**Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

Теория вероятностей

Методические указания

**Новомосковск
2013**

УДК 519.2
ББК 22.171
Т 338

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент Ребенков А.С.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева»)
кандидат технических наук, доцент Лопатин А.Г.
(НИ (филиал) ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева»)

Составители: Исаков В.Ф., Соболев А.В., Воробьева Л.Д.

Т 338 **Теория вероятностей.** Методические указания / ФГБОУ ВПО «РХТУ им. Д.И. Менделеева», Новомосковский институт (филиал); Сост.: Исаков В.Ф., Соболев А.В., Воробьёва Л.Д. Новомосковск 2013. – 28 с.

В методических указаниях приводятся краткие теоретические сведения по теме «Теория вероятностей». Даны определения всех используемых величин, приведены формулы, необходимые для решения задач. Приводятся решения типовых задач по разделам: случайные события и случайные величины.

Методические указания предназначены для выполнения контрольной работы №5 студентами-бакалаврами 2-го курса заочного отделения НИ РХТУ. Задачи для самостоятельного решения приведены в конце (6 задач по 10 вариантов).

Табл. 8. ил. 1. библиогр. 3 назв.

УДК 519.2
ББК 22.171

1. Случайные события

Понятие случайного события

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *стохастического эксперимента, случайного события и вероятности случайного события*. Стохастическими называются эксперименты, результаты которых заранее неизвестны.

По аксиоме теории вероятностей устанавливается соответствие между результатами эксперимента и точками множества Ω. Множество Ω называют пространством элементарных событий, а его точки – элементарными событиями

Случайные события – подмножества в пространстве элементарных событий.

Пусть A – произвольное наблюдаемое в данном эксперименте событие. По результату эксперимента можно сказать, произошло событие A или не произошло. Поэтому по отношению к событию A все пространство элементарных событий Ω можно разбить на два дополнительных множества A' и A''.

Если результат эксперимента описывается точкой ω и $\omega \in A'$, то событие A в эксперименте произошло, если же $\omega \in A''$, то событие A не произошло. Точки ω из множества A' называются элементарными событиями, благоприятствующими событию А.

В теоретико-множественной модели теории вероятностей отождествляют событие A и множество A', $\boxed{A \equiv A'}$.

Итак, событие A это множество элементарных событий ω из Ω, которые *благоприятствуют событию A*.

Пример. Пусть один раз бросают игральный кубик и А - событие, состоящее в том, что число появившихся очков делится на 3. Тогда

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{3,6\}$

Операции над множествами (событиями)

Операции над множествами приведены в табл. 1.

Таблица 1

Интерпретация некоторых понятий теории множеств в теории вероятностей.

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество	Пространство элементарных событий
ω	Элемент Ω	Элементарное событие
A	Некоторое множество элементов ω	Событие A

Ω	Множество всех ω	Достоверное событие
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \subset B$	А подмножество В	Из наступления события А следует наступление В
$A \cup B$	Объединение множеств А и В: множество точек, входящих или в А, или В	Событие, состоящее в том, что произошло событие А или событие В
$A \cap B = \varnothing$	А и В непересекающиеся множества	А и В – несовместные события
$A \cap B$	Пересечение множеств А и В: множество точек, входящих и в А, и в В	Событие, состоящее в том, что произойдет событие А и В
A\B	Разность множеств А и В: множество точек, входящих в А, но не вх. в В	Событие, состоящее в том, что произойдет событие А, но не произойдет В
$\overline{A}$	Дополнение множества А	Событие, происходящее когда событие А не происходит

Основные понятия комбинаторики

Правило умножения

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое можно выполнить n_1 способами, второе - n_2 способами и так до k – го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Задача. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, если не одна из цифр не может повторяться более одного раза?

Решение. Первой цифрой может быть одна из цифр 1,2,3,4,5. Если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5 способами, третья – четырьмя способами, четвертая – 3 способами. Согласно правилу умножения, общее число способов равно $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Перестановки.

Различные множества, полученные из одного множества и отличающиеся лишь порядком элементов, называются перестановками этого множества.

Пример. Перестановки множества $\Omega = \{1,2,3\}$ из трех элементов имеют вид (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

Теорема 1. Пусть P_n - число перестановок множества, содержащего n элементов. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

Размещения из n элементов по k.

Различные k – элементные множества, полученные из n – элементного множества и отличающиеся или составом элементов или их порядком расположения называются размещениями из n элементов по k.

Теорема 2. Число размещений из n элементов по k элементов равно $\boxed{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$

Задача. Сколько существует телефонных номеров, состоящих из 6 различных цифр?

Решение. Число таких номеров равно $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$

Сочетания из n элементов по k .

Произвольные k – элементные множества, полученные из *n* – элементного множества и отличающиеся хотя бы одним элементом называются сочетаниями из n элементов по *k*.

Теорема 3. Число сочетаний из n элементов по k элементов равно $\boxed{C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$

Задача 1. Сколькими способами можно составить комиссию в составе трех человек, выбирая их из четырех супружеских пар, если в комиссию не могут входить члены одной семьи?

Решение. Если в комиссию не входят члены одной семьи, то в ней будут представлены 3 из 4 семей. Эти семьи можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами. После этого в каждой из семей можно двумя способами выбрать представителя – мужа или жену. По правилу умножения число всех возможных комиссий равно: $C_4^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Замечание. При нахождении числа сочетаний из n элементов по k элементов при $k > n/2$ можно использовать формулу $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$: $C_4^3 = C_4^1 = 4$, $C_7^5 = C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$

Статистическое и классическое определение вероятности.

Проведем стохастический эксперимент *n* раз. Пусть *k(A)* – число экспериментов, в которых произошло событие A.

Отношение $\boxed{\nu(A) = k(A)/n}$ называется *частотой* события A в проведенной серии экспериментов.

Как показывает опыт, при достаточно большой величине *n* для большинства серий экспериментов частота сохраняет почти постоянную величину.

