Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева

Новомосковский институт (филиал)

Контрольная работа № 4 по математике

**Методические указания
для студентов-заочников**

Новомосковск
2013

УДК 517
ББК 22.161
К 651

Рецензенты:
доцент кафедры «Высшая математика» НИ РХТУ
им. Д.И. Менделеева к.т.н. В.Ф. Исаков
доцент кафедры АПП НИ РХТУ им. Д.И. Менделеева
к.т.н. А.Г. Лопатин

Составители: В.А. Матвеев, В.М. Ульянов
Контрольная работа № 4 по математике. Методические указания для студентов-заочников / ФГБОУ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост.: В.А. Матвеев, В.М. Ульянов, 2013. – 24 с.

Кратко рассмотрены основные теоретические положения и примеры типовых заданий по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Приводятся задачи для самостоятельного решения.

Предназначена для студентов заочного отделения всех специальностей, а также может быть полезна студентам дневного отделения

Табл. 1. Литерат.: 3 назв.

УДК 517
ББК 22.161

Оглавление

§ 1. Дифференциальные уравнения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные y', y'',…,$y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0, \quad \text{или} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{1}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения на некотором промежутке называется всякая функция $y = f(x)$, которая имеет на этом промежутке необходимое количество производных и, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество, верное на всём данном промежутке.

Например, дифференциальное уравнение $xy' - 2y = 0$ имеет решение $y = x^2$, так как если $y = x^2$, то $y' = 2x$, и тогда $x \cdot 2x - 2x^2 \equiv 0$.

Решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением $\Phi(x,y)=0$, называется *интегралом* этого уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x,y,y')=0. \tag{2}$$

Если уравнение разрешить относительно производной, то оно примет вид

$$y'=f(x,y). \tag{3}$$

Такое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешённым относительно производной.*

Теорема Коши. *Если функция $f(x,y)$ и её частная производная $f'_y(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то какова бы ни была внутреняя точка (x_0,y_0) области D, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее условиям $y=y_0$ при $x=x_0$.*

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0,y_0) области D проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что во всей области D уравнение $y'=f(x,y)$ имеет бесконечное множество решений.

Условия $y=y_0$ при $x=x_0$, в силу которого решение $y=\varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называют начальными условиями и записывают обычно так:

$$y|_{x=x_0}=y_0, \qquad \text{или} \qquad y(x_0)=y_0. \tag{4}$$

Отыскание решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0,y_0) плоскости Oxy.

Общим решением уравнения $y'=f(x,y)$ в некоторой области D называется функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C, если она является решением уравнения при любом значении постоянной C и, если при любых начальных условиях $y|_{x=x_0}=y_0$ таких, что $(x_0,y_0)\in D$ существует значение постоянной $C=C_0$ такое, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Частным решением уравнения $y'=f(x,y)$ в области D называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при определённом значении $C=C_0$.

В процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения нередко приходим к соотношению вида $\Phi(x,y,C)=0$, не разрешённому относительно y. В таких случаях общее решение оставляется в неявном виде.

§ 3. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

1. **Уравнения с разделяющимися переменными.**

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{или} \quad f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0. \tag{5}$$

Пример 1. Решить уравнение $x(1-y^2)dx - y(1-x^2)dy = 0$.

Деля почленно на $(1-x^2)\cdot(1-y^2)$, получим

$$\frac{x\,dx}{1-x^2} - \frac{y\,dy}{1-y^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{y\,dy}{1-y^2} = \frac{x\,dx}{1-x^2}.$$

Заметим, что в левой части равенства имеется только функция от y с соответствующим дифференциалом dy, а справа — от x с дифференциалом dx. Вот такое „растаскивание“ переменных и называется их разделением, чем и обусловлено название данного типа уравнений. А дальше интегрируем обе части:

$$\int \frac{y\,dy}{1-y^2} = \int \frac{x\,dx}{1-x^2} \Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln|1-y^2| = \ln|1-x^2| - 2C.$$

Обозначив $-2C$ через $\ln|C_1|$, $C_1 \neq 0$, получаем, что

$$\ln|1-y^2| = \ln|C_1(1-x^2)|, \text{ или } 1-y^2 = C_1(1-x^2).$$

Это и есть общее решение.

Обратим внимание на то, что при делении на произведение $(1-x^2)(1-y^2)$ мы можем потерять решения, обращающие в нуль это произведение, то есть, $y = \pm 1$ и $x = \pm 1$. Непосредственной подстановкой в уравнение $y = \pm 1$, $dy = 0$ или $x = \pm 1$, $dx = 0$ убеждаемся, что эти функции являются решениями нашего исходного уравнения; $y = \pm 1$ можно получить из общего решения, полагая формально, что $C_1 = 0$.

Ответ: $1-y^2 = C_1(1-x^2)$, $x = \pm 1$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x^2+4)y' - 2xy = 0$, удовлетворяющего начальному условияю $y(1) = 5$.

Сначала найдём общее решение данного уравнения.

$$(x^2+4)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \Longrightarrow (x^2+4)dy = 2xydx \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+4} \Longrightarrow \ln|y| = \ln(x^2+4) + \ln|C|,\ C \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = C(x^2+4),\ C \neq 0$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на $y(x^2+4)$. Это выражение обращается в 0 при $y = 0$. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения, не входящим в общее решение (из-за условия $C \neq 0$). Но его можно получить из общего решения, если формально подставить в него $C = 0$, так что условие $C \neq 0$ в общем решении в действительности не нужно.

