ТЕМА №1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Большинство объектов химической технологии являются объектами с наличием неопределенности. Источником неопределенности является: большое число и сложность взаимосвязей между параметрами состояния объекта; наличие параметров, не имеющих строго очерченных границ (например: активность катализатора); в некоторых случаях невозможность проведения измерений и т.п. В этих условиях важную роль приобретает качественный анализ объектов, включающий в себя элементы естественного языка, т.е. знания о происходящих процессах в объекте выраженные простым человеческим языком. Например: «активность катализатора» - «высокая», «низкая», «очень низкая» и т.п.

Для математического описания состояния и функционирования химико-технологической системы с наличием неопределенности используют нечеткие (размытые) модели. Следует отметить, что для простых и хорошо изученных систем не выделяют качественный этап анализа и строят модели, используя количественную информацию об объекте с применением достаточно хорошо разработанных традиционных точных математических методов. При анализе сложных и недостаточно изученных систем существенным является качественный этап и последующий переход к построению нечеткой модели.

Проблема математической обработки качественной информации включает сбор, оценку достоверности, систематизацию, формализацию, переработку информации качественного характера с применением вычислительной техники. Для компьютерной обработки качественной информации необходимо сопоставить термины словесного описания состояния моделируемой системы, числовым системам. Формализация представления знаний об объекте в терминах словесного описания выполняется с применением математического аппарата нечеткой логики и нечетких множеств. Понятие нечеткого множества - это попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа “такой-то элемент принадлежит данному множеству” теряют смысл, поскольку необходимо указать “насколько сильно” или с какой степенью конкретный элемент удовлетворяет свойствам данного множества.

Основоположником нечеткой («fuzzy») логики является по праву профессор Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде. Он впервые в 1965 г. в своей

журнальной статье, которая называлась «Fuzzy Sets» определил понятие нечеткого множества «fuzzy set» и распространил методы классической теории множеств на нечеткие множества и тем самым создал теорию нечетких множеств.

Основная идея Заде состояла в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть описан в рамках традиционных математических аппаратов. В связи с этим он расширил классическое понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале от 0 до 1, а не только значения 0 либо 1. Л. Заде ввел понятие лингвистической переменной и, допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, тем самым он создал математический аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражения.

В теории обычных или четких множеств вводится понятие множества как конечная или бесконечная совокупность объектов или набора элементов, обладающих общими для всех элементов характеристическими свойствами. Такими элементами могут быть целые числа, технологические параметры, влияющие на выходную переменную и т.п.

В теории множеств вводится ряд обозначений: $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ – читается «x принадлежит A» и $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$ – читается «x не принадлежит A», (здесь **x** – элемент, **A** – множество).

Для обозначения того факта, что элемент **x** может принадлежать или не принадлежать множеству **A** водится характеристическая функция $\mu_A(x)$, принимающая только лишь два значения 0 или 1 (1):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases}. \qquad (1)$$

В этом случае выполняется четкая, однозначная классификация элемента **x** на принадлежность его к множеству **A**. Во многих практических случаях не всегда удается выполнить такую четкую классификацию.

Пусть **E** – универсальное множество (в случае рассмотрения какого-либо технологического параметра – это его диапазон изменения с определенным шагом), **x** – элемент **E**, а **P** – некоторое характеристическое свойство.

Тогда *обычное (четкое) подмножество* **A** универсального множества **E**, элементы которого удовлетворяют свойству **P**, определяются как множество упорядоченных пар (2):

$$A = \{\mu_A(x)/x\}, \qquad (2)$$

где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если **x** удовлетворяет свойству **P**, и 0 – в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов **x** из **E** нет однозначного ответа «да/нет» относительно свойства **P**. В связи с этим ***нечеткое подмножество A*** универсального множества **E** определяется как множество упорядоченных пар с характеристической функцией $\mu_A(x)$, которую называют ***функцией принадлежности*** (ФП) (англ. – membership function). При этом ***функция принадлежности*** $\mu_A(x)$ ставит в соответствие каждому элементу $x \in E$ число $\mu_A(x)$ из **интервала** [0,1]. Это число определяет ***степень принадлежности*** элемента **x** подмножеству **A**.

Приведем пример записи нечеткого множества. Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ – универсальное множество и $\mu_A(x_1) = 0{,}1$; $\mu_A(x_2) = 0{,}3$; $\mu_A(x_3) = 0$; $\mu_A(x_4) = 0{,}6$, тогда нечеткое множество *A* можно представить в виде (3) или (4):

$$A = \{0{,}1/x_1; 0{,}3/x_2; 0/x_3; 0{,}6/x_4\}, \qquad (3)$$

$$A = 0{,}1/x_1 + 0{,}3/x_2 + 0/x_3 + 0{,}6/x_4, \qquad (4)$$

причем знак суммирования («+») обозначает объединение одноточечных множеств $\mu_A(x_i)/x_i$.

Необходимо различать понятия «случайность» и «нечёткость». Случайность носит *вероятностный характер*, нечёткость же связана с *неточностью и приблизительностью представления* о свойствах, взаимосвязях исследуемой системы. Следует также подчеркнуть одну особенность функции принадлежности в сравнении с функциями распределения вероятностей. Если последние имеют объективную основу, например, в виде накопленных статистических данных, то функции принадлежности являются субъективными.

Приведенные определения являются основой для формализации различного вида неопределенностей. Например: пусть диапазон измерения температуры теплоносителя исследуемого теплообменника определяется универсальным множеством $E = \{10, 15, 20, 25, 30\}$. Оператор, наблюдая за технологическим процессом, словесно охарактеризовал температуру теплоносителя нечетким термином «высокая». На этапе формализации качественной информации термин «высокая» сопоставляется с нечетким

множеством - **А** универсального множества **Е**. Предположим, что это сопоставление дало следующий результат (5):

$$A \overset{\Delta}{=} \text{"высокая"} = 0/10 + 0{,}2/15 + 0{,}5/20 + 0{,}8/25 + 1{,}0/30\,. \qquad (5)$$

В этом выражении знак «$\overset{\Delta}{=}$» обозначает равно по определению. Анализ нечеткого множества - **А** показывает, что температура $x_1 = 10°C$ не может быть отнесена к понятию «высокая», поэтому $\mu_A(x_1) = 0$, в то же время для элемента $x_5 = 30°C$ степень принадлежности к данному термину принята равной 1, т.е. это значение температуры при заданном универсальном множестве строго соответствует термину «высокая». Таким образом, чем выше степень принадлежности, тем с большей мерой элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества.

В приведенном примере использован прямой метод определения функций принадлежности, когда эксперт просто задаёт значение степени принадлежности $\mu_A(x)$ для каждого $x \in E$. Как правило прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения. При прямых методах используются такие групповые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо, и каждый должен дать один из двух ответов, например: “этот человек высокий” или “этот человек не высокий”, - тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, даёт значение $\mu_{\text{“высокий”}}$ для данного лица.

Главным первичным понятием нечеткой логики является понятие *лингвистической переменной*.

Лингвистической называют ***переменную***, которая задана на количественной шкале базисной переменной *x* и принимает значения в виде слов и словосочетаний естественного языка.

Лингвистическим термом называют отдельное значение лингвистической переменной, которое задается не в виде конкретного числа, а с помощью одной функции принадлежности. Другими словами, *каждому терму соответствует нечеткое множество*. Например, если физическая переменная – «скорость процесса полимеризации» *x* характеризуется нечеткими понятиями «низкая», «средняя», «высокая», то совокупность этих 3 значений рассматривается как лингвистическая переменная, принимающая эти лингвистические значения, или термы.

Процедуру определения значения функции принадлежности $\mu_A(x^*)$, соответствующего конкретному значению x^* переменной x, называют ***фаззификацией***.

Например, если физическая переменная – «температура теплоносителя» x в теплообменнике (рисунок 1) – характеризуется нечеткими понятиями «малая», «нормальная», «высокая», то совокупность этих 3 значений рассматривается как лингвистическая переменная, принимающая эти лингвистические значения, или термы.

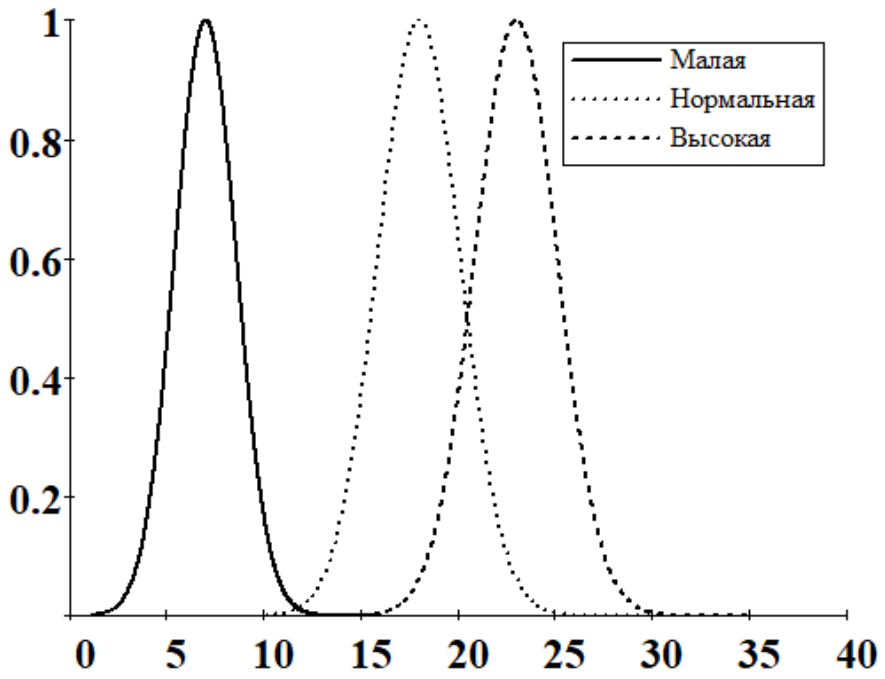

Рисунок 1 – Термы лингвистической переменной «температура теплоносителя»

Для лингвистической переменной – «температура теплоносителя» x^*=20 °С принадлежит к терму «малая» с ФП $\mu_A(x^*) = 0$, к терму «нормальная» с ФП $\mu_B(x^*) = 0.75$, а к терму «высокая» с ФП $\mu_C(x^*) = 0.3$.

Параметры химико-технологической системы (ХТС) могут быть связаны между собой различного вида **отношениями.** Например, нас интересует влияние параметра ХТС на качество выпускаемой продукции, то данная связь может быть описана различного вида отношениями: «влияет», «не влияет», « сильно влияет», «слабо влияет» и др. Наиболее распространенной формой задания отношений является словесное описание.

Нечеткие отношения существуют между нечеткими множествами, например, между множеством $A=\{[x,\mu_A(x)] \mid x \in X\}$ и множеством $B=\{[y,\mu_B(y)] \mid y \in Y\}$.

Нечетким отношением **R** на множестве U называется нечеткое подмножество декартова произведения $A \times B$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_R = A \times B \rightarrow [0,1]$

В этом случае нечеткое отношение определяется как (6):

$$R=\{[(x, y),\mu_R(x, y)] \mid (x, y) \in A\times B\}, \qquad (6)$$

где $\mu_R(x,y)$ – функция принадлежности, понимается как субъективная мера выполнения отношения R и характеризующая одновременную принадлежность обоих элементов x и y, образующих пары (x, y), к декартову произведению $A \times B$.

Обозначение: нечеткое отношение **R** на $X \times Y$ запишется в следующем виде: $x \in X$, $y \in Y$: $\boldsymbol{x\ R\ y}$. В случае, когда $X = Y$, то есть X и Y совпадают, нечеткое отношение (7)

$$R = X \times X \rightarrow [0, 1] \qquad (7)$$

называется нечетким отношением на множестве X.

Приведем несколько примеров.

1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Введем нечеткое отношение $R = X\,R\,Y$, которое может быть задано, например матрицей отношения, приведенной в таблице 1.

Таблица 1 – Задание нечеткого отношения

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

Из приведенной таблицы видно, что пары (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), находятся в веденном отношении R с функцией принадлежности $\mu_R(x, y) = 0$, т.е. можно сказать, что они не находятся в отношении R.

2. Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$, то есть множество всех действительных чисел. Отношение $x >> y$ (x много больше y) можно задать следующей функцией принадлежности (8):

$$\mu_R = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le y, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } x < y. \end{cases} \qquad (8)$$

Главной операцией фаззи-логики является процедура нечеткого вывода (англ. – *fuzzy reasoning*), с помощью которой из нечетких условий получают приближенные решения. Эта процедура основана на операции импликации, используемой в традиционной математической логике.

Импликация (от лат. implicatio – связывание) – логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «если A, то B». Высказывание A называется *посылкой* (англ. – *pramise*) высказывания $A \rightarrow B$, а высказывание B – его *заключением* (англ. – *conclusion*). Высказывание $A \rightarrow B$ считается ложной импликацией лишь в том случае, когда посылка A истинна, а заключение B ложно (таблица 2).

Таблица 2 – Правила логического вывода

Исходные высказывания		**Импликация**	**Модус-поненс**	**«И»**
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$\boldsymbol{B = A \cap (A \rightarrow B)}$	$\boldsymbol{A \cap B}$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0

Из таблицы 2 видно, что импликации $A \rightarrow B$ соответствует логическая функция $\overline{A} \cup B$. Это означает, что классическая импликация $A \rightarrow B$ соответствует процедуре слишком оптимистичного вывода, так как общее высказывание $A \rightarrow B$ истинно не только, когда высказывания A и B истинны (как при операции «И»), но и когда A и B ложны или когда A ошибочно и B истинно.

В тоже время правило «modus ponens» (3 колонка таблицы 2) устанавливает истинность заключения B лишь в случае истинности посылки A и импликации $A \rightarrow B$, т.е. общее умозаключение, получаемое с помощью правила «modus ponens», является более осторожным и предусмотрительным, чем простая импликация $A \rightarrow B$. Логическая функция, описывающая правило «modus ponens», имеет вид (9):

$$B = A \cap (A \rightarrow B) = A \cap (\neg A \cup B). \qquad (9)$$

Заметим, что она совпадает с простой логической функцией «И», соединяющей высказывания A и B (4 колонка таблицы 2).

Из таблицы 2 и приведенной формулы вытекает следующее основное, обобщенное правило логического вывода: функция истинности заключения B равна максимальному значению функция истинности конъюнкции (операции «И») посылки A и импликации $A \to B$, т.е. (10):

$$\mu_B = \max_A \{\mu_{A \cap A \to B}\} = \max_A \{\min[\mu_A, \mu_{A \to B}]\} = \\ = \max_A \{\min[\mu_A, \min(\mu_A, \mu_B)]\} \qquad (10)$$

Распространим теперь алгоритм логического вывода, полученный для высказывания $A \to B$, на нечеткие множества.

Нечеткие отношения играют важную роль в формализации нечётких условий, например при нечётком описании поведения ХТС.

Механизм нечетких логических выводов, используемый в различного рода экспертных и управляющих системах в своей основе имеет нечеткую базу знаний. Последняя в свою очередь формируется специалистами предметной области в виде совокупности нечетких предикатных правил.

Нечетким логическим выводом *(fuzzy logic inference)* называется аппроксимация зависимости $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с помощью нечеткой базы знаний и операций над нечеткими множествами.

Нечеткой базой знаний *(fuzzy knowledge base)* о влиянии факторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на значение отклика y называется совокупность логических высказываний (предикатных правил $П_i$) типа (11):

$П_1$: если x есть A_1, то y есть B_1,
$П_2$: если x есть A_2, то y есть B_2,
…
$П_n$: если x есть A_n ,то y есть B_n, (11)

где x - входная переменная (имя для известных значений данных), y - переменная вывода (имя для значения данных, которое будет вычислено), A и B – функции принадлежности, определенные, соответственно, на x и y.

Совокупность импликаций $\{П_1, П_2, \ldots, П_n\}$- отражает функциональную взаимосвязь входных и выходных переменных и является основой построения нечеткого отношения

X R Y, заданного на произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных.

Пример подобного правила: если x - низкая, то y - средняя.

Формализация этого предложения задаётся через декартово произведение следующим образом: «если x - низкая, то y – средняя» = **A** x **B.**

Приведем более детальное пояснение. Знание эксперта $A \to B$ отражает нечеткое причинное отношение предпосылки и заключения, поэтому его можно назначить нечетким отношением и обозначить через R: $\boldsymbol{R = A \to B}$**,**

где "$\to$" называют *нечеткой импликацией*

Отношение R можно рассматривать как нечеткое подмножество прямого произведения $A \times B$ полного множества предпосылок X и заключений Y. Полученное нечёткое отношение можно использовать для вычисления величины параметра $y \in Y$ при изменении параметра $x \in X$. Для этого используется **композиционное правило вывода.** Значение этого правила для решения практических задач заключается в следующем. Если связь между параметрами ХТС задана в виде нечетких отношений R, и величина входного параметра $x \in X$ определена нечетким подмножеством A`, то величина выходного параметра $y \in Y$, определённого нечетким подмножеством B` может быть вычислена с помощью композиции (12):

$$B' = A' \bullet R = A' \bullet (A \to B), \qquad (12)$$

где "$\bullet$" - введенная выше операция свёртки.

Приведенную композицию запишем через функцию принадлежности по аналогии с правилом обобщенного логического вывода (13):

$$\mu_B(y) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\},\ x \in A,\ y \in B. \qquad (13)$$

Как операцию композиции, так и операцию импликации в алгебре нечётких множеств можно реализовывать по-разному (при этом, естественно, будет разниться и итоговый получаемый результат).

Например, функцию принадлежности $\mu_R(x,y)$ можно определить различными процедурами: с помощью оператора Мамдани (14), оператора Заде (15) или оператора Лукасевича (16):

$$\mu_R(x,y) = \min_{A\times B}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad (14)$$

$$\mu_R(x, y)=\max\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)], [1-\mu_A(x)]\}, \quad (15)$$

$$\mu_R(x, y)=\min\{1,[1-\mu_A(x)+ \mu_B(y)]\}. \quad (16)$$

Таким образом, композиционное правило вывода задает закон функционирования **нечеткой модели системы** и является в известном смысле обобщением правила **modus ponens**.

В случае, когда входная величина имеет четкое значение ($x = x^*$), приведенный алгоритм логического вывода упрощается (17):

$$\mu_B(y) = \mu_R(x^*,y) = \min\{\mu_A(x^*), \mu_B(y)\} = \mu_A(x^*)\cdot\mu_B(y). \quad (17)$$

Нечеткий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа.