Если при больших значениях n частота $\nu(A)$ события A мало отличается от числа *p,* то это число *p* есть вероятность события А.

В более строгой формулировке $\boxed{\nu(A) \to P(A)}$ при n→∞.

Если событию A благоприятствуют m исходов в эксперименте с n одинаково возможными исходами $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, то вероятность события A определяется по формуле $\boxed{P(A) = m/n}$

Это есть классическое определение вероятности.

Пример1. В урне 10 шаров 7 белых и 3 чёрных. Какова вероятность вынуть из урны белый шар?

Решение. Здесь $m = 7$, $n = 10$ и $P(A) = 7/10 = 0,7$

*Пример 2***.** В урне 10 шаров 3 белых и 7 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Здесь всего возможных исходов $n = C_{10}^2 = (10 \cdot 9)/(1 \cdot 2) = 45$, число благоприятствующих событию А, определяется равенством $n = C_3^2 = C_3^1 = 3$.

$P(A) = 3/45 = 1/15$

Аксиомы теории вероятности:

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) если $A \cap B = \varnothing$, то $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Пример. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 синих шаров. Найти вероятность того, что вынутый шар белый или чёрный?

Решение. Пусть Б –событие, состоящее в том, что вынут белый шар, Ч - событие, состоящее в том, что вынут чёрный шар. Найдём вероятности этих событий $P(Б) = 2/10 = 0,2$, $P(Ч) = 3/10 = 0,3$.

Так как события Б и Ч несовместны $Б \cap Ч = \varnothing$, то по аксиоме 3) имеем

$P(Б \cup Ч) = P(Б) + P(Ч) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

Свойства вероятности.

Теорема 1. Вероятность события противоположного событию A, равна $1 - P(A)$: $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ …(1)

Теорема 2. Пусть А и В – случайные события такие, что $A \subset B$. Тогда $\boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$ …(2)

Теорема 3. Пусть А и В – случайные события. Тогда

$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

1.6. Условная вероятность. Независимые случайные события.

Условной вероятностью события А при условии, что событие В произошло, называют вероятность, определяемую по формуле

$\boxed{P(A / B) = P(A \cap B)/P(B)}$

Теорема 1. Если $P(A) \geq 0$, $P(B) \geq 0$, то имеют место равенства $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)}$. *Это соотношение называют формулой умножения вероятностей.*

Задача. В ящике 6 белых и 4 чёрных шара. Из ящика вынули 2 шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что при первом выборе вынут белый шар, В - событие, состоящее в том, что при втором выборе вынут белый шар. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$. $P(A) = 6/10 = 3/5$ - вероятность появления первого белого шара, $P(B/A) = (6-1)/(10-1) = 5/9$ - вероятность появления второго белого шара при условии, что первый белый шар вынут. Следовательно,

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

Формула полной вероятности.

События образуют полную группу событий, если

1) $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega$ …(1)

2) $H_i \cap H_j = \varnothing (i \neq j)$ …(2)

Теорема 2. Если $H_1,..., H_n$ - полная группа событий и $P(H_i) > 0$, *i=1,…,n*, то для любого случайного события A имеет место равенство

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

Задача . На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов: 40 с первого завода, 20 со второго завода, 40 с третьего завода. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,7, на втором 0,9, на третьем 0,8. Какова вероятность, что, взятое случайным образом изделие будет качественным?

Решение. Пусть ***A*** - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие будет качественным.

Рассмотрим гипотезы (возможные события):

H_1 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие с первого завода, H_2 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие со второго завода, H_3 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие с третьего завода.

Используя определение вероятности события ***A*** $\boxed{P(A) = m/n}$, найдём вероятности гипотез:

$P(H_1) = 40/100 = 0{,}4$; $P(H_2) = 20/100 = 0{,}2$; $P(H_3) = 40/100 = 0{,}4$.

Запишем условные вероятности события ***A***: $P(A/H_1) = 0{,}7$; $P(A/H_2) = 0{,}9$; $P(A/H_3) = 0{,}8$.

По формуле полной вероятности найдём вероятность события ***A***.

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)\to$$
$$P(A)=1{,}4\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}28+0{,}18+0{,}32=0{,}78$$

Ответ: $\boxed{P(A)=0{,}78}$

Теорема 3. Формулы Байеса. Если $H_1,..., H_n$ - полная группа событий и $P(H_i)>0$, *i=1,...,n*, то для любого случайного события *B* такого, что *P(B)>0* выполнены равенства $\boxed{P(H_i/B)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(B/H_i)}{P(B)}}$,

где $\boxed{P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(B/H_i)}$

Случайные события A и B называются независимыми, если $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$.

Теорема. Случайные события A и B независимы ($P(B)>0$ тогда и только тогда, когда $\boxed{P(A/B)=P(A)}$.

Задача. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7 , а для второго – 0,8. Найти вероятность попадания в мишень обоих стрелков.

Решение. Пусть ***A*** - событие, состоящее в том, что первый стрелок попадает в мишень, В - событие, состоящее в том, что второй стрелок попадает в мишень. По условию задачи события А и В не зависимы поэтому вероятность совмещения событий $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$

Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли).

Пусть производится серия из *n* испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью *p*, а может и не наступить с вероятностью *q=1-p*. Такая независимая последовательность испытаний называется схемой Бернулли (n, p).

Теорема Бернулли. Вероятность того, что в схеме Бернулли (n, p) событие A наступит ровно k раз, находится по формуле $\boxed{P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}}$

Задача. Монета бросается 3 раза. Найти вероятность того, что «орёл» выпадет 2 раза.