Найдём частное решение. Для этого в общее решение вместо x подставим 1, а вместо y — число 5. Тогда $5 = C(1^2 + 4) \Longrightarrow C = 1$. Получаем искомое частное решение $y = x^2 + 4$.

Ответ: $y = x^2 + 4$.

2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией k-го измерения* (или *порядка*) относительно переменных x и y, если при любом $\lambda \neq 0$ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \tag{6}$$

(если это верно только при $\lambda > 0$, то функция называется *положительно однородной*).

Например, функция $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ — однородная функция второго порядка, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y + 3(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + 2xy + 3y^2) = \lambda^2 f(x, y),\ k = 2.$$

Уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{7}$$

называется *однородным относительно x и y*, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{8}$$

называется *однородным относительно x и y*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные одинакового измерения.

Аналогично определяются *положительно однородные* уравнения. Положительно однородные уравнения решаются так же, как однородные, но нужно отдельно рассматривать случаи $x > 0$ и $x < 0$.

Уравнение (8) может иметь решение $x = 0$ (проверяется подстановкой $x = 0$ и $dx = 0$ в уравнение; уравнение (7) не может иметь решений вида $x = \mathrm{Const}$, так как нельзя определить производную по постоянной величине).

Однородное (и положительно однородное) уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными, если ввести новую неизвестную функцию z подстановкой

$$y = xz, \qquad y' = xz' + z, \qquad dy = x\,dz + z\,dx. \tag{9}$$

Пример 3. Решить задачу Коши: $(x + y)dx + xdy = 0$, $y|_{x=1} = -3$.

В этом уравнении функции $M(x, y) = x + y$ и $N(x, y) = x$ являются однородными функциями одинакового (первого) измерения: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda M(x, y)$ и $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x, y)$. Поэтому заданное уравнение — однородное.

Найдём общее решение. Подставляя выражения (9) в заданное уравнение, получим

$$(x+xz)dx + x(x\,dz + z\,dx) = 0 \Longrightarrow x\,dx + xz\,dx + x^2dz + xz\,dx = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^2dz = -2xz\,dx - x\,dx \Longrightarrow x^2dz = -2x\left(z+\frac{1}{2}\right)dx.$$

Получилось уравнение с разделяющимися пременными. Разделив его на $x^2\left(z+\frac{1}{2}\right)$, получим

$$\frac{dz}{z+\frac{1}{2}} = -2\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int\frac{dz}{z+\frac{1}{2}} = -2\int\frac{dx}{x} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \ln\left|z+\frac{1}{2}\right| = -2\ln|x| + \ln|C|,\ C\neq 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z+\frac{1}{2} = \frac{C}{x^2},\ C\neq 0 \Longrightarrow z = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{2},\ C\neq 0.$$

При делении на $x^2\left(z+\frac{1}{2}\right)$ мы могли потерять решения $z+\frac{1}{2}=0$, то есть, $z=-\frac{1}{2}$, и $x=0$. Подстановкой $x=0$, $dx=0$ или $z=-\frac{1}{2}$, $dz=0$ в уравнение $x^2dz = -2x\left(z+\frac{1}{2}\right)dx$ убеждаемся, что обе функции являются решениями. Решение $z=-\frac{1}{2}$ получается из общего решения при $C=0$.

Используя первое из соотношений (9), получим общее решение заданного уравнения в виде $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$. Так как заданное уравнение имеет вид (8), оно может иметь решение $x=0$. Подставляя в это уравнение $x=0$, $dx=0$, видим, что это действительно решение (однако оно не удовлетворяет заданному начальному условию $x=1$).

Найдём частное решение, используя заданное начальное условие $y|_{x=1}=-3$. Подставляя в общее решение $x=1$, $y=-3$, получим $-3=\frac{C}{1}-\frac{1}{2}$, откуда $C=-\frac{5}{2}$. Поэтому искомое частное решение есть $y=-\frac{5}{x}-\frac{x}{2}=-\frac{5+x^2}{2x}$.

Ответ: $y=-\frac{5+x^2}{2x}$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $2xyy'+x^2-3y^2=0$, удовлетворяющее условию $y(2)=1$.

Решим уравнение относительно y':

$$y' = \frac{3y^2-x^2}{2xy}.$$

Проверим его на однородность: $f(x,y)=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$, поэтому

$$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{3(\lambda y)^2-(\lambda x)^2}{2\cdot\lambda x\cdot\lambda y} = \frac{\lambda^2(3y^2-x^2)}{2\lambda^2 xy} = \frac{3y^2-x^2}{2xy} = f(x,y),$$

то есть, функция $f(x,y)$ является однородной нулевого измерения. Следовательно, заданное уравнение — однородное.

Подставляем в уравнение выражения (9). Получаем

$$z'x+z=\frac{3x^2z^2-x^2}{2x\cdot xz}\Longrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{3z^2-1}{2z}-z\Longrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-1}{2z}\Longrightarrow\frac{2z\,dz}{z^2-1}=\frac{dx}{x}.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Интегрируем:

$$\int\frac{2z\,dz}{z^2-1}=\int\frac{dx}{x}\Longrightarrow\ln|z^2-1|=\ln|x|+\ln|C|,\ C\neq0\Longrightarrow z^2-1=Cx,\ C\neq0.$$

При разделении переменных пришлось делить на $x(z^2-1)$, поэтому могли потеряться решения $z^2-1=0$, то есть, $z=\pm1$, и $x=0$. Вторая функция не является решением уравнения, так как в нём x является независимой переменной и не может быть постоянной, а $z=\pm1$ являются решениями и получаются из общего решения при $C=0$.

