МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ
ХИМИКО–ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ

С. И. СИДЕЛЬНИКОВ, А. Г. ЛОПАТИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Утверждено Редакционно–издательским советом
института в качестве учебно–методического пособия

Новомосковск 2003

УДК 66.012.001.57
ББК 32.965В6
С 347

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор Егоров А. Ф.
(РХТУ им. Д. И. Менделеева)
доктор технических наук, профессор Магергут В. З.
(НИ РХТУ им. Д. И. Менделеева)

Сидельников С. И., Лопатин А. Г.
Моделирование систем: Учебно–методическое пособие / РХТУ им. Д. И. Менделеева, Новомосковский ин-т. Новомосковск, 2003.–100 с.
ISBN

Рассмотрены методы моделирования динамики химико–технологических систем. Рассматриваются методы построения эмпирических формул при помощи активного и пассивного экспериментов. Даны основы теории нечетких множеств и их применения для получения нечетких математических моделей. Теоретический материал подкреплен лабораторными работами по соответствующим разделам.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 210200 Автоматизация производственных процессов, а так же будет полезна всем лицам занимающиеся математическим моделированием.

Табл. 44. Ил. 13. Библиогр.: 9 назв.

УДК 66.012.001.57
ББК 32.965В6

ISBN

© Новомосковский институт Российского химико–технологического университета им. Д. И. Менделеева, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5
Введение 6
1. Основы математического моделирования 7
1.1 Понятие модели 7
1.2 Математическое моделирование 7
1.3 Химико–технологический процесс как объект математического моделирования 9
1.4 Основные стадии математического моделирования 11
1.5 Основные группы уравнений, входящих в математическое описание процесса 12
1.6 Материальный и тепловой балансы химико-технологического процесса 13
1.7 Блочный принцип построения математической модели 15
2. Составление математических моделей эксперементально–статистическими методами 17
2.1 Основы корреляционного и регрессионного анализа 17
2.2 Построение математических моделей по результатам пассивного эксперимента 20
2.3 Построение математических моделей по результатам активного эксперимента 25
3. Нечеткие модели 29
3.1 Основные теоретические положения 29
3.2 Некоторые сведения из нечеткой логики 30
3.3 Операции над нечеткими множествами 35
3.3.1 Логические операции 35
3.3.2 Алгебраические операции 36
3.3.3 Нечеткие отношения 38
3.3.4 Операции над нечеткими отношениями 39
3.4 Нечеткие выводы 41
3.5. Структура Fuzzy Logic Toolbox 47
Лабораторная работа №1 Построение и исследование математической модели по результатам пассивного эксперимента 49
Задания к лабораторной работе №1 51
Лабораторная работа №2 Построение и исследование математической модели по результатам активного эксперимента 61
Задания к лабораторной работе №2 62
Лабораторная работа №3 Построение и исследование нечеткой математической модели 73
Лабораторная работа №4 Построение и исследование математической модели объекта управления 78

Библиографический список 88
Приложение 1 Регрессионный анализ в среде Mathcad 89
Приложение 2 Терминологический словарь 92
Приложение 3 Обобщенные показатели динамических свойств пневматических линей связи 96
Приложение 4 Метод Ормана..... 97
Приложение 5 Градировочная таблица для термопары градуировки Хромель–Копель..... 98
Приложение 6 Статическая характеристика теплообменника 99
Приложение 7 Пример оформления титульного листа лабораторной работы..... 100

ПРЕДИСЛОВИЕ

Создание высокоэффективных технологических процессов современных производств и управление ими, а так же модернизация действующих, в настоящие время не мыслима без получения и анализа математических моделей с последующей их оптимизацией, поэтому курс Моделирование систем занимает особое место в системе подготовки специалистов по специальности 210200 «Автоматизация производственных процессов и производств». Именно он совместно с дисциплинами Теория автоматического управления и Технические средства автоматизации формирует профессиональное мировоззрение будущих инженеров, и как следствие по своему методическому назначению он должен заложить под последующие курсы их теоретические основы.

Необходимая информация по данному курсу представлена в большом количестве изданий, посвященных отдельным, конкретным, вопросам математического моделирования систем управления, причем литература по некоторым разделам является по ряду причин малодоступной для студентов. Этим и была вызвана необходимость разработки и написания данного учебно–методического пособия.

В настоящем учебно–методическом пособии излагаются основные аспекты получения статистических и нечетких математических моделей, а так же показано получение математической модели лабораторной установки экспериментально–аналитическим методом.