1. Нечеткость (введение нечеткости, **фаззификация**, **fuzzification**).Функции принадлежности, определенные на входных переменных, применяются и к их фактическим значениям для определения истинности каждой предпосылки каждого правила.

2. Логический вывод. Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правила логического вывода обычно используются только операции **min (минимум)** или **prod (умножение)**. *В логическом выводе **min** функция принадлежности вывода "отсекается" по высоте*, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика "И"). *В логическом выводе **prod** функция принадлежности вывода масштабируется* при помощи вычисленной степени истинности предпосылки правила.

3. Композиция. *Нечеткие подмножества*, назначенные для каждой переменной вывода (во всех правилах), *объединяются вместе*, чтобы сформировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода. При подобном *объединении обычно* используются операции ***max* (максимум) или *sum* (сумма).** При композиции **max** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам (нечеткая логика "ИЛИ"). При композиции **sum** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.

4. В заключении (дополнительно) - приведение к четкости (**дефаззификация**), которое используется, когда полезно преобразовать нечёткий набор выводов в чёткое число.

ТЕМА №2. ТИПОВЫЕ ВИДЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В практических приложениях теории нечетких множеств используется большое количество различных типов функций принадлежности (ФП). Здесь мы рассмотрим ряд как простых, так и сложных видов этих функций и обсудим их свойства.

Простейшими функциями принадлежности являются треугольная (**trimf**) (1) и трапециевидная (**trapmf**) (2), которые формируются с использованием кусочно-линейной аппроксимации. Вид этих ФП показан на рисунках 1 и 2 соответственно.

$$\mu(x) = \max\left[\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right] \tag{1}$$

$$\mu(\mathrm{x}) = \max\left[\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right] \tag{2}$$

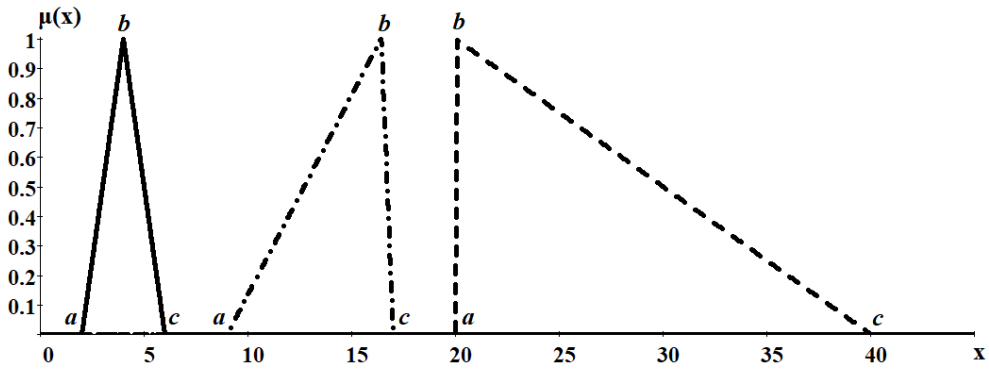

Рисунок 1 – Вид треугольных функций принадлежности

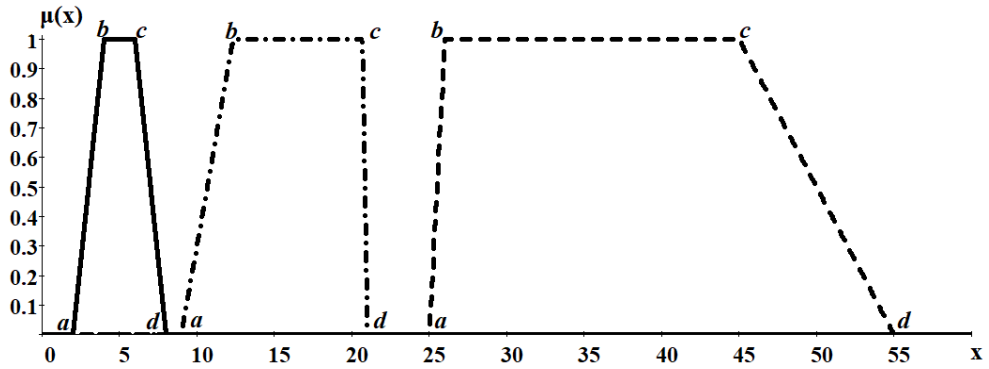

Рисунок 2 – Вид трапециевидных функций принадлежности

Существенным преимуществом многоугольных функций принадлежности является то, что для их определения требуется наименьший по сравнению с остальными функциями

объем информации, который в данном случае ограничивается данными об угловых точках, что является весьма важным обстоятельством при моделировании систем в условиях ограниченности объема исходных данных. Чтобы определить многоугольную функцию принадлежности, на практике обычно требуется задать лишь модальное значение соответствующего нечеткого множества.

Достоинства многоугольных функций принадлежности:

- Для их задания требуется малый объем данных;

- Простота модификации параметров (модальных значений) функции принадлежности на основе измеряемых значений входных и выходных величин системы;

- Возможность получения в рамках модели отображения «вход-выход» в виде гиперповерхности, состоящей из линейных участков;

- Для многоугольных функций принадлежности легко обеспечивается выполнение условия разбиения единицы (в соответствии с которым сумма степеней принадлежности для любого элемента x должна равняться 1).

Недостатки многоугольных функций принадлежности

- Многоугольные функции принадлежности не являются непрерывно дифференцируемыми.

Трапециевидная функция принадлежности представляет собой обобщение треугольной, которая позволяет задавать ядро нечеткого множества в виде некоторого интервала. В случае применения функции принадлежности трапециевидного вида возможна следующая удобная интерпретация: ядро нечеткого множества – оптимистическая оценка; носитель нечеткого множества – пессимистическая оценка.

С использованием распределения Гаусса формируются симметричная гауссова (**gaussmf**) (3) и двусторонняя гауссова (**gauss2mf**) (4) функции принадлежности. Вид этих ФП показан на рисунке 3.

$$\mu(\mathrm{x}) = e^{-\left(\frac{x-b}{c}\right)^2} \tag{3}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left[(x-c_1)^2 / \left(-a_1^2\right)\right], \; x < c_1 \\ 1 \quad , \quad c_1 \le x \le c_2 \\ \exp\left[(x-c_2)^2 / \left(-a_2^2\right)\right], \; x > c_2 \end{cases} \text{– если } c_1 < c_2,$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left[(x-c_1)^2 / \left(-a_1^2\right)\right], \; x < c_2 \\ 1, \; c_2 \le x \le c_1 \\ \exp\left[(x-c_2)^2 / \left(-a_2^2\right)\right], \; x > c_1 \end{cases} \text{– если } c_1 > c_2 \tag{4}$$

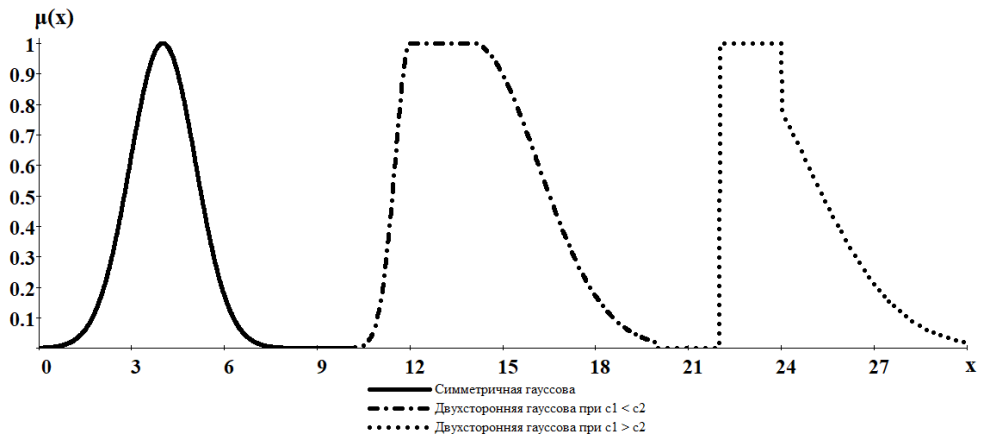

Рисунок 2.3 – Симметричная гауссова и двухсторонняя гауссова функции принадлежности

Достоинства гауссовой функции принадлежности

- Использование гауссовых функций обеспечивает получение гладких, непрерывно дифференцируемых гиперповерхностей отклика нечеткой модели.

- Являясь непрерывно и, более того, бесконечно дифференцируемыми (бесконечная дифференцируемость означает наличие производной любого порядка), гауссовы функции дают возможность проведения теоретического анализа нечетких систем.

Недостатки гауссовой функции принадлежности

- Гауссова функция симметрична, что приводит к нарушению условия разбиения единицы.

- Использование гауссовой функции принадлежности предполагает задание большего, чем для треугольной функции, числа параметров (по два параметра для каждой функции), что усложняет настройку нечеткой модели.

- Гауссова функция имеет неограниченный носитель, что означает, что любой элемент x области определения X будет принадлежать любому нечеткому множеству, задаваемому с помощью этой функции, и это может не соответствовать представлениям эксперта о моделируемой системе. Вместе с тем, степени принадлежности элементов x, находящихся далеко от центра гауссовой функции, пренебрежимо малы, вследствие чего ширина этой функции на практике оказывается не столь велика.

- Использование гауссовой функции затрудняет получение простых локально линейных поверхностей отклика нечеткой модели.

Обобщенная колоколообразная функция принадлежности (**gbellmf**) (5) по своей структуре похожа на гауссову ФП, ее вид приведен на рисунке 4.

$$\mu(\mathrm{x}) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x - c}{a}\right|^{b}} \tag{5}$$

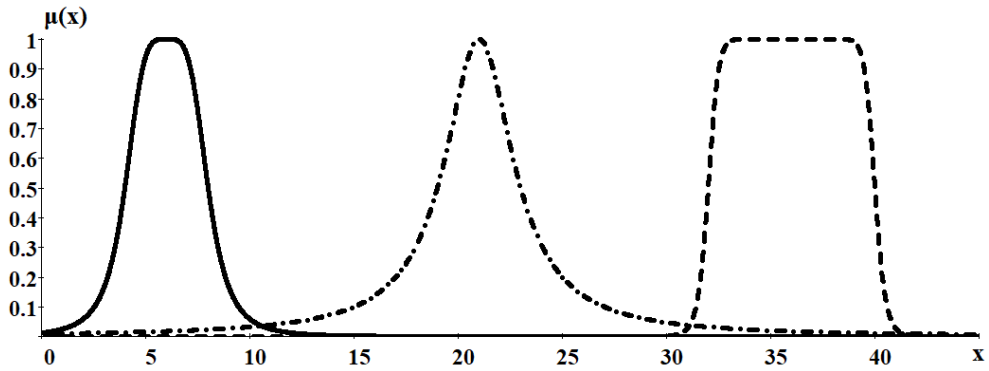

Рисунок 4 – Вид колоколообразных функций принадлежности

Эти функции принадлежности часто используются в нечетких системах, так как на всей области определения они является гладкими и принимают ненулевые значения.

Сигмовидная кривая используется для формирования сигмовидной функции принадлежности **(sigmf)** (6) в виде разности между двумя сигмовидными функциями **(dsigmf)** (7) или произведения двух сигмовидных функций принадлежности **(psigmf)** (8). Вид такой ФП показан на рисунке 5.

$$\mu(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+e^{-a(x-c)}} \tag{6}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a_1(x-c_1)}} - \frac{1}{1+e^{-a_2(x-c_2)}} \tag{7}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a_1(x-c_1)}} \times \frac{1}{1+e^{-a_2(x-c_2)}} \tag{8}$$

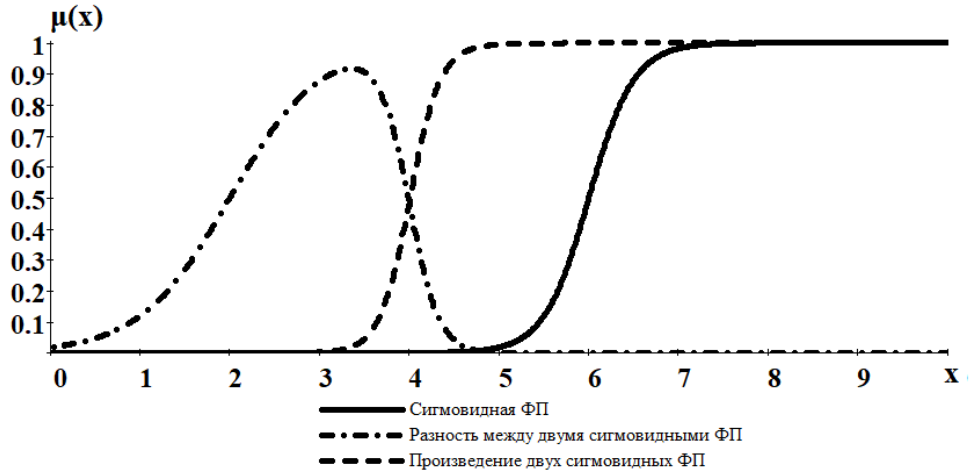

Рисунок 5 – Сигмовидная ФП**,** разность между двумя сигмовидными ФП, произведение двух сигмовидных ФП

Эти функции позволяют формировать функции принадлежности, значения которых, начиная с некоторого значения аргумента и до $\pm\infty$ равны 1. Такие функции удобны для задания лингвистических термов типа “высокий” или “низкий”.

Полиномиальная аппроксимация применяется при формировании **z**-подобной **(zmf)** (9), **s**-подобной **(smf)** (10) и **π**-подобной **(pimf)** функций принадлежности (рисунок 6). Причем, **π**-подобная функция принадлежности представляет собой ни что иное, как произведение **zmf** и **smf** функций принадлежности.

$$\mu(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & x \le a \\ \text{нелинейная аппроксимация}, & a < x < b \\ 0, & x \ge b \end{cases} \tag{9}$$

$$\mu(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \text{нелинейная аппроксимация}, & a < x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases} \tag{10}$$

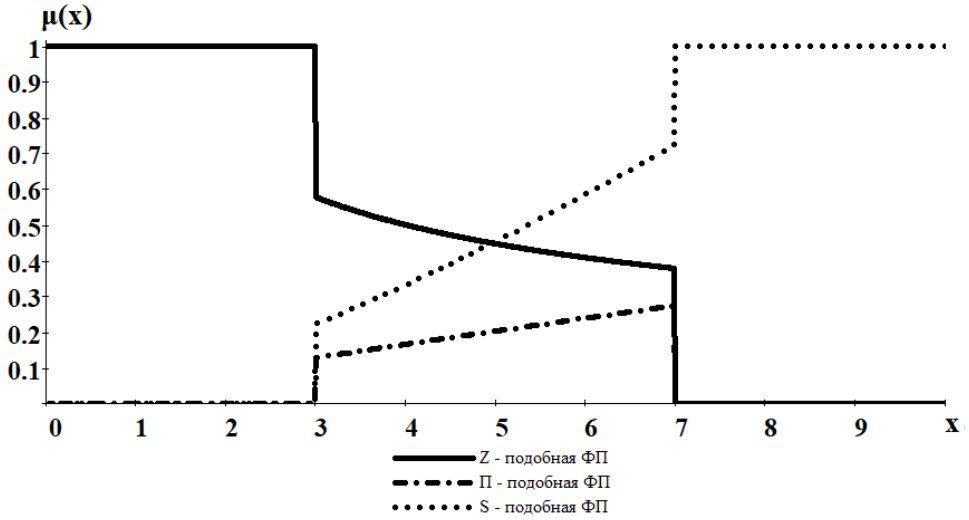

Рисунок 6 – Вид z-подобной, π-подобной и s-подобной функций принадлежности

Выбор функции принадлежности в значительной мере определяется объемом имеющейся информации о моделируемой системе, а также качеством имеющихся в распоряжении исследователя методов настройки модели.

При малом объеме имеющейся информации о системе следует использовать простейшие функции принадлежности, состоящие из прямолинейных участков, для нахождения параметров которых требуется значительно меньшее, по сравнению с остальными функциями принадлежности, количество информации. Кусочно-линейные функции принадлежности приводят к получению локально линейных поверхностей отклика модели (при условии правильного выбора других составляющих нечеткой системы), что

положительно сказывается на точности моделирования в условиях малого объема исходных данных.

Наличие большого объема информации о системе в форме измеренных входных и выходных данных дает возможность идентификации большего числа параметров нечеткой модели. Это позволяет использовать более сложные функции принадлежности, такие как гауссовы или полиномиальные, и тем самым приводит к моделям более точным, чем в случае простых функций, состоящих из прямолинейных участков.

Вместе с тем, для идентификации большого числа параметров нечеткой модели требуются высокоэффективные методы ее адаптации (настройки), которые не всегда имеются в распоряжении исследователя. Кроме того, более сложные функции принадлежности состоят из кривых, что повышает степень нелинейности модели, увеличивая в свою очередь число локальных экстремумов функции ошибок.

В результате процесс идентификации сопровождается значительными трудностями, для преодоления которых следует применять достаточно мощные генетические алгоритмы, которые, однако, не всегда дают удовлетворительные результаты вследствие сложности моделей и наличия у них большого числа степеней свободы.

ТЕМА №3. ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ (ЛОГИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ)

Рассмотрим основные **логические** операции, которые возможны с нечеткими множествами. В качестве примера выберем три вида функций принадлежности (ФП), представленных на рисунке 1, и на их основе рассмотрим логические операции.