Из первого равенства (9) находим $z=\frac{y}{x}$. Подставляя это в общее решение, получим $\frac{y^2}{x^2}-1=Cx$. Выражая отсюда y, найдём общее решение в виде $y=\pm x\sqrt{1+Cx}$.

Чтобы найти частное решение, подставляем в общее решение начальные значения $x=2$, $y=1$: $1=\pm2\sqrt{1+2C}$. Отсюда видим, что перед корнем надо взять знак „+“, и что $C=-\frac{3}{8}$. Поэтому искомое частное решение есть $y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$.

Ответ: $y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$.

Замечание. В последнем примере найденное частное решение является единственным только при $0\leqslant x<\frac{8}{3}$. В область $x<0$ его можно продолжить любым решением вида $y=x\sqrt{1+Cx}$ (на всю полуось $x<0$ при $C\leqslant0$, или на интервал $-\frac{1}{C}<x<0$ при $C>0$).

3. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x),\tag{10}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции, называется *линейным.*

Если функция $q(x)\equiv0$, то уравнение принимает вид

$$y'+p(x)y=0\tag{11}$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Общее решение уравнения (10) можно сразу найти по формуле

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\tag{12}$$

(здесь под $\int p(x)dx$ подразумевается любая первообразная функции $p(x)$, одна и та же в обоих случаях).

Если имеются начальные условия $y(x_0) = y_0$, то решение задачи Коши будет иметь вид

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(\tau) e^{\int\limits_{x_0}^{\tau} p(t)dt} d\tau + y_0 \right). \tag{13}$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $xy' + 2y = x^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде $y' + \frac{2}{x}y = x$. Это линейное уравнение (определяем просто визуально) с $p(x) = \frac{2}{x}$ и $q(x) = x$. По формуле (12) получаем

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx} \left(\int x e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + C \right) = e^{-2\ln|x|} \left(\int x e^{2\ln|x|} dx + C \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\int x^3 dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^4}{4} + C \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Ответ: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$.

Пример 6. Решить задачу Коши: $y' = 2y + e^x - x$, $y(0) = \frac{1}{4}$.

Перепишем уравнение в виде $y' - 2y = e^x + x$. Оно является линейным с $p(x) = -2$ и $q(x) = e^x + x$. По формуле (13) получаем

$$y = e^{-\int\limits_0^x 2dt} \left(\int\limits_0^x (e^\tau + \tau) e^{\int\limits_0^\tau 2dt} d\tau + \frac{1}{4} \right) = e^{-2t|_0^x} \left(\int\limits_0^x (e^\tau + \tau) e^{2t|_0^\tau} d\tau + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= e^{-2x} \left(\int\limits_0^x (e^\tau + \tau) e^{2\tau} d\tau + \frac{1}{4} \right) = e^{-2x} \left(\int\limits_0^x (e^{3\tau} + e^{2\tau}\tau) d\tau + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= e^{-2x} \left(\left(\frac{e^{3\tau}}{3} + \frac{\tau e^{2\tau}}{2} - \frac{e^{2\tau}}{4} \right) \Bigg|_0^x + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= e^{-2x} \left(\frac{e^{3x}}{3} + \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2x}}{6}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{12}(4e^x + 6x - 3 + 2e^{-2x})$.

Кроме этого метода, для решения линейного дифференциального уравнения можно применить подстановку Бернулли

$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv', \tag{14}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две новые неизвестные функции. Подставляя (14) в уравнение (11), получим $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, или $(u' + p(x)u)v + uv' = q(x)$. Так как неизвестных функций две, а уравнение только одно, мы можем одну из функций задать произвольно, а другую найти из уравнения. Удобно потребовать, чтобы функция $u \not\equiv 0$ удовлетворяла условию $u' + p(x)u = 0$, тогда из уравнения получим, что $uv' = q(x)$. В результате исходное линейное дифференциальное уравнение (11) сводится к системе двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ uv' = q(x). \end{cases} \tag{15}$$

Пример 7. Решить линейное уравнение $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ методом Бернулли.
Полагаем $y = uv$ и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u' + u\operatorname{tg} x = 0, \\ uv' = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

.

Решаем первое уравнение.

$$\frac{du}{dx} = -u\operatorname{tg} x \Longrightarrow \frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x dx \Longrightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{tg} x dx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \ln|u| = \ln|\cos x| \Longrightarrow u = \cos x$$

Заметим, что в этом случае при интегрировании константу C не прибавляем, так как нам нужна только одна функция $u \not\equiv 0$.

Решаем второе уравнение.

$$uv' = \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow \cos x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow dv = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow v = \operatorname{tg} x + C$$

Итак, $y = uv = \cos x(\operatorname{tg} x + C) = \sin x + C\cos x$.

Ответ: $y = \sin x + C\cos x$.

Пример 8. Решить задачу Коши: $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = e^2$.
Подставляя $y = uv$, получим систему

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x\ln x} = 0, \\ uv' = x\ln x. \end{cases} \quad .$$

Решаем первое уравнение.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x\ln x} \Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x\ln x} \Longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x\ln x} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|\ln x| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u = \ln x$$

Решаем второе уравнение.

$$uv' = x\ln x \Longrightarrow \ln x\frac{dv}{dx} = x\ln x \Longrightarrow dv = x\,dx \Longrightarrow \int dv = \int x\,dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} + C$$

Теперь находим общее решение: $y = uv = \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, подставим в общее регшение начальные значения $x = e$, $y = e^2$:

$$e^2 = \ln e \left(\frac{e^2}{2} + C \right) \Longrightarrow C = \frac{e^2}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 + e^2) \ln x.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}(x^2 + e^2) \ln x$.