Решение. Это схема Бернулли $n=3$, $p=0{,}5$. Применим формулу Бернулли для $k=2$: $P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^1=3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}5=0{,}375$

Теорема Пуассона. Вероятность того, что в схеме Бернулли (n, p) событие A наступит k раз при $n\to\infty, a>0, a=const$, и $p=a/n$ находится по приближённой формуле $\boxed{P_n(k)\approx P(k)=e^{-a}\cdot\dfrac{a^k}{k!}}$

Если мы хотим воспользоваться приближенной формулой $P_n(k) \approx e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$, $a = np$, $k=0,1,\ldots,n$ для серии из n испытаний, то n должно быть велико, а вероятность наступления события A мала, то есть данная формула применима для «редких» явлений.

Задача. В лотерее в среднем разыгрывается один выигрыш на 1000 номеров. Какова вероятность, имея 100 билетов, получить не менее двух выигрышей?

*Решение***.** Это схема Бернулли с n=100, a=np=0,1. Исходная вероятность

$P(k \geq 2) = \sum_{k=2}^{100} P_{100}(k) = 1 - P_{100}(0) - P_{100}(1)$. По формуле Пуассона имеем

$P_{100}(0) \approx P(0) = e^{-0,1} \approx 0,9; P_{100}(1) \approx P(1) = a \cdot e^{-a} \approx 0,09$, P≈1-0,9-0,09=0,01.

*Локальная предельная теорема Лапласа. В*ероятность того, что событие A в схеме Бернулли (n, p) наступит k раз при $n \to \infty$ определяется по формуле $\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}, x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$q = 1 - p$, $x_k \in [a,b]$, где a<b

Эта теорема дает оценку величины $P_n(k)$ при *больших* n и фиксированном k .

При больших значениях n можно пользоваться приближенным равенством $\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)}$, где $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$, $\boxed{x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}}$ φ(x)-локальная функция Лапласа. Для функции φ(x) составлены специальные таблицы для x>0. При x<0 используют свойство четности *φ(-x)=φ(x).*

На практике важно оценить вероятность того, что число наступлений события лежит в некоторых границах. Такую оценку можно получить с помощью интегральной предельной теоремы Лапласа.

Интегральная предельная теорема Лапласа.

Пусть k – число наступлений события A в схеме Бернулли (n, p), a и b любые числа, a<b. Тогда имеет место соотношение $P\left\{a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ при $n \to \infty$

Практическое применение этой теоремы основано на приближенном равенстве $\boxed{P\left\{a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$

Оценка соответствующей погрешности показывает, что приближенная формула обеспечивает хорошую точность уже при значениях *npq≥10*.

Задачи на применение интегральной предельной теоремы Лапласа.

Задача 1. Дана схема Бернулли (n, p). Требуется найти вероятность того, что число появления события A k раз будет заключено между заданными числами k_1 и k_2, $0 \le k_1 \le k_2 \le n$.

Эта вероятность определяется по формуле:

$$\boxed{P\{k_1 \le k \le k_2\} = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - эта функция называется интегралом ошибок (интеграл Лапласа). Для нее составлены подробные таблицы для значений $x \ge 0$, поскольку $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ♦

*Пример***.** Игральная кость бросается 12000 раз. Какова вероятность, что число выпадений единицы будет заключено между 1900 и 2150?

*Решение***.** Здесь n=12000, p=1/6, q=5/6.

Применим формулу $\boxed{P\{k_1 \le k \le k_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}$, где $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$, $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Вычисляем $\sqrt{npq} = 100/\sqrt{6}$, $k_1 - np = -100$, $k_2 - np = 150$,

$x_1 = -100 : 100/\sqrt{6} = -\sqrt{6}$, $x_2 = 150 : 100/\sqrt{6} = 3\sqrt{6}/2$.

$P \approx \Phi(3\sqrt{6}/2) + \Phi(\sqrt{6}) = \Phi(3{,}67) + \Phi(2{,}45)$.

По таблице находим $\Phi(3\sqrt{6}/2) = \Phi(3{,}67) = 0{,}50$, $\Phi(\sqrt{6}) = \Phi(2{,}45) = 0{,}49$.

Окончательно получаем $P\{1900 \le k \le 2150\} = 0{,}50 + 0{,}49 = 0{,}99$

Задача 2. Пусть заданы числа p, δ, γ. Требуется определить, какое наименьшее число *n* испытаний надо произвести для того чтобы с вероятностью не меньшей γ частота появлений события A *k/n* отклонялась от вероятности p не более чем на δ.

Задача сводится к определению *n* из соотношения $\boxed{\Phi\left(\delta\sqrt{n/pq}\right) \ge \gamma/2}$ с помощью таблиц для интеграла ошибок. ♦

*Пример***.** Сколько раз надо бросить монету для того чтобы с вероятностью не меньшей 0,99 частота появления ″орла″ отличалась от вероятности Р=0,5 не более чем на 0,01.

*Решение***.** По условию задачи 2Ф(у)≥0,99 → Ф(у)≥0,495. Из таблиц находим, что у ≥2,58.

Следовательно, $y = \delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \geq 2{,}58 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 2{,}58\dfrac{\sqrt{0{,}5\cdot 0{,}5}}{0{,}01} = 129 \Leftrightarrow n \geq 16641$

Задача 3. Пусть заданы числа n, p, γ. Требуется определить границы возможных отклонений частоты появления события А от вероятности p, то есть надо найти δ, для которого $P\{|(k/n) - p| \leq \delta\} = \gamma$

 Согласно задачи 2 имеем $P\left\{\left|\dfrac{k}{n} - p\right| \leq \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\delta\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = \gamma$. Отсюда из соотношения $\Phi\left(\delta\sqrt{n/pq}\right) \geq \gamma/2$, используя таблицы, определяем δ ♦

Пример. Вероятность попадания в цель 0,1. Сделано 100 выстрелов. В каких пределах с вероятностью 0,8 будет лежать относительная частота попаданий.