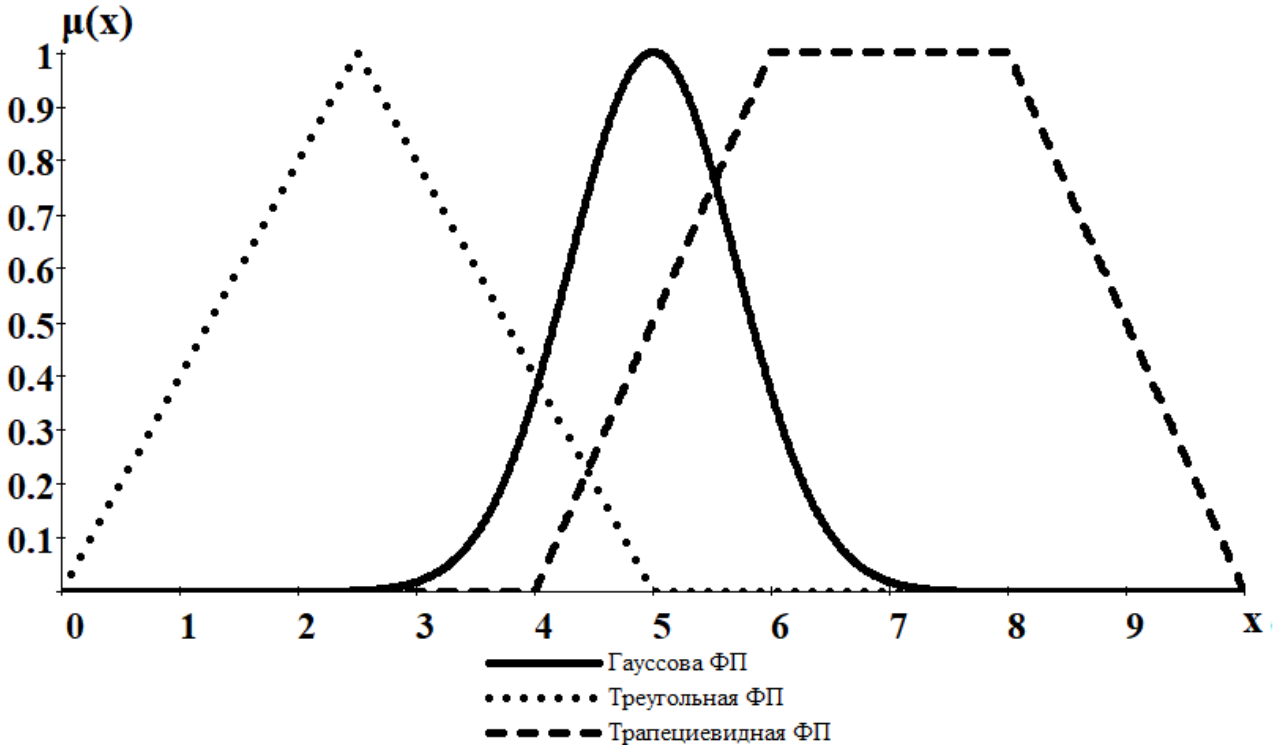

Рисунок 1 – Типовые виды ФП (треугольная, гауссова и трапециевидная)

1. Включение

Пусть *A* и *B* – нечеткие множества на универсальном множестве *E*. Говорят, что *A* содержится в *B*, если $\forall x \in E$ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ($\forall$–читается «для всех»).

Обозначение: $A \subset B$.

2. Равенство

A и B равны, если $\forall x \in E$ $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Обозначение: A = B.

3. Дополнение

Пусть M= [0,1], A и B – нечеткие множества, заданные на E. Множества A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in E$ $\mu A(x) = 1 - \mu_B(x)$. Графически операция дополнения показана на рисунке 2.

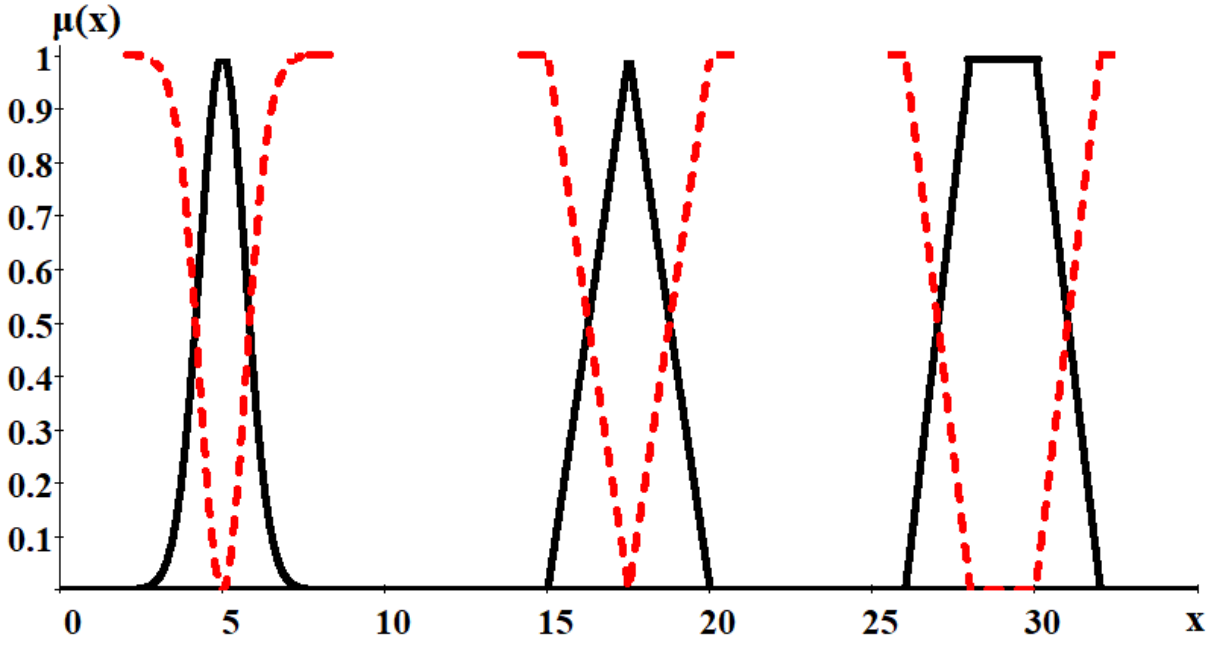

Рисунок 2 – Операция дополнения ФП (показано пунктиром)

Обозначение: $B = \overline{A}$ или $A = \overline{B}$.

4. Пересечение

A ∩ B – наименьшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B, с функциями принадлежности $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$. Графически операция пересечения ФП приведена на рисунке 3.

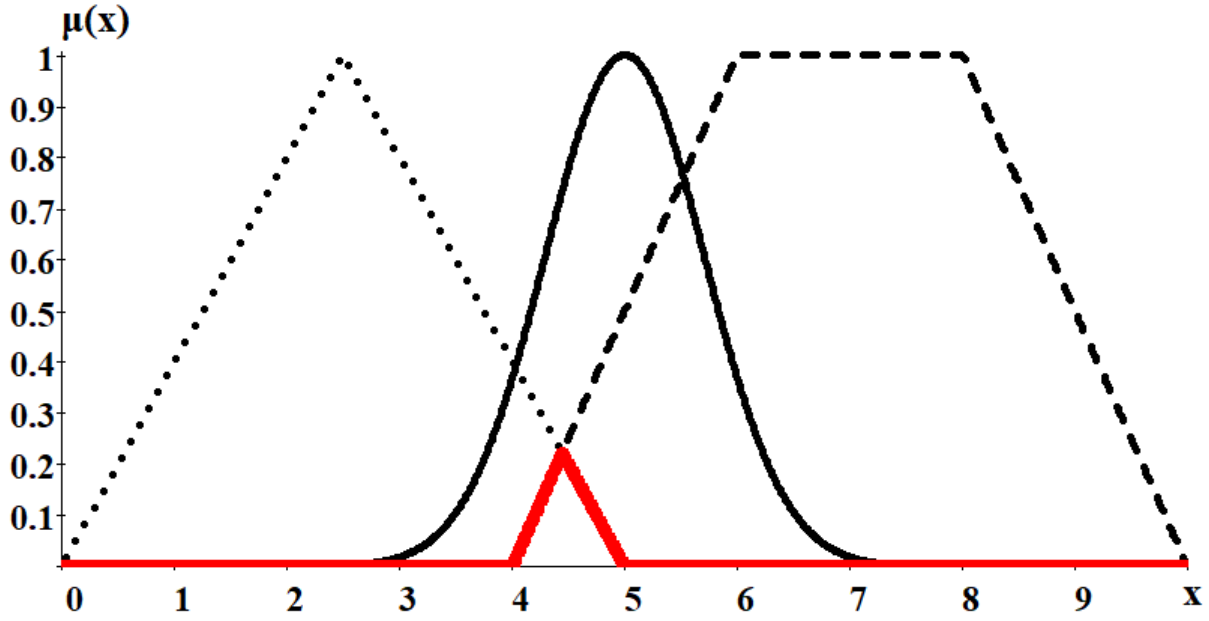

Рисунок 3 – Операция пересечения ФП

5. Объединение

$A \cup B$ – наибольшее нечеткое подмножество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$.

Результат операции объединения представлен на рисунке 4.

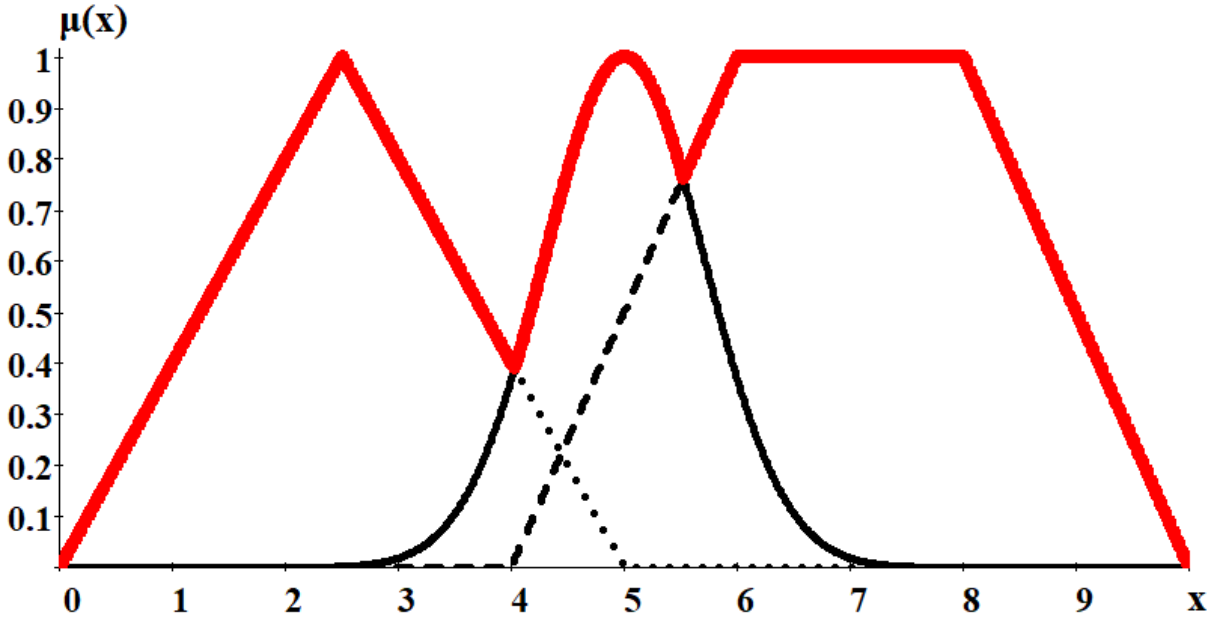

Рисунок 4 – Операция объединения ФП

6. Разность

$A - B = A \cap \overline{B}$ с функцией принадлежности $\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1-\mu_B(x))$. Графическое изображение данной операции для гауссовой и трапециевидной ФП приведено на рисунках 5 – 6.

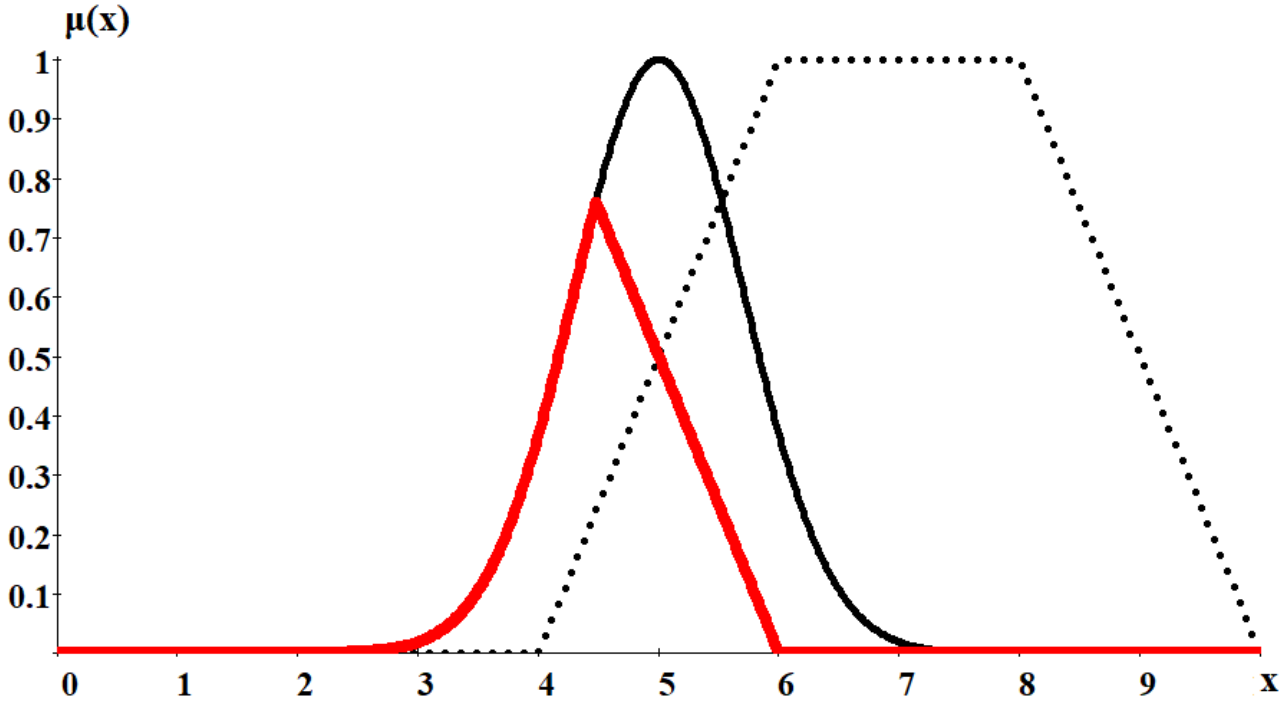

Рисунок 5 – Разность между гауссовой и трапециевидной ФП

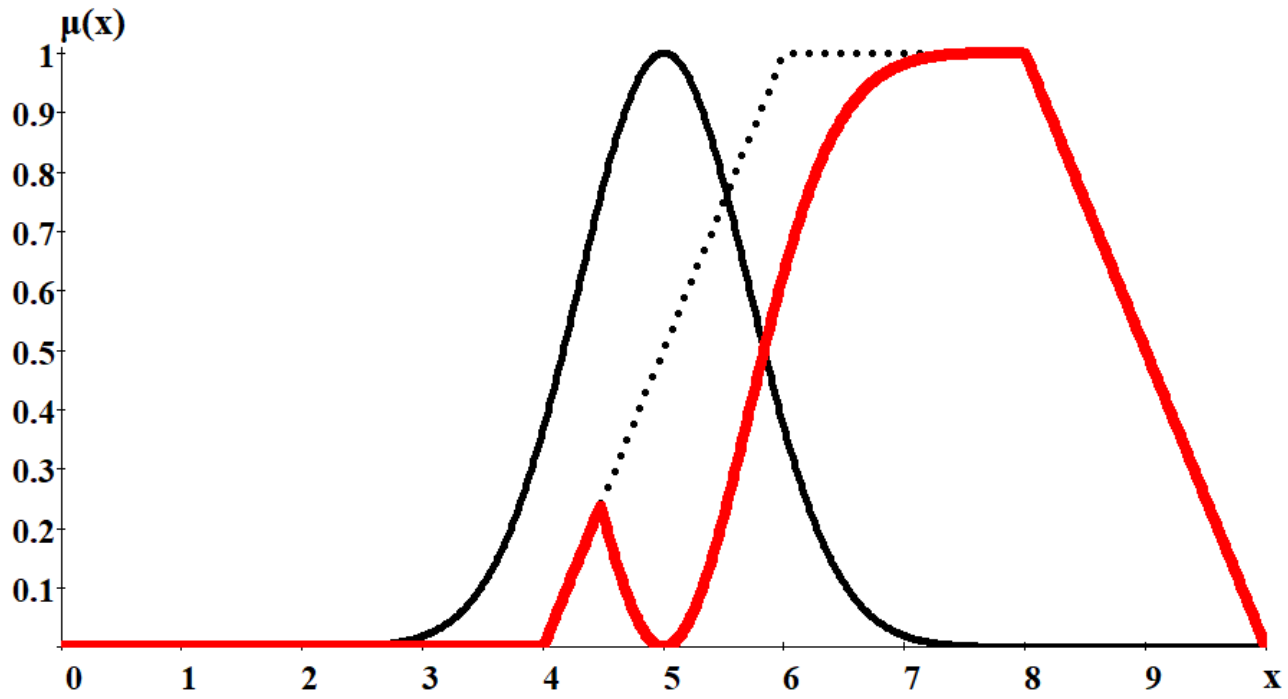

Рисунок 6 – Разность между трапециевидной и гауссовой ФП

Примеры.

Пусть: $A = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$;

$B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$;

$C = 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4$.

Здесь:

1. $A \subset B$, то есть A содержится в B, C несравнимо ни с A, ни с B.

2. $A \neq B \neq C$.

3. $\overline{A} = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4$;

$\overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0{,}9/x_3 + 0/x_4$;

4. $A \cap B = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$;

$A \cap C = 0{,}1/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 0{,}9/x_4$;

5. $A \cup B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$;

$A \cup C = 0{,}4/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 1/x_4$;

7. $A - B = A \cap \overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4$;

$B - A = \overline{A} \cap B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$;

Теперь представим **алгебраические** операции с нечеткими множествами и для примера также используем треугольные, гауссовы и трапециевидные ФП (рисунок 1).

1. ***Алгебраическое произведение*** *A* и *B* обозначается $A \cdot B$ и определяется согласно выражению (1):

$$\forall x \in E \ \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \qquad (1)$$

Графически данная операция показана на рисунках 7 – 9.