§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка (1). Будем предполагать, что это уравнение можно разрешить относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \tag{16}$$

(решений может быть больше одного, тогда уравнение (1) распадается на несколько уравнений вида (16)).

Задача Коши для уравнения (16) ставится следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ y''|_{x=x_0} = y_0'', \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{17}$$

где x_0, y_0, y_0', y_0'',…, $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такая, что, во-первых, удовлетворяет уравнению при любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и, во-вторых, при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ будет удовлетворять данным условиям.

Соотношение вида $\Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется общим интегралом.

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется частным решением.

§ 5. Простейшие дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1. **Дифференциальные уравнения вида** $y^{(n)} = f(x)$.

Последовательно интегрируя, получим

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$,

$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx\right) dx + C_1 x + C_2$,

$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)dx\right) dx\right) dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$,

$\vdots$

$y = \underbrace{\int \left(\ldots \left(\int \left(\int \left(\int f(x)dx\right) dx\right) dx\right) \ldots\right) dx}_{n \text{ интегралов}} + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{C_3}{(n-3)!}x^{n-3} +$
$+ \ldots + C_n.$

Пример 9. Решить уравнение $y'' = \sin 2x$.

Дважды интегрируем:
$y' = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1,$
$y = \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2.$

Ответ: $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$.

Пример 10. Решить задачу Коши: $y'' = x^2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$.

Интегрируем первый раз:
$y' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1.$

Подставляем начальные значения $x = 0$ и $y' = -5$:
$-5 = \frac{0^3}{3} + C_1 \Longrightarrow C_1 = -5 \Longrightarrow y' = \frac{x^3}{3} - 5.$

Интегрируем второй раз:
$y' = \int \left(\frac{x^3}{3} - 5\right) dx = \frac{x^4}{12} - 5x + C_2.$

Подставляем начальные значения $x = 0$ и $y = 4$:
$4 = \frac{0^4}{12} - 5 \cdot 0 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 4 \Longrightarrow y = \frac{x^4}{12} - 5x + 4.$

Ответ: $y = \frac{x^4}{12} - 5x + 4$.

2. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде неизвестную функцию.

Уравнение имеет вид
$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right). \tag{18}$$
Порядок такого уравнения можно понизить на единицу, приняв за новую неизвестную функцию $z = y'$. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$,..., $y^{(n)} = z^{(n-1)}$.

Пример 11. Решить уравнение $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.

Уравнение не содержит y в своей записи. Полагаем $y' = z$, тогда $y'' = z'$. Уравнение примет вид:$(1 + x^2)z' - 2xz = 0$. Получили уравнение первого порядка (в данном случае — с разделяющимися переменными). Решаем его.
$$(1 + x^2)\frac{dz}{dx} = 2xz \Longrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1 + x^2} \Longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \ln|z| = \ln(1 + x^2) + \ln|C_1| \Longrightarrow z = C_1(1 + x^2)$$
Разделяя переменные, мы делили на z, поэтому могли потерять решение $z = 0$ (проверяется подстановкой). Это решение получается из общего при $C_1 = 0$.

Теперь вспоминаем, что $z = y'$, и получаем
$$y' = C_1(1 + x^2) \Longrightarrow y = C_1 \int (1 + x^2)dx + {}_2 \Longrightarrow y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Ответ: $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Замечание. Если уравнение не содержит в явном виде не только неизвестную функцию y, но и её производные y', y'',...,$y^{(k-1)}$ порядка, меньшего k, то порядок уравнения можно понизить на k единиц, приняв в качестве новой неизвестной функции $z = y^{(k)}$.

3. **Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде независимую переменную.**

Уравнение имеет вид

$$F\big(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0. \tag{19}$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу, если в качестве новой независимой переменной принять y, а в качестве новой неизвестной функции — $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Используя формулу производной сложной функции, находим далее
$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$,
$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left(p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)$,
...

Принимая y за независимую переменную, мы теряем решения вида $y = C$, так как независимая переменная не может иметь постоянное значение. Чтобы найти эти решения, нужно подставить в уравнение (19) $y = C$, $y' = y'' = \ldots = y^{(n)} = 0$.

Пример 12. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = y^2y'$.

Это уравнение не содержит x явно. Полагаем $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2p \Longrightarrow y\frac{dp}{dy} - p = y^2 \Longrightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y$$

Получили линейное уравнение. Решаем его с помощью подстановки Бернулли (14): $p = uv$, $\frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy}$.

$$\frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy} - \frac{uv}{y} = y \Longrightarrow v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{y}\right) + u\frac{dv}{dy} = y \Longrightarrow \begin{cases} \frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0 \\ u\frac{dv}{dy} = y \end{cases}$$

.

