обычно берут табличные интегралы, сходимость или расходимость которых известна (см. пример 13)

Пример 14: $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ сходится т. к. $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ на $[1;+\infty)$.

Пример 15: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x + 3\sin^2 x}{x^2} dx$ расходится т.к. $0 \le \frac{x + 3\sin^2 x}{x^2} \ge \frac{1}{x}$.

3.2 Несобственные интегралы II рода

Если в интервале [a;b] f(x) имеет точки разрыва первого рода, то интеграл для такой функции есть просто сумма обыкновенных интегралов, взятых по частичным интервалам, на которые разбивается [a;b] точками разрыва функции:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{c_k}^{b} f(x)dx$ где c_i - точки разрыва I рода.

Пусть функция f(x) непрерывна на [a;b]. Если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, то по определению положим

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

В случае, если этот предел существует и конечен, будем говорить, что несобственный интеграл II рода существует или сходится. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл не существует или расходится. Подобным образом определяются и другие несобственные интегралы II рода:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to -0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to -0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

(c – точка разрыва II рода).

Пример 16: исследовать на сходимость интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ (a<b, p>0)

Решение: функция непрерывна на (a;b] , при x=a она претерпевает бесконечный разрыв.

Пусть $p \neq 1$

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x-a)^{p-1}} \Bigg|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{(b-a)^{p-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right]$$

Если p<1, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{(b-a)^{p-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right] = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(b-a)^{p-1}}$$

т.е. интеграл сходится.

Если p>1, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{(b-a)^{p-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \right] = +\infty$$

т.е. интеграл расходится.

Если p=1, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] = +\infty \Rightarrow$$ интеграл расходится.

Теорема 2. Пусть на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ претерпевают в точке x=c разрыв II рода и во всех точках отрезка кроме x=c, выполняется неравенство $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$. Тогда:

1) если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$

2) если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

<u>Пример17:</u> $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ сходится т. к. $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ на [0;1).

<u>Пример 18:</u> $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sin^4(2-x)}$ расходится, т. к. $\frac{1}{\sin^4(2-x)} > \frac{1}{(2-x)^4}$ на [1;2).

Выше рассмотренный признак справедлив если f(x) на [a;b) неотрицательна, если же f(x) знакопеременна на [a;b), употребляют достаточный признак сходимости

4. Задание для выполнения контрольной работы №3 «Интегральное исчисление функции одной переменной»

Задача№1

1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$

3. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$

4. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$

5. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$

6. $\int \frac{2x^3+3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}dx$

7. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$

8. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$

9. $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$

10. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$

Задача№2

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{(3x+1)}dx$

3. $\int \sin^4 2x\cos 2x dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$

5. $\int \frac{\sqrt{tg^3 x}}{\cos^2 x} dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x ctg^3 x}$

7. $\int \frac{\sqrt{artg^6 3x}}{1+9x^2} dx$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

9. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$

10. $\int e^{\cos x} \sin x dx$

Задача№3

1. $\int \ln^2 x dx$

2. $\int \ln(x^2+1) dx$

3. $\int x arctg x dx$

4. $\int x^2 \sin x dx$

6. $\int x^2 \cos x dx$

7. $\int (x^2+1) e^{2x} dx$

8. $\int (x^2-1) e^{-x} dx$

9. $\int \arcsin x dx$

10. $\int x \sin^2 x dx$

Задача№4

1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx$

2. $\int \frac{12}{(x^2-2x+3)(x-2)} dx$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{3x+13}{\left(x^2+2x+5\right)\left(x-1\right)}dx$

6. $\int \frac{43x+67}{\left(x^2-x-12\right)\left(x-1\right)}dx$

7. $\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}dx$

8. $\int \frac{12-6x}{\left(x^2-4x+13\right)\left(x+1\right)}dx$

9. $\int \frac{8x}{\left(x^2+6x+5\right)\left(x+3\right)}dx$

10. $\int \frac{x^2+3x-6}{\left(x^2+6x+13\right)\left(x+1\right)}dx$

Задача№5

Вычислить определенный интеграл

1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

4. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$

5. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

6. $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x dx$

7. $\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$

8. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$

9. $\int\limits_{1}^{2} x^2 \ln x dx$

10. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$

Задача№6

Вычислить площади областей, ограниченных данными графиками функций (сделать чертеж).

1. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x$
2. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = 3/x, \quad x = 4$
3. $y = 5 - x^2, \quad y = -4x$
4. $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad x = 5$
5. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, (x \geq 0)$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = 1/x, \quad x = 16$
7. $y = 27 - x^2, \quad y = -6x$
8. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0, (x \leq 0)$
9. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3/2$
10. $y = 2/x, \quad y = 5e^x, \quad y = 2, \quad y = 5$

Задача№7

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX области, ограниченной графиками заданных функций (сделать чертеж).

1. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0$
2. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x$
3. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$

4. $y = x^2, \quad y = 2x$

5. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0 \quad \left(0 \le x \le \pi/4\right)$

6. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = \pi/2 \quad \left(0 \le x \le \pi/2\right)$

7. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1$

8. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e$

9. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1$

10. $y = \cos^2 x, \quad y = 0, \quad \left(-\pi/2 \le x \le \pi/2\right)$

Задача№8

Вычислить длину дуги заданной кривой

1. $y = x^2/2, \quad 0 \le x \le 3$

2. $y = x^2 - 2x, \quad 2 \le x \le 5$

3. $y = 2x + 5, \quad -1 \le x \le 4$

4. $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}, \quad 2 \le x \le 8$

5. $y = \dfrac{x^2}{2} + 1, \quad 0 \le x \le 3$

6. $y = \dfrac{4}{3}x, \quad 2 \le x \le 5$

7. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(2x-3)^3}, \quad 3 \le x \le 5$

8. $y = 2x^2 - 6x, \quad 3 \le x \le 6$

9. $y = 3x + 2, \quad 1 \le x \le 5$

10. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{(x+1)^3}, \quad 2 \le x \le 4$

Задача№9

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

1.

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{16x^4 + 1}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

2.

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$;   б) $\int\limits_1^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

3.

$\int\limits_0^{\infty}e^{-3x}dx$;   б) $\int\limits_0^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

4.

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$;   б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$

5.

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$;   б) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$

6.

а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$;   б) $\int\limits_0^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

7.

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$;   б) $\int\limits_1^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$

8.

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;   б) $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-4x}}$

9.

а) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)}$;   б) $\int\limits_0^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

10.

$\int\limits_1^{\infty}e^{-2x}dx$;   б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$

Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., Наука, 2006.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие для вузов, в 2-х т. - М.: Интеграл-Пресс, 2009.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 2004.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: учеб. пособие. – СПб,,М.,Краснодар: Лань, 2008.
5. Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2003.- 576 с.
6. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальников Т. А.. Высшая математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.

Приложение А - Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \neq 1);$ $\quad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C;$ $\quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$ $\quad \int \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

2. $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ $\quad \int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$ $\quad \int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$ $\quad \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C;$ $\quad \int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C;$ $\quad \int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C;$

$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{a+x}\right| + C;$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$ $\quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

6.
$$\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$$
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$

Рекуррентные формулы

7. $\int \ln^n x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$

8. $\int tg^n x dx = \dfrac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2} x dx$

9. $\int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^n} = \frac{x}{2a(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a\right)^{n-1}}$

10. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

Интегралы от простейших дробей

$\int \frac{Adx}{x+m} = A\ln\left|x+m\right| + C;$

$\int \frac{Adx}{(x+m)^k} = A\int (x+m)^{-k} d(x+m) = A\cdot\frac{(x+m)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{(k-1)(x+m)^{k-1}} + C$

$\int \frac{Ax+B}{x^2+m^2}dx = A\int \frac{xdx}{x^2+m^2} + B\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{2}A\ln\left|x^2+m^2\right| + \frac{B}{m}arctg\frac{x}{m} + C$

$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+m^2\right)^k}dx = A\int \frac{xdx}{\left(x^2+m^2\right)^k} + B\int \frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^k} = AI + BI_k$

$I = \frac{1}{2}\int \left(x^2+m^2\right)^{-k} d\left(x^2+m^2\right) = \frac{1}{2}\frac{(x+m)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{1}{2(k-1)\left(x+m^2\right)^{k-1}} + C$

$I_k = \frac{x}{2m^2(k-1)(x^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dx}{(x^2+m^2)^{k-1}}$

Тригонометрические формулы (для преобразования подынтегральных тригонометрических функций)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1;$

$ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1;$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha); \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha - 3\cos\alpha);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$