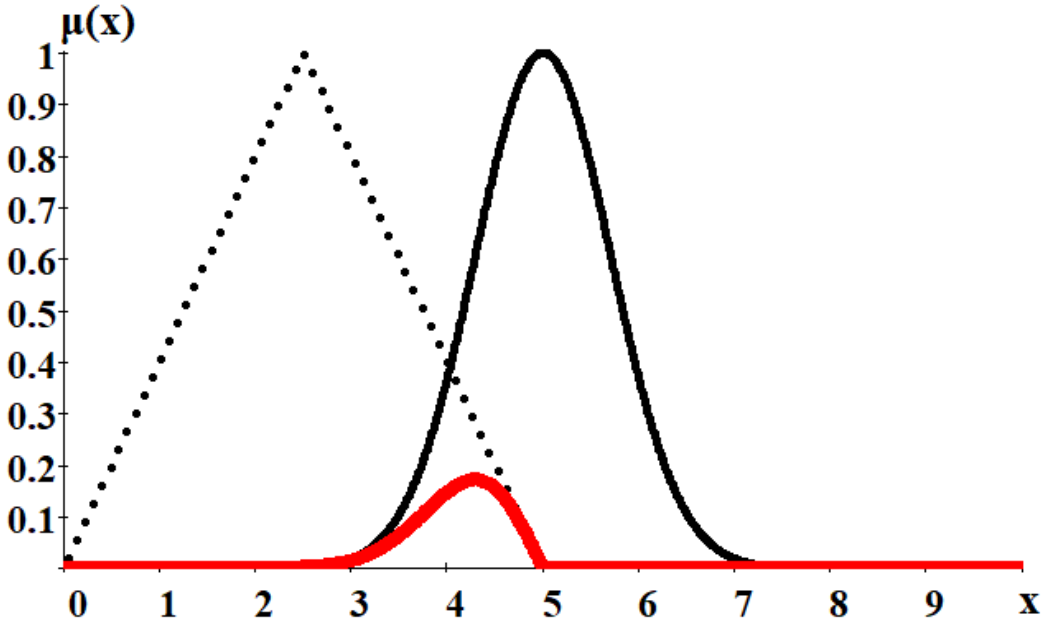

Рисунок 7 – Алгебраическое произведение треугольной и гауссовой ФП

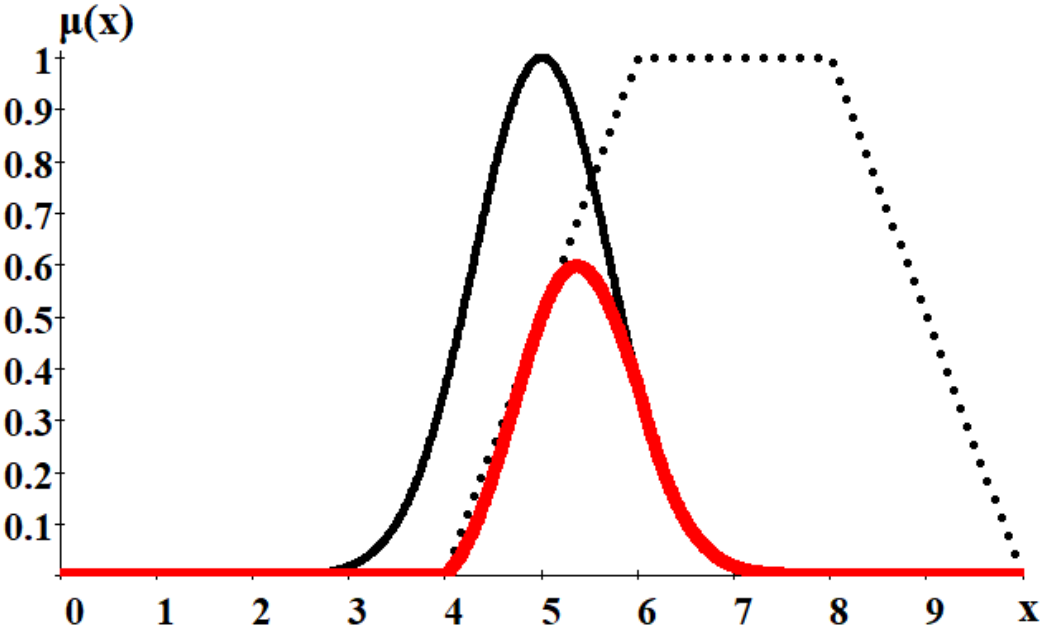

Рисунок 8 – Алгебраическое произведение трапециевидной и гауссовой ФП

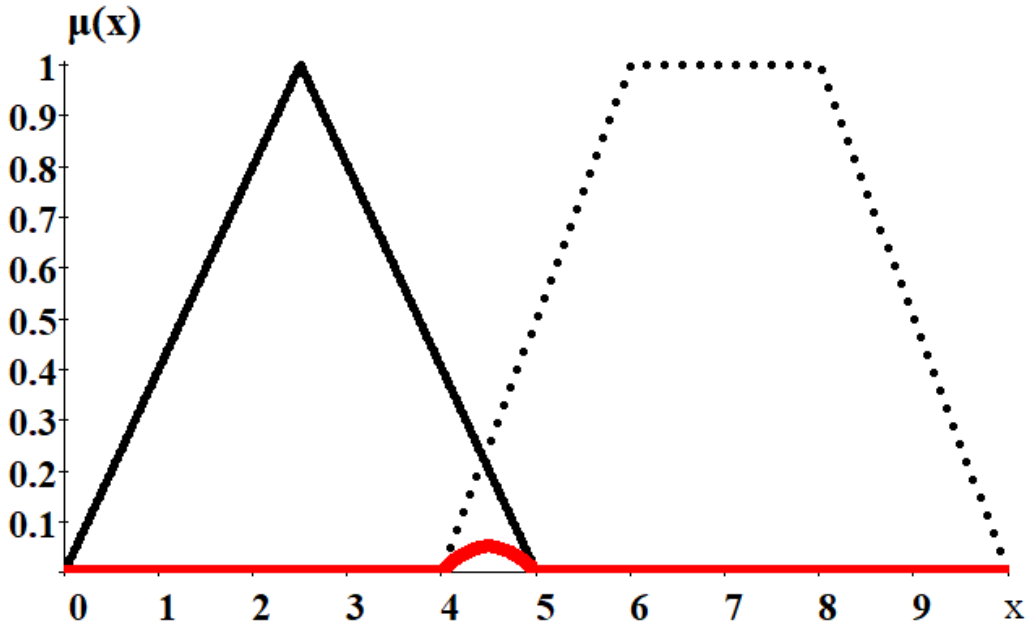

Рисунок 9 – Алгебраическое произведение треугольной и трапециевидной ФП

На основе операции алгебраического произведения определяется операция ***возведения в степень*** α нечеткого множества A, где α - положительное число. Нечеткое множество A^{α} определяется функцией принадлежности $\mu_A{}^{\alpha}(x) = \mu^{\alpha}{}_A(x)$.

Частными случаями возведения в степень являются:

- CON(A) = A^2 - операция ***концентрирования*** (уплотнения) (рисунки 10-12),
- DIL(A) = $A^{0,5}$ - операция ***растяжения*** (рисунки 13-15).

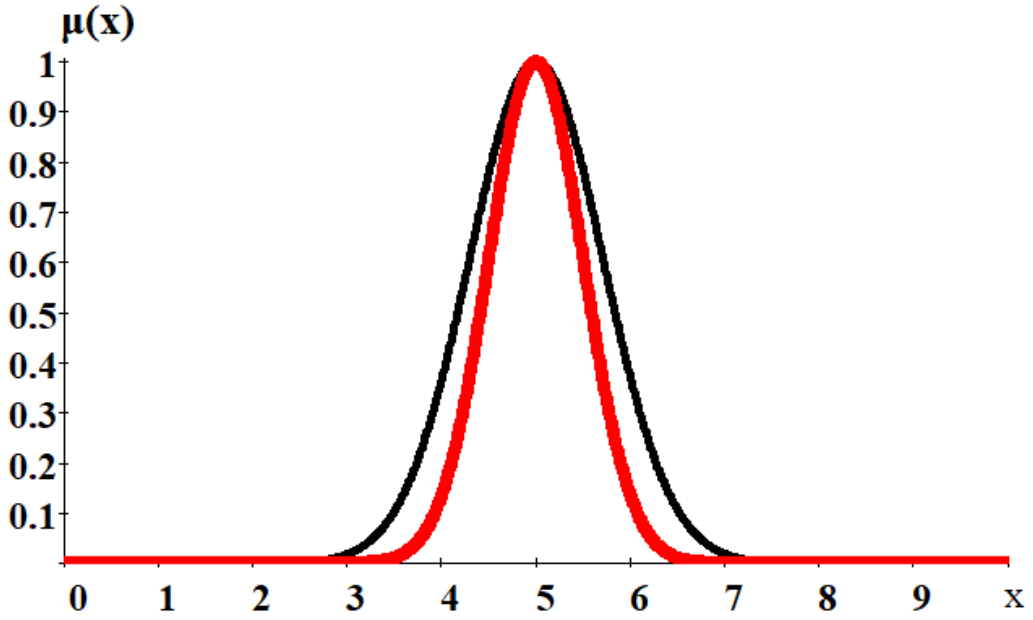

Рисунок 10 – Операция концентрирования гауссовых ФП

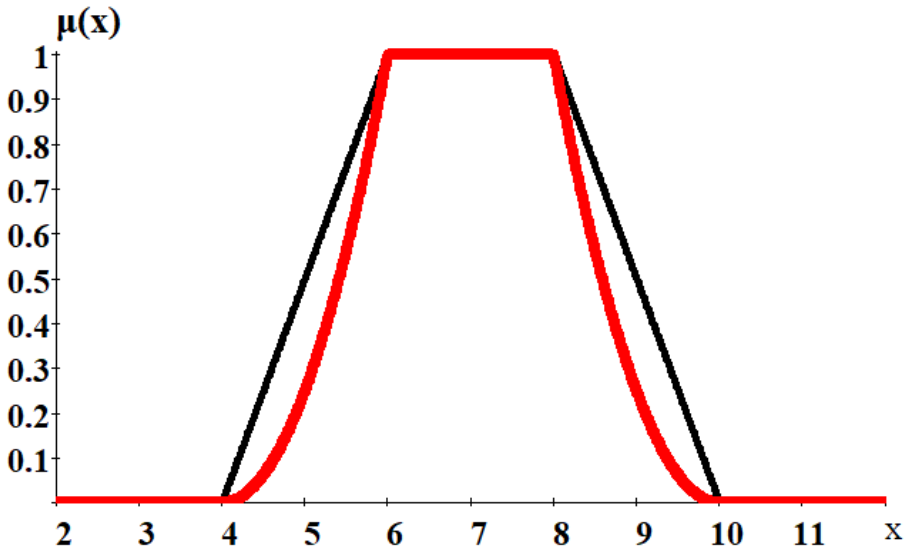

Рисунок 11 – Операция концентрирования трапециевидных ФП

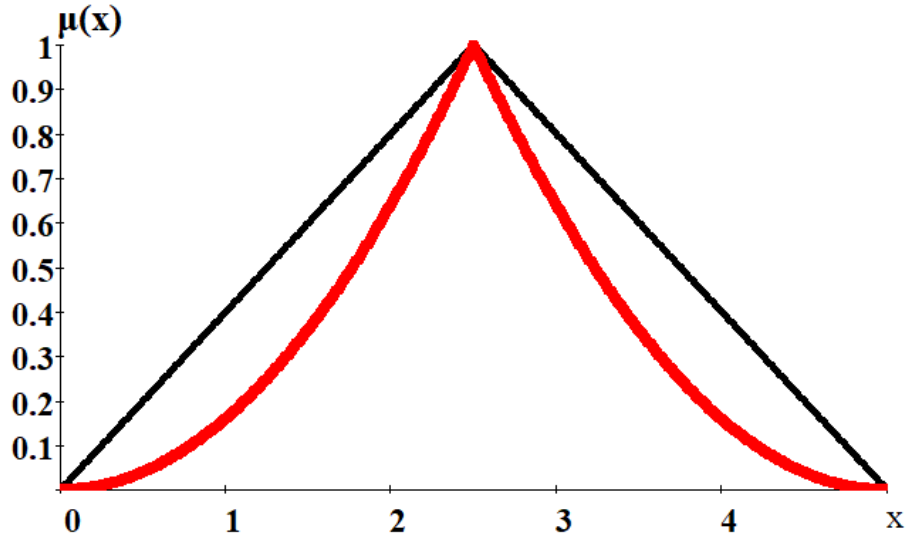

Рисунок 12 – Операция концентрирования треугольных ФП

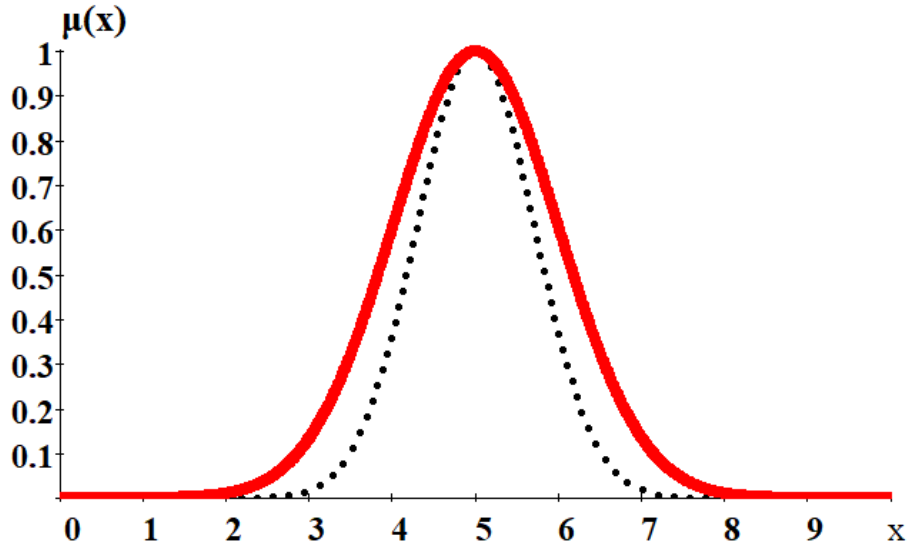

Рисунок 13 – Операция растяжения гауссовых ФП

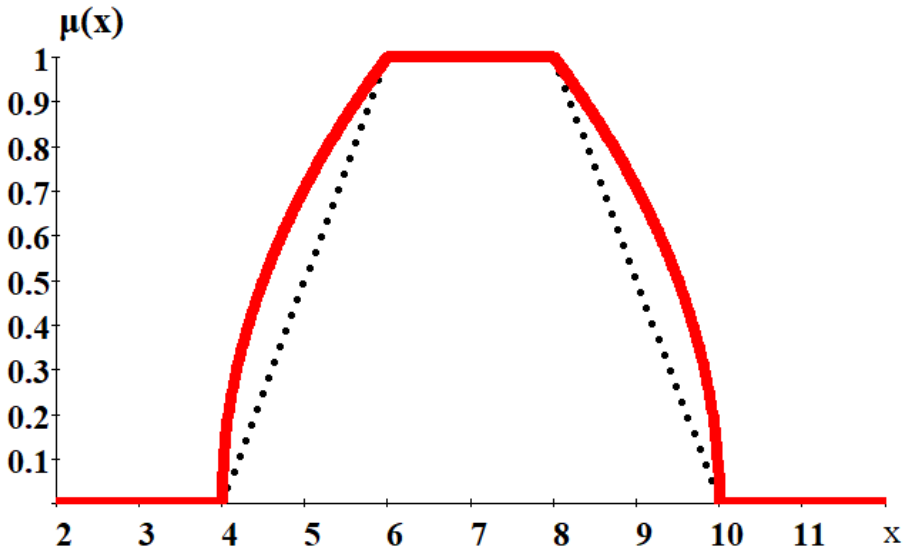

Рисунок 14 – Операция растяжения трапециевидных ФП

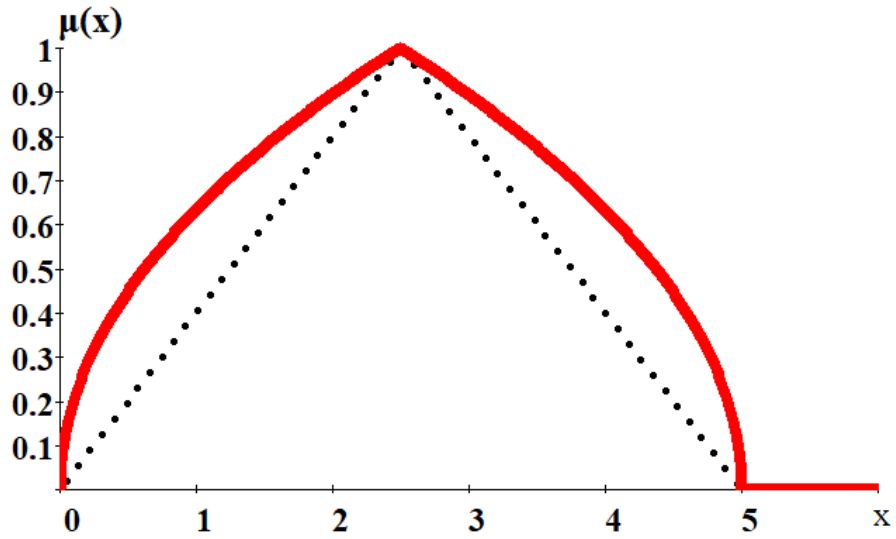

Рисунок 15 – Операция растяжения треугольных ФП

Эти операции используются как лингвистические модификаторы, с помощью которых деформируют функции принадлежности, характеризующие исходные термы.

Применение модификатора «очень» (ему соответствует операция CON(A)) позволяет уменьшить степень нечеткости относительно исходной информации, а модификатора «довольно» («более или менее») (ему соответствует операция DIL(A)) увеличить неопределенность.

Алгебраическая сумма множеств обозначается как A + B и определяется так (2):

$$\forall x \in E \ \mu_{A+B}(X) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \qquad (2)$$

Графическое изображение операции алгебраической суммы для всех ФП показано на рисунках 16-21.