Решение. Здесь p=0,1; q=0,9; γ=0,8

$\sqrt{n/pq} \approx 33{,}3(3), 2\Phi(\delta\cdot 33{,}3(3)) = 0{,}8 \rightarrow \Phi(\delta\cdot 33{,}3(3)) = 0{,}4.$

По таблице (приложение 2) по значению функции $\Phi(x)$ находим значение аргумента x: $33{,}33\cdot\delta = 1{,}28$. Отсюда δ=0,04.

Следовательно, частота k/n попаданий лежит в интервале (0,1-0,04;0,1+0,04).

2. Решение задач по разделу «Случайные события»

1. *Задача*. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность, что он будет без дефекта?

Решение. Общее число выбора холодильника $n = 30$, число благоприятствующих исходов $m = 5$. Следовательно, $P = 5/30 = 1/6$.

Ответ: $1/6$.

2. *Задача*. В порт приходят корабли только их трёх пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго - 0,6. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что корабль прибыл из третьего пункта, тогда противоположное событие $\overline{A}$ - не прибытие корабля из третьего пункта (*прибытие корабля из первого* ***или*** *второго пункта*).

$P(\overline{A}) = 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}8$. По теореме о вероятности противоположного события имеем $P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. ***Ответ: 0,2.***

3. *Задача*. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствие изделия стандарту равна 0,9.

А) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

Б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

Решение. А) Так как события А (первое изделие стандартное) и В (второе изделие стандартное) независимы, то по формуле $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ имеем $P(A \cap B) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

Б) Пусть С – событие, состоящее в том, что только первое изделие стандартное, D – событие, состоящее в том, что только второе изделие стандартное. Тогда $A = C \cap \overline{D}$ - появилось событие C и не появилось событие D, аналогично $B = \overline{C} \cap D$ - не появилось событие C и появилось событие D. Так как $A \cap B = \varnothing$, то по аксиоме 3) имеем $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow$ $P(A \cup B) = P(C) \cdot P(\overline{D}) + P(\overline{C}) \cdot P(D)$

$P(A \cup B) = 0{,}9(1 - 0{,}9) + (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}9 = 2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$. ***Ответ: 0,81; 0,18.***

4. *Задача.* Вероятности появления каждого из двух независимых событий А и В соответственно равны 0,7 и 0,6. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. $P(A) \cdot P(\overline{B})$ - вероятность появление события А и не появление события В, $P(\overline{A}) \cdot P(B)$ - вероятность не появления события А и появление события В, $P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}6) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}6$ $P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$.

Ответ: 0,46.

5. *Задача.* Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что хотя бы одно предприятие выполнит задание, тогда $\overline{A}$ - событие, состоящее в том, что все предприятия не выполнят задание (противоположное событие).

Так как по условию работающие предприятия независимы, то вероятность события $\overline{A}$ вычисляется по формуле $P(\overline{A}) = (1 - 0{,}5)(1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7) \rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

По теореме о вероятности противоположного события имеем $P(A) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. ***Ответ: 0,94.***

6. *Задача.* Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй - 35, третий – 25. Вероятность брака у первого 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

Решение. Пусть ***A*** - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие оказалось бракованным.

Рассмотрим гипотезы (возможные события):

H_1 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие изготовлено первым рабочим.

H_2 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие изготовлено вторым рабочим.

H_3 - событие, состоящее в том, что взятое случайным образом изделие изготовлено третьим рабочим.

Используя определение вероятности события ***A*** $\boxed{P(A)=m/n}$, найдём вероятности гипотез:

$P(H_1)=40/100=0{,}4$; $P(H_2)=35/100=0{,}35$; $P(H_3)=25/100=0{,}25$.

Контроль: 0,4+0,35+0,25=1 – верно.

Запишем условные вероятности события ***A***:

$P(A/H_1)=0{,}03$; $P(A/H_2)=0{,}02$; $P(A/H_3)=0{,}01$.

По формуле полной вероятности найдём вероятность события ***A***.

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)\to$$

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}03+0{,}35\cdot 0{,}02+0{,}25\cdot 0{,}01\to P(A)=0{,}0215$$

Найдём вероятность второй гипотезы H_2 при условии, что событие А произошло по формуле Байеса

$$P(H_2/A)=P(A/H_2)\cdot P(H_2)/P(A)=0{,}35\cdot 0{,}02/0{,}0215=0{,}326$$

Ответ: 0,33.

3. Случайные величины

Понятие случайной величины

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате испытания принимает то или иное значение.

Если СВ принимает конечное или счетное множество чисел, то такая СВ называется *дискретной.*

Если возможные значения СВ покрывают сплошь некоторый интервал (a,b), то такая СВ называется *непрерывной.*

Функциональная зависимость вероятности p_k от x_k называется законом распределения вероятностей дискретной СВ.

Распределение вероятностей дискретной СВ с конечным числом n возможных значений удобно задавать таблицей (табл. 2).

Таблица 2

X	x_1	…	x_k	…	x_n
$P(x=x_k)$	p_1	…	p_k	…	p_n

Закон распределения может быть задан графически, а также аналитически $P_k=f(x_k)$

То что СВ X принимает одно из значений последовательности $x_1,..., x_n$ есть событие достоверное и поэтому должно выполнятся условие $\boxed{\sum_{k=1}^{n} p_k = 1}$.

Интегральная функция распределения

Для непрерывной СВ нельзя составить таблицу распределения такой величины. В связи с этим будем рассматривать не вероятность события X=x, а вероятность события X<x, где x – некоторая текущая переменная. Вероятность события X<x очевидно есть функция переменной x.

Интегральной функцией распределения называют функцию F(x), определяющую для каждого x вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее x.

Из определения следует, что $\boxed{F(x) = P(X < x)}$

Свойства интегральной функции распределения $F(x)$

1. $0 \le F(x) \le 1$. Это свойство следует из определения.
2. $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
3. Функция $F(x)$ – монотонно неубывающая, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
4. Вероятность $P(a \le X \le b)$ того, что СВ X примет значение в интервале (x1,x2): $\boxed{P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$
5. Если возможные значения СВ X принадлежат интервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge a$.