Решаем первое уравнение:

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0 \Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|y| \Longrightarrow u = y.$$

Решаем второе уравнение:

$$u\frac{dv}{dy} = y \Longrightarrow y\frac{dv}{dy} = y \Longrightarrow dv = dy \Longrightarrow \int dv = \int dy + C_1 \Longrightarrow v = y + C_1.$$

Наконец, получаем $p = uv = y(y + C_1)$. Вспоминая, что $p = y'$, получаем уравнение $y' = y(y + C_1)$. Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y(y + C_1) \Longrightarrow \frac{dy}{y(y + C_1)} = dx \Longrightarrow \int\frac{dy}{y(y + C_1)} = \int dx + C_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y(y+C_1)} = x + C.$$

Если $C_1 = 0$, то получаем

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Longrightarrow y = -\frac{1}{x+C}.$$

Если $C_1 \neq 0$, то, умножая обе части уравнения на C_1, получим

$$\int \frac{C_1 dy}{y(y+C_1)} = C_1(x+C) \Longrightarrow \int \frac{(y+C_1)-y}{y(y+C_1)} dy = C_1(x+C) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+C_1}\right) dy = C_1(x+C) \Longrightarrow \ln|y| - \ln|y+C_1| = C_1 x + C_1 C.$$

Обозначим $\ln|C_2| = C_1 C$. Получаем общее решение:

$$\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| = C_1 x + \ln|C_2| \Longrightarrow \frac{y}{y+C_1} = C_2 e^{C_1 x} \Longrightarrow y = \frac{C_1 C_2 e^{C_1 x}}{1 - C_2 e^{C_1 x}}.$$

Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решения вида $y = C$. Подставляя $y = C$, $y' = y'' = 0$ в заданное уравнение, видим, что постоянная функция $y = C$ при любом C является решением.

Ответ: $y = \frac{C_1 C_2 e^{C_1 x}}{1 - C_2 e^{C_1 x}}$, $y = -\frac{1}{x+C}$, $y = C$.

Пример 13. Найти решение уравнения $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

Положим $y' = p(y) \Longrightarrow y'' = p'p$. Получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$yp'p = p^2 - p^3 \Longrightarrow y\frac{dp}{dy} = p(1-p) \Longrightarrow \frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow \int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln\left|\frac{p}{1-p}\right| = \ln|C_1 y| \Longrightarrow \frac{p}{1-p} = C_1 y \Longrightarrow \frac{y'}{1-y'} = C_1 y.$$

При делении на $p(1-p)$ могли потерять решения $p = 0$ и $p = 1$, что дачт $y' = 0$ и $y' = 1$. Оба этих решения не удовлетворяют начальному условию $y'(1) = -1$, поэтому их далее не рассматриваем.

Найдём значение C_1, используя начальные условие $y'(1) = -1$ и $y(1) = 1$:

$$\frac{-1}{1+1} = C_1 \cdot 1 \Longrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя в общее решение $C_1 = -\frac{1}{2}$ и $p = y'$, получим

$$\frac{y'}{1-y'} = -\frac{1}{2}y \Longrightarrow 2y' = yy' - y \Longrightarrow (2-y)y' = -y' \Longrightarrow (y-2)\frac{dy}{dx} = y.$$

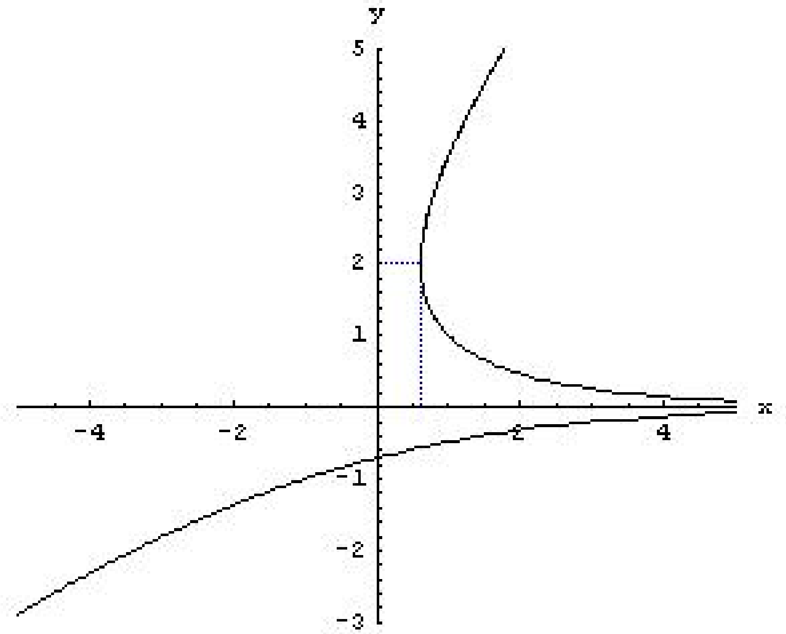
Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим

$$\frac{y-2}{y}dy = dx \Longrightarrow \int \left(1 - \frac{2}{y}\right) dy = \int dx \Longrightarrow y - 2\ln|y| = x + C_2.$$

Подставляем начальные значения $x = 1$, $y = 1$:

$$1 - 2\ln 1 = 1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow y - 2\ln|y| = x.$$

Эта формула на самом деле определяет три решения:
$y - 2\ln(-y) = x$ при $-\infty < x < +\infty$, $y < 0$;
$y - 2\ln y = x$ при $2(1-\ln 2) < x < +\infty$, $y > 2$;
$y - 2\ln y = x$ при $2(1-\ln 2) < x < +\infty$, $0 < y < 2$.
Начальным условиям удовлетворяет только третье из них.



Решения вида $y = C$ не удовлетворяют начальному условию $y'(1) = -1$.
Ответ: $x = y - 2\ln y$, $0 < y < 2$.

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. **Однородные уравнения.**

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{20}$$

где a, b, c — заданные числа, $a \neq 0$.

Квадратное уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{21}$$

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (20).