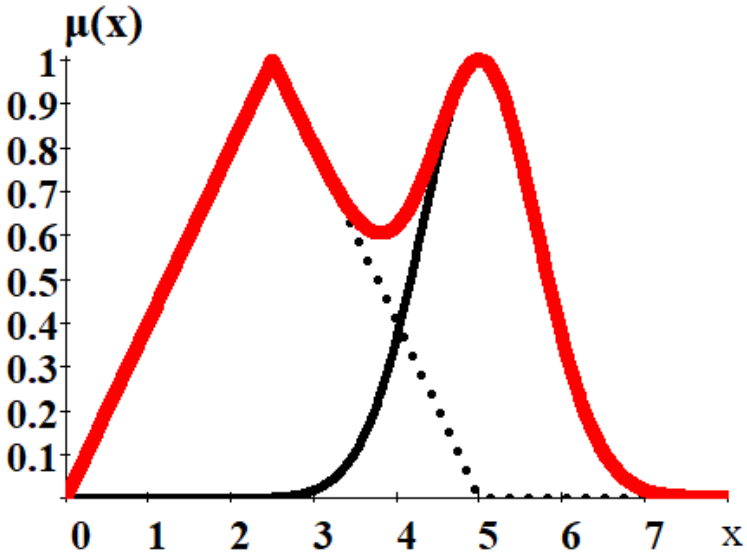

Рисунок 16 – Алгебраическая сумма треугольной и гауссовой ФП

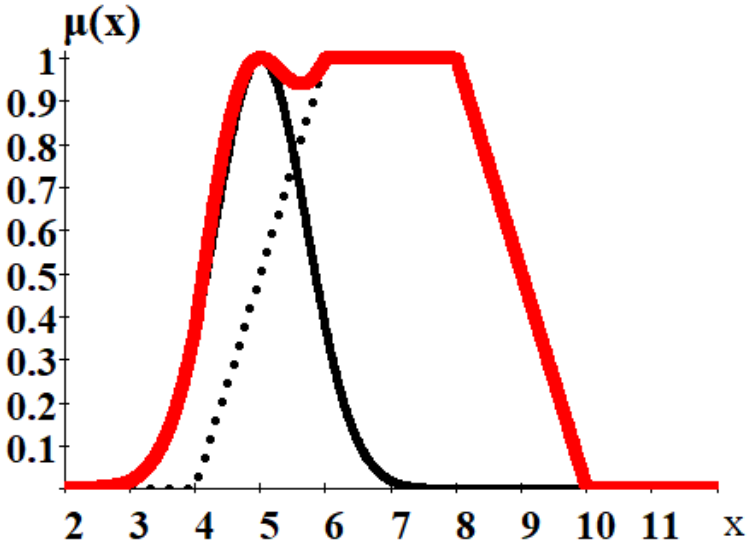

Рисунок 17 – Алгебраическая сумма трапециевидной и гауссовой ФП

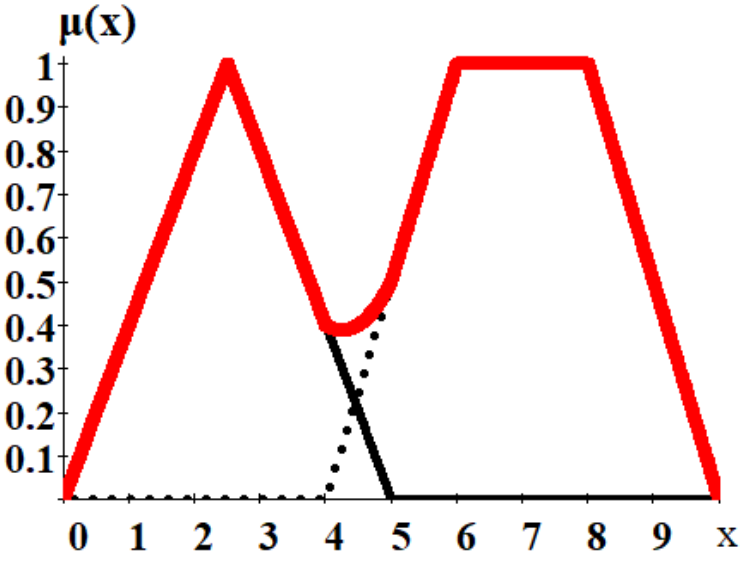

Рисунок 18 – Алгебраическая сумма треугольной и трапециевидной ФП

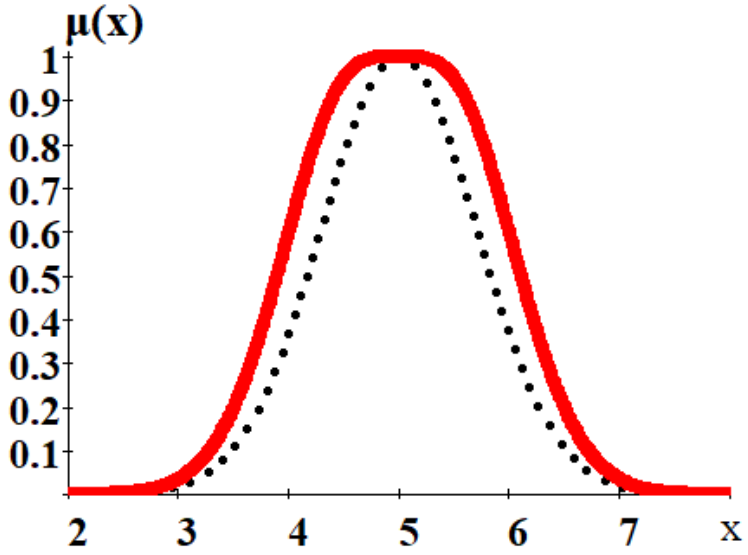

Рисунок 19 – Алгебраическая сумма гауссовых ФП

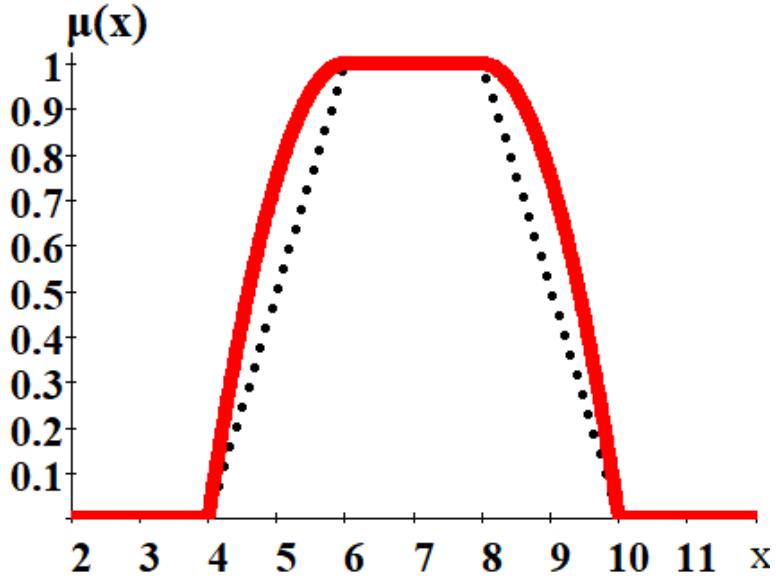

Рисунок 20 – Алгебраическая сумма трапециевидных ФП

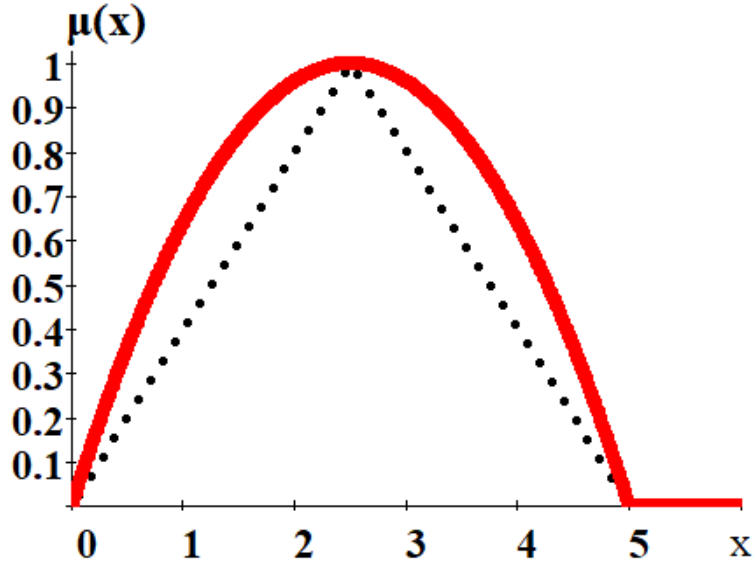

Рисунок 21 – Алгебраическая сумма треугольных ФП

Рассмотренные операции над нечеткими множествами позволяют проводить формализацию составных терминов.

Например, пусть диапазон изменения давления в реакторе определен в виде универсального множества E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Величина параметра, характеризуемого термином «низкое», формализована с помощью нечеткого подмножества A универсального множества E (3):

$$A \overset{\Delta}{=} \text{«низкое»} = 1/1+0.8/2+0.7/3+0.5/4+0.3/5+0.1/6 \qquad (3)$$

В некоторый момент времени оператор, наблюдая за процессом, охарактеризовал давление в реакторе «не очень низкое». Необходимо дать количественную оценку составному термину C $\overset{\Delta}{=}$ «не очень низкое». Применяя операцию концентрирования к подмножеству A, получим (4):

$$A^2 \overset{\Delta}{=} \text{«очень низкое»} = 1/1+0.64/2+0.49/3+0.25/4+0.09/5+0.01/6 \qquad (4)$$

Далее применим к подмножеству $\widetilde{A}^2$ операцию дополнения нечетких подмножеств, получим требуемую количественную оценку (5):

$$C = \overline{A}^{\,2} \overset{\Delta}{=} \text{« не очень низкое»} = 0/1+0.36/2+0.51/3+0.75/4+0.91/5+0.99/6 \qquad (5)$$

Декартово (прямое) произведение нечетких множеств. Декартово произведение четких *P* множеств *A* и *B* – это множество упорядоченных пар (или кортежей) *(x, y),* первый элемент *x* которых относится к множеству *A*, а второй элемент *y* – к множеству *B*.
Например, для двух множеств $A=\{x_1, x_2, x_3\}=\{1; 2; 3\}$, $B=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\{1; 2; 3; 4\}$ декартово произведение равно (6):

$$P = A\times B = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3,y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\} = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что для понятия «кортеж» существен не просто набор элементов, а порядок их следования. В общем виде декартово произведение *P* двух четких множеств *A* и *B* записывается так (7):

$$P = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}. \quad (7)$$

Декартово произведение также является множеством и может служить базисным для описания взаимосвязей между множествами A и B, элементы которых принадлежат разным базисным множествам X и Y.

В случае если A_1, A_2 – нечеткие подмножества универсальных множеств E_1, E_2 соответственно, то ***декартово или прямое произведение*** $A = A_1 \times A_2$, является нечетким подмножеством множества $E = E_1 \times E_2$ с функцией принадлежности (3.8):

$$\mu_{A1\times A2}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}, (x_1, x_2,) \in A_1 \times A_2 \quad (8)$$

Например, пусть имеем универсальные множества $E_1 = E_2 = \{1; 2; 3\}$ и нечеткие подмножества A_1={0,5/1; 1/2; 0,6/3}и A_2={1/1; 0,6/2}. Декартово произведение нечетких подмножеств A_1 и A_2 будет равно (3.9):

$$A_1 \times A_2 = \{0{,}5/(1{,}1);\ 0{,}5/(1{,}2);\ 1/(2{,}1);\ 0{,}6/(2{,}2);\ 0{,}6/(3{,}1);\ 0{,}6/(3{,}2)\}. \quad (9)$$

Декартово произведение нечетких множеств тесно связано с понятием нечеткого отношения.

Объединение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением (10):

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y) = \max(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)). \quad (10)$$

Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением (11):

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y) = \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)). \quad (11)$$

Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением (12):

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y). \quad (12)$$

Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается R_1+R_2 и определяется выражением (13):

$$\mu_{R_1+R_2}(x,y)=\mu_{R_1}(x,y)+\mu_{R_2}(x,y)+\mu_{R_1}(x,y)\cdot\mu_{R_2}(x,y) \qquad (13)$$

Дополнение отношения R обозначается $\overline{R}$ и определяется функцией принадлежности (14):

$$\mu_{\overline{R}}(x,y)=1-\mu_R(x,y) \qquad (14)$$

Композиция (свертка) двух нечетких отношений. Пусть R_1 - нечеткое отношение R_1: $(X \times Y) \to [0, 1]$ между X и Y, и R_2 - нечеткое отношение R_2: $(Y \times Z) \to [0, 1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_2 \bullet R_1$, определенное через R_t и R_2 выражением (15):

$$\mu_{R_1R_2}(x,z)=\bigvee_y\left[\mu_{R_1}(x,y)\wedge\mu_{R_2}(x,z)\right]=\max\left[\min\left(\mu_{R_1}(x,y),\mu_{R_2}(x,z)\right)\right] \qquad (15)$$

где символом "$\bigvee_y$" обозначена операция выбора наибольшего по y значения, называется (max-min) – композицией ((max-min) - сверткой) отношений R_1 и R_2.

Пример. Пусть отношения R_1 и R_2 определяются следующим образом (таблица 1):

Таблица 1 – Отношения R_1 и R_2

R_1	**y_1**	**y_2**	**y_3**
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

R_2	**z_1**	**z_2**	**z_3**	**z_4**
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

Тогда получим результат (таблица 2):

Таблица 2 – Результат композиции отношений

$R_1 \bullet R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

При этом (16):

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x_1, z_1) = [\mu_{R_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{R_2}(y_1, z_1)] \vee [\mu_{R_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{R_2}(y_2, z_1)] \vee$$

$$\vee [\mu_{R_1}(x_1, y_3) \wedge \mu_{R_2}(y_3, z_1)] = (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) =$$

$$= 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3;$$

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x_1, z_2) = (0{,}1 \wedge 0) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}4 \wedge 1) = 0 \vee 0{,}6 \vee 0{,}4 = 0{,}6; \qquad (16)$$

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x_1, z_3) = 0{,}1$$

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x_2, z_4) = 0{,}5$$

Замечание. В данном примере вначале использован “аналитический” способ композиции отношений R_1 и R_2 то есть i-я строка R_1 “умножается” на j-й столбец R_2 с использованием операции $\wedge$, полученный результат “свертывается” с использованием операции V в $\mu_R(x_i, z_j)$, т.е. (max-min) – композиция представляет операцию, аналогичную умножению матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используются операции нахождения минимального ($\wedge$) и максимального (V) элементов соответственно.

(max -*) – **композиция.** В выражении $\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)]$ для (max - min) - композиции отношений R_1 и R_2 операцию $\wedge$ (то есть min) можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: ассоциативность, и монотонность (в смысле не убывания) по каждому аргументу, тогда (17):

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) * \mu_{R_2}(y, z)] \qquad (17)$$

В частности, операция $\wedge$ может быть заменена алгебраическим умножением, тогда говорят о (**max-prod**) - композиции.

ТЕМА №4. АЛГОРИТМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА МАМДАНИ И ТАКАГИ-СУГЕНО

Результирующую выходную переменную можно вычислять различными методами, среди которых наибольшее распространение получили методы (алгоритмы) Мамдани и Такаги – Сугено. Рассмотрим каждый из них подробнее.

И. Мамдани (Ebrahim Mamdani - английский инженер и математик) обобщил такой подход к вычислению выходных переменных на нечетко заданные входные и выходные переменные.

1. Нечеткость (активизация): находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $B_1(y_0)$, $B_2(y_0)$.

Активизация – определение степени истинности условий всех правил: четкие значения входных переменных x1, x2, ..., xn подставляются в условия всех правил, т.е. вычисляются значения функций принадлежности для термов T1, T2, ..., Tn в соответствии с выбранным методом (минимаксным или алгебраическим), определяются степени истинности результатов операций И, ИЛИ и НЕ в каждом из условий.

2. Нечеткий вывод (***импликация***) – определение уровней «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции min) (1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \\ \alpha_2 &= A_2(x_0) \wedge B_2(y_0). \end{aligned} \qquad (1)$$

где через “$\wedge$”, как и раньше, обозначена операция логического минимума (min), затем находятся усеченные функции принадлежности (2):

$$\begin{aligned} C'_1(z) &= (\alpha_1 \wedge C_1(z)), \\ C'_2(z) &= (\alpha_2 \wedge C_2(z)). \end{aligned} \qquad (2)$$

3. Композиция (***агрегирование***) – с использованием операции max (обозначаемой как “$\vee$”) объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности (3):

$$\mu_\Sigma(z) = C(z) = C'_1(z) \vee C'_2(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z)) \qquad (3)$$

4. Приведение к четкости для нахождения z_0 (***дефаззификация***) проводится, например, центроидным методом (как центр тяжести для кривой $\mu_\Sigma(z)$) (4):

$$z_0 = \frac{\int\limits_{\Omega} z\mu_\Sigma(z)dz}{\int\limits_{\Omega} \mu_\Sigma(z)dz} \tag{4}$$

В результате объединения для каждой выходной переменной будет получено некоторое нечеткое множество со своей функцией принадлежности. Эта функция принадлежности (ФП) не будет относиться ни к одному из стандартных типов и не будет достигать единицы.

Ей также не будет соответствовать какое-то осмысленное название, т.е. это нечеткое множество не будет термом. Это множество нужно только для того, чтобы получить числовое значение выходной переменной одним из методов дефаззикации.

Нечеткие системы М. Сугено (Mihio Sugeno – японский математик) являются обобщением логических систем такого типа, т.е. они совмещают свойства нечеткой логики и четкой математики. Алгоритм Сугено следует применять, если есть несложная, но адекватная математическая модель – функциональная зависимость между выходными и входными переменными. Причем коэффициенты этой модели различны для разных ситуаций, а выбор между ситуациями осуществляется с помощью нечетких правил.

Фаззификация проводится только для входных переменных, а для выходных переменных задаются четкие термы, состоящие из названий и формул, соответствующих этим названиям.

Алгоритм Такаги-Сугено, предложенный Сугено и Такаги, описывается следующим образом.

1. ***Формирование базы правил*** систем нечеткого вывода и фаззификация входных переменных. В базе правил используются только правила нечетких продукций (предположим, что база состоит из двух правил с двумя входами и одним выходом) в форме (5):

Правило 1: ЕСЛИ x1 есть A11 И x2 есть A12 ТО $y = c_{11}\, x1 + c_{12}\, x2 + c_{10}$,
Правило 2: ЕСЛИ x1 есть A21 И x2 есть A22 ТО $y = c_{21}\, x1 + c_{22}\, x2 + c_{20}$. (5)

где c_{ij} – весовые коэффициенты компонентов вектора, c_{i0} – смещение.

При этом значение выходной переменной y в заключении определяется как действительное число.

2. ***Агрегирование*** подусловий в нечетких правилах продукций. Для нахождения степени истинности условий всех правил нечетких продукций, как правило, используется логическая операция min-конъюнкции (6):

$$\begin{aligned} a1 &= \min \{mA11(x1'), mA12(x2')\}, \\ a2 &= \min \{mA21(x1'), mA22(x2')\}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Для выполнения агрегирования могут использоваться и другие логические операции. Правила, степень истинности условий которых отлична от нуля, считаются активными и используются для дальнейших расчетов.