Учитывая сказанное, СВ X может быть задана следующим образом $\boxed{F(x) = \begin{Bmatrix} 0, x \le a \\ f(x), a < x \le b \\ 1, x > b, \end{Bmatrix}}$, где f(x) – неубывающая функция

Для дискретной СВ график функции $F(x)$ будет иметь ступенчатый вид.

Плотность распределения вероятностей случайной величины

Путь X непрерывная СВ , заданная функцией $F(x)$.

Функция $f(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения вероятностей СВ X.

Плотность вероятности существует только для непрерывных СВ. Если известна функция $f(x)$, легко найти $P(a<x<b)$: $\boxed{P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx}$.

Зная дифференциальную функцию f(x) можно найти интегральную функцию F(x) по формуле $\boxed{F(x)=\int_{\infty}^{x} f(x)dx}$

Свойства дифференциальной функции распределения.

1. $f(x)\ge 0$
2. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1}$

Математическое ожидание СВ.

Пусть X – дискретная СВ, закон распределения которой имеет вид … (1)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
$P(x=x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n

Математическим ожиданием (МО) дискретной СВ X называется число $\boxed{M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}$ …(2)

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений СВ X, то есть $\boxed{\overline{X}\approx M(X)}$. В связи с этим математическое ожидание называют также средним значением СВ.

Пусть СВ X задана законом распределения (1) с математическим ожиданием $M(X)$. Величина $\boxed{X-M(X)}$ называется центрированной СВ или отклонением. Математическое ожидание центрированной СВ равно нулю, то есть $M(X-M(X))=0$

Если СВ X непрерывна и задана плотностью вероятности f(x) на отрезке [a,b], то математическое ожидание вычисляется по формуле

$\boxed{M(X)=\int_a^b xf(x)dx}$; $\boxed{M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$ - для случая $-\infty<x<\infty$

Свойства математического ожидания.

1. $M(C)=C\cdot 1=0$, где C- const
2. $M(CX)=C\cdot M(X)$
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$

4. $M(X \cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$ для независимых СВ

Дисперсия случайной величины

Важной количественной характеристикой распределения СВ является дисперсия. Слово «дисперсия» означает рассеивание. Дисперсия определяет степень разброса значений СВ относительно центра распределения вероятностей, то есть ее математического ожидания.

Дисперсией СВ X называется МО от квадрата отклонения СВ, то есть $\boxed{D(X)=M\left[(X-M(X))^2\right]}$ или $\boxed{D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-M(X))^2\cdot p_k}$ для дискретной СВ и $\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}((x-M(X)))^2\cdot f(x)\cdot dx}$ при $-\infty<x<\infty$ для непрерывной СВ.

Здесь f(x) – функция распределения плотности вероятностей СВ X.

Дисперсия имеет размерность квадрата СВ X. Для характеристики рассеивания удобнее пользоваться среднеквадратическим отклонением.

Среднеквадратическим отклонением называется корень квадратный из дисперсии СВ X, то есть $\sigma(X)=\sqrt{D(x)}$

Для СВ X справедлива формула $\boxed{D(X)=M\left(X^2\right)-M(X)^2}$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot p_k-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot p_k\right)^2, \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\cdot dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\cdot dx\right)^2 \quad -$$

соответственно для дискретной и для непрерывной СВ X.

Свойства дисперсии.

1. $D(C)=0$, C-const
2. $D(CX)=C^2D(X)$
3. $D(X)\geq 0$
4. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ для независимых СВ.

*Пример 1***.** СВ X задана законом распределения

X	2	4	6	8
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти D(X). *Решение.* M(X)=2·0,1+4·03+6·0,4+8·0,2=5,4

M(X2)=4·0,1+16·0,3+36·0,4+64·0,2=32,4; $D(X)=32{,}4-5{,}4^2=3{,}24$

Биномиальное распределение

Распределение СВ X , заданное формулой $\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}}$ в схеме Бернулли (n,p), *называется биномиальным распределением*

В этом распределении значению $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ СВ X соответствует вероятность $P_n(k)$

X=k	0	1	…	k	…	n
$P_n(k)$	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Этот закон называется биномиальным потому, что вероятности $P_n(k)$ равняются соответствующим членам разложения $(q+p)^n$ по формуле бинома Ньютона: $(q+p)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Характеристики биномиального распределения:

$\boxed{M(X) = np,}\boxed{D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq}}$

Замечание. Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз находят по формуле:

$P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) более k раз находят по формуле:

$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) не менее k раз находят по формуле:

$P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) не более k раз находят по формуле: $P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$.

Пуассоновское распределение

Распределение СВ X , заданное формулой $\boxed{P(k) = e^{-a} a^k / k!}$ в схеме Бернулли (n, p), где a>0 – некоторый параметр, *a=np называется пуассоновским распределением*

Закон распределения Пуассона имеет вид

X=k	*0*	*1*	*2*	...	*k*	...
P(k)	e^{-a}	ae^{-a}	$a^2e^{-a}/2!$	...	$a^ke^{-a}/k!$	...

Характеристики биномиального распределения: $\boxed{M(X) = a}$, $\boxed{D(X) = a}$, $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{a}}$

Нормальное распределение

Дифференциальная функция нормального распределения

Распределение непрерывной СВ X, заданное дифференциальной функцией распределения

$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$ называется *нормальным распределением*. Здесь a∈R, σ>0 - некоторые параметры.

Интеграл от этой функции $\boxed{F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx}$ является интегральной функцией распределения.

Можно показать, что $\boxed{M(X)=a}$, а $\boxed{D(X)=\sigma^2}$

Вероятность попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал.

