

Введение

Среди задач линейного программирования, к которым сводится анализ практических моделей управления и планирования, можно выделить ряд классов задач, матрицы условий которых обладают определенными структурными особенностями. Специфика таких задач, как правило, сводится к тому, что в каждой строке (или в каждом столбце) матрицы условий только небольшая часть элементов, определенным образом расположенных, оказываются отличными от нуля или от некоторых других фиксированных постоянных.

Особая структура ограничений часто позволяет существенно упростить общие методы линейного программирования применительно к специальным задачам. Физический смысл конкретных приложений, описываемых моделями линейного программирования, играет также не последнюю роль при разработке методов анализа специальных задач.

Среди специальных задач в приложениях чаще других встречается так называемая транспортная задача и различные ее модификации и обобщения.

Цель данных методических указаний состоит в том, чтобы показать, как строятся математические модели различных транспортных и распределительных задач и как выполнить их исследование и найти оптимальное решение.

Часть 1 посвящена моделям, которые могут быть сведены к классическим транспортным задачам или к простейшим их модификациям. Здесь же в терминах различных приложений формулируется распределительная задача и некоторые ее обобщения. (В отдельных работах по линейному программированию распределительная задача называется обобщенной транспортной задачей). В части 2 даются основные теоретические разрешимости транспортных задач. Третья часть посвящена рассмотрению методов построения опорного допустимого решения задачи.

В последней части рассматриваются методы отыскания оптимального решения сформулированных в первой части задач.

1. Математическая постановка задачи

1.1 Классическая транспортная задача.

Классическая транспортная задача - задача о наиболее экономном плане перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов производства (станций отправления) в пункты потребления (станции назначения) - встречается чаще других в практических приложениях линейного программирования /1,2/.

Огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Внедрение математических методов и вычислительных машин в планирование перевозок дает большой народнохозяйственный эффект.

Сформулируем транспортную задачу в обобщенном виде. Имеется m пунктов-изготовителей однородной или взаимозаменяемой продукции (A_1, \dots, A_m) и n пунктов-потребителей этой продукции (B_1, \dots, B_n). Заданы объемы производства a_i ($i=1, \dots, m$) каждого пункта производства в штуках, тоннах, вагонах или других единицах измерения и размеры спроса b_j ($j=1, \dots, n$) каждого пункта потребления в тех же единицах. Известны также транспортные издержки c_{ij} (расходы), связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j . В термин «транспортные издержки» не всегда вкладывается его непосредственный экономический смысл. Транспортные издержки здесь - скорее условное понятие, которое в различных задачах может означать тариф, себестоимость, расстояние, время, расход топлива и т.д./1,3/.

В транспортной задаче требуется составить план перевозок, обеспечивающий наиболее экономным путем (т.е. при минимальных общих транспортных издержках) удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет реализации всего продукта, произведенного всеми пунктами производства. Вместо пунктов производства и пунктов потребления, очевидно, могут рассматриваться станции отправления и станции назначения.

Приведенная формулировка транспортной задачи называется *замкнутой транспортной моделью*. Единственным условием разрешимости замкнутой транспортной задачи является равенство суммарного спроса суммарному производству

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i. \quad (1.1)$$

Переведем транспортную задачу на формальный язык. Пусть x_{ij} - количество единиц продукта, поставленное из пункта A_i в пункт B_j .

Суммарные затраты (суммарные транспортные издержки) на перевозку продуктов из всех пунктов производства во все пункты потребления выражаются суммой

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} . \quad (1.2)$$

Условия полного удовлетворения спроса каждого пункта потребления продуктами из разных пунктов производства имеют вид

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Весь произведенный продукт в каждом пункте производства должен быть вывезен в пункты потребления. Формально это означает:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2, \dots, m. \quad (1.4)$$

Объем перевозок - неотрицательное число: перевозки из пунктов потребления в пункты производства исключены. Как уже отмечалось, при формальном решении задачи это условие должно быть зафиксировано:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.5)$$

Транспортная задача сводится, таким образом, к минимизации функции $f(x)$ (1.2) при условиях (1.3) - (1.5).

Во многих задачах не нужно требовать, чтобы весь произведенный продукт в каждом пункте производства был реализован или (в других терминах), чтобы весь накопленный на станциях отправления продукт был вывезен на станции назначения. В таких случаях баланс производства и потребления может быть нарушен и условия-равенства (1.4) заменяются ограничениями-неравенствами

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2, \dots, m, \quad (1.6)$$

означающими, что из каждого пункта производства (с каждой станции отправления) не может быть вывезено больше продуктов, чем имеется.

Задача, в которой требуется минимизировать функцию $f(x)$ (1.2) при условиях (1.3), (1.5) и (1.6) называется *открытой транспортной моделью*.

Открытую модель можно свести к замкнутой, если ввести фиктивный пункт потребления B_{n+1} с объемом потребления

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j .$$

Величина b_{n+1} определяет суммарный объем нереализованного про-

дукта. Размеры остатков $x_{i,n+1}$ в разных пунктах производства можно регулировать в зависимости от введенного штрафа $c_{i,n+1}$ за единицу нереализованного продукта из пункта A_i .

В случае, когда спрос превышает мощность пунктов-изготовителей, также имеем вариант открытой модели. Подход к ее решению аналогичен ранее приведенному: открытую модель сводим к закрытой, вводя соответственно фиктивного поставщика.

Удовлетворение критериального условия - минимизация транспортных расходов - возможно только при учете реальных затрат, связанных с поставкой продукции реальным потребителям. Это необходимо иметь в виду, чтобы в процессе решения задачи блокировать прикрепление к фиктивному потребителю реальных поставщиков.

При планировании перевозок часто необходимо учитывать ограничения, определяемые пропускными способностями коммуникаций. В таких случаях условия (1.5) следует заменить неравенствами вида

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.7)$$

где d_{ij} - предельное число единиц продукта, которое может быть перевезено по коммуникации $A_i B_j$ за время, оговоренное в условиях задачи. Задачи (1.2), (1.3), (1.4), (1.7) и (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) называются *транспортными задачами с ограниченными пропускными способностями*.

1.2 Задача перевозки неоднородных предметов

Задачи планирования работы транспорта усложняются, если перевозке подлежат неоднородные предметы. Задача становится еще более сложной, когда, кроме того, и транспорт, предназначенный для перевозки, оказывается разнородным. Тем не менее, в ряде случаев удастся искусственными приемами свести такую задачу к классической транспортной задаче [1, 3, 4].

Пусть для обеспечения перевозок могут быть использованы s автохозяйств, в каждом из которых имеется r типов автомашин. Примем, что машины разных типов, обладая различными эксплуатационными характеристиками и разной скоростью, могут перевозить любой из m грузов каждому из n потребителей.

Расстояние от места расположения l -го автохозяйства ($l=1,2,\dots,s$) до пункта производства i -го груза ($i=1, 2,\dots, m$) предполагается известным. Будем также считать известным состояние дороги, следовательно, скорость машин k -го типа ($k=1, 2,\dots, r$) для всех маршрутов, подлежащих рассмотрению. К перечисленным сведениям необходимо добавить еще данные о времени погрузки и разгрузки машины каждого типа под любым грузом в каждом пункте назначения. При наличии всей этой информации можно вычислить величины t_{ijk} - время занятости одной машины k -го

типа l -го автохозяйства на работах по перевозке единицы i -го груза j -му потребителю. Введем еще следующие обозначения:

a_{lk} - количество машин k -го типа в l -м автохозяйстве;

c_{ij} - число единиц i -го груза, подлежащего перевозке j -му потребителю;

d_{ij} - число единиц i -го груза, которое перевозится в j -й пункт назначения на одной машине (d_{ij} определяется по известной грузоподъемности машин, по состоянию дорог и заблаговременно запланированному количеству рейсов i -го груза j -му потребителю).

Требуется решить, сколько машин того или иного типа, из какого автохозяйства следует направить для удовлетворения спроса каждого потребителя в каждом виде груза. План организации перевозок будет наилучшим в том случае, если спрос всех пунктов потребления на все грузы будет удовлетворен наличным числом транспортных средств наиболее экономным путем, т.е. при минимальных суммарных затратах автомобилечасов.

Примем в качестве искоемых параметров величины x_{ijkl} - количество машин k -го типа из l -го автохозяйства, предназначенных для перевозки i -го груза j -му потребителю. В принятых обозначениях задача наилучшей организации перевозок формулируется следующим образом. Требуется вычислить значения переменных x_{ijkl} , на которых достигается минимум линейной формы

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^r t_{ijkl} x_{ijkl} \quad (1.8)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ijkl} \leq a_{lk} ; \quad l=1,2, \dots, s; k=1,2, \dots, r, \quad (1.9)$$

$$\sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^r d_{ij} x_{ijkl} = c_{ij} ; \quad i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n; \quad (1.10)$$

$$x_{ijkl} \geq 0, \quad i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n; l=1,2, \dots, s; k=1,2, \dots, r; \quad (1.11)$$

Показатель качества плана фиксирует суммарные затраты автомобилечасов. (Под t_{ijkl} естественно, можно понимать и любые другие виды затрат, связанные с перевозкой единицы i -го груза в j -й пункт назначения на одной машине k -го типа из l -го автохозяйства).

В ограничениях (1.9) записано, что общее число автомашин k -го типа, направленных из l -го автохозяйства на перевозку всех грузов ко всем потребителям, не может превысить числа транспортных единиц k -го типа, которым располагает l -е автохозяйство.

Условия (1.10) означают, что спрос каждого пункта потребления в каждом виде груза должен быть полностью удовлетворен. Структура условий (1.9) - (1.10) позволяет при помощи простого преобразования свести четырехиндексную задачу (1.8) - (1.11) к классической двухиндексной транспортной задаче.

Заменяем пары индексов (i, j) и (l, k) двумя индексами λ и μ по следующим формулам:

$$\lambda = i + m(j - 1) \quad \mu = l + s(k - 1)$$

Когда индекс i пробегает значения $1, 2, \dots, m$, а j - значения $1, 2, \dots, n$, индекс λ принимает все целочисленные значения от 1 до $m \cdot n$. Индекс μ пробегает значения $1, 2, \dots, s \cdot r$.

Введем замену переменных

$$x_{ijk} = z_{\lambda\mu}, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, s; \quad k=1, 2, \dots, r$$

Обозначим, кроме того, t_{ijk} через $\tau_{\lambda\mu}$, отношение c_{ij}/d_{ij} через g_{λ} , a_{ik} через b_{μ} . В новых обозначениях задача (1.8)-(1.11) сводится к вычислению переменных $z_{\lambda\mu}$, обращающих в минимум линейную форму

$$\sum_{\lambda=1}^{mn} \sum_{\mu=1}^{sr} \tau_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu} \quad (1.12)$$

при условиях:

$$\sum_{\lambda=1}^{mn} z_{\lambda\mu} \leq b_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, sr \quad (1.13)$$

$$\sum_{\mu=1}^{sr} z_{\lambda\mu} \leq g_{\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, mn \quad (1.14)$$

$$z_{\lambda\mu} \geq 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, mn \quad \mu = 1, 2, \dots, sr \quad (1.15)$$

Мы пришли к обычной транспортной задаче размером $mn \times sr$. По компонентам $z_{\lambda\mu}$ оптимального плана задачи (1.12)-(1.15) вычисляются составляющие x_{ijk} решения задачи (1.8)-(1.11). При этом индексы i и j вычисляются по формулам:

$$i = \begin{cases} m & \text{если } \lambda \text{ кратно } m \\ \text{остаток от } \lambda/m & \text{если } \lambda \text{ не кратно } m \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} \lambda / m & \text{если } \lambda \text{ кратно } m \\ \text{целое от } (\lambda/m + 1) & \text{если } \lambda \text{ не кратно } m \end{cases}$$

Аналогичным путем вычисляются индексы l и k .

Суть использованного приема состоит в том, что каждый пункт, потребляющий m различных грузов, рассматривается как группа из m

разных пунктов, а автохозяйство с r типами машин учитывается как r автохозяйств. Соответственно определяются потребности каждого пункта назначения и возможности каждого транспортного подразделения.

Рассмотренный здесь прием сокращения числа индексов переменных задачи является достаточно общим. Он может быть использован при решении многих задач организации перевозок и целераспределения в сложной обстановке, когда нужно учитывать особенности различных видов груза и транспорта или особенности различных групп целей и огневых средств.