Характеристическое уравнение в области комплексных чисел всегда имеет два корня k_1 и k_2 с учётом кратности. В зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения общее решение исходного уравнения записывается в одном из следующих трёх видов:

1. $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1 и k_2 действительны и различны ($k_1 \neq k_2$);
2. $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$, если $k_1 = k_2 = k$;
3. $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Пример 14. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 15. Решить уравнение $9y'' + 42y' + 49y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $9k^2 + 42k + 49 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-\frac{7}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{7}{3}x}$.

Пример 16. Решить уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k + 1 = 0$, его корни $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Ответ: $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)$.

Пример 17. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - k - 6 = 0$, его корни $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$. Найдём производную от общего решения: $y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$. Подставляя в последние два равенства начальные условия, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2, \\ -1 = -2C_1 + 3C_2. \end{cases}.$$

Решением системы будут значения $C_1 = \frac{13}{5}$, $C_2 = \frac{7}{5}$.

Ответ: $y = \frac{13}{5} e^{-2x} + \frac{7}{5} e^{3x}$.

2. **Неоднородные уравнения.**

Неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами a, b, c, $a \neq 0$, имеет вид

$$ay'' + by' + cy = f(x); \tag{22}$$

соответствующее ему однородное уравнение имеет вид (20).

Общее решение неоднородного уравнения определяется следующей теоремой о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения: общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма любого его частного решения $\tilde{y}$ и общего решения $\bar{y}$ соответствующего ему однородного уравнения.

Таким образом, $y = \bar{y} + \tilde{y}$.

Нахождение $\bar{y}$ было рассмотрено в предыдущем пункте.

Одним из способов нахождения частного решения $\tilde{y}$ в простейших случаях является метод неопределчнных коэффициентов (Таблица1).

Таблица 1. Структура частного решения $\tilde{y}$

Правая часть дифференциального уравнения $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения $\tilde{y}$
$f(x) = P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m	а) число 0 не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени m
	б) число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, α – действительное число	а) число α не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)e^{\alpha x}$
	б) число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r Q_m(x) e^{\alpha x}$
$f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно	а) число $\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x$, где $U_l(x)$ и $V_l(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами степени $l = \max\{m, n\}$
	б) число $\pm\beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x)$
$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$	а) число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x)$, где $U_l(x)$ и $V_l(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами степени $l = \max\{m, n\}$
	б) число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + V_l(x)\sin\beta x)$

Рассмотрим примеры на применение метода неопределённых коэффициентов.

Пример 18. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 5k + 6 = 0$, его корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, тогда $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

В правой части уравнения функция имеет вид произведения многочлена первой степени на e^x. На основании таблицы 1 для $f(x) = e^{\alpha x} P_1(x)$, $\alpha = 1$, полагаем, $\tilde{y} = (Ax+B)e^x$ (случай а), так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения). Далее, $y' = Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x$, $y'' = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x$. Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5((Ax + A + B)e^x) + 6(Ax + B)e^x = 2xe^x.$$

Сокращая на e^x и приводя подобные члены, получаем равенство

$$2Ax - 3A + 2B = 2x.$$

Сравнивая коэффициенты левой и правой части последнего равенства при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -3A + 2B = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$. Следовательно, $\tilde{y} = \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$.

Пример 19. Найти общее решения уравнения $y'' - 6y' + 9y = (x^2 + 2x)e^{3x}$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 3$, поэтому $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. В правой части функция имеет вид произведения многочлена второй степени на e^{3x}. Для функции $f(x) = P_2(x)e^{\alpha x}$, $\alpha = 3$, $P_2(x) = x^2 + 2x$, на основании таблицы 1 (случай б), так как $\alpha = 3$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 2$) полагаем

$$\tilde{y} = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x}.$$

Далее находим производные:

$$\begin{gathered} y' = (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx)e^{3x} + (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) \cdot 3e^{3x} = \\ = (3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx)e^{3x}, \\ y'' = (12Ax^3 + (4A + 3B) \cdot 3x^2 + (3B + 3C) \cdot 2x + 2C)e^{3x} + \\ +(3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx) \cdot 3e^{3x} = \\ = (9Ax^4 + (24A + 9B)x^3 + (12A + 18B + 9C)x^2 + (6B + 12C)x + 2C)e^{3x}. \end{gathered}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение и приведцм подобные члены:

$$\begin{gathered} (9Ax^4 + (24A + 9B)x^3 + (12A + 18B + 9C)x^2 + (6B + 12C)x + 2C)e^{3x} - \\ -6(3Ax^4 + (4A + 3B)x^3 + (3B + 3C)x^2 + 2Cx)e^{3x} + \\ +9(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x} = (x^2 + 2x)e^{3x}, \\ (12Ax^2 + 6Bx + 2C)e^{3x} = (x^2 + 2x)e^{3x}. \end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых выражениях в левой и правой части последнего равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ 6B = 2, \\ 2C = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$. Следовательно, $\tilde{y} = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right) e^{3x}$.

Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right)e^{3x}$.

В следующих примерах показан подбор частного решения $\tilde{y}$ без нахождения коэффициентов.

Пример 20. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, поэтому общее решение однородного уравнения есть $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Для $f(x) = P_0(x)e^{4x}$, $P_0(x) = 1$, из таблицы 1 ($\alpha = 4$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = Ae^{4x}$.

Пример 21. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{-x}$.

Из предыдущего примера следует, что $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Для $f(x) = P_0(x)e^{-x}$, $P_0(x) = 3$, из таблицы 1 ($\alpha = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1) находим $\tilde{y} = Axe^{-x}$.