3. ***Активизация*** подзаключений в нечетких правилах продукций. Во-первых, с использованием min-активизации, как и в алгоритме Мамдани, находятся значения степеней истинности всех заключений правил нечетких продукций. Во-вторых, осуществляется расчет обычных (не нечетких) значений выходных переменных каждого правила. Это выполняется с использованием формул для заключения (7):

$$\begin{aligned} y1' &= c11\ x1' + c12\ x2' + c10, \\ y2' &= c21\ x1' + c22\ x2' + c20. \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь вместо x1 и x2 подставляются значения входных переменных до этапа фаззификации.

4. ***Аккумуляция*** заключений нечетких правил продукций. Фактически отсутствует, поскольку расчеты осуществляются с обычными действительными числами y_j.

5. ***Дефаззификация*** выходных переменных. Используется модифицированный вариант в форме метода центра тяжести для одноточечных множеств (8):

$$y' = (a1\ y1' + a2\ y2')/(a1 + a2). \qquad (8)$$

При этом не требуется проведения предварительного аккумулирования активизированных заключений отдельных правил.

Для наглядной иллюстрации рассмотренных выше алгоритмов реализуем каждый из них в среде MATLAB с использованием пакета Fuzzy Logic Toolbox.

Алгоритм Мамдани реализуем так: в окне FIS Editor зададим 2 входные переменные input1 и input2, а также 1 выходную переменную output1 (рисунок 1).

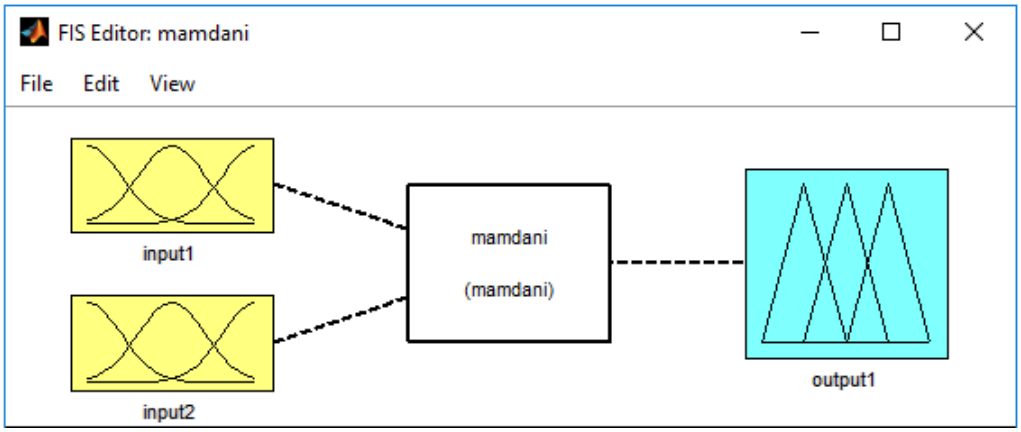

Рисунок 1 – Окно FIS Editor для системы Мамдани

Далее для каждой переменной в окне Membership function Editor зададим по 3 треугольные функции принадлежности и диапазоны изменения каждой переменной – для входных [-1;1], а для выходной [0;1] (рисунок 2).

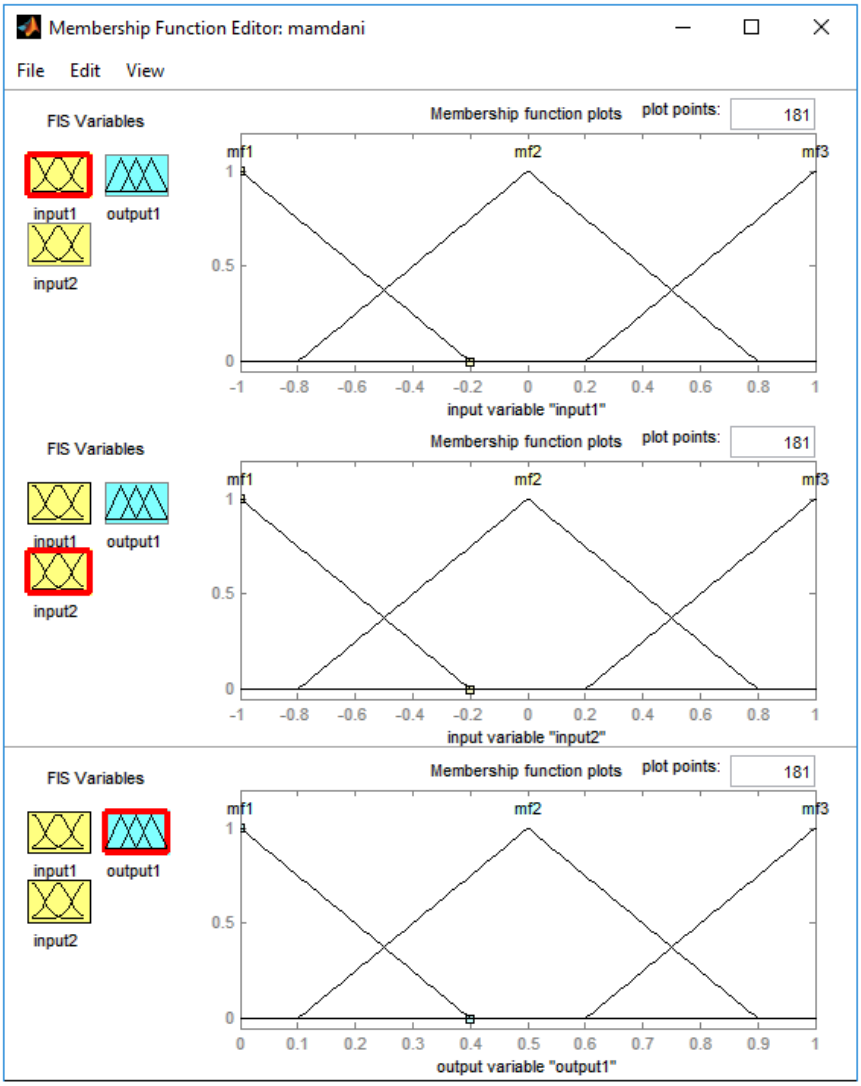

Рисунок 2 – Окно Membership function Editor для каждой переменной

Составим набор правил (базу знаний) для демонстрации работы данного алгоритма вывода. Правила составим по принципу: ЕСЛИ ... И ..., ТО ... . (рисунок 3).

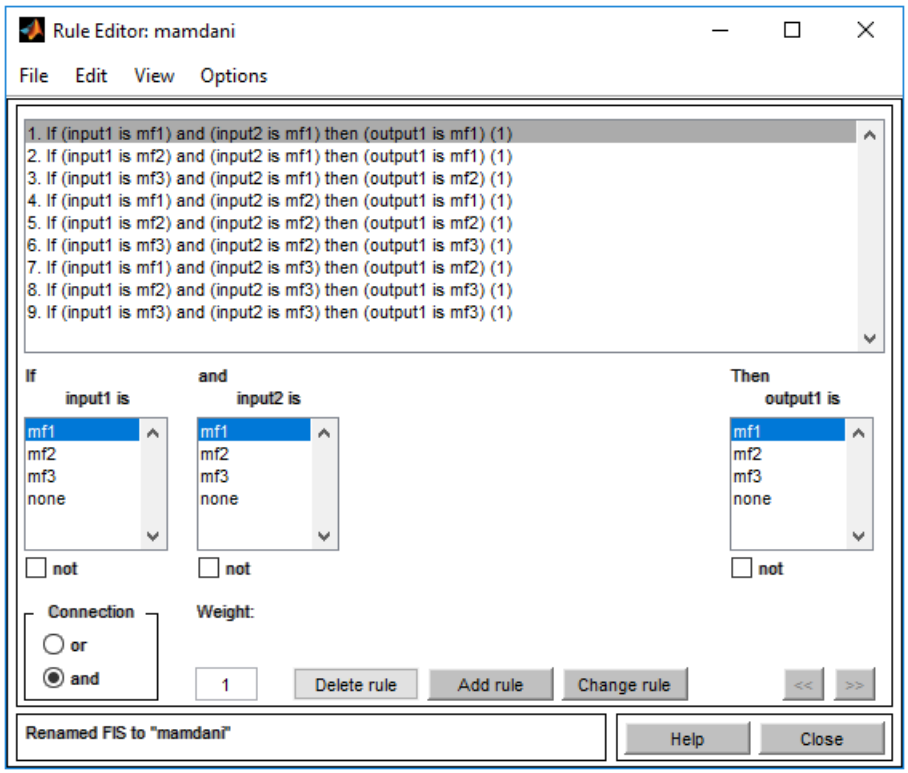

Рисунок 3 – Окно Rule Editor

Реализовав базу знаний, в окне Rule Viewer можно увидеть результат работы алгоритма Мамдани при разных значениях входных переменных (рисунки 4 – 6).

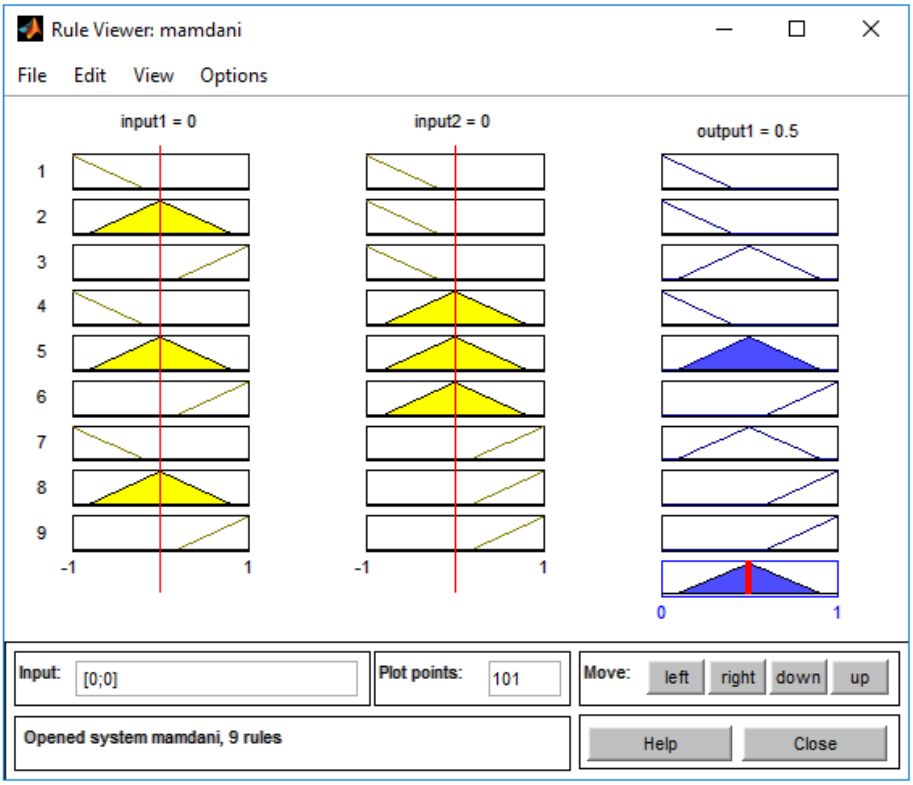

Рисунок 4 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [0;0]

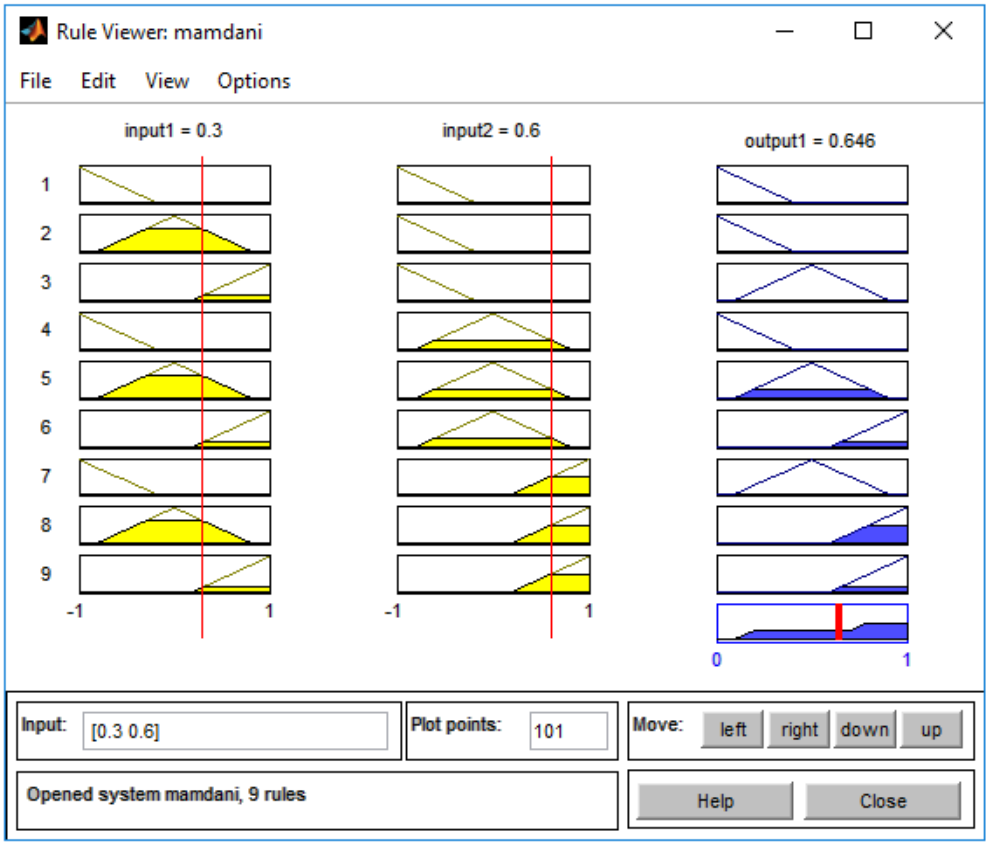

Рисунок 5 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [0.3;0.6]

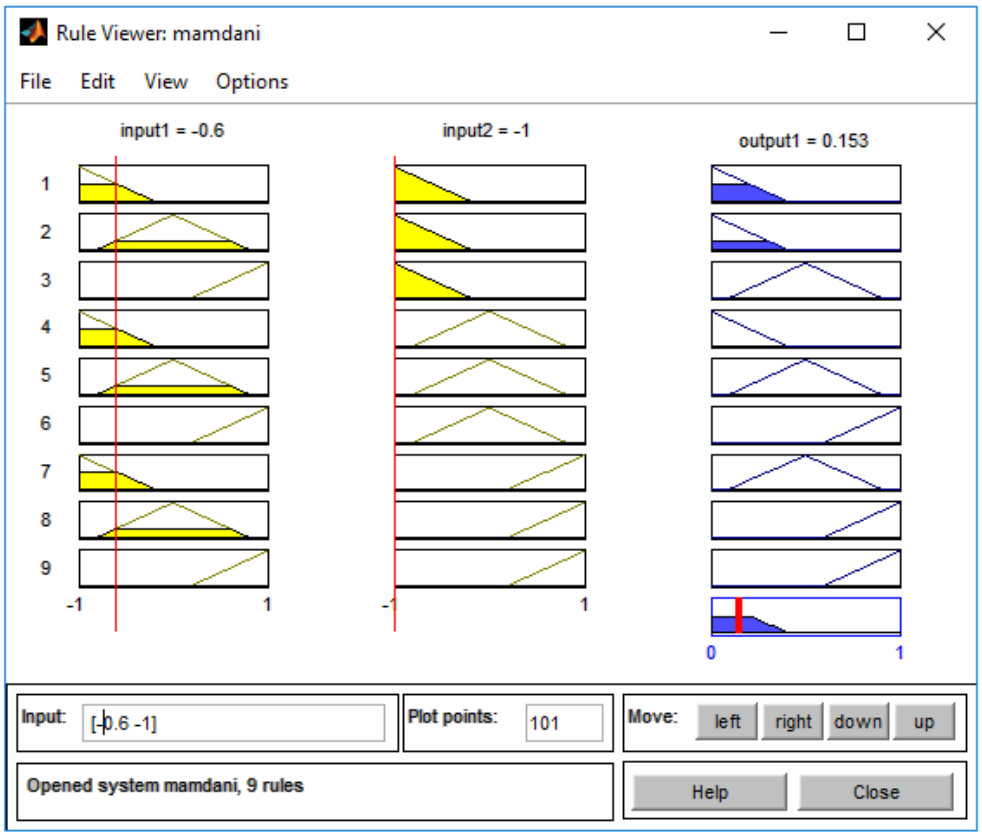

Рисунок 6 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [-0.6;-1]

Как видно из рисунков 4 – 6, в каждом из случаев итоговое нечеткое множество имеет совершенно разный вид.

Также, используя Fuzzy Logic Toolbox в окне Surface Editor можно просмотреть поверхность вывода для созданной базы знаний. В данном случае она будет иметь вид (рисунок 7).

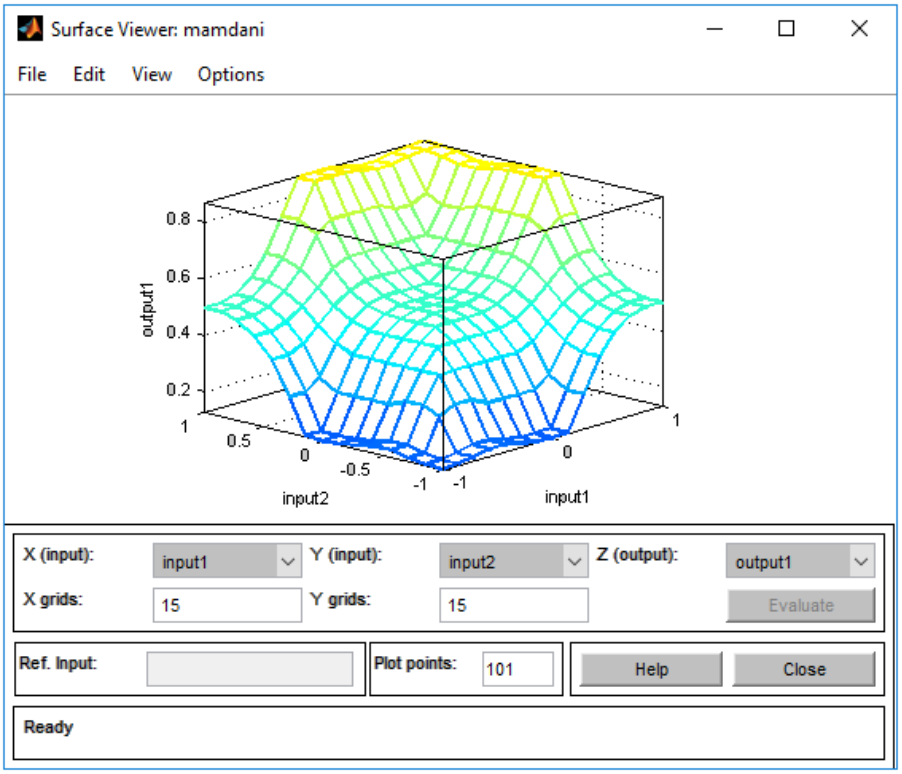

Рисунок 7 – Окно Surface Editor

Графически алгоритм вывода Мамдани выглядит так (рисунок 8).