1.3 Транспортная задача с ограничениями

Рассмотрим задачу планирования перевозок однородного продукта в условиях, когда по тем или иным причинам представляется целесообразным резервировать в некоторых районах определенное количество продукта /1, 4-8/. Обозначим через I_k совокупность номеров i пунктов производства, входящих в k -ый район. Требуется организовать перевозки таким образом, чтобы в k -м районе ($k=1, 2, \dots, s$) сохранилось не менее v_k единиц произведенного продукта. Ограничения по резервам могут быть записаны в виде дополнительных условий

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i \in I_k} b_i - v_k, \quad k=1, 2, \dots, s \quad (1.16)$$

Обозначение $\sum_{i \in I_k}$ указывает, что суммирование выражений, стоя-

щих под этим символом, ведется только по тем индексам i , которые входят во множество I_k .

В условии (1.16) зафиксировано, что общее число продуктов, выведенное из всех пунктов производства k -го района, должно быть, по крайней мере на v_k (на величину заданного резерва) меньше суммарного количества продукта, произведенного в этом районе.

Задача минимизации линейной формы (1.2) при условиях (1.3), (1.5), (1.6) и (1.16) представляет собой модель планирования перевозок, обеспечивающих удовлетворение спроса всех пунктов потребления и гарантирующих сохранение требуемых резервов в каждом районе.

Анализ такой модели может быть сведен к решению классической транспортной задачи (открытой модели), если для любой пары множеств I_k и I_l выполняется одно из следующих требований:

- 1) множества I_k и I_l не пересекаются (не содержат общих элементов);
- 2) одно из множеств полностью включает в себя другое.

В рассмотренной задаче выполняется первое из этих условий. С.М. Мовшович /1,9/ предложил также эффективный алгоритм сведения моде-

ли вида (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.16) к открытой транспортной модели. Естественно, что в эквивалентной транспортной задаче число переменных больше, чем в модели, содержащей условия (1.16).

К модели, рассматриваемой в этом пункте, сводится и ряд других задач планирования перевозок. В частности, к такой модели сводятся задачи перевозок в случаях, когда из-за ограниченности автомобильного транспорта требуется максимально использовать железнодорожный транспорт. Пусть, например, пункты производства с номерами $i \in I_k$ соединены железной дорогой с k -й станцией ($k = 1, 2, \dots, s$), а пропускная способность k -й станции ограничена величиной d_k . От каждой станции продукт перевозится потребителям на автотранспорте.

Ограничение пропускных способностей станций, соединенных с группами пунктов производства, может быть записано в виде

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (1.17)$$

Планирование перевозок, требующее учета ограниченных пропускных способностей промежуточных станций, сводится, таким образом, к задаче (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.16).

Постановка классической транспортной задачи предполагает, что любая пара пунктов производства и потребления связана коммуникацией. Однако в ряде практических задач это требование может оказаться нарушенным.

Допустим, что пункт производства A_i в состоянии транспортировать продукт только в пункты B_j , где $j \in E_i$, причем E_i не обязательно совпадает с полным набором индексов j .

Пусть E_j - совокупность номеров тех пунктов производства, которые могут снабжать пункт потребления B_j . Обозначим набор пар индексов (i, j) , которые отвечают пунктам A_i, B_j , связанным коммуникациями, через E . Тогда задача составления оптимального плана перевозок сводится к минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j \in E_i} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in E_j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i, j \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (1.18)$$

при условиях:

$$\sum_{j \in E_i} x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1.19)$$

$$\sum_{i \in E_j} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.20)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E. \quad (1.21)$$

Сформулированная задача отличается от классической задачи тем, что ее переменные x_{ij} , отвечающие отсутствующим коммуникациям, заранее полагаются равными нулю. Другими словами, задача (1.18)-(1.21) эквивалентна классической задаче с дополнительным требованием:

$$x_{ij} = 0, \text{ если } (i, j) \notin E.$$

Рассмотренную задачу перевозок, в которой некоторые коммуникации отсутствуют, иногда называют *транспортной задачей с запретами* /9/.

1.4 Сетевая модель транспортной задачи

Во многих случаях задачи транспортного типа удобнее задавать не в аналитической форме, как в предыдущих пунктах, а на сетях, используя графическое изображение сети путей сообщения. Для некоторых классов транспортных задач на сети разработаны специфические методы решения (так называемые сетевые методы), более простые, чем матричные методы, основанные на аналитической записи задачи /2, 6, 10/.

Не вдаваясь в строгие определения, связанные с построением и анализом транспортных сетей, перечислим несколько примеров задач линейного программирования транспортного типа, применительно к которым сетевая постановка оказывается удобной для исследования. Рассмотрим транспортную сеть - систему станций $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ соединенных между собой коммуникациями с заданной пропускной способностью d_{ij} . Величина d_{ij} определяет максимальное число единиц продукта (или транспортных единиц), которое может быть доставлено со станции A_i на станцию A_j в единицу времени.

Пусть задача заключается в организации перевозок из некоторого исходного пункта A_0 в конечный пункт A_{n+1} . В ряде приложений важно выяснить максимальное количество продукта, которое может быть перевезено из A_0 в A_{n+1} в единицу времени. Такие задачи называют *задачами о максимальном потоке*.

Нетрудно видеть, что задача о максимальном потоке представляет собой задачу линейного программирования специального вида. Обозначим через x_{ij} количество продукта, перевозимое в единицу времени из A_i в A_j ($i=0, 1, \dots, n; j=1, 2, \dots, n+1$). Будем предполагать, что если станции A_i и A_j не соединены путями сообщения, то соответствующая пропускная способность d_{ij} равна нулю. Задача о максимальном потоке сводится к вычислению набора чисел x_{ij} ($i=0, 1, \dots, n; j=1, 2, \dots, n+1$), на которых достигается максимум линейной формы

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1} \quad (1.22)$$

при условиях:

$$\sum_{k=0}^n x_{ki} - \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 0 \quad i=1,2, \dots, n \quad (1.23)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i=0,1,\dots, n, \quad j=1,2, \dots, n+1. \quad (1.24)$$

Условия (1.23) означают, что на любой из промежуточных станций продукт не изымается: количество продукта, поступившее на станцию, совпадает с количеством продукта, вывезенным с этой станции.

Для задачи о максимальном потоке разработаны специальные «сетевые» методы решения, значительно более простые, чем известные матричные методы.

В [6] указывается, что сетевые методы позволяют находить ручную решение задачи о потоке для весьма сложных сетей, содержащих сотни узлов и тысячи коммуникаций. Применение матричных методов к решению сетевых задач Берж [6] называет стрельбой из пушки по воробьям.

Ясно, что задаче о максимальном потоке можно придать не только транспортную интерпретацию. Зная, например, зависимость диаметров кровеносных сосудов от тех или иных условий, можно с помощью методов решения задачи о максимальном потоке оценить для разных режимов сердечной деятельности максимальный приток крови к любому органу.

К решению задачи о максимальном потоке сводится также задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети связи из одного пункта в другой. К задачам о максимальном потоке сводятся также различные проблемы, связанные со строительством ирригационных систем, с проектированием газопроводов, нефтепроводов, с планированием и организацией снабжения крупных центров и др.

1.5 Задачи, сводящиеся к транспортной

Как следует из предыдущего, термин «транспортная задача» относится не к области применения, а к особенностям математической структуры задачи (1.2) - (1.5). В терминах транспортной задачи могут быть сформулированы и исследованы модели из разных областей приложения линейного программирования [1, 9].

Одной из частных проблем, укладывающихся в схему транспортной задачи, является так называемая *задача о назначениях* или *задача выбора* или *распределительная задача*. Задача заключается в наиболее экономном распределении n работ между n исполнителями, если известно время (или средства), затрачиваемые каждым исполнителем на каждой работе.

Пусть, например, задано, что j -й исполнитель затрачивает на i -ю работу t_{ij} рабочих часов. Будем считать наиболее экономным назначением такое распределение работ между исполнителями, при котором достигает-

ся минимум суммарного числа рабочих часов на выполнение всех работ. Обозначим через x_{ij} число, равное единице, если j -й исполнитель назначен на i -ю работу, и нулю, если для i -й работы выбран другой исполнитель. Суммарное время, затраченное на выполнение всех работ, вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \quad (1.25)$$

Условия, гарантирующие прикрепление исполнителя к каждой работе, записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.26)$$

Условия, гарантирующие закрепление за каждым исполнителем какой-то работы, имеют вид

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.27)$$

Кроме (или вместо) естественных условий

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.28)$$

следовало бы еще потребовать, чтобы все параметры управления x_{ij} могли принимать только два значения: 1 или 0. Однако это условие оказывается излишним. Задача минимизации линейной формы (1.25) при условиях (1.26) - (1.28) (впрочем, как и любая транспортная задача) всегда имеет целочисленное решение. Оптимальный план задачи выбора представляет собой матрицу $X = \|x_{ij}\|$, у которой в каждой строке и каждом столбце стоит только один ненулевой элемент, равный единице.

Задача выбора является частной моделью транспортной задачи. В ней $m = n$, а все $a_i = b_j = 1$.

Задача выбора часто формулируется не как задача минимизации, а как задача максимизации линейной формы вида (1.25) при условиях вида (1.26) - (1.28).

1.6 Расширенная транспортная задача

Рассмотрим несколько обобщений классической транспортной задачи. Для их решения могут быть приспособлены матричные и сетевые методы вычисления оптимальных планов транспортных задач. Однако особая структура этих задач заставляет отдавать предпочтение более экономным специальным методам /1, 2, 6, 9/.

Будем называть классическую транспортную задачу (1.2) - (1.5) задачей I, а транспортную задачу с ограниченными пропускными способностями (1.2) - (1.4), (1.7) - задачей II. К задаче II могут быть сведены и бо-

лее сложные модели планирования производства и перевозок. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть в j -м пункте потребления (B_j) спрос возрос на β_j . Чтобы удовлетворить спрос, необходимо увеличить производство в некоторых пунктах A_i и ввести дополнительные перевозки. Требуется разработать задания пунктам производства и план дополнительных перевозок, чтобы, учитывая ограниченные возможности расширения производства в каждом пункте и ограниченную пропускную способность транспорта, удовлетворить спрос при минимальных затратах.

Переведем задачу на формальный язык.

Введем следующие обозначения:

p_i - затраты на дополнительное производство единицы продукта в i -м пункте. (Здесь и в дальнейшем под затратами на дополнительное производство и расширение пропускной способности транспорта подразумеваются приведенные затраты, при расчете которых учтены коэффициенты, позволяющие сравнивать и суммировать затраты (текущие и капиталовложения) в сопоставимых единицах);

a_i - величина дополнительного производства в i -м пункте;

f_i - ограничение по возможностям расширения производства в i -м пункте;

y_{ij} - дополнительное количество единиц продукта, перевозимое из i -го пункта в j -й;

\tilde{a}_{ij} - ограничение пропускной способности транспорта по линии (i, j) , учитывающее ранее установленный график перевозок ($\tilde{a}_{ij} = d_{ij} - x_{ij}$, где x_{ij} - перевозка в направлении (i, j) , установленная в результате решения задачи II);

c_{ij} , a_i , b_j , d_{ij} имеют тот же смысл что и в задачах I и II. Во введенных обозначениях задача формулируется следующим образом. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = L(a_i, y_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i a_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \quad (1.29)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = \beta_j \quad \text{— дополнительный спрос в } j\text{-м пункте } (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = a_i \quad \text{— дополнительное производство в } i\text{-м пункте } (i = 1, 2, \dots, m);$$

$a_i \leq f_i$ - ограничение по возможностям расширения производства, в i -м пункте ($i = 1, 2, \dots, m$);

$0 \leq y_{ij} \leq \tilde{a}_{ij}$ - ограничения по транспорту.

Нетрудно видеть, что эта задача (мы ее будем называть задачей III) имеет ту же структуру, что и задача II.. Действительно, исключая переменные a_i , получаем следующую задачу. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + p_i) y_{ij} \quad (1.30)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_{ij} &= \beta_j & j=1,2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} &= a_i & i=1,2, \dots, m, \\ 0 \leq y_{ij} &\leq \tilde{a}_{ij} & i=1,2, \dots, m, \quad j=1,2, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь естественно полагать:

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \leq \sum_{i=1}^m f_i \quad (1.31)$$

Введение фиктивного пункта спроса с объемом потребления равным

$$\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n \beta_j \quad (1.32)$$

позволяет свести эту задачу к задаче II. Величина β_{n+1} определяем неиспользованные возможности по расширению производства.