Если СВ X задана плотностью вероятностей $\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$, то вероятность того, что X примет значение принадлежащее интервалу (α,β) определяется по формуле: $\boxed{P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$, где

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x)$ - интегральная функция Лапласа

Замечание. На практике часто приходиться вычислять вероятность того, что отклонение нормально распределенной СВ от своего МО по абсолютной величине будет меньше заданного числа δ>0, то есть $P(|X-a|<\delta)$. Эта вероятность определяется по формуле:

$\boxed{P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)}$

Равномерное распределение

Непрерывная СВ X распределена по закону равномерной плотности, если все ее возможные значения равновероятны и лежат в пределах определенного отрезка.

Если СВ X равномерно распределена на отрезке [a,b], то её плотность распределения имеет вид: $\boxed{f(x)=\begin{Bmatrix}1/(b-a), a\le x\le b\\0, x<a, x>b\end{Bmatrix}}$

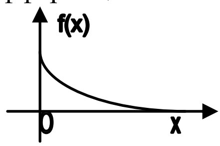
Интегральная функция распределения определяется условным равенством $\boxed{F(x)=\begin{Bmatrix}0, x<a\\(x-a)/(b-a), a\le x\le b\\1, x>b\end{Bmatrix}}$.

Характеристики равномерного распределения: $M(X)=(b-a)/2$, $D(X)=(b-a)^2/12$, $\sigma(X)=\sqrt{(b-a)^2/12}$

Показательное распределение.

Распределение непрерывной СВ, заданное дифференциальной функцией распределения

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, x\geq 0 \\ 0, x<0 \end{cases}}$$



называется показательным распределением.
Здесь a>0 – некоторый параметр.
Интегральная функция распределения определяется условным равенством $F(x)=1-e^{-x}$, x>0

Характеристики показательного распределения: $\boxed{M(X)=1/a}$, $\boxed{D(X)=1/a^2}$, $\boxed{\sigma(X)=1/a}$

4. Решение задач по разделу «Случайные величины»

1. Дискретная случайная величина (СВ) X задана законом распределения

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/20	2/20	4/20	6/20	4/20	2/20	1/20

Найти M(X), D(X), σ(X).

Решение.

1) $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=2\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{2}{20}+4\cdot\frac{4}{20}+5\cdot\frac{6}{20}+6\cdot\frac{4}{20}+7\cdot\frac{2}{20}+8\cdot\frac{1}{20}$

$$M(X)=\frac{2+6+16+30+24+14+8}{20}=\frac{100}{20}=5$$

2) $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i=4\cdot\frac{1}{20}+9\cdot\frac{2}{20}+16\cdot\frac{4}{20}+25\cdot\frac{6}{20}+36\cdot\frac{4}{20}+49\cdot\frac{2}{20}+64\cdot\frac{1}{20}$

$$M(X^2)=\frac{4+18+64+150+144+98+64}{20}=\frac{542}{20}=27{,}1$$

$$D(X)=M(X^2)-M(X)^2=27{,}1-25=2{,}1;$$

3) $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}1}\approx 1{,}45$.

Ответ: 1) $\boxed{M(X)=5}$; 2) $\boxed{D(X)=2{,}1}$; 3) $\boxed{\sigma(X)\approx 1{,}45}$.

2. Дискретная СВ X может принимать два значения x_1 с вероятностью $p_1=0{,}2$ и x_2 ($x_1<x_2$). M(X)=3,8; D(X)=0,16. Найти закон распределения этой СВ.

Решение. Так как СВ X может принимать только два значения x_1 и x_2, то должно выполняться условие $p_1+p_2=1$. Отсюда находим p_2:
$p_2=1-p_1=1-0{,}2=0{,}8$.

По определению $x_1 p_1+x_2 p_2=M(X)$, $x_1^2 p_1+x_2^2 p_2=M(X^2)$, $D(X)=M(X^2)-M(X)^2 \rightarrow M(X^2)=D(X)+M(X)^2$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 = 3{,}8 \\ 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2^2 = 0{,}16 + 3{,}8^2 = 14{,}6 \end{cases}$.

Для удобства сделаем замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$ и умножим каждое уравнение на 5. Должно соблюдаться условие $\boxed{(x < y)}$. Получим систему с целыми коэффициентами: $\begin{cases} x + 4y = 19 \\ x^2 + 4y^2 = 73 \end{cases}$. Из первого уравнения находим $\boldsymbol{x}$ и подставляем во второе уравнение

$\begin{cases} x = 19 - 4y \\ 361 - 152y + 16y^2 + 4y^2 - 73 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 19 - 4y \\ 5y^2 - 38y + 72 = 0 \end{cases}$. Во втором уравнении привели подобные члены и разделили обе части уравнения на 4. Находим решение: $y_1 = 4$; $y_2 = 3{,}6$; $x_1 = 3$; $x_2 = 4{,}6$. Второе решение не подходит, так как должно соблюдаться условие $(x < y)$.

Следовательно, принимается решение $x_1 = 3$; $y_1 = 4$. Ответ:

X	3	4
p	0,2	0,8

3. Нормально распределенная СВ X имеет математическое ожидание a=6 среднее квадратическое отклонение σ=3. Найти P(2<x<6) и P(|x-a|<4).

Решение. 1) Вероятность попадания нормально распределённой СВ X, имеющей математическое ожидание a и среднее квадратическое σ, в интервал (α, β) определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

Применительно к нашей задаче имеем

$$P(2 < X < 6) = \Phi\left(\frac{6-6}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-6}{3}\right) = 0 - \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) \approx \Phi(1{,}33) \approx 0{,}4082 \approx 0{,}41$$

2) Вероятность отклонения значения СВ X от своего математического ожидания по абсолютной величине не более чем на δ определяется по формуле $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Получаем

$$P(|X - 6| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2\Phi(1{,}33) \approx 2 \cdot 0{,}4082 \approx 0{,}82 \cdot$$

Ответ: 1) $\boxed{P(2 < X < 6) \approx 0{,}41}$; 2) $\boxed{P(|X - 6| < 4) \approx 0{,}82}$

4. В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Производится бесповторная выборка 3-х шаров. Приняв за СВ X - число извлечённых чёрных шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ X; 3) найти M(X).