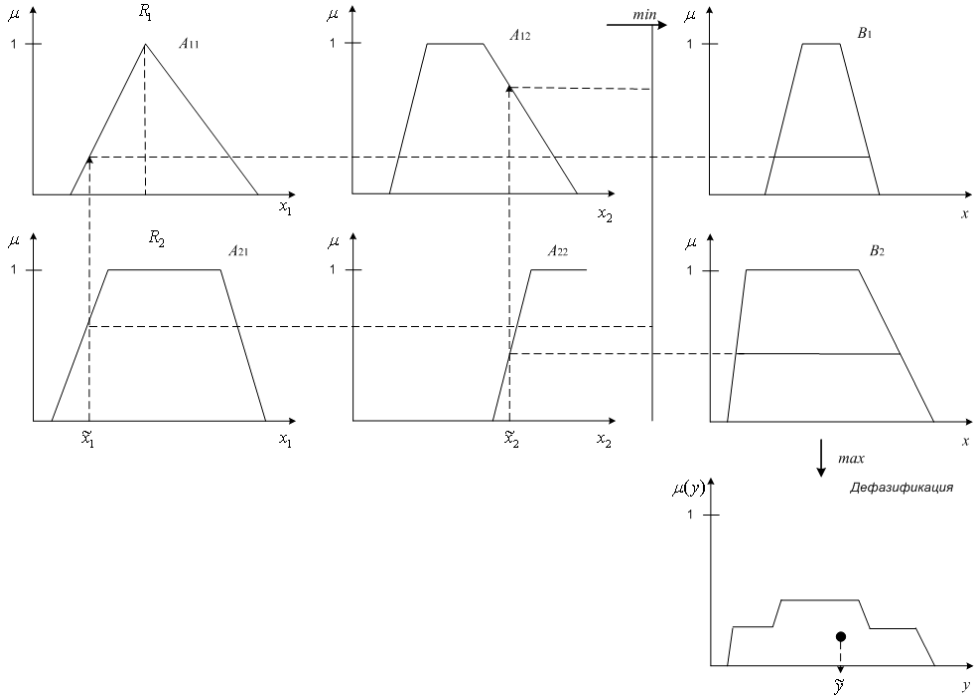

Рисунок 8 – Алгоритм вывода Мамдани

Теперь для сравнения реализуем систему нечеткого вывода по алгоритмы Такаги – Сугено (рисунок 9).

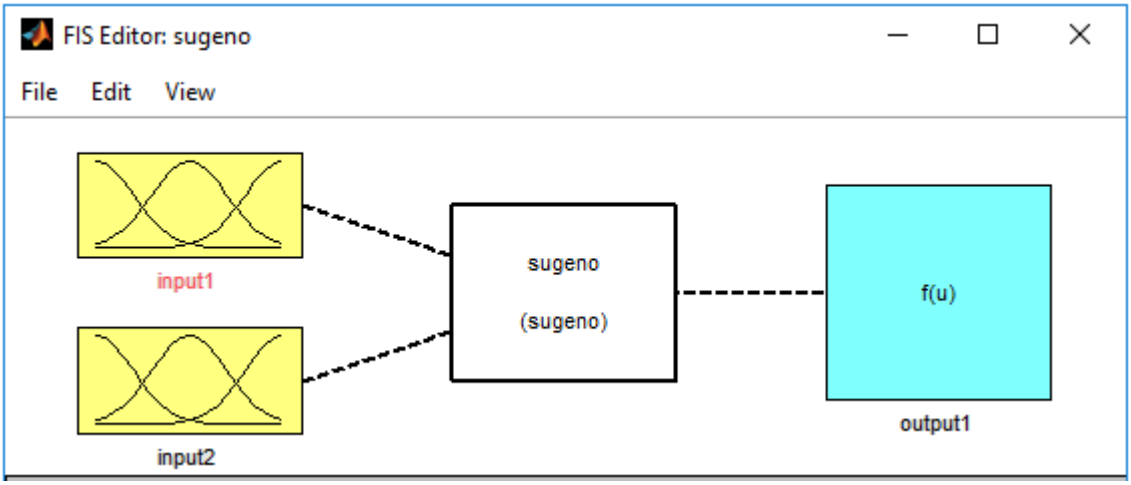

Рисунок 9 – Окно FIS Editor для системы Такаги – Сугено

Для наглядного сравнения принципов работы каждого из рассмотренных алгоритмов вывода создадим те же 2 входные переменные и 1 выходную переменную с 3 треугольными функциями принадлежности (рисунок 2) и создадим базу знаний, аналогичную реализованной ранее (рисунок 3).

Теперь рассмотрим результат нечеткого вывода при различных значениях входных переменных (рисунки 10 – 12).

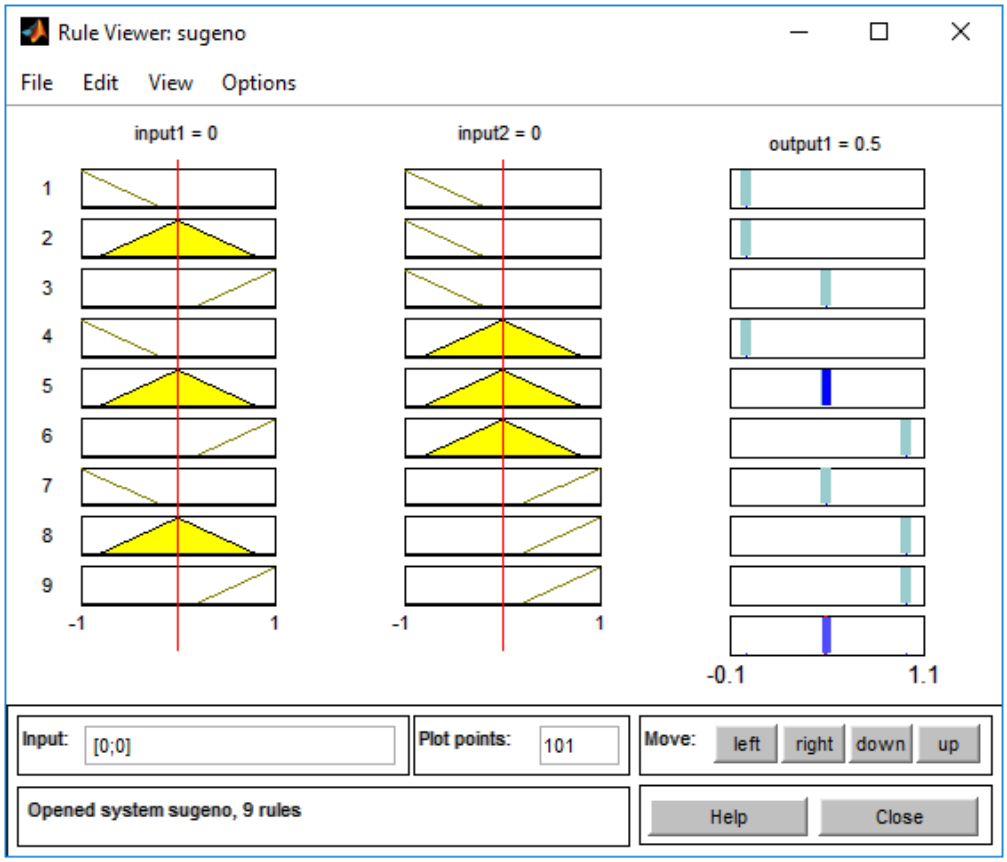

Рисунок 10 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [0;0]

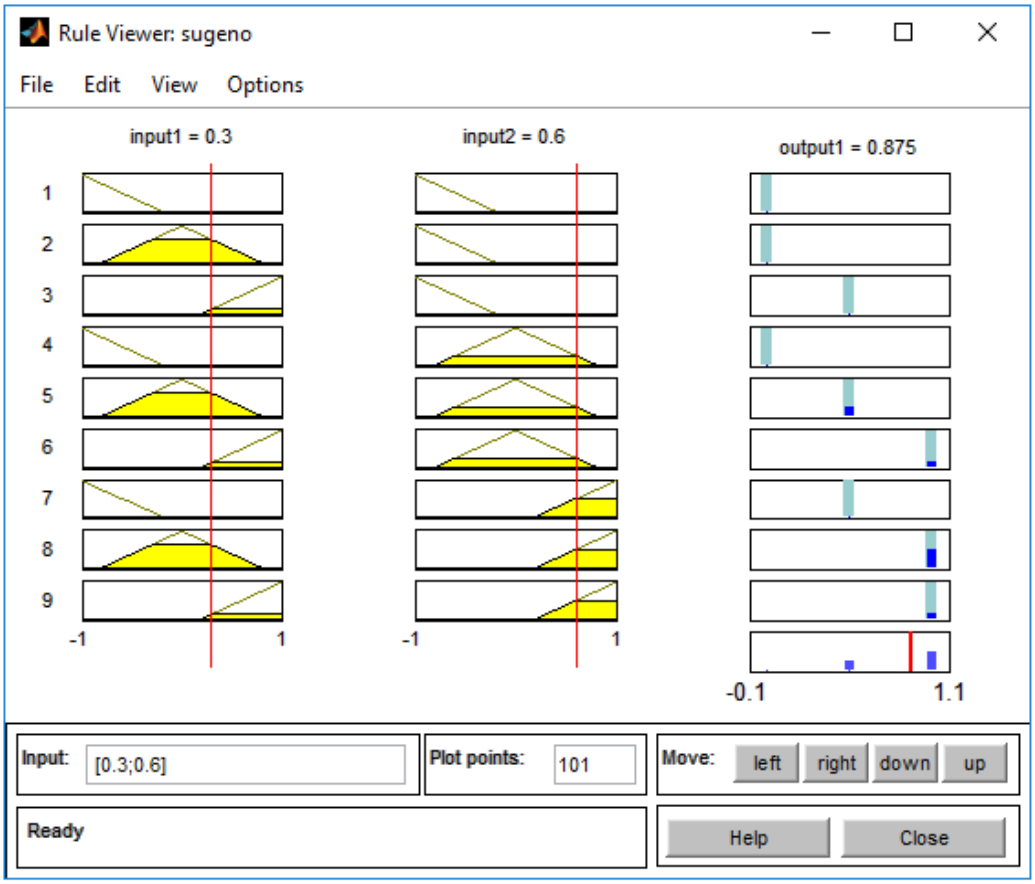

Рисунок 11 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [0.3;0.6]

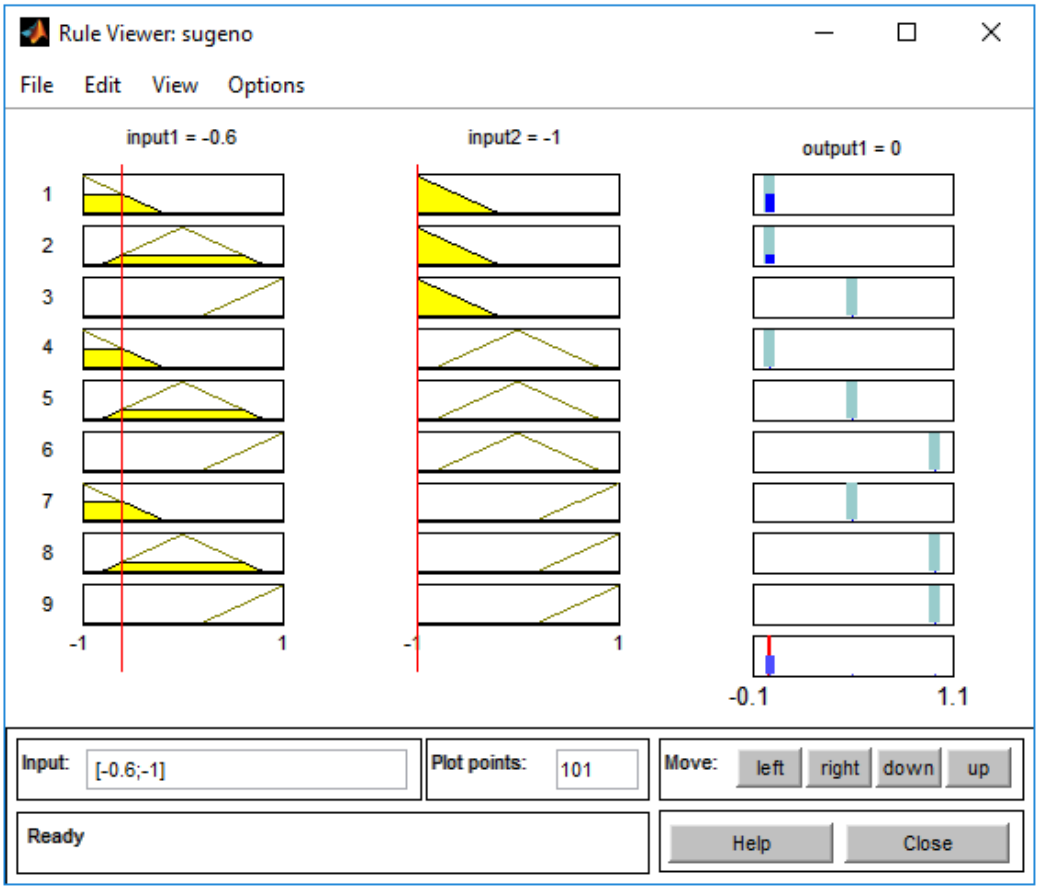

Рисунок 12 – Окно Rule Viewer для значений входных переменных [-0.6;-1]

Поверхность вывода при использовании алгоритма Такаги – Сугено имеет вид (рисунок 13).

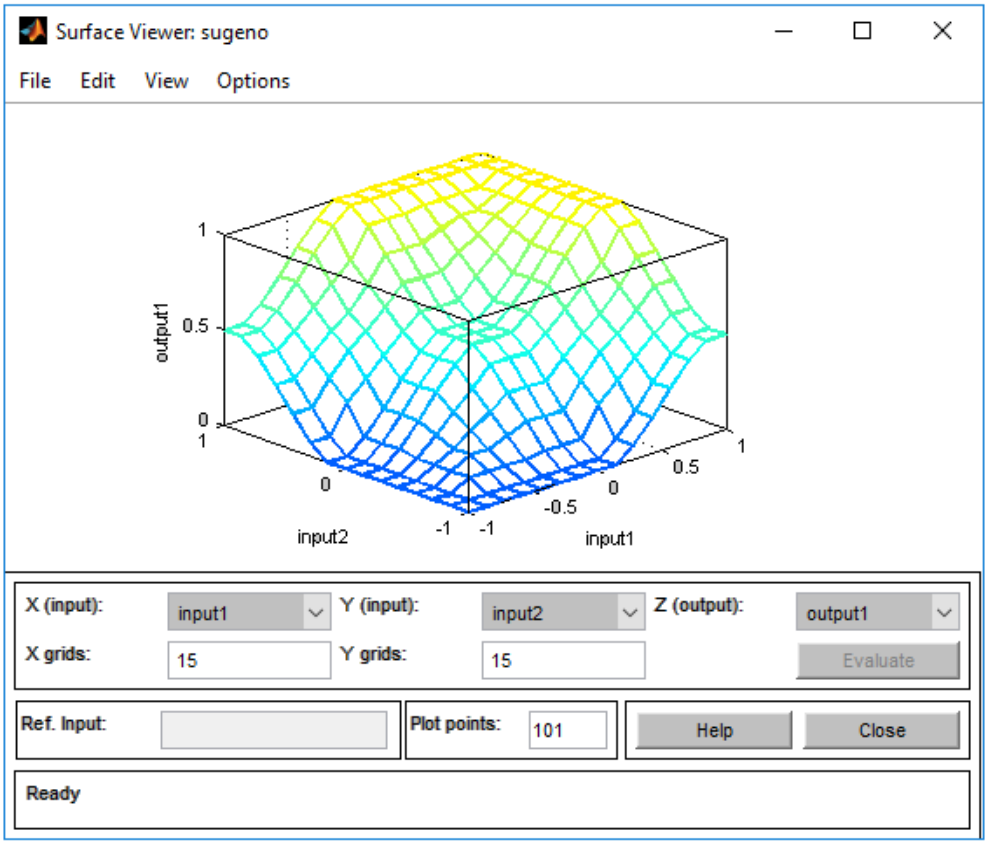

Рисунок 13 – Окно Surface Editor

Алгоритм вывода Такаги – Сугено графически изображен на рисунке 14.

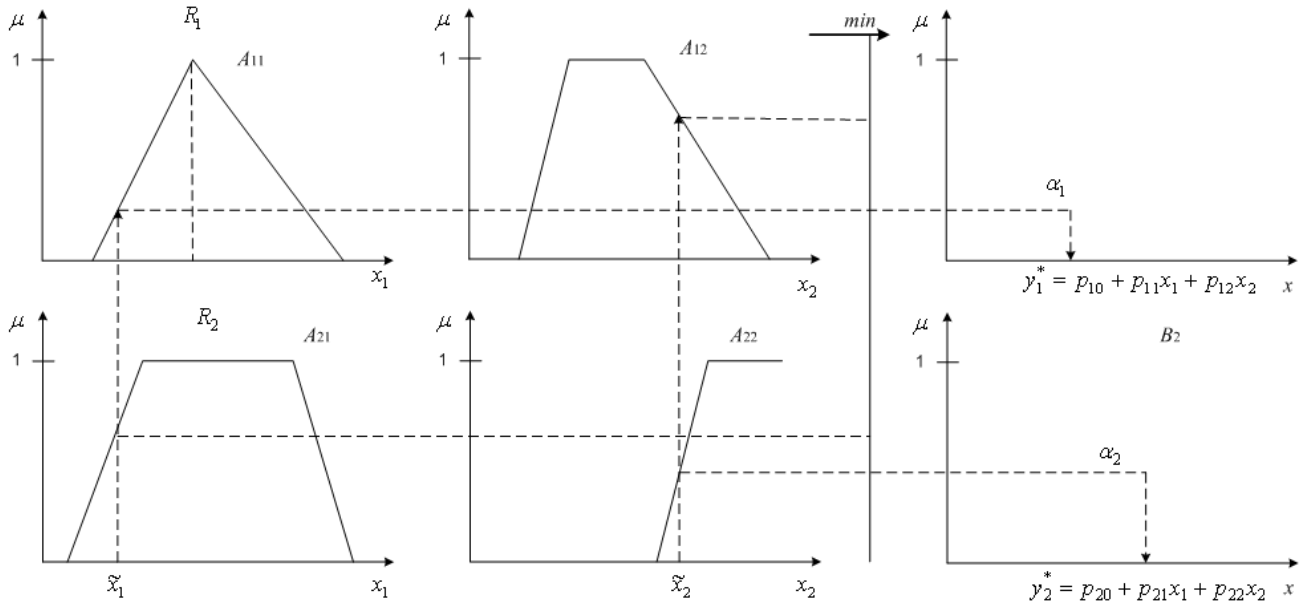

Рисунок 14 – Алгоритм вывода Такаги – Сугено

Полученные рисунки наглядно демонстрируют, что алгоритм Такаги – Сугено выдает другой результат по сравнению с алгоритмом Мамдани.