Обобщая задачу, мы предполагали, что увеличение спроса, расширение производства и введение дополнительных перевозок не будут нарушать установившихся перевозок x_{ij} (соответствующих решению задачи II).

Вообще говоря, это не так. Если дополнительные перевозки рассчитаны на длительный срок, изменение графика перевозок может дать существенный экономический эффект. Задача в этом случае будет отличаться от предыдущей тем, что в качестве переменных придется рассматривать не дополнительные перевозки y_{ij} , а суммарные перевозки z_{ij} из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Соответственно изменяются и условия задачи. При сохранении ранее введенных обозначений формальная структура задачи (назовем ее задачей IV) может быть представлена следующим образом. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = L(a_i, z_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i a_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} z_{ij} \quad (1.33)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = b_j + \beta_j \text{ —спрос в } j\text{-м пункте } (j=1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} = a_i + \alpha'_i \text{ —производство в } i\text{-м пункте } (i=1, 2, \dots, m);$$

$0 \leq \alpha'_i \leq f_i$ - ограничение по возможностям расширения производства, в i -м пункте ($i=1, 2, \dots, m$);

$0 \leq z_{ij} \leq \tilde{d}_{ij}$ - ограничения по пропускной способности транспортных магистралей ($i=1, 2, \dots, m$) ($j=1, 2, \dots, n$).

В ряде случаев естественно потребовать, чтобы по новому плану перевозок из каждого пункта производства вывозилось не менее, чем по старому плану (до расширения производства):

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (1.34)$$

Тогда эта задача, так же как и предыдущая, сводится к транспортной задаче с ограничениями по пропускным способностям (задача II).

Сведение задачи IV к задаче II производится следующим образом. Введем m дополнительных переменных:

$$z_{i,n+1} = a_i + f_i - \sum_{j=1}^n z_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Величина $z_{i,n+1}$ определяет неиспользованные возможности по расширению производства в i -м пункте.

После исключения переменных α' задача IV может быть записана в следующем виде. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + p_i) z_{ij} \quad (1.35)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j=1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^m (a_k + f_k) - \sum_{s=1}^n (b_s + \beta_s) = \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{s=1}^n \beta_s = \beta_{n+1} & \text{при } j=n+1 \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (1.37)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \begin{cases} d_{ij} & \text{при } i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n, \\ f_i & \text{при } i=1,2,\dots,m, j=n+1 \end{cases} \quad (1.38)$$

Если система чисел $\{z_{ij}\}$ является решением задачи (1.35) - (1.38), то оптимальный план производства и перевозок задачи IV определяется набором чисел $\{a_i', z_{ij}\}$, где

$$a_i' = f_i - z_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n z_{ij} - a_i$$

Условия (1.34) использованы при исключении переменных a_i' . Если условия (1.34) не могут быть приняты, задача усложняется. Однако в этом случае она укладывается в модель, рассматриваемую ниже.

К естественному усложнению моделей, рассмотренных выше, приводят следующие рассуждения. Сравнивая решения II и IV, определяем

$$\Delta = L(a_i', z_{ij}) - L(x_{ij})$$

Δ - стоимость удовлетворения возросшего спроса при рациональном планировании производства и перевозок. Здесь $L(x_{ij})$ и $L(a_i', z_{ij})$ - оптимальные значения линейных форм задач II и IV соответственно.

Может оказаться, что суммарные расходы уменьшатся, если часть средств будет направлена на расширение пропускной способности транспорта.

Следующая, более широкая, постановка задачи планирования указывает целесообразный подход к распределению капиталовложений.

Пусть переменная w_{ij} характеризует увеличение пропускной способности транспорта, обеспечивающего перевозки из i -го пункта в j -й, а q_{ij} определяет затраты на увеличение пропускной способности линии (i, j) на единицу перевозимого продукта. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, можно сформулировать следующую задачу.

Требуется минимизировать линейную форму $n + 2 m n$ переменных (a_i, z_{ij}, w_{ij})

$$L = L(a_i, z_{ij}, w_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i a_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} w_{ij} \quad (1.39)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = b_j + \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad (1.40)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} = a_i + \alpha_i', \quad i=1, 2, \dots, m; \quad (1.41)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \tilde{a}_{ij} + w_{ij} \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad (1.42)$$

$$0 \leq a'_i \leq f_i \quad i=1, 2, \dots, m; \quad (1.43)$$

$$w_{ij} \geq 0; \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.44)$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, удобно рассматривать два случая в зависимости от того, выполняются условия (1.34) или нет.

Пусть вначале требования (1.34) приняты. Тогда, вводя дополнительные переменные $z_{i, n+1}$ и исключая переменные a'_i , приходим к следующей записи задачи. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = L(z_{ij}, w_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + p_i) z_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} w_{ij} \quad (1.45)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j=1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{s=1}^n \beta_s = \beta_{n+1} & \text{при } j=n+1 \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (1.47)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \begin{cases} d_{ij} + w_{ij} & \text{при } i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n, \\ f_i & \text{при } i=1, 2, \dots, m, j=n+1 \end{cases} \quad (1.48)$$

$$w_{ij} \geq 0; \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.49)$$

Будем эту задачу называть задачей V. Если система чисел (z_{ij}, w_{ij}) является решением задачи (1.45)-(1.49), то оптимальный план производства и перевозок задачи (1.39) - (1.44) при условиях (1.34) определяется набором чисел $\{a'_i, z_{ij}, w_{ij}\}$, где $a'_i = f_i - z_{i, n+1}$.

Условия (1.34) не всегда приемлемы. В частности, если имеется возможность существенного расширения производства в районах, близких к потребителю, то может оказаться целесообразным сокращение перевозок из дальних пунктов производства (по сравнению с запланированными ранее - до увеличения спроса и расширения производства).

Не будем теперь требовать выполнения условий (1.34). Тогда, вводя дополнительные переменные v_i и $z_{i, n+1}$ и исключая переменные a'_i , можно придать задаче (будем называть ее задачей VI) следующий вид.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m p_i (v_i + z_{i, n+1}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} w_{ij} \quad (1.50)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j=1,2,\dots,n \\ \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{s=1}^n \beta_s = \beta_{n+1} & \text{при } j=n+1 \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.52)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \begin{cases} d_{ij} + w_{ij} & \text{при } i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n, \\ f_i + v_i & \text{при } i=1,2,\dots,m, j=n+1 \end{cases} \quad (1.53)$$

$$v_i \geq 0; \quad w_{ij} \geq 0; \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.54)$$

Переменные v_i определяют возможное сокращение вывоза из i -го пункта. Если сокращение вывоза из i -го пункта связано с дополнительными расходами, то коэффициент при v_i , в линейной форме (1.50) должен быть соответствующим образом увеличен.

Если система чисел $\{z_{ij}, v_i, w_{ij}\}$ является решением задачи VI, то оптимальный план задачи (1.39)-(1.44), переменные которой не подчинены условиям (1.34), определяется набором чисел $\{z_{ij}, a'_i, w_{ij}\}$, где

$$a'_i = \begin{cases} f_i - z_{i,n+1} & \text{при } z_{i,n+1} \leq f_i \\ 0 & \text{при } z_{i,n+1} \geq f_i \end{cases} \quad i=1,2,\dots,m$$

Заметим, что если в задаче IV не требовать выполнения соотношений (1.34), то она укладывается в схему задачи VI при $q_{ij}=M$, где M - достаточно большое число.

Мы рассмотрели шесть задач, связанных с планированием производства и перевозок.

Все они оказываются частными случаями следующей общей математической схемы, которую естественно назвать моделью планирования производства и перевозок однородного продукта:

Требуется обратить в минимум линейную форму переменных (u_{ij}, t_{ij})

$$L = L(u_{ij}, t_{ij}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} t_{ij} \quad (1.55)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^s u_{ij} = \mu_j, \quad j=1, 2, \dots, r; \quad (1.56)$$

$$\sum_{j=1}^r u_{ij} = \lambda_i, \quad i=1, 2, \dots, s; \quad (1.57)$$

$$0 \leq u_{ij} \leq \delta_{ij} + t_{ij} \quad i=1, 2, \dots, s, \quad j=1, 2, \dots, r; \quad (1.58)$$

$$t_{ij} \geq 0; \quad i=1, 2, \dots, s, \quad j=1, 2, \dots, r. \quad (1.59)$$

В приведенной ниже табл. 1.1 указан конкретный смысл переменных и параметров модели планирования производства и перевозок применительно к каждой из рассмотренных ранее задач.

Таблица 1.1.

Таблица параметров моделей расширенных транспортных задач.

	s	r	u_{ij}	t_{ij}	γ_{ij}	σ_{ij}	λ_i	μ_i	δ_{ij}
I	m	n	x_{ij}	—	c_{ij}	—	a_i	b_j	∞
II	m	n	x_{ij}	t_{ij}	c_{ij}	M	a_i	b_i	d_{ij}
III	m	$n+1$	y_{ij}	t_{ij}	$c_{ij} + p_i [0]$	$M [0]$	f_i	$\beta_i [\beta_{n+1}]$	$d_{ij} [\infty]$
IV	m	$n+1$	z_{ij}	t_{ij}	$c_{ij} + p_i [0]$	M	$a_i + f_i$	$b_i + \beta_i [\beta_{n+1}]$	$d_{ij} [f_i]$
V	m	$n+1$	z_{ij}	w_{ij}	$c_{ij} + p_i [0]$	$t_{ij} [M]$	$a_i + f_i$	$b_i + \beta_i [\beta_{n+1}]$	$d_{ij} [f_i]$
VI	m	$n+1$	z_{ij}	$w_{ij} [v_{ij}]$	$c_{ij} [-p_i]$	$q_{ij} [p_i]$	$a_i + f_i$	$b_i + \beta_i [\beta_{n+1}]$	$d_{ij} [f_i]$

Выражения, стоящие перед квадратными скобками, определяют значения соответствующего параметра при $j = 1, 2, \dots, n$. Выражения, стоящие в квадратных скобках определяют значения параметра при $j = n + 1$. Если клетка не разделена чертой, то индекс j принимает все значения от 1 до r . Индекс i во всех случаях принимает значения от 1 до m . M — это достаточно большое число.

Если условия той или иной конкретной задачи непротиворечивы, то решение общей задачи при указанных значениях параметров приведет к оптимальному плану частной задачи. При этом t_{ij} , для которых $\sigma_{ij} = M$, окажутся равными нулю.

Заметим, что во всех рассмотренных моделях коэффициенты σ_{ij} по самому своему смыслу неотрицательны. Этот факт оказывается существенным для построения специального экономного метода для решения задачи линейного программирования подобного вида /9/.

2 Основные определения, относящиеся к транспортной задаче

Определение 2.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (1.3) и (1.4), определяемое матрицей $X = [x_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), называется *планом* транспортной задачи.

Определение 2.2. Исходный план транспортной задачи, удовлетворяющий системе линейных уравнений (1.3) и (1.4), называется *опорным планом* транспортной задачи.

Определение 2.3. План $X^* = [x_{ij}^*]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), при котором функция (1.2) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Теорема 2.1. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство (1.1).

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправ-

ления и n пунктами назначения равно $n \times m$, а число уравнений в системах (1.3) и (1.4) равно $n + m$. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (1.1), то число линейно независимых уравнений равно $n + m - 1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $n + m - 1$ отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n + m - 1$, то план является невырожденным, а если меньше, то вырожденным.

Для определения опорного плана существует несколько методов. Три из них - метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля - рассматриваются ниже.

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом.

Для определения оптимального плана транспортной задачи можно использовать симплексные методы. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений (каждая неизвестная входит лишь в два уравнения систем (1.3) и (1.4) и коэффициенты при неизвестных равны единице) для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы.

3 Методы построения опорного плана транспортной задачи

Определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее опорного плана. Этот план можно найти методом северо-западного угла, методом минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля [7, 8, 11]. Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n + m - 1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (того, в строке которого находится заполненная клетка).

3.1 Метод северо-западного угла

Строится матрица, в которой по вертикали располагаются предприятия-изготовители, а по горизонтали - потребители. В поле матрицы в качестве ее элементов выступают распределенные по потребителям количества изготовленной продукции. Продукция распределяется по определенному правилу: в первую очередь удовлетворяется потребность первого по записи в матрице потребителя. Поэтому продукция, изготовленная первым по записи в матрице изготовителем, закрепляется за указанным потребителем в пределах заявленного количества. При этом возможны такие

варианты соотношения спроса и предложения: $b_1 < a_1$, $b_1 = a_1$, $b_1 > a_1$.