Пример 22. $y'' - 2y' + y = 5e^{x}$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$, тогда $\bar{y} = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$. Для $f(x) = P_0(x)e^{x}$, $P_0(x) = 5$, из таблицы 1 ($\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 2) находим $\tilde{y} = Ax^2e^{x}$.

Пример 23. $y'' - y = x^2 + 1$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, тогда $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$. Для $f(x) = P_2(x) = x^2 + 1$ из таблицы 1 ($\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$.

Пример 24. $y'' - 2y' - 3y = \sin 3x$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, тогда $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Для $f(x) = P_0(x) \cdot \cos 4x + Q_0(x)\sin 4x$, где $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, из таблицы 1 ($\beta = \pm 4$ не является корнем характеристического уравнения) находим $\tilde{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$.

Пример 25. $y'' + 4y = \sin 2x - 3\cos 2x$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$, тогда $\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Для $f(x) = P_0(x)\cos 2x + Q_0(x)\sin 2x$, где $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = -3$, из таблицы 1 ($\beta = \pm 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1) находим $\tilde{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Встречаются случаи, когда правая часть неоднородного уравнения есть сумма нескольких функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. Тогда для каждого слагаемого находится частное решение $\tilde{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n$.

Пример 26. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' = -20xe^{2x} - 4 + 16x - 25\cos 5x + 20\sin 5x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 5$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 4$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + C_2e^{4x}$.

Правая часть заданного уравнения имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x) = -20xe^{2x}$, $f_2(x) = 16x - 4$, $f_3(x) = -25cos5x + 20\sin 5x$. Соответственно, частное решение можно искать в виде $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3$.

1) $f_1(x) = -20xe^{2x} = P_1(x)e^{2x}$, где $P_1(x) = -20x$ - многочлен первой степени. Здесь $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $\tilde{y}_1 = (Ax + B)e^{2x}$. Тогда $\tilde{y}_1' = Ae^{2x} + (Ax + B) \cdot 2e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$, $\tilde{y}_1'' = 2Ae^{2x} + (2Ax + A + 2B)2e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$. Подставим в исходное уравнение и, сократив на e^{2x}, получим $4Ax+4A+4B-4(2Ax+A+2B) = -20x$, то есть, $-4Ax - 4B = -20x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-4A = -20$ и $-4B = 0$, откуда $A = 5$, $B = 0$, т.е. $\tilde{y}_1 = 5xe^{2x}$.

2) $f_2(x) = 16x - 4 = P_1(x)$ многочлен первой степени. Так как $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, находим $\tilde{y}_2 = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Тогда $\tilde{y}_2' = 2Ax + B$, $\tilde{y}_2'' = 2A$. Подставим в исходное уравнение, получим $2A - 4(2Ax + B) = 16x - 4$, то есть, $-8Ax + 2A - 4B = 16x - 4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-8A = 16$, $2A - 4B = -4$, откуда $A = -2$, $B = 0$ и $\tilde{y}_2 = -2x^2$.

3) $f_3(x) = P_0(x)\cos 5x + Q_0(x)\sin 5x$, где $P_0(x) = -25$ и $Q_0(x) = 20$ - многочлены нулевой степени. Так как $\pm 5i$ не являющепся корнем характеристического уравнения, находим $\tilde{y}_3 = A\cos 5x + B\sin 5x$. Тогда $\tilde{y}_3' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$, $\tilde{y}_3'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$. Подставим в исходное уравнение: $-25A\cos 5x - 25B\sin 5x - 4(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x) = -25\cos 5x + 20\sin 5x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos 5x$ и $\sin 5x$, получаем $-25A - 20B = -25$, $20A - 25B = 20$, откуда $A = 1$, $B = 0$ и $\tilde{y}_3 = \cos 5x$.

Теперь мы можем написать общее решение нашего уравнения:

$$y = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 = C_1 + C_2e^{4x} + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x.$$

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$. Так как

$$y' = 4C_2e^{4x} + 5e^{2x} + 10xe^{2x} - 4x - 5\sin 5x,$$

то, подставив начальные значения в общее решение и в его производную, получим уравнения $2 = C_1 + C_2 + 1$ и $5 = 4C_2 + 5$. Следовательно, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Частное решение имеет вид $y = 1 + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x$.

Ответ: $y = 1 + 5xe^{2x} - 2x^2 + \cos 5x$.

§ 7. Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Ограничимся рассмотрением систем второго порядка.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в нормальной форме имеет вид

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{23}$$

или, в матричной форме,

$$X'(t) = AX(t), \tag{24}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Слова „в нормальной форме“ означают, что система разрешена относительно производных неизвестных функций.

Фундаментальной системой решений системы (24) называется совокупность двух произвольных линейно независимых решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

а составленная из них матрица

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} \tag{27}$$

называется *фундаментальной матрицей* системы.

Общее решение системы (24) можно записать в виде

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) = W(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Система (25) может быть решена средствами линейной алгебры. Если характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{29}$$

имеет различные действительные корни λ_1 и λ_2, то соотвествующие им собственные векторы $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$ линейно независимы, а решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1X_1e^{\lambda_1 t} + C_2X_2e^{\lambda_2 t}. \tag{30}$$

Пример 27. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x + 6y. \end{cases}$

В матричной форме система имеет вид $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 8$.