Решение. 1) По условию производится бесповторная выборка поэтому формула Бернулли не применима. В этом случае после выборки первого шара вероятность выборки второго шара того или иного цвета меняется. При решении этой задачи можно применить формулу гипергеометрического распределения $P(X=m)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где N - число всех объектов, M - число отмеченных объектов, n - число отобранных объектов, m - число отмеченных объектов среди отобранных.

Пусть случайная величина X - число извлечённых чёрных шаров $X=m$. Эта СВ может принимать значения $m=0{,}1{,}2{,}3$. Тогда $N=4+6=10$ - всего шаров, $M=6$ -число чёрных шаров, $n=3$ - число извлекаемых шаров, m - число извлечённых чёрных шаров меняется от 0 до 3.

Найдём вероятности при $X=0{,}1{,}2{,}3$:

$$P(X=0)=\frac{C_6^0 C_{10-6}^{3-0}}{C_{10}^3}=\frac{1\cdot C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{10\cdot 9\cdot 8/1\cdot 2\cdot 3}=\frac{4}{10\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{30},$$

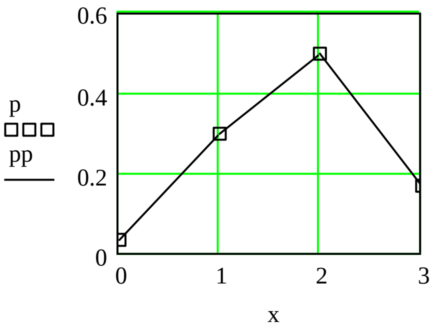
$$P(X=1)=\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{6\cdot 6}{10\cdot 3\cdot 4}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{15\cdot 4}{10\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2},\quad P(X=3)=\frac{C_6^3 C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{5\cdot 4}{10\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{6}.$$

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{3}P(m)=\dfrac{1}{30}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1+9+15+5}{30}=\dfrac{30}{30}=1.$

$X=m$	0	1	2	3
p	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

- закон распределения случайной величины X .



2) Построим многоугольник распределения СВ X, используя закон распределения. Точки (x_m, p_m) строим на плоскости Oxp и соединяем отрезками прямой.

3) Вычислим $M(X)$:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=0\cdot\frac{1}{30}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=1{,}8.$$

Ответ: 1)

$X=m$	0	1	2	3
p	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

, 2) см. рис.; 3) $\boxed{M(X)=1{,}8}$

5. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,84. Что вероятнее: 3 попадания при 4 выстрелах или 6 попаданий при восьми?

Решение. Пусть p - вероятность попадания в цель при одном выстреле, тогда $q=1-p$ - вероятность промаха при одном выстреле. Найдём вероятность промаха при двух выстрелах $q^2=1-0{,}84=0{,}16$. Отсюда находим вероятность промаха $q=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$ и вероятность попадания в цель $p=1-q=1-0{,}4=0{,}6$. Это схема Бернулли $n=3$ и $p=0{,}6$.

Применим формулу Бернулли $\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}}$. Найдём вероятность попадания 3 раза в цель при 4 выстрелах: $P_4(3)=C_4^3\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^{4-3}=4\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4=0{,}346\approx 0{,}35$. Найдём теперь вероятность попадания 6 раз в цель при 8 выстрелах:

$$P_8(6)=C_8^6\cdot 0{,}6^6\cdot 0{,}4^2=28\cdot 0{,}6^6\cdot 0{,}4^2=0{,}209\approx 0{,}21.$$

Ответ: вероятность попадания 3 раза в цель при 4 выстрелах $\boxed{\textbf{\textit{больше}}}$, чем 6 попаданий из восьми.

6. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие A)?

Решение. Здесь имеет место схема Бернулли (n,p) $n=3$, $p=\frac{1}{6}$.

Формула Бернулли имеет вид $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$.

Событие A означает сумму трёх независимых событий: при бросании трёх игральных костей 6 очков появится на одной из костей (событие B), при бросании трёх игральных костей 6 очков появится на двух костях (событие C), при бросании трёх игральных костей 6 очков появится на трёх костях (событие D), короче $A=B\cup C\cup D$.

Следовательно, вероятность события A определяется по формуле $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$ или $P_6(k\ge 1)=P_6(1)+P_6(2)+P_6(3)$. Так как $P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)+P_6(3)=1$, то

$$P_6(k\ge 1)=1-P_6(0)=1-C_6^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=1\cdot 1\cdot\frac{125}{216}\approx 0{,}42.$$

Ответ: $\boxed{P_6(k\ge 1)\approx 0{,}42}$.

Замечание. В некоторых задачах используется *геометрическое распределение*. Если в независимых испытаниях событие A может появится с вероятностью ***p*** и испытания заканчиваются как только появится событие A, то вероятность появления этого события в k- ом испытании определяется по формуле $\boxed{P(X=k)=q^{k-1}p}$.

5. Задачи контрольного задания

Задача 1. Дискретная случайная величина (СВ) X задана законом распределения

x_i	x_1	x_2	...				x_n
p_i	p_1	p_2	...				p_n

Найти M(X), D(X), σ(X).

Таблица 3

№ в	x_i						
1	1	2	3	4	5	6	7
2	-4	-3	-2	-1	0	1	2
3	7	8	9	10	11	12	13
4	6	7	8	9	10	11	12
5	-3	-2	-1	0	1	2	3
6	4	5	6	7	8	9	10
7	2	3	4	5	6	7	8
8	0	1	2	3	4	5	6
9	3	4	5	6	7	8	9
10	-1	0	1	2	3	4	5
p_i	***1/30***	***2/30***	***7/30***	***10/30***	***7/30***	***2/30***	***1/30***

Задача 2. Дискретная СВ X может принимать два значения x_1 с вероятностью p_1 и x_2 ($x_1<x_2$). $M(X)$и $D(X)$ известны. Найти закон распределения этой СВ.