В случае, когда спрос меньше предложения ($b_1 < a_1$), изготовленная продукция в количестве, равном заявленному, закрепляется за первым предприятием-потребителем. Тогда первый вариант - элемент матрицы x_{11} будет равен b_1 : $x_{11} = b_1$. Оставшееся нераспределенным количество продукции первого предприятия-изготовителя закрепляется за вторым: по записи в матрице предприятием-потребителем в пределах заявленного им количества и т.д. до того момента, пока не будет закреплено между следующими по очереди потребителями все произведенное первым подразделением-изготовителем количество продукции. После закрепления за потребителями продукции первого подразделения-изготовителя переходим к распределению продукции следующего поставщика. При этом приоритет отдается первому по записи в матрице (в порядке слева направо) потребителю, спрос которого не полностью удовлетворен поставками предыдущего поставщика, а затем все расчеты выполняются в порядке, рассмотренном выше.

Если спрос равен предложению $b_1 = a_1$, то потребитель закрепляется за поставщиком, соответствующий элемент матрицы (в нашем случае x_{11}) приравнивается предложению: $x_{11} = b_1 = a_1$. Таким образом, произведенная рассматриваемым подразделением-поставщиком продукция закреплена за определенным потребителем. После этого можно переходить к распределению между потребителями продукции, произведенной следующим подразделением-изготовителем.

Когда спрос больше предложения ($b_1 > a_1$), вся продукция подразделения-изготовителя закрепляется за соответствующим потребителем (в нашем случае за первым в матрице). Тогда $x_{11} = a_1$. Но так как спрос еще не удовлетворен, недостающее количество продукции рассматриваемому потребителю должен поставить следующий по записи в матрице поставщик. Если после этого у последнего остается нераспределенная продукция, то ее закрепление за потребителями производится в порядке, описанном выше. Матрица заполняется, начиная с клетки 1.1, т.е. с северо-западного угла.

В заполненной матрице $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i$ $\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j$. Общее число

заполненных клеток равно $m + n - 1$, где m - число строк формируемой матрицы, n - число столбцов. Может встретиться и такой случай, когда число заполненных клеток не равно $m + n - 1$. Это будет вырожденная матрица, которую в процессе решения необходимо привести к нормальной, заполнив для этого любую из свободных (незаполненных) клеток нулем. Такая клетка считается заполненной.

Общее число занятых (заполненных) клеток должно быть обязательно равно $m + n - 1$.

Пример 1.

Исходные данные. Три подразделения объединения специализируются на производстве крепежа, который поставляется в четыре пункта (количество производимой и потребляемой однородной продукции (в тыс. шт. комплектов) дифференцированно по потребителям и поставщикам). Данные о расстояниях между ними приведены в табл. 3.1. Построить опорный план, используя метод северо-западного угла.

Таблица 3.1

Таблица исходных данных примера 1.

Подразделение-изготовитель	Расстояние между подразделениями - изготовителем и потребителем, км				Всего изготовлено, тыс. шт. комплектов
	1	2	3	4	
1	80	120	270	90	70
2	130	180	250	110	80
3	210	170	140	150	150
Итого требуется потребителям	50	90	100	60	300

Решение. Мы имеем случай сбалансированности спроса и предложения. Следовательно, исходная таблица готова к построению опорного плана. Заполняем клетку 1.1. Первое подразделение-изготовитель может поставить 70 тыс. комплектов крепежа, 1-му потребителю требуется только 50 тыс. Следовательно, в клетку 1.1 можно поставить 50 тыс.; $x_{11} = 50$, оставшееся количество крепежа закрепляется за 2-м потребителем; второй элемент матрицы по рассматриваемой строке m будет равен $70 - 50 = 20$ тыс. комплектов; $x_{12} = 20$. 2-му потребителю требуется 90 тыс. комплектов крепежа, поэтому недостающее количество покроем за счет второго (по записи в матрице) предприятия-изготовителя, общий выпуск продукции которого оставляет 80 тыс. комплектов. 2-му потребителю недостает $70 (90 - 20)$ тыс. комплектов. Таким образом, из 80 тыс. комплектов продукции второго предприятия-изготовителя 70 тыс. закрепим за 2-м потребителем, заполнив клетку 2.2. Элемент матрицы x_{22} будет равен соответственно 70; $x_{22} = 70$. Оставшиеся нераспределенными 10 $(80 - 70)$ тыс. комплектов закрепим за 3-м потребителем, элемент, матрицы $x_{23}=10$. Но этому потребителю требуется 100 тыс. комплектов крепежа. Недостающие 90 тыс. комплектов $(100 - 10)$ покроем за счет поставок третьего подразделения-изготовителя. Это количество запишем в формируемую матрицу в клетку, соответствующую 3-му потребителю и третьему

поставщику, т.е. 3.3. Тогда элемент $x_{33} = 90$. Оставшееся количество комплектов крепежа ($150 - 90 = 60$ тыс.) можно закрепить за 4-м, потребителем. Его спрос на эту продукцию также равен 60 тыс. комплектов. Заполним клетку 3.4, элемент матрицы $x_{34} = 60$. Распределение закончено. Сформированная матрица будет выглядеть следующим образом (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Опорный план распределения поставок.					
	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	50	20			70
A_2		70	10		80
A_3			90	60	150
Потребности	50	90	100	60	300

Учитывая расстояния между изготовителями и потребителями продукции, рассчитаем, во что обойдется предприятию снабжение производства крепежом при таком закреплении потребителей за изготовителями. Примем, что стоимость 1 тыс. км - постоянная величина K . Тогда расходы по доставке продукции потребителям будут определяться величиной: $50 \cdot 80 + 20 \cdot 120 + 70 \cdot 180 + 10 \cdot 250 + 90 \cdot 140 + 60 \cdot 150 = 43100 \cdot K$ тыс. км·руб. Выполненная расчетная процедура представляет собой формирование опорного плана транспортной задачи. Однако в процессе формирования этого плана по правилу северо-западного угла, при выборе той или иной клетки матрицы для заполнения не учитывается величина издержек, связанных с транспортировкой продукции от изготовителя к потребителю.

3.2 Метод минимального элемента

Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбрать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке. Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Следует отметить, что этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла.

Пример 2.

Исходные данные. Для задачи, рассмотренной в примере 1, построить опорный план методом минимального элемента.

Решение. В формируемой матрице в левом верхнем углу каждой клетки поставим тарифы, в правом верхнем - порядковый номер заполняемой клетки при формировании опорного плана распределения поставок. Определим элементы заполняемых клеток матрицы, т.е. значения x . Минимальный тариф принадлежит клетке 1.1. В первую клетку 1.1 можно поставить число 50, соответствующее спросу 1-го потребителя, поскольку первый из поставщиков производит продукции 70 тыс. комплектов. Таким образом, спрос полностью может быть удовлетворен предложением. Поэтому клетки 2.1 и 3.1 далее можно не рассматривать (поставим минус в правом верхнем углу этих клеток). Вторая заполняемая клетка 1.4 (тариф 90). Потребность 4-го потребителя - 60 тыс. комплектов - может быть удовлетворена первым подразделением-изготовителем в объеме 20 (70 - 50) тыс. комплектов. Теперь из рассмотрения исключим клетки 1.2 и 1.3, т.к. возможности первого поставщика исчерпаны (знак = в верхнем правом углу клеток 1.2 и 1.3). Третья заполняемая клетка, имеющая минимальный из оставшихся тарифов (тариф 110), - 2.4. Оставшийся неудовлетворенным спрос по 4-му потребителю (60 - 20 = 40 тыс. комплектов) можно покрыть за счет второго подразделения-изготовителя, выпускающего 80 тыс. комплектов крепежа. Таким образом, потребность 4-го потребителя удовлетворяется за счет двух поставщиков: первый поставляет 20, второй - 40 тыс. комплектов крепежа и исключается из рассмотрения клетка 3.4. Из оставшихся незаполненными клеток минимальный тариф имеет клетка 3.3. 3-му потребителю требуется 100 тыс. комплектов крепежа, а предложение третьего изготовителя - 150 тыс. комплектов. Таким образом, спрос полностью покрывается предложением. Четвертой заполненной клеткой будет являться 3.3, ее элемент $x_{33} = 100$, а вычеркнутой - клетка 2.3. Из двух оставшихся клеток (2.2 и 3.2) по признаку минимального тарифа должна заполняться клетка 3.2. Спрос 2-го потребителя - 90, а оставшаяся нераспределенной продукция третьего изготовителя равна 50 (150 - 100) тыс. комплектов. Это количество продукции закрепим за 2-м потребителем. Тогда элемент этой клетки x_{32} будет равен 50. Последней заполняемой клеткой будет 2.2. По 2-му потребителю к настоящему моменту неудовлетворенным остался спрос в объеме 40 (90 - 50) тыс. комплектов. Это количество продукции может быть поставлено вторым изготовителем. Из общего изготовленного количества продукции (80 тыс. комплектов) распределено всего 40. Остаток равен 40 (80 - 40), т.е. как раз то, что требуется 2-му потребителю. Закрепим за ним эту продукцию, тогда элемент заполняемой клетки будет равен 40. Таким образом, заполненные клетки матрицы в отправном варианте распределения соответственно

равны: $x_{11} = 50$, $x_{14} = 20$, $x_{22} = 40$, $x_{24} = 40$, $x_{32} = 50$, $x_{33} = 100$ (табл. 3.3). Общее число заполненных клеток должно быть равно 6 (3 + 4-1). У нас их шесть. Закрепленное за каждым из потребителей количество продукции

строгое равно спросу соответствующего потребителя: $\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j$, а сум-

ма потребляемой продукции соответствует произведенной: $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i$.

Таблица 3.3

Опорный план распределения поставок методом минимального элемента

Подразделение-изготовитель	Расстояние между подразделениями - изготовителем и потребителем, км				Всего изготовлено, тыс. шт. комплектов
	1	2	3	4	
1	80 (1) 50	120 =	270 =	90 (2) 20	70
2	130 -	180 (6) 40	250 -	110 (3) 40	80
3	210 -	170 (5) 50	140 (4) 100	150 -	150
Итого требуется потребителям	50	90	100	60	300

Расход по доставке продукции в этом варианте распределения поставок: $80 \cdot 50 + 90 \cdot 20 + 180 \cdot 40 + 110 \cdot 40 + 170 \cdot 50 + 140 \cdot 100 = 39900 \cdot K$ тыс. км · руб.

Сопоставление двух вариантов распределения поставок, полученных различными методами (по методу северо-западного угла и минимального элемента), говорит в пользу второго, поскольку, с точки зрения принятого критерия - минимизация стоимости перевозок - этот метод дал лучший вариант опорного плана $43100 K > 39900 K$, более приближенный к оптимальному.

Пример 3.

Исходные данные. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Построить опорный план методом минимального элемента.

Решение. Исходные данные задачи запишем в виде табл. 3.4. Минимальный тариф, равный 1, находится в клетках для переменных x_{11} и x_{13} . Положим $x_{13} = 160$, запишем это значение в соответствующую клетку табл. 3.4 и исключим временно из рассмотрения строку A_1 . Оставшиеся потребности пункта назначения B_3 считаем равными 30 ед.

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3 и B_4 клетка с наименьшим значением тарифа находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2 , где $c_{32}=2$. Положим $x_{32}=50$ и внесем это значение в соответствующую клетку табл. 3.4.

Таблица 3.4

Опорный план распределения поставок методом минимального элемента

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 -	8 -	1 ⁽¹⁾ 160	2 -	160
A_2	4 ⁽⁴⁾ 120	5 -	9 -	8 ⁽⁶⁾ 20	140
A_3	9 -	2 ⁽²⁾ 50	3 ⁽³⁾ 30	6 ⁽⁵⁾ 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3 и B_4 . В ней минимальный тариф C находится в клетке на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3. Заполним описанным выше способом эту клетку и аналогично заполним (в определенной последовательности) клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_1 , строки A_3 и столбца B_4 , строки A_2 и столбца B_4 . В результате получим следующий опорный план

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{bmatrix}$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет

$$S = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530.$$

3.3 Метод аппроксимации Фогеля.