Данное пособие предназначено для студентов специальности 210200 «Автоматизация производственных процессов и производств» всех форм обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов улучшения химико–технологических процессов (ХТП) является математическое моделирование, связанное с получением и обработкой большого объема информации об этих процессах, позволяя выявить новые закономерности при протекании ХТП и наметить пути их оптимизации.

Математическое моделирование включает в себя три взаимосвязанных этапа: математическое моделирование объекта управления; выбор метода решения и пакета программ для исследования модели; проверка модели на адекватность моделируемому процессу.

От правильной постановки задачи, максимального учета влияющих факторов и в соответствии с этим выбора метода решения зависит в значительной степени успех проведенной работы по исследованию и ценность полученных результатов моделирования, однако использование второстепенных факторов значительно усложняют математический анализ, что может привести к неразрешимости полученной математической модели.

Данное учебно–методическое пособие рассматривает различные методы получения математических моделей ХТП. Теоретический материал подкреплен большим количеством практических заданий для выполнения лабораторных работ, позволяющие студенту приобрести практические навыки по составлению математических моделей, и проведения имитационного моделирования полученных моделей с использованием средств вычислительной техники.

1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Понятие модели

Познание процессов невозможно без теоретических обобщений. Первым в процессе познания являются результаты наблюдений. Опираясь на наблюдения, строится модель исследуемого явления, на основе которой методом проб и ошибок создается теория. Эта теория содержит в себе предполагаемое представление об исследуемом явлении природы. Руководствуясь этой теорией, планируются новые эксперименты и т. д.

Разработка теории как предполагаемого представления об исследуемом явлении может быть названа построением модели. Тогда теория становится математической моделью исследуемого процесса.

В зависимости от источника информации, используемого при построении модели, различают аналитические (физико-химические) и статистические (эмпирические) модели.

Статистические модели получаются в результате статистической обработки экспериментальных данных, собранных на исследуемом объекте. Статистические модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномиальных зависимостей. Однако, область их применения ограничена ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводился эксперимент.

Аналитические модели строятся на основе изучения природы микропроцессов, протекающих в объекте. При этом используются фундаментальные законы природы. Применение этих законов позволяет получить наиболее общие связи между существенными параметрами явлений.

Аналитические модели позволяют достаточно точно описывать процессы. Однако они представляются в виде сложных систем уравнений, часто в обыкновенных или частных производных.

1.2. Математическое моделирование

Математическое моделирование является методом описания процессов с количественной и качественной стороны с помощью математических моделей. В каждом конкретном случае математическая модель создается исходя из целевой направленности процесса и задачи исследования, с учетом требуемой точности решения и достоверности используемых исходных данных. При анализе полученных результатов возможно повторное обращение к

модели: после того как часть расчетов уже выполнена в нее могут быть внесены коррективы.

Построение модели самая тонкая и ответственная часть математического моделирования. При этом требуется не только и не столько знание математики, сколько глубокое понимание сущности описываемых явление. При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется, и полученная схема описывается в зависимости от сложности явления с помощью того или иного математического аппарата. Таким образом, построение модели представляет собой формализацию, необходимую для определения основных признаков, связей, закономерностей, присущих объекту-оригиналу, и отсеивания второстепенных признаков.

При формализации изучаемого процесса используется аналитическая теория исследования, которая характеризуется следующими особенностями:

1. Потоки в аппаратах рассматриваются как сплошная непрерывная среда (континуум), поэтому микроструктура его и микроскопический механизм процесса выпадают из рассмотрения. Это упрощение значительно облегчает изучение процесса.

2. Для составления математического описания изучаемого процесса используют основные законы природы: законы сохранения массы, энергии, количества движения и др. Однако при этом получают дифференциальные уравнения, число неизвестных в которых превышает число уравнений, т.е. полученная система уравнений не замкнута. Это происходит потому, что основные законы природы не отражают всех частных особенностей микроскопического механизма протекания процесса, присущих конкретному веществу.

3. Для составления замкнутой системы дифференциальных уравнений привлекают гипотезы о дополнительных связях между искомыми величинами. Такие гипотезы возникают в результате непосредственных наблюдений, эксперимента. Однако, эти дополнительные связи между искомыми величинами содержат коэффициенты пропорциональности, без определения которых система уравнений остается незамкнутой.

4. Значения коэффициентов пропорциональности в дополнительных уравнениях, полученных в результате привлечения гипотез, определяют экспериментальным путем. Эти коэффициенты называют физическими параметрами, если их значения зависят только от давления и от температуры (для анизотропных тел физические параметры зависят также от направления из данной точки, а для неоднородных тел – от координат этой точки). В качестве примера

физических параметров можно привести теплоемкость, плотность и т.д. Если коэффициенты пропорциональности зависят