Для нахождения собственного вектора для $\lambda_1 = 3$ по матрице

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 3 \\ 2 & 6-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 & 3 \\ 2 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0, \\ 2\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что одно уравнение лишнее, а поэтому система имеет бесконечное множество решений. Придадим β любое числовое значение, кроме 0, например, $\beta = 2$, тогда $\alpha = -3$. Получили собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Аналогично, для нахождения собственного вектора для $\lambda_2 = 8$ по матрице

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 3 \\ 2 & 6-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-8 & 3 \\ 2 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0, \\ 2\alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

Придадим β любое числовое значение, кроме 0, например, $\beta = 1$, тогда из любого уравнения выходит $\alpha = 1$. Получили собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь по формуле (30) получаем общее решение:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}, \\ y = 2C_1 e^{3t} + C_2 e^{8t}. \end{cases}$

Однако при использовании этого метода в случаях, когда корни характеристического уравнения одинаковые или комплексные, возникают определённые осложнения. Поэтому часто используют другой метод – метод исключения.

Пример 28. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x + 6y \end{cases}$ методом исключения неизвестной переменной.

Предположим, мы хотим исключить неизвестную x.

Продифференцируем второе уравнение ещё раз:

$$y'' = 2x' + 6y'.$$

Подствим в полученное уравнение вместо x' его выражение из первого уравнения:

$$y'' = 2(5x + 3y) + 6y' \Longrightarrow y'' = 10x + 6y + 6y'.$$

И, наконец, из второго уравнения заданной системы $y' = 2x + 6y$ выразим $x = \frac{1}{2}(y' - 6y)$ и подставим его в уравнение $y'' = 10x + 6y + 6y'$:

$$y'' = 5y' - 30y + 6y + 6y' \Longrightarrow y'' - 11y' + 24y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k^2 - 11k + 24 = 0$ равны $k_1 = 3$ и $k_2 = 8$. Тогда $y = C_1e^{3t} + C_2e^{8t}$, а

$$x = \frac{1}{2}(y' - 6y) = \frac{1}{2}(3C_1e^{3t} + 8C_2e^{8t} - 6C_1e^{3t} - 6C_2e^{8t}) = -\frac{3}{2}C_1e^{3t} + C_2e^{8t}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}C_1e^{3t} + C_2e^{8t}, \\ y = C_1e^{3t} + C_2e^{8t}. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4.

1. – 10. Найдите частное решение дифференциального уравнения.

1. $(x^2 - y^2)y' = 2xy, \quad y(1) = 1.$
2. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \quad y(0) = 5.$
3. $xy' = y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = e^2.$
4. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0\ , \quad y(1) = 2.$
5. $xy' + y = 3, \quad y(1) = -2.$
6. $y' \cos x = (y + 1) \sin x, \quad y(0) = 3.$
7. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 0.$
8. $x^2y' - 2xy = 3, \quad y(1) = -3.$
9. $(1 - x^2)y' + xy = 1, \quad y(0) = -1.$
10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y', \quad y(1) = 1.$

11 – 20. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

11. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$
12. $2yy'' - (y')^2 = 0.$
13. $x(y'' + 1) + y' = 0.$
14. $xy'' - y' = e^x x^2.$
15. $y'' + 2y(y')^3 = 0.$
16. $y''y^3 = 1.$
17. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x.$
18. $y''x \ln x - y' = 0.$
19. $2(y')^2 = (y - 1)y''.$
20. $2yy'' = 1 + (y')^2.$

21 – 30. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

21. $y'' + 4y' - 12y = 40 \sin 2x + 64e^{2x} - 36x, \quad y_0 = -3, \quad y'_0 = 0.$
22. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 27x + 3 + 2e^{3x} + 18 \cos 3x, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = \frac{5}{3}.$
23. $y'' + 4y = 8e^{-2x} + 4x^2 - 4x + 6 + 12 \cos x, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 1.$
24. $y'' - 2y' + 5y = 25xe^{2x} - 17 \cos 2x + 34 \sin 2x, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0.$
25. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} + 3x + 1 + 52 \cos 2x, \quad y_0 = \frac{3}{4}, \quad y'_0 = \frac{27}{2}.$
26. $y'' + 6y' + 9y = (12x^2 - 6x)e^{-3x} + 18 \sin 3x, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = -1.$
27. $y'' - 4y' + 13y = 25e^{-2x} + 13x + 40 \cos 3x, \quad y_0 = \frac{17}{13}, \quad y'_0 = 0.$
28. $y'' - 4y' = 16e^{4x} + 3x - 6x^2, \quad y_0 = 2, \quad y'_0 = 0.$
29. $y'' - 2y' + y = 6xe^x + 25 \sin 2x, \quad y_0 = 2, \quad y'_0 = -1.$
30. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(2 + 6x) + 78 \sin 3x, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0.$

31 – 40. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Требуется: 1) найти общее решение с помощью характеристического уравнеия; 2) записать данную систему и её решение в матричной форме; 3) решить систему способом исключения переменной.

31. $\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x' = -5x - 4y, \\ y' = -2x - 3y. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ 34. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x' = -4x - 6y, \\ y' = -4x - 2y. \end{cases}$ 38. $\begin{cases} x' = -5x - 8y, \\ y' = -3x - 3y. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = -7x - 3y. \end{cases}$ 40. $\begin{cases} x' = -7x + 5y, \\ y' = 4x - 8y. \end{cases}$

Рекомендуемая литература.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. - т. 2. - М., - Наука, 1985, 2004.

2. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / [К.Н. Лунгу и др.]; под ред. С.Н. Федина. - 5-е изд. - М. : Айриспресс, 2007.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. - 6-е изд. - М. ООО "Издательство оникс": ООО "Издательство "Мир и образование, 2006.