При определении оптимального плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в таблице условий задачи в специально отведенных для этого строках и столбцах. Среди указанных разностей выбирают максимальную разность. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке) соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Пример 4.

Используя метод аппроксимации Фогеля, найти опорный план транспортной задачи примера 3 (опорный план этой задачи ранее был найден методом минимального элемента). Исходные данные представим в виде табл. 3.5.

Таблица 3.5

Таблица исходных данных примера 4.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Решение. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 3.6. Так, в строке A_1 минимальный тариф равен 1, а следующий за ним равен 2, разность между ними $2 - 1 = 1$. В строке A_2 минимальный тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними $5 - 4 = 1$. Точно так же разность между минимальными элементами в столбце B_4 равна $6 - 2 = 4$. Вычислив все эти разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B_4 . В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересече-

нии строки A_1 и столбца B_4 . Таким образом, эту клетку следует заполнить. Заполнив ее, тем самым мы удовлетворим потребности пункта B_4 . Поэтому исключим из рассмотрения столбец B_4 и будем считать запасы пункта A_1 равными $160 - 110 = 50$ ед. После этого определим следующую клетку для заполнения. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами в каждой из строк и столбцов и запишем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке табл. 3.6.

Таблица 3.6

Таблица нахождения опорного плана методом Фогеля.

Пункты отправления		Пункты назначения				Запасы B_1	Разности по строкам					
		B_1	B_2	B_3	B_4		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
A_1		7	8	1 50	2 110	160	1	6 max	—	—	—	—
A_2		4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1 max	0
A_3		9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7 max	—	—
Потребности		120	50	190	110	470						
Разностям по	Δ_1	3	3	2	4 max							
	Δ_2	3	3	2	—							
	Δ_3	5	3	6 max	—							
	Δ_4	5	3	—	—							
	Δ_5	0	0	—	—							
	Δ_6	—	0	—	—							

Как видно из этой таблицы, наибольшая указанная разность соответствует строке A_1 . Минимальный тариф в этой строке записан в клетке, которая находится на пересечении ее со столбцом B_3 . Следовательно, заполняем эту клетку. Поместив в нее число 50, тем самым предполагаем, что запасы в пункте A_1 полностью исчерпаны, а потребности в пункте B_3 стали равными $190 - 50 = 140$ ед. Исключим из рассмотрения строку A_1 и определим новую клетку для заполнения. Продолжая итерационный процесс, последовательно заполняем клетки, находящиеся на пересечении строки A_3 и столбца B_3 , строки A_3 и столбца B_2 , строки A_2 и столбца B_1 , строки A_2 и столбца B_2 . В результате получим опорный план X. При этом плане общая стоимость перевозок такова: $S = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

Как правило, применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному плану, либо сам оптимальный план. Кстати, найденный выше опорный план транспортной задачи является и оптимальным.

3.4 Задачи для самоконтроля

Используя методы северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля, найдите опорные планы транспортных задач 3.1 - 3.2. исходные данные которых представлены в табл. 3.7 - 3.8.

Задача 3.1

Таблица 3.7

Таблица исходных данных задачи 3.1

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	2	8	6	115
A_2	3	1	9	7	3	175
A_3	9	6	7	2	1	130
Потребности	70	220	40	30	60	420

Задача 3.2

Таблица 3.8

Таблица исходных данных задачи 3.2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	7	280
A_2	7	6	2	9	175
A_3	1	3	9	8	125
A_4	2	4	5	6	130
Потребности	90	180	310	130	710

4 Методы определения оптимального плана транспортной задачи

Для решения транспортной задачи линейного программирования используются 2 группы методов:

1 методы последовательного улучшения планов;

2 - методы условно-оптимальных планов.

К 1-й группе относятся методы: распределительный, модифицированный распределительный, потенциалов, дельта-метод /9/. Достаточно широкое распространение получили распределительный метод и метод потенциалов. Ко 2-й группе относятся методы дифференциальных рент, разрешающих слагаемых и др. /10, 11, 12/. Наиболее часто применяется метод дифференциальных рент, позволяющий получить оптимальное решение на базе построения условно-оптимальных планов: произведенная продукция между потребителями распределяется частями; при полном распределении продукции и окончательном расчете полученный вариант плана закрепления потребителей за поставщиками оптимален.

4.1 Распределительный метод

Распределительный метод включает ряд приемов и правил, позволяющих на основе выявленных зависимостей между отдельными факторами построить специальные расчетные таблицы, оценка которых позволяет установить, получен оптимальный вариант решения или требуется улучшить его. Улучшение достигается за счет подбора соответствующего сочетания факторов, выполняемого по специальным правилам до выхода на оптимальное решение.

Распределительный метод предусматривает выполнение следующих процедур: выбор свободных (незаполненных) клеток, формирование для каждой из них замкнутого контура (цикла); по каждому из таких контуров выбираются тарифы, находящиеся в вершинах соответствующего контура, присвоение тарифам знаков, алгебраическое суммирование тарифов по каждому контуру, проверка результата на оптимальность.

Определение 4.1. Клетки, у которых объемы перевозок равны нулю, называются *свободными* клетками.

Определение 4.2. Циклом в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья - вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое - в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры некоторых циклов показаны на рис. 4.1.

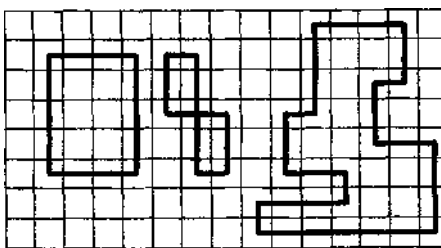


Рис.4.1 Примеры построения циклов

Замкнутый контур для свободной клетки строится следующим образом:

Начиная из свободной клетки, по кратчайшему пути обходятся заполненные клетки таблицы. При этом переход из свободной клетки в заполненную клетку, из заполненной клетки в

заполненную клетку и из заполненной клетки в свободную клетку осуществляется только по горизонтали или вертикали. Попадание в заполненную клетку служит основанием для изменения направления движения (под прямым углом), но при этом необходимо, чтобы на линии, проходящей через заполненную клетку перпендикулярно выполненному движению, была хотя бы одна заполненная клетка. Если такой клетки соответственно в строке или в столбце матрицы не окажется, необходимо продолжить движение в прежнем направлении (по строке или столбцу), пока не встретится новая заполненная клетка, или изменить направление обхода.

Полученный таким образом контур будет представлять собой ступенчатую замкнутую фигуру с прямыми углами. Вершинами этой фигуры будут выбранная свободная и найденные заполненные клетки, в которых менялось направление обхода. Для каждой свободной клетки можно найти только один кратчайший путь, поэтому для нее можно построить только один замкнутый контур. Объемам перевозок матрицы, находящимся в вершинах этого контура, присваиваются знаки "+" или "-" в строгом чередовании. Процедура эта выполняется, начиная со свободной клетки, которой присваивается знак "+". Порядок (направление) обхода контура при присвоении знаков не имеет значения, так как полученный результат будет одним и тем же.

Проверка на оптимальность варианта распределения поставок при использовании распределительного метода сводится к оценке полученных после алгебраического суммирования по построенным контурам, результатов. Если критериальная функция минимизируется, то при оптимальном плане перевозок ни один из результатов не должен быть отрицательным; если функция максимизируется, то не должно быть ни одного положительного результата. При нарушении этих требований вариант распределения должен улучшаться путем перераспределения поставок между вершинами того контура, результат которого с точки зрения принятого критерия наихудший.

Пример 5. Построим замкнутые контуры для свободных клеток в табл. 3.3 примера 2, приведенной на с. 26.

Решение. Для клетки 1.2: из неё можно пойти либо по горизонтали (по строке 1), либо по вертикали (по столбцу 2 вниз). При движении по строке влево первая из заполненных клеток 1.1. В этой клетке нельзя изменить направление обхода, так как далее вниз по вертикали мы не встречаем ни одной заполненной клетки. Поэтому так идти нельзя. При движении по строке вправо первая из заполненных клеток 1.4. В этой клетке можно изменить направление обхода, так как на линии, перпендикулярной направлению обхода, т. е. в четвертом столбце, кроме клетки 1.4, есть и другая заполненная клетка - 2.4. Переходим из клетки 1.4 в клетку 2.4. В строке, проходящей через эту клетку (на перпендикуляре к выполненному направлению движения), кроме клетки 2.4, есть еще одна заполненная клетка - 2.2, следовательно, в клетке 2.4 можем изменить направление обхода. Мы дважды меняли направление, образовав два угла у формируемого контура. Переходим в клетку 2.2. В этой клетке можно сделать поворот, так как на перпендикуляре только что выполненному движению лежит свободная клетка, из которой было начато движение. При изменении направления движения образовалась новая вершина в контуре. Переход из клетки 2.2 и клетку 1.2 замкнул формируемый контур. Получена фигура с вершинами в клетках 1.2, 1.4, 2.4, 2.2.

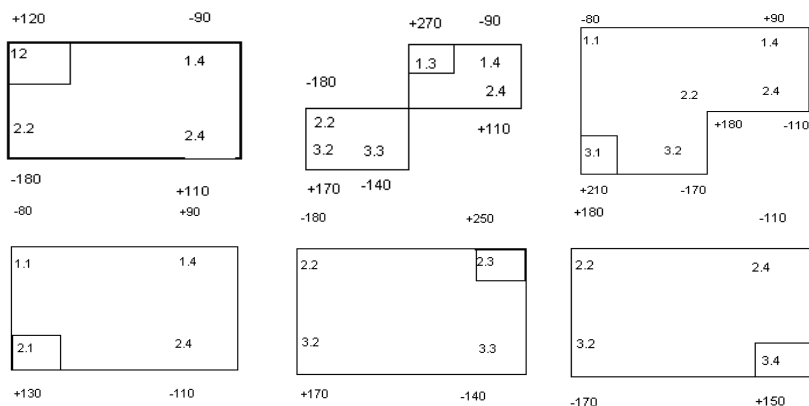


Рис.4.2. Замкнутые контуры для свободных клеток в опорном плане распределения поставок задачи 2:

1.2, 1.4 и т.д. - номера клеток; 120 – тариф, соответствующей клетки таблицы; 1.2 свободная клетка контура

Таким же образом построим фигуры для остальных свободных клеток: Для клетки 1.3 вершины контура будут в клетках 1.3, 1.4, 2.4, 2.2, 3.2, 3.3; для клетки 2.1- 2.1, 1.1, 1.4, 2.4; для клетки 2.3- 2.3, 2.2, 3.2, 3.3; для клетки 3.1 - 3.1, 1.1, 1.4, 2.4, 2.2, 3.2; для клетки 3.4- 3.4, 3.2, 2.2, 2.4. Выберем

по каждому из контуров соответствующие тарифы и присвоим им знаки (рис. 4.2).

Проверим полученный вариант плана перевозок на оптимальность, вычислив по каждому из контуров алгебраическую сумму тарифов и проверив полученные результаты на знак:

для клетки 1.2: $120 - 90 + 110 - 180 = -40$;

для клетки 1.3: $270 - 90 + 110 - 180 + 170 - 140 = 140$;

для клетки 3.1: $210 - 170 + 180 - 110 + 90 - 80 = 120$

для клетки 2.1: $130 - 80 + 90 - 110 = 30$;

для клетки 2.3: $250 - 140 + 170 - 180 = 100$;

для клетки 3.4: $150 - 170 + 180 - 110 = 50$.

План перевозок неоптимальный, так как один из результатов (по клетке 1.2) отрицательный. Улучшим план, перераспределив между клетками этого контура количество поставок. Перераспределение производится следующим образом: часть поставок с отрицательными знаками передается в клетки с положительными знаками. При этом для всех вершин выбранного контура выбираются элементы матрицы того варианта распределения, который проверялся на оптимальность. Эти элементы находятся в клетках, соответствующих вершинам рассматриваемого контура. В нашем случае это контур с вершинами в клетках 1.2, 1.4, 2.4 и 2.2. Этим вершинам соответствуют объемы перевозок 0, 20, 40, 40. Изобразим этот контур графически, поставив элементы x_{ij} в соответствующих вершинах с учетом присвоенного знака (рис. 4.3.а).