Таблица 4

№ в	p_1	$M(X)$	$D(X)$
1	0,1	3,9	0,09
2	0,8	2,2	0,16
3	0,5	3,5	0,25
4	0,4	2,2	0,96
5	0,9	3,1	0,09
6	0,6	0,6	3,84
7	0,8	3,2	0,16
8	0,8	2,4	0,64
9	0,4	3,6	0,24
10	0,1	2,9	0,09

Задача 3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов в количестве: n_1 с первого завода, n_2 со второго завода, n_3 с третьего завода (табл. 5). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором p_2, на третьем p_3. Какова вероятность, что, взятое случайным образом изделие будет качественным?

Таблица 5

№ в	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6
6	40	0,8	30	0,8	30	0,9
7	20	0,8	50	0,9	30	0,8
8	35	0,7	35	0,8	30	0,9
9	15	0,9	45	0,8	40	0,9
10	40	0,8	15	0,7	45	0,8

Задача 4. . Нормально распределенная СВ X имеет математическое ожидание a среднее квадратическое отклонение σ (табл. 6).
Найти $P(\alpha < x < \beta)$ и $P(|x-a| < \delta)$.

Таблица 6

№ в	a	σ	α	β	δ
1	2	4	6	10	4
2	2	5	4	9	5
3	2	3	0	6	3
4	2	3	1	6	5
5	3	2	3	9	2
6	3	2	0	7	3
7	4	5	2	11	6
8	2	4	0	9	8
9	5	1	5	8	2
10	5	1	6	8	1

Задача 5.

Таблица 7

№ в	Содержание задачи
1	В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из неё 3 раза подряд извлекают, и каждый раз возвращают в урну. Приняв за СВ Х - число извлечённых белых шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
2	В урне 5 белых и 5 чёрных шара. Производится бесповторная выборка 3-х шаров. Приняв за СВ Х - число извлечённых чёрных шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х).
3	Охотник стреляет по дичи до 1-го попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8.Приняв за СВ Х - число выстрелов производимых охотником построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
4	Охотник стреляет по дичи до 1-го попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Приняв за СВ Х - число выстрелов производимых охотником построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
5	В урне 7 белых и 3 чёрных шара. Из неё 3 раза подряд извлекают, и каждый раз возвращают в урну. Приняв за СВ Х - число извлечённых белых шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
6	В урне 4 белых и 6 чёрных шара. Из неё 3 раза подряд извлекают, и каждый раз возвращают в урну. Приняв за СВ Х - число извлечённых белых шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
7	Мяч бросают в корзину 3 раза. Вероятность попадания мячом в корзину при одном бросании равна 0,3. Приняв за СВ Х - число попаданий мячом в корзину построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
8	В урне 2 белых и 8 чёрных шара. Производится бесповторная выборка -х шаров. Приняв за СВ Х - число извлечённых чёрных шаров построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х).
9	Мяч бросают в корзину 3 раза. Вероятность попадания мячом в корзину при одном бросании равна 0,4. Приняв за СВ Х - число попаданий мячом в корзину построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).
10	Мяч бросают в корзину 4 раза. Вероятность попадания мячом в корзину при одном бросании равна 0,4. Приняв за СВ Х - число попаданий мячом в корзину построить: 1) закон распределения; 2) многоугольник распределения СВ Х; 3) найти М(Х) и D(Х).

Задача 6.

Таблица 8

№ в	Содержание задачи
1	В первом ящике 6 белых и 4 черных шара, во втором – 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разного цвета?
2	На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная для первого станка равна 0,8; для второго – 0,9. Производительность 2-го станка втрое больше, чем 1-го. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется стандартной.
3	На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1,2,3,4,5. Наугад выбирают одну за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой?
4	Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что: 1) все 3 детали без дефектов; 2) по крайней мере одна деталь без дефектов?
5	Слово "карета", составленное из букв – кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой. Какова вероятность получить при таком извлечении кубиков слово "ракета".
6	Ящик содержит 10 деталей, среди которых 3 стандартных. Найти вероятность того, что из наудачу отобранных 5 деталей окажется не более одной стандартной.
7	Брошены два игральных кубика. Найти вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани (на одном кубике)?
8	Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,3, а из 2-го – 0,4.
9	Вероятность появления события А при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях оно появится : 1) не менее двух раз; 2) хотя бы один раз.
10	Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для 2-го – 0,8; для 3-го – 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

1. Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку чернилами не красного цвета с оставлением полей 4-5см для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, название дисциплины, номер контрольной работы, дату отсылки работы. В конце работы поставить дату её выполнения и подпись студента.
3. Контрольные работы, содержащие не все задания и задачи не своего варианта, не засчитываются.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров.
5. Перед решением задачи выписывается её условие.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения.
7. После получения прорецензированной работы, как незачтённой так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. –479с.:ил.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., Высш. шк., -1998. – 400с.: ил.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1997.

Оглавление

1. Случайные события 3

2. Решение задач по разделу «Случайные события» 13

3. Случайные величины 15

4. Решение задач по разделу «Случайные величины» 21

5. Задачи контрольного задания 25

6. Правила выполнения и оформления контрольных работ 29

Рекомендуемая литература 29

Учебное издание

Теория вероятностей

Методические указания

Составители:
Исаков Владимир Филиппович
Соболев Алексей Валерьевич
Воробьева Людмила Дмитриевна

Редактор Туманова Е.М.
Подписано в печать 26.09.2013г. Формат 60*84 $^{1/16}$
Бумага «SvetoCopy». Формат 60 × 84$^{1/16}$
Усл. печ. л. 1,8. Уч. изд.л. 1,2 .
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301655 Тульская обл., Новомосковск, ул. Дружбы, 8