ТЕМА 5. ПРОЦЕДУРЫ ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ

Дефаззификация в системах нечеткого вывода – это процесс перехода от функции принадлежности выходной лингвистической переменной к её четкому (числовому) значению.

Суть операции дефаззификации заключается в преобразовании итогового нечеткого множества в четкое значение. Этап дефаззификации считается законченным, когда для каждой из выходных лингвистических переменных будут определены итоговые количественные значения в виде некоторого действительного числа, т.е. в виде: z_1, z_2, …, z_n, где n – общее количество выходных лингвистических переменных в базе знаний системы нечеткого вывода.

Для выполнения численных расчетов на этапе дефаззификации могут быть использованы следующие методы: "центроид" (centroid of area), биссектрисы площади – "бисектор" (bisector of area), "средний максимум" (mean of max, mom), "наименьший максимум" (smallest of max, som), "наибольший максимум" (largest of max, lom). Рассмотрим каждый из них подробнее.

Геометрической интерпретацией метода "***центроид***" является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества, значение выходной переменной будет определяться по формуле (1):

$$z_0 = \frac{\int\limits_{\Omega} z\mu_{\Sigma}(z)dz}{\int\limits_{\Omega} \mu_{\Sigma}(z)dz}, \qquad (1)$$

где z_0 – значение выходной переменной; z – переменная, соответствующая выходной лингвистической переменной и принимающая значения от z = min до z = max; min и max – левая и правая точки интервала носителя нечёткого множества; $\mu_{\Sigma}(z)$ – функция принадлежности нечеткого множества.

Метод дефаззификации "***бисектор***" предполагает определение такой точки на оси абсцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под кривой функции принадлежности на две равные части, значение выходной переменной будет определяться из уравнения (2):

$$\int_{\min}^{u} \mu_{\Sigma}(z)dz = \int_{u}^{\max} \mu_{\Sigma}(z)dz, \qquad (2)$$

где u – биссектриса площади.

Метод дефаззификации "***средний максимум***" заключается в нахождении среднего арифметического элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей (3):

$$z_0 = \frac{\int_G zdz}{\int_G dz}, \qquad (3)$$

где G – множество элементов из интервала Ω, имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству.

Метод дефаззификации "***наименьший максимум***" заключается в выборе наименьшего из чисел z_1, z_2, …, z_n, имеющих максимальные степени принадлежностей (5.4):

$$z_0 = \min\{G\}. \qquad (4)$$

Соответственно, метод дефаззификации "***наибольший максимум***" заключается в выборе наибольшего из чисел z_1, z_2, …, z_n, имеющих максимальные степени принадлежностей (5):

$$z_0 = \max\{G\}. \qquad (5)$$

В прошлой лекции была рассмотрена типовая система нечеткого вывода Мамдани, где были использованы 2 входные переменные и 1 выходная переменная. База знаний включала в себя 9 правил. Для наглядного сравнения методов дефаззификации проверим итоговое выходное значение при использовании каждого из методов дефаззификации (рисунок 1) при одинаковых входных условиях [0.3;0.6].

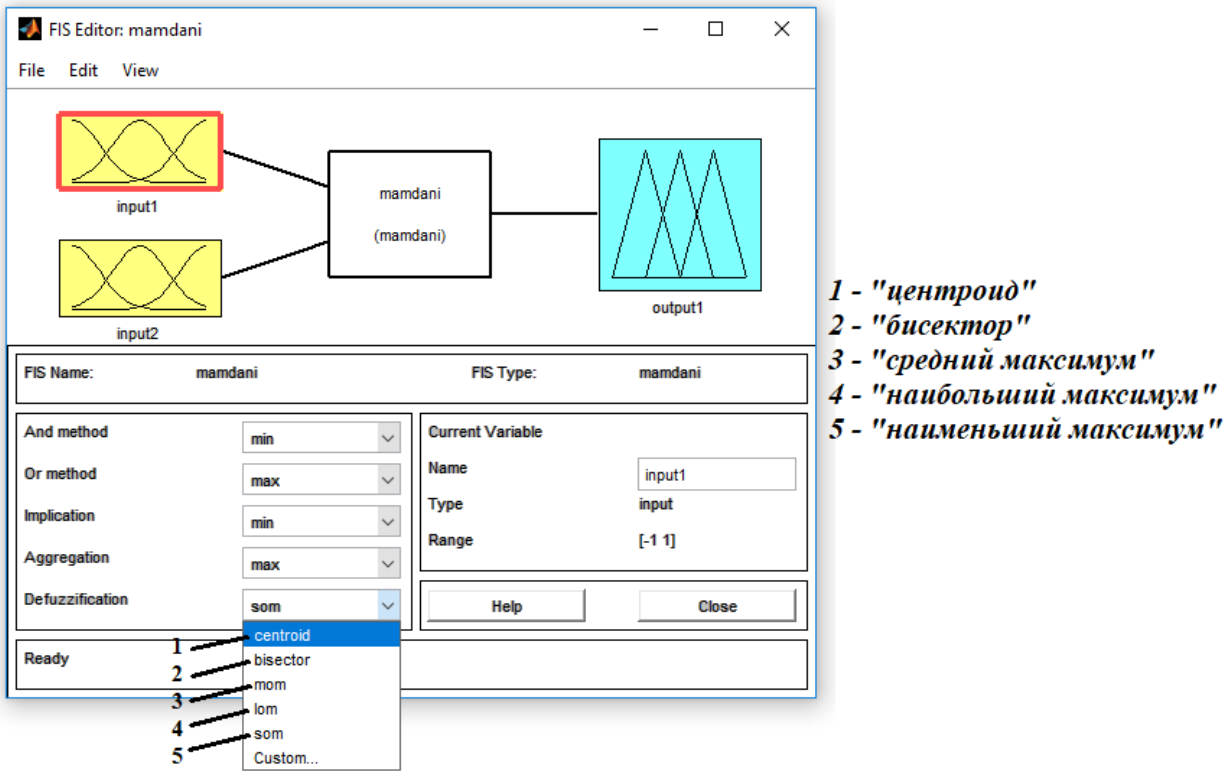

Рисунок 1 – Методы дефаззификации, используемые в пакете Fuzzy Logic Toolbox

Так, при использовании метода дефаззификации "центроид" значение выходной переменной равно 0.646, что видно из окна Rule Viewer в пакете Fuzzy Logic Toolbox. Фрагмент этого окна приведен ниже на рисунке 2, а в полном размере оно приведено в прошлой лекции.

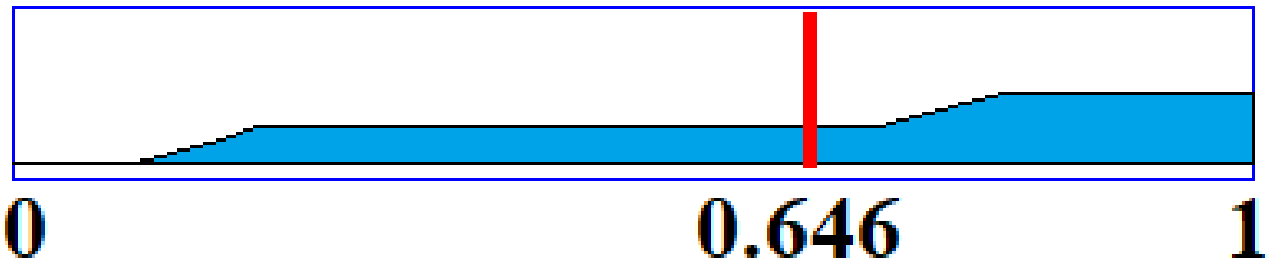

Рисунок 2 – Фрагмент окна Rule Viewer для метода дефаззификации "центроид"

При использовании метода "бисектор" значение выходной переменной при тех же начальных условиях было равно 0.7 (рисунок 3).

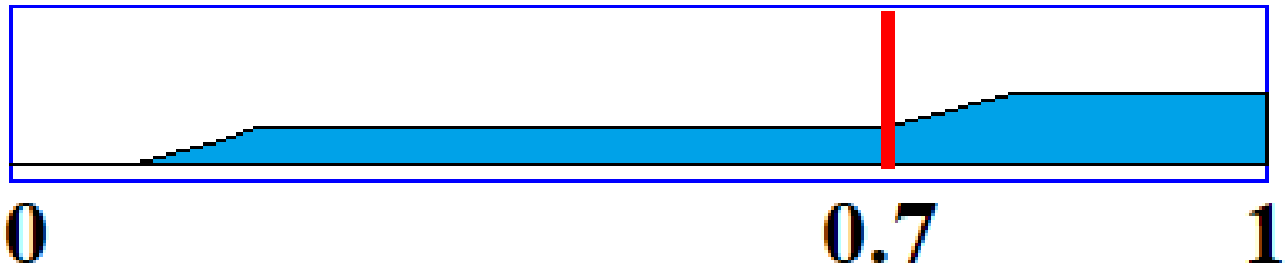

Рисунок 3 – Фрагмент окна Rule Viewer для метода дефаззификации "бисектор"

Используя этот метод дефаззификации для тех же самых начальных условий, получим выходное значение 0.9 (рисунок 4).

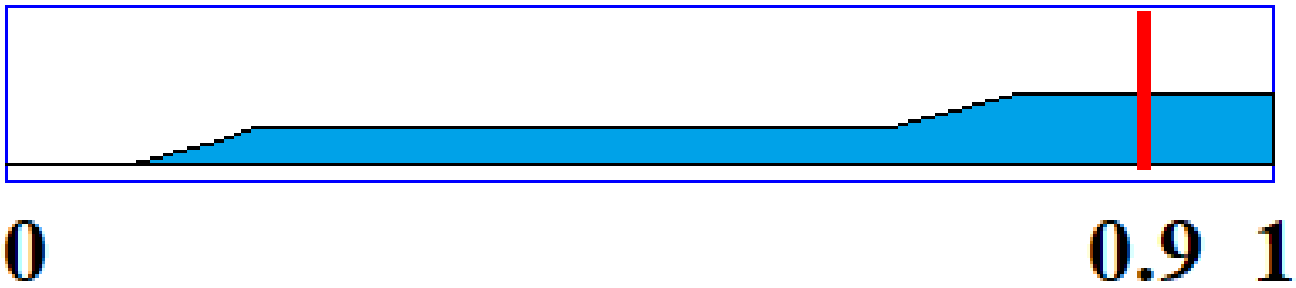

Рисунок 4 – Фрагмент окна Rule Viewer для метода дефаззификации "средний максимум"

Метод дефаззификации "наибольший максимум" выдает значение 1, что собственно и следует из определения данного метода (рисунок 5).

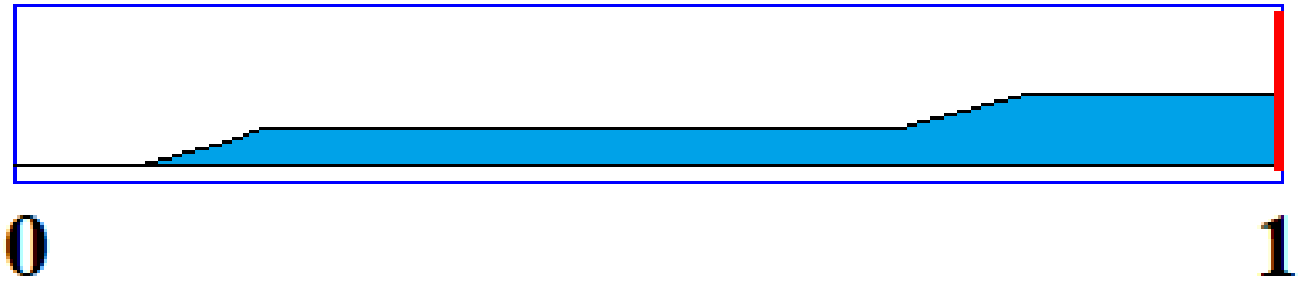

Рисунок 5 – Фрагмент окна Rule Viewer для метода дефаззификации "наибольший максимум"

Наконец, при использовании метода "наименьший максимум" получим значение 0.8 (рисунок 6).

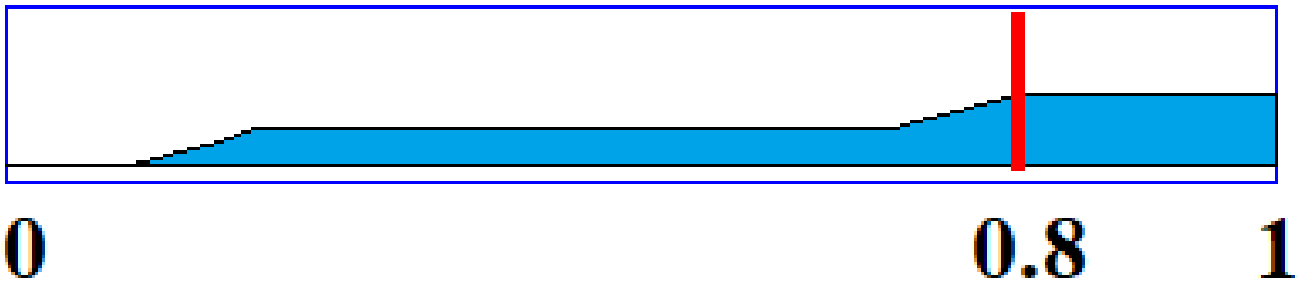

Рисунок 6 – Фрагмент окна Rule Viewer для метода дефаззификации "наименьший максимум"

Если рассмотреть произвольно заданное нечеткое множество, то можно получить следующий результат дефаззификации при одинаковых начальных условиях (рисунок 7).

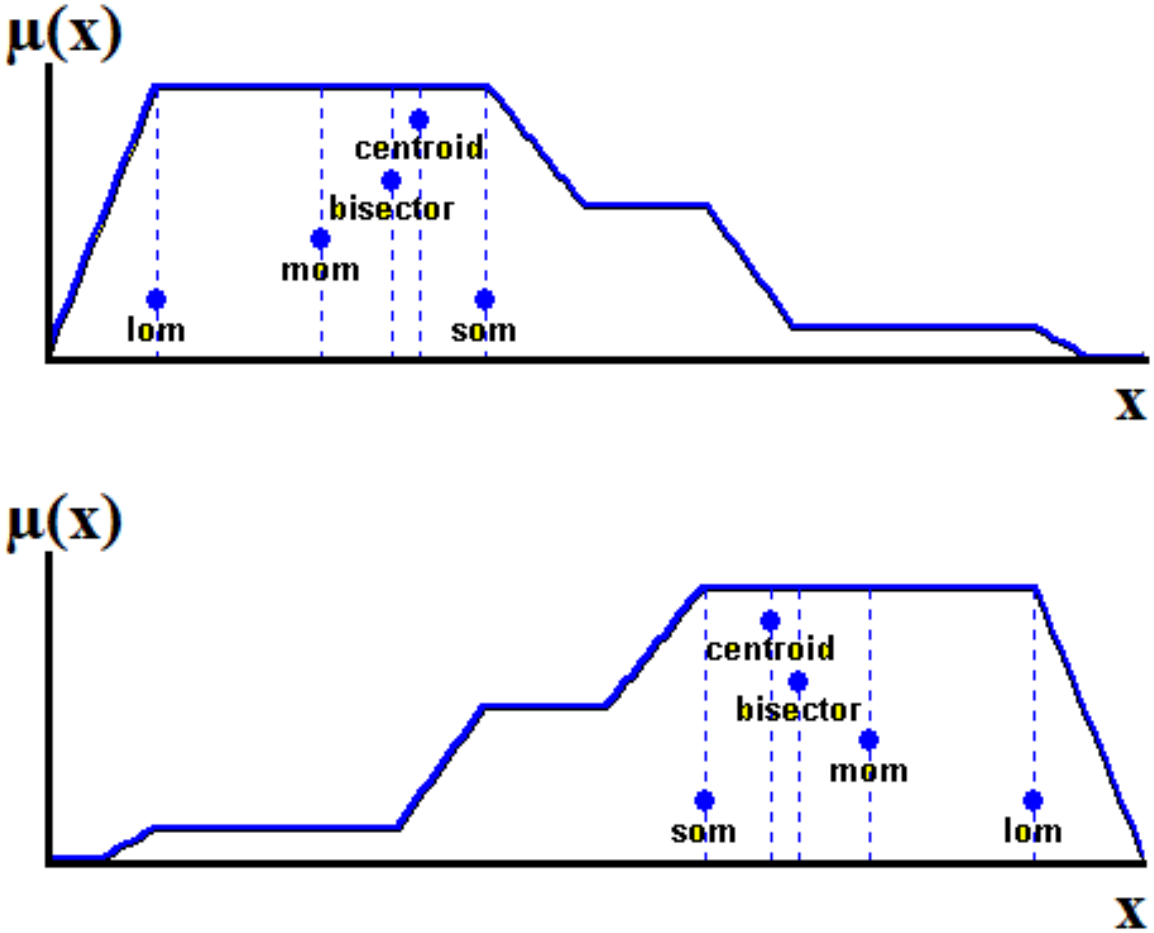

Рисунок 7 – Результат дефаззификации

Подводя итог, нужно отметить, что выбор метода дефаззификации – один из самых важных и сложных этапов при синтезе интеллектуальных нечетких контроллеров или каких-либо нечетких моделей, т.к. в зависимости от выбора метода дефаззификации выходное четкое значение может быть совершенно различным, что было показано ранее на соответствующих рисунках.