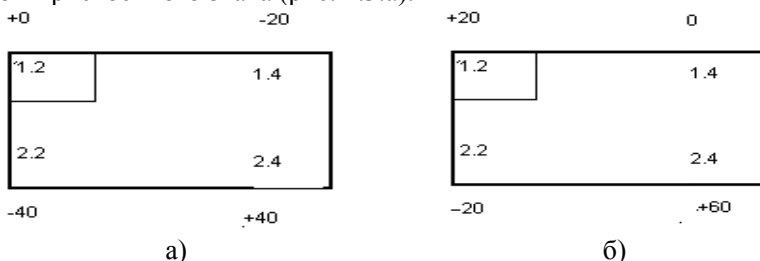


Рис.4.3. Контур перераспределения количества поставок для клетки 1.2

Из вершин с отрицательными значениями выбираем клетку с минимальным объемом перевозок x_{ij} . В нашем примере минимальным по величине отрицательным элементом является -20 (в клетке 1.4). Выбранный элемент алгебраически вычитается из объемов перевозок каждой вершины контура, в том числе и из самого себя. Алгебраически (с учетом знака) вычтем величину -20 из каждого элемента контура (рис. 4.3.б): для клетки 1.2 $x_{12} = 0 - (-20) = 20$; для клетки 1.4 $x_{14} = -20 - (-20) = 0$, для клетки 2.4 $x_{24} = 40 - (-20) = 60$, для клетки 2.2 $x_{22} = -40 - (-20) = -20$. Окончательно

элементы контура примут вид, представленный на рисунке 4.3.б.

Проверим правильность выполнения этой операции. Для этого просуммируем элементы по строкам и столбцам в исходном и скорректированном контурах (расчеты выполняются без учета знаков). В обоих контурах суммы по столбцам равны 40 и 60, по строкам - 20 и 80. Перераспределение выполнено правильно. В том случае, когда по нескольким контурам имеются отрицательные результаты, для уменьшения числа итераций при получении оптимального плана перевозок выбираем контур с наибольшим по абсолютному значению отрицательным результатом. Результаты перераспределения перевозок представим в новой матрице (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Первый этап перераспределения перевозок примера 5.

Подразделение-изготовитель	Потребители				Всего изготовлено, тыс. шт. комплектов
	1	2	3	4	
1	80 50	120 20	270	90	70
2	130	180 20	250	110 60	80
3	210	170 50	140 100	150	150
Итого требуется потребителям	50	90	100	60	300

В матрице шесть заполненных и шесть свободных клеток. Проверим эту матрицу на оптимальность таким же образом, как и предыдущую. Для свободных клеток 1.3, 1.4, 2.1, 2.3, 3.1 и 3.4 построим замкнутые контуры:

для клетки 1.3 замкнутый контур будет иметь вершинами следующие клетки: 1.3, 3.3, 3.2 и 1.2;

для клетки 1.4-1.4, 2.4, 2.2 и 1.2;

для клетки 2.1 - 2.1, 1.1, 1.2 и 2.2;

для клетки 2.3 - 2.3, 3.3, 3.2 и 2.2;

для клетки 3.1-3.1, 1.1, 1.2 и 3.2;

для клетки 3.4 - 3.4, 3.2, 2.2 и 2.4.

Рассчитаем по каждому из контуров тарифы и с учетом знака просуммируем их:

для клетки 1.3: $270 - 140 + 170 - 120 = 180$;

для клетки 1.4: $90 - 110 + 180 - 120 = 40$;

для клетки 2.1: $130 - 80 + 120 - 180 = -10$;

для клетки 2.3: $250 - 140 + 170 - 180 = 100$;

для клетки 3.4: $150 - 170 + 180 - 110 = 50$.

Анализируемый вариант плана перевозок неоптимальный, так как один из контуров дал отрицательный результат (контур клетки 2.1). Перераспределим по указанному выше правилу количество поставок в пределах контура свободной клетки 2.1 (рис. 4.4. а).

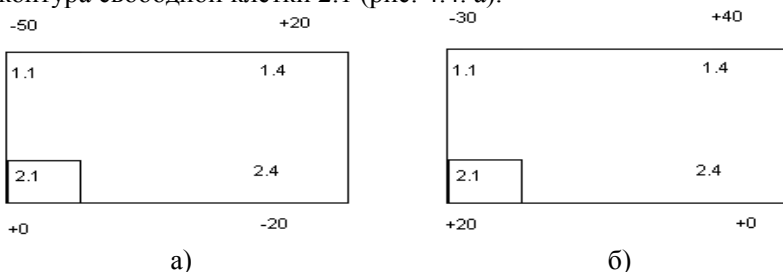


Рис.4.4. Контур перераспределения количества поставок для клетки 2.1

Минимальное по абсолютной величине отрицательное число -20 (в клетке 2.4). Вычтем это число алгебраически из каждого объема перевозок, т.е. перераспределим поставки в пределах выбранного контура (рис. 4.4. б). В обоих контурах сумма по строкам и столбцам не изменилась: в исходном и скорректированном контурах сумма по столбцам равна 50 и 40, а по строкам 70 и 20. Следовательно, перераспределение выполнено правильно. Представим результаты перераспределения в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Второй этап перераспределения перевозок примера 5.

Подразделение-изготовитель	Потребители				Всего изготовлено, тыс. шт. комплектов
	1	2	3	4	
1	80 30	120 40	270	90	70
2	130 20	180	250	110 60	80
3	210	170 50	140 100	150	150
Итого требуется потребителям	50	90	100	60	300

Общее количество заполненных и свободных клеток не изменилось, итоги по строкам и столбцам после перераспределения остались также на уровне исходных, следовательно, все операции по оптимизации распределения поставок выполнены правильно.

Проверим полученный вариант плана на оптимальность, строя замкнутые контуры для незаполненных клеток и проверяя их по указанному ранее правилу.

Для клетки 1.3 результат $270 - 120 + 170 - 140 = 180$;

для клетки 1.4: $90 - 80 + 130 - 110 = 30$;

для клетки 2.2: $180 - 120 + 80 - 130 = 10$;

для клетки 2.3: $250 - 130 + 80 - 120 + 170 - 140 = 110$;

для клетки 3.1: $210 - 80 + 120 - 170 = 80$;

для клетки 3.4: $150 - 110 + 130 - 80 + 120 - 170 = 40$.

Ни один из полученных результатов не является отрицательным, следовательно, полученный вариант плана оптимальный.

4.2 Метод потенциалов

Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Для определения опорного плана транспортной задачи будем пользоваться одним из методов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Эти методы гарантируют получение занятых в исходном плане $n + m - 1$ клеток, причем в некоторых из них могут стоять нули. Полученный план следует проверить на оптимальность.

Теорема 4.1. Если для некоторого опорного плана $X^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) транспортной задачи существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, что

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0 \quad (4.1)$$

$$\beta_j - \alpha_i \leq c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0 \quad (4.2)$$

для всех ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), то $X^* = (x_{ij}^*)$ – оптимальный план транспортной задачи.

Определение 4.3. Числа α_i и β_j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), называются *потенциалами* пунктов назначения и пунктов потребления соответственно.

Сформулированная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план транспортной задачи. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы α_i и β_j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Эти числа находят из системы уравнений:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad (4.3)$$

где c_{ij} – тарифы, стоящие в заполненных клетках таблицы условий транспортной задачи.

Так как, число заполненных клеток равно $n + m - 1$, то система (4.3) с $n + m$ неизвестными содержит $n + m - 1$ уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например $\alpha_0 = 0$, и найти последовательно из уравнений (4.3) значения остальных неизвестных. После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$.

Если среди чисел d_{ij} нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $d_{ij} > 0$, то исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $d_{ij} > 0$, и среди данных чисел выбирают максимальное. Клетку, которой это число соответствует, следует заполнить в первую очередь.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной так называемым циклом. Порядок построения цикла описан в п. 4.1.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому опорному плану. Для этого необходимо переместить грузы в пределах клеток, связанных с данной свободной клеткой. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке - знак плюс, а всем остальным клеткам - поочередно знаки минус и плюс (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми);

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij} , стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим объемам перевозок, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij} , считается свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется сдвигом по циклу пересчета.

Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, а именно остается равным $n + m - 1$.

При этом если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых числа x_{ij} , то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $d_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется положительных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же положительные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Из изложенного выше следует, что процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным $n + m - 1$.

2. Находят потенциалы α_i и β_j соответственно пунктов отправления и назначения.

3. Для каждой свободной клетки определяют число d_{ij} . Если среди чисел d_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.

4. Среди положительных чисел d_{ij} выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой соответствует максимальное значение d_{ij} , цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.

5. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, т. е. снова повторяют все действия, начиная с этапа 2.

В заключение отметим, что при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае заикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым положительным числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε равным нулю.

Пример 6. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 4.3, найти оптимальный план методом потенциалов.

Решение. Сначала, используя метод северо-западного угла, находим опорный план задачи. Заполнение начинаем с верхнего левого угла таблицы, удовлетворяя по максимуму потребности или распределяя максимальное количество отправляемой продукции. Этот план приведен в табл. 4.4.

Таблица 4.3

Исходные данные примера 6.

Пункты отправления	Пункты назначения	Запасы
--------------------	-------------------	--------

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Таблица 4.4

Опорный план транспортной задачи примера 6.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 20	4	1	50
A_2	2	3 10	1 10	5 10	30
A_3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Найденный опорный план проверяем на оптимальность. Для этого находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для определения потенциалов строим систему уравнений:

$$\beta_1 - \alpha_1 = c_{11} = 1, \quad \beta_2 - \alpha_2 = c_{22} = 3, \quad \beta_4 - \alpha_2 = c_{24} = 5,$$

$$\beta_2 - \alpha_1 = c_{21} = 2, \quad \beta_3 - \alpha_2 = c_{23} = 1, \quad \beta_4 - \alpha_3 = c_{43} = 4,$$

содержащую шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_0 = 0$, находим $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 4$, $\alpha_3 = 0$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$.

$$d_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - 4 = -4, \quad d_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - 2 = 0 \quad d_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - 2 = 0,$$

$$d_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - 1 = 3, \quad d_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - 3 = -2 \quad d_{33} = \beta_3 - \alpha_3 - 4 = -4$$

Так как среди величин d_{ij} имеются положительные числа, то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшим среди положительных чисел d_{ij} , являются $d_{14} = 3$, поэтому для данной свободной клетки строим цикл пересчета (1.4-2.4-2.2-1.2) (табл. 4.5) и производим сдвиг по этому циклу.

Таблица 4.5

Построение первого цикла пересчета примера 6.

Пункты отправления	Пункты назначения	Запасы
-----------------------	-------------------	--------

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 20	- 4	1 10	+
A_2	2	3 10	+ 1 10	5 10	-
A_3	3	2	4	4 10	
Потребности	30	30	10	20	90

Наименьшее из чисел в минусовых клетках (1.2; 2.4) равно 10 (клетка 2.4). Клетка, в которой находится это число, становится свободной в новой табл. 4.6. Другие числа в табл. 4.6 получаются так: к числу, стоящему в плюсовой клетке табл. 4.5, добавляется 10 и вычитается 10 из чисел, находящихся в минусовых клетках табл. 4.5. Клетка 2.4 на пересечении строки 2 и столбца 4 остановится свободной. После преобразований получаем новый опорный план (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Опорный план 2 транспортной задачи примера 6.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 10	4	1 10	50
A_2	2	3 20	1 10	5	30
A_3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Этот план проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для этого составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_1 - a_{11} &= 2, & /?4 - a_{14} &= 1, \\ p_1 - a_{12} &= 2, & /?4 - a_{24} &= 4. \end{aligned}$$

Полагаем $a_{11} = 0$, получаем $B_1 = 2$, $p_1 = 2$, $B_3 = 0$, $a_{34} = -3$, ($K = -1$). Вычисляя для каждой свободной клетки a_{ij} , имеем: $dp_{12} = -4$, $dp_{13} = 0$, $dp_{23} = -3$, $dp_{24} = 1$, $dp_{32} = 3$, $dp_{33} = -1$.

Таким образом, видим, что данный план перевозок не является оптимальным.

Таблица 4.7

Построение цикла пересчета на втором этапе.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 10	4	1 10	50
A_2	2	3 20	1 10	5	30
A_3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Переходим к новому опорному плану (табл. 4.7)

Таблица 4.7

Построение цикла пересчета на третьем этапе					
Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
Л.	1 30	2	4	1 2	50
Аг	2 0	3 20	1 10	5	30
Аз	3	2 10	4	4	10
Потребно-	3	3	1	2	90

Сравнивая разности D - а, новых потенциалов, отвечающих свободным клеткам табл. 4.7, с соответствующими числами u видим, что указанные разности потенциалов для всех свободных клеток не превосходят соответствующих чисел u . Следовательно, полученный план является оптимальным.

$$/30 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad \Gamma = \backslash 0 \quad 20 \quad 10 \quad 0.0 \quad 10 \quad 0 \quad 0$$

При данном плане стоимость перевозок

$$5 = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140.$$

Пример 7. Для строительства трех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 60 и 70 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

(179 426
3812

.Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок. Решение. Сведем исходные данные в табл. 4.8.

Таблица 4.8.

Исходные данные примера 7.

Пункты от- правления	Пункты назначения				За пасы
	В\	В	В	5	
Аi Аг Аз	\	1	9	5	12
	4 3	2 8	• 6 1	8 2	0 280
					160
Потребно-	1	2	'	7	

Как видно из табл. 4.8, запасы гравия в карьерах ($120 + Z8U + юи = 560$) больше, чем потребности в нем ($130 + 220 + 60 + 70 = 480$) на строящихся дорогах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительный пункт назначения 5з с потребностями, равными

Таблица 4.9

Опорный план задачи примера 7.

Пункты отправления	Пункты назначения					За пасы
	в	В	В	в	5	
А\	1	1	9	5	0	12
	40				80	0
Аг	4	2	6	8	0	28
	6	220				0
Аз	3	8	1	2	0	16
	30		60	70		0
Потреб-	1	2	6	7	8	56

$560 - 480 = 80$ усл. ед. Тарифы перевозки единицы гравия из всех карьеров в пункт 5з полагаем равными нулю. В результате получаем закрытую модель транспортной задачи, план перевозок которой определяем методом минимального элемента (табл. 4.9).

Оптимальный план найдем методом потенциалов (табл. 4.10).

Таблица 4.10

Оптимальный план задачи примера 7.

	Пункты назначения	
--	-------------------	--

Пункты	В	В	В	#	В	За
A\	1	1	9	5	0	12
	120				0	
A 2	4	1	6	8	0	28
		220			60	0
Aз	1	8	1	2	0	16
	0		60	7	20	0
Потреб-	1	2	6	7	8	56

Как видно из табл. 4.10, задача имеет оптимальный план:

(120 000' X*= 0 220 0 0 V10 0 60 70)

При этом плане остается неиспользованным 60 усл. ед. гравия во втором карьере и 20 усл. ед. в третьем карьере, а общая стоимость перевозок составляет $S = 1 \cdot 120 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 = 790$.

4.3 Метод дифференциальных рент

Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находился какой-нибудь ее опорный план, а затем он последовательно улучшался, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое условно-оптимальное распределение) и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок. Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа выделяют (например, заключают в скобки), а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям

исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки,

Определение 4.4. Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых распределены полностью, а потребности пунктов назначений, связанных с данными поставщиками запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Иногда их называют отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, считаются избыточными. Иногда их называют положительными.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между выделенным числом и

ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке...Если выделенное число находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется промежуточной рентой. После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем.

Выбирают некоторый столбец, в котором имеется одна выделенная клетка. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец.

После этого берут некоторую строку, в которой имеется одна выделенная клетка. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку.

Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все выделенные клетки. Если к тому же удастся распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут

возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием компьютеров применяется

метод дифференциальных рент.

Пример 8. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 4.11, найти оптимальный план методом дифференциальных рент.

Таблица 4.11

Исходные данные к примеру 8.

Пункты от- правления	Пункты назначения					Запасы
	$B \setminus$	B_2	B_3	B_4	B_5	
$A \setminus$	$I \setminus$	12	4	8	5	180
A_2	6	8	6	5	3	350
A_3		13	8	7	4	20
Потребности	ПО	90	120	80	150	550

Решение. Переидем от табл. 4.11 к табл. 4.12, добавив один дополнительный столбец для указания избытка и недостатка по строкам и одну строку для записи соответствующих разностей.

Таблица 4.12

Первый условно-оптимальный план примера 8.

Пункты от-	Пункты назначения					Запасы	Недостаток [^]) избыток(+)
	$B,$	B_2	B_3	B^*	B_5		
$A^$	7	12	(4) 120	8	5	180	+ 60
A_2	(1) 110	(8) 90	6	(5) 80	(3) 70	350	-80
A_3	6	13	8	7	4	20	+ 2.0
Потребно-	100	90	120	80	150	550	
Разность	5	4		2	1		

В каждом из столбцов табл. 4.12 находим минимальные тарифы и выделяем их скобками. Заполняем клетки, в которых стоят указанные

числа. Для этого в каждую из клеток записываем максимально допустимый объем перевозок. Например, в клетку, находящуюся на пересечении строки $A \setminus$ и столбца B_1 , записываем число 120. В эту клетку нельзя поместить большее число, поскольку в таком случае были бы превышены потребности пункта назначения B_1 .

В результате заполнения отмеченных выше клеток получен так называемый условно оптимальный план, согласно которому полностью удовлетворяются потребности пунктов назначения $B \setminus$, B_1 , B_2 и B_4 и частично - пункта назначения B_5 . При этом полностью распределены запасы пункта отправления A_2 , частично - пункта отправления $A \setminus$ и остались совсем нераспределенными запасы пункта отправления A_3 .

После получения условно оптимального плана определяем избыточные и недостаточные строки. Здесь недостаточной является строка $A_г$, так как запасы пункта отправления $A_г$ полностью использованы, а потребности пункта назначения $B_с$ удовлетворены частично. Величина недостатка равна 80 ед.

Строки $A\backslash$ и $A_г$ являются избыточными, поскольку запасы пунктов отправления $A\backslash$ и $A_г$, распределены не полностью. При этом величина избытка строки $A\backslash$ равна 60 ед., а строки $A_г$ - 20 ед. Общая величина избытка $60 + 20 = 80$ совпадает с общей величиной недостатка, равной 80.

После определения избыточных и недостаточных строк по каждому из столбцов находим разности между минимальными тарифами, записанными в избыточных строках, и тарифами, стоящими в заполненных клетках. В данном случае эти разности соответственно равны 5, 4, 2, 1 (табл. 4.12). Для столбца B_- , разность не определена, так как число, записанное в выделенной клетке в данном столбце, находится в положительной строке. В столбце $B\backslash$ число, стоящее в скобках, равно 1, а в избыточных строках в клетках данного столбца наименьшим является число 6. Следовательно, разность для данного столбца равна $6-1=5$. Аналогично находим разности для других столбцов: для $B_г$ $12 - 8 = 4$; для $B^* 1 - 5 - 2$; для $B_с$ $4 - 3 = 1$.

Выбираем наименьшую из найденных разностей, которая является промежуточной рентой. В данном случае промежуточная рента равна 1 и находится в столбце $B_с$. Найдя промежуточную ренту, переходим к табл. 4.13.

В этой таблице в строках A_i и $A_з$ (которые были избыточными в табл. 4.12) переписываем соответствующие тарифы из строк $A\backslash$ и $A\backslash$ табл. 4.12. Элементы строки $A_г$ (которая была недостаточной) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строке $A_г$ табл. 4.13, промежуточной ренты, т. е. 1.

Таблица 4. 13 Второй условно-оптимальный план примера 8.

Пункты	Пункты назначения					Запасы	Недостаток(-) избыток(+)
	$A\backslash$	B_2	B_3	#4	$B_с$		
$A\backslash$	1	12	(4) 120	8	5	180	+ 60
$A_г$	(2) ПО	(9) 90	7	(6) 80	(4) 70	350	-60
$A_с$	6	13	8	7	(4) 20	20	-0

Потребно-	110	L 90	120	80	150	550	
Разность	5	3	-	2	1		

В табл. 4.13 число заполняемых клеток возросло на одну. Это обусловлено тем, что число минимальных тарифов, стоящих в каждом из столбцов данной таблицы, возросло на единицу, а именно в столбце #5 теперь имеются два минимальных элемента 4. Эти числа заключаем в скобки; клетки, в которых они стоят, следует заполнить. Необходимо заполнить и клетки, в которых стоят наименьшие для других столбцов тарифы. Это клетки табл. 4.13, в которых соответствующие тарифы заключены в скобки. После того как указанные клетки определены, устанавливаем последовательность их заполнения. Для этого находим столбцы, в которых имеется лишь одна клетка для заполнения. В данном случае заполнение клеток проводим в такой последовательности. Сначала заполняем клетки $A \setminus B_3$, $Ag \setminus B$, AgB_7 , AgB^* , так как они являются единственными клетками для заполнения в столбцах $B \setminus B_7$, $B?$, и B_7 . После заполнения указанных клеток заполняем клетку A_3B_3 , поскольку она является единственной для заполнения в строке A_3 . Заполнив эту клетку табл. 4.13, исключаем из рассмотрения строку A_3 . Тогда в столбце B_3 остается лишь одна клетка для заполнения. Это клетка A_iB_3 , которую заполняем. После заполнения клеток устанавливаем избыточные и недостаточные строки. Как видно из табл. 4.13, еще-имеется нераспределенный остаток. Следовательно, получен условно оптимальный план задачи и нужно перейти к новой таблице. Для этого по каждому из столбцов находим разности между выделенным числом данного столбца, и наименьшим по отношению к нему тарифом, находящимся в избыточных строках. Среди этих разностей наименьшая равна 1 и находится в столбце B_3 . Это и есть промежуточная рента. Переходим к новой табл. 4.14.

В новой таблице элементы строк Ag и A_3 получены в результате прибавления к соответствующим тарифам строк A_i и A_3 (бывших недостаточными в табл. 4.13) промежуточной ренты, т. е. 1.

Таблица 4. Оптимальный план примера 8.

Пункты от-	Пункты назначения					Запасы	Недостаток(-)
	S_i	B_2	B_3	#4	B_5		
$A \setminus$	7	12	4 120	8	60	180	0
A_2	3 ПО	10 90	8	7 80	5 70	350	0

1
4

A_i	7	14	9	8	5 20	20	0
Потребно-	ПО	90	120	80	150	550	

В результате в табл. 4.14 число клеток для заполнения возросло еще на одну и стало равным 7. Определяем выделенные клетки и заполняем их. Сначала заполняем клетки A_1B_3 , A_1B_4 , A_1B_5 , A_1B_6 , а затем A_3B_5 , A_1B_5 , A_1B_6 . В результате все имеющиеся запасы поставщиков распределяются в соответствии с фактическими потребностями пунктов назначения. Число заполненных клеток равно 7, и все они имеют наименьший показатель c_{ij} . Следовательно, получен оптимальный план исходной транспортной задачи: $O \ 0 \ 120 \ 0 \ 60]$

$X — \quad \quad \quad 110 \ 90 \quad 0 \quad 80 \ 70$

$O \quad O \quad O \quad O \quad 20)$ При этом плане перевозок общие затраты таковы: $S = 4 \cdot 120 + 5 \cdot 60 + 1 \cdot 110 + 8 \cdot 90 + 5 \cdot 80 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 20 = 2300$.

4.4 Решение транспортных задач с ограничениями

При решении конкретных транспортных задач бывает необходимо учитывать дополнительные ограничения. Большинство таких усложнений можно отнести к одной из следующих групп:

1. Для определенных условий перевозки груза из некоторого пункта отправления A_i в пункт назначения B_j , не могут быть выполнены. Для определения оптимального плана такой задачи следует предположить, что тариф перевозки c_{ij} является бесконечно большой величиной. Такой прием называют запрещением перевозок или блокированием соответствующего объема перевозок. Далее порядок определения оптимального плана такой же, что и у классических транспортных задач.

2. По определенным маршрутам нужно перевезти строго определенное количество груза d_{ij} (долги, дополнительные поставки и пр.). В этом случае следует уменьшить объемы поставок потребителю B_j , на величину d_{ij} и объем запасов поставщика A_i , на ту же величину d_{ij} , а тариф перевозок c_{ij} , при дальнейшем решении задачи принять бесконечно большим. После решения скорректированной задачи ее ответ следует дополнить исключенной величиной d_{ij} .

3. Если по маршруту из пункта A_i , в пункт B_j , должно быть завезено не менее заданного количества груза d_{ij} , то для приведения такой задачи к стандартному виду следует уменьшить запасы пункта A_i и потребности пункта B_j , на величину d_{ij} , и решать задачу как обычно.

4. При условии, что из пункта отправления A_i , в пункт назначения B_j перевозится не более, чем d_{ij} единиц груза, задачу проще решить если ввести фиктивного потребителя $B_j^{(2)}$ с такими же тарифами, что и у потреби-

теля B_j , за исключением строки i , в этой строке тариф следует считать бесконечно большим. При этом потребности B_j , равны d_{ij} , а дополнительный потребитель должен получить $b_j - d_{ij}$ единиц груза.

Все задачи, сведенные таким образом к классическому виду, имеют оптимальное решение только в том случае, если может быть получено оптимальное решение преобразованной задачи.

Пример 9. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 4.19.

Таблица 4.19

Исходные данные к примеру 9

Пункты от- правления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	9	4	280
A_2	6	3	4	3	220
A_3	8	5	1	2	160
Потребности	160	160	170	170	660

При решении учесть следующие условия: 1) перевозки от поставщика A_2 к потребителям B_1 и B_3 не могут быть осуществлены; 2) от поставщика A_1 к потребителю B_1 должно быть завезено ровно 30 т груза; 3) от поставщика A_3 к потребителю B_2 должно быть завезено не менее 20 т, а потребителю B_3 не более 50 т.

Решение.

1. Проверим сбалансированность задачи. Суммарные потребности составляют $160 + 160 + 170 + 170 = 660$ т. Суммарные запасы равны $280 + 220 + 160 = 660$. Т.е. задача сбалансирована.

2. В соответствии с ограничением 1, которое относится к ограничениям первой группы, положим тарифы c_{21} и c_{23} равными М- бесконечно большой величине.

3. Чтобы учесть условие 2, которое относится к ограничениям второй группы, скорректируем величины a_1 (280 т) и b_1 (160 т), уменьшив их на 30 т и сделаем тариф c_{11} равным М. Теперь $a_1 = 250$ т, $b_1 = 130$ т.

4. Уменьшим запасы a_3 (160 т) и потребности b_2 на величину 20 т, чтобы учесть первую часть ограничения 3.

5. Потребности пункта назначения B_3 разделим на две части, т.е. оставим потребителя B_3 с объемом потребления 50 т и заданными тарифами (и тарифами скорректированными в п.1) и введем дополнительно фиктивного потребителя $B_3^{(2)}$ с объемом потребления $b_3^{(2)} = 170 - 50 = 120$ т и тарифами $c_{13}^{(2)} = c_{13} = 1$, $c_{23}^{(2)} = c_{23} = М$ (см. пункт 1) и $c_{33}^{(2)} = М$ (тогда как $c_{33} = 1$).

Таким образом, получим классическую сбалансированную транспортную задачу, приведенную в табл. 4.20.

Таблица 4.20

Скорректированные данные примера 9.

Пункты от- правления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	$B_3^{(2)}$	B_4	
A_1	М	3	9	9	4	280-30=250
A_2	М	3	М	М	3	220
A_3	8	5	1	М	2	160-20=140
Потребности	160-30 130	160-20 140	- 50	170-50 120	170 170	660

5. Решим ее методом дифференциальных рент. Этапы решения задачи приведены в табл. 4.21-4.23.

Таблица 4.21

Первый этап решения при-						а9.	
Пункты от- правления	Пункты назначения					Запасы	Недост. (-) избыток(+)
	B_1	B_2	B_3	$Y_3<^2>$	s_4		
A_1	M	(3) 0	9	(9) 120	4	250	+
A_2	M	(3) 140	M	M	3	220	+
A_3	(8) 130	5	(1) 10	M	(2) 0	140	-
Потребно-	130	140	50	120	170	660	
Разность	M	-	8	-	1		

Таблица 4.18 й этап оешения примера 9._

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы	Недост. (-) избы-
	Y_1	B_2	B_3	$Y_3 <^2 >$	B^*		
A_1	М	(3) 130	9	(9) 120	4	250	+
A_2	М	(3) 10	М	М	(3) 170	220	+
A_3	(9) 130	6	(2) 10	М+ \	(3) 0	140	-
Потребности	130	140	50	120	170	660	
Разность	М	-	7	-	-	•	

Таблица 4. 1 < Третий этап решения примера 9.

Пункты от- правления	Пункты назначения					Запасы	Недост. (-) избыток(+)
	B_1	B_2	B_3	$B_3 \&$	B^*		

A_1	M	(3) 90	(9) 40	(9) 120	4	250	0
A_2	M	(3) 50	M	M	(3) 170	220	0
A_3	(16)	13	(9) 10	A_1+8	10	140	0
Потребно-	130	140	50	120	170	660	

План перевозок оптимальный.

6. Дополним полученный оптимальный план скорректированной задачи введенными уменьшениями перевозок (см. п. 2-3) и объединим столбцы потребителя B_7 и $53^{(2)}$. Окончательно оптимальный план примет вид, представленный в табл. 4.20.

Таблица 4.20

Оптимальный план примера 9.

Пункты от- правления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_7	54	
A_1	2 30	5 90	9 160	4	280
A_2	6	3 50	4	3 170	220
A_3	8	5 20	1 10	2	160
Потребности	160	160	170	170	660

При этом плане перевозок общие затраты составят: $S = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 90 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 9 \cdot 160 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 170 = 2300$.

Пример 10. Производственные мощности каждого из четырех заводов объединения позволяют в установленные сроки выполнять только один из четырех заказов, имеющихся в портфеле заказов объединения. Данные о затратах на выполнение заказов (в млн. руб.) приведены в табл. 4.21.

Построить модель и найти оптимальный вариант распределения заказов с минимальными затратами объединения на его выполнение, если известно, что завод 3 не может выполнить 3 заказ, а завод 2 не может выполнить 4 заказ.

Таблица 4.21

Исходные данные к примеру 10.

Номер	Номер завода			
	1	2	3	4

1	15	17	16	15
2	13	11	12	16
3	9	5	8	7
4	13	16	15	14

Решение.

1. В соответствии с ограничением 1 обозначим затраты на выполнение заказов сзз и π равными M - бесконечно большой величине.

Таким образом, получим классическую сбалансированную транспортную задачу, приведенную в табл. 4.22.

Таблица 4.22

Ско		эректированные данные примера 10.				
Номер	Номер завода				Запасы	
	1	2	3	4		
1	15	17	16	15	1	
2	13	11		16	1	
3	9	5		12	7-	1
4	13	M		M	14	1
Потребности	1	1	1	1	4	

2. Решим ее методом дифференциальных рент. Этапы решения задачи приведены в табл. 4.23 - 4.28.

Таблица 4.2.1

Первый этап решения примера 9.

Номер заказа	Номер завода				Запасы	Недост. (••) избыток(+)
	1	2	3	4		
1	15	17	16	15	1	+
2	13	11	(12) 1	16	1	-
3	(9) 1	(5) 0	M	(7) 0	1	-
4	13	M	15	14	1	+
Потребности	1	1	1	1	4	
Разность	4	12	•5	7	!	

Таблица 4. 24 1 —

Второй этап решения примера 1[^]

Номер заказа	Номер завода				Запасы	Недост. избыток(+)
	1	2	5	4		
1	15	17	16	15	1	+
2	16	14	(15) 1	19	1	+

3	04 111	(8) 0	M	(Ю) 0	1	
4	13	M	(15) 0	14	1	+
^потребно- сти раз-	1 =	16	1 -	1 4	4	
1 --- Третий этап РРШРНИА пгт <u>мера 10</u> Таблица 4.25						

Номер заказа	Номер завела				Запасы	Недост. <u>Избыток(4)</u>
	1	2	3	1 4		
1	15	17	16	15	1	+
2	16	14	(15) 1	19	1	
3	(И) 0	(9) 1	M	00 0	1	
4	(13) 1 1	M	(15) 0	14	1	
11Требно-	1	1	1	1	4	
Разность	2	8	1	4		

г ----- Четвертый этап решения q					Таблица 4.26 примера 10.	
Номер заказа	Номер завода				Запасы	Недост.
	1	2	3	4		
1	15	17	(16)	15	1	+
2	17	15	(16)	20	1	+
3	(14) 0	(Ю) 1	M	(12) 0	1	
4	(14) 1	M	(16)	15	1	+
Потребно-	1	1	1	1	4	
Избыток	-	5		3		

Таблица Пятый этап решения примера 9.

4.2
7

Номер заказа	Номер завода				Запасы	Недост. (-) избыток(+)
	1	2	3	4		
1	15	17	(1)	(15)	1	

2	17	15	(16)	20	1	
3	17	(13) 1	<i>M</i>	(15) 0	1	
4	(14) 1	<i>M</i>	(16)	(15)	1	
Потребности	1	1	1	1	4	

При заполнении табл. 4,27 возникли сложности, связанные с тем, что в первой и четвертой строках остались по две выделенных незаполненных клетки, которые нельзя заполнить по изложенным выше правилам. В этом случае необходимо в первую очередь заполнить клетку, имеющую минимальные исходные затраты среди этих незаполненных клеток; то есть клетку 4.4. Дальнейшее заполнение выполняется по правилам.

Таблица 4.28

Последний этап решения примера 9,

Номер заказа	Номер завода				Запасы	Недост. (-) избыток(+)
	1	2	3	4		
1	15	17	(16) 1	(15) 1	1	0
2	17	15	(16) 1	20	1	0
3	17	(13) 1	<i>M</i>	(15) 0	1	0
4	(14) 1	<i>M</i>	(16) 0	(15) 0	1	0
Потребности	1	1	1	1	4	

При этом варианте распределения заказов затраты составят: $S = 15 + 12 + 5 + 13 = 45$ млн. руб.

4.5 Задачи для самоконтроля

1. Методом потенциалов и методом дифференциальных рент найдите оптимальные планы транспортных задач 3.1 - 3.3.

2. Используя рассмотренные выше методы, найдите оптимальные планы транспортных задач 4.1 - 4.5.

Задача 4.1

Таблица 4.33

Таблица исходных данных задачи 4.1

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	

A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности	80	80	60	80	

Задача 4.2

Таблица 4.34

Таблица исходных данных задачи 4.2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

Задача 4.3

Таблица 4.35

Таблица исходных данных задачи 4.3

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Потребности	45	45	100	160	

Задача 4.4

Для строительства трех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 100, 150 и 50 усл. ед. кирпича соответственно. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60 и 85 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Задача 4.5

На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы пере-

возок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Библиографический список

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. - М.: Сов. Радио, 1964. - 736 с.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд. "ДИС", 1998. - 368 с.
3. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Об одном классе задач планирования народного хозяйства. //Проблемы кибернетики 1961, вып. 5, С. 165-182.
4. Каплан А.Б. Перспективы применения математических методов для комплексного регулирования вагонного парка железных дорог. Т. V Планирование и эксплуатация на транспорте.// Труды научного совещания по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании.- М.: Изд. АН СССР, 1961.С.77-83.
5. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. - М.: Сов. Радио, 1967. - 208 с.
6. Берж С. Теория графов и ее применения. - М.: Изд. Ин. лит ры, 1962.-320 с.
7. Рейнфельд Н.В., Фогель У.Р. Математическое программирование. - М.: Изд. иностранной литературы, 1960. - 463 с.
8. Савин В.И. Опыт применения математических методов и ЭВМ в эксплуатационных расчетах на речном транспорте.// Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. - Новосибирск: АН СССР, Сибирское отд., 1962. С. 137 -154.
9. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. - Новосибирск: Наука, 1977. - 320 с.
10. Ю.Ашманов А.С. Введение в математическую экономику - М.: Наука, 1969.-192 с.
11. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 1986. - 319 с.
12. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. Л.: Изд. Ленинградского университета, 1976. - 240 с.

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	4
1.1 КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА.....	4
1.2 ЗАДАЧА ПЕРЕВОЗКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДМЕТОВ.....	6
1.3 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ.....	9
1.4 СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.....	11
1.5 ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ТРАНСПОРТНОЙ.....	12
1.6 РАСШИРЕННАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА.....	13
2 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ.....	20
3 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПОРНОГО ПЛАНА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.....	21
3.1 МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА.....	21
3.2 МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА.....	24
3.3 МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ФОГЕЛЯ.....	28
3.4 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	30
4 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.....	31
4.1 РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД.....	31
4.2 МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ.....	37
4.3 МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕНТ.....	44
4.4 РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ.....	49
4.5 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	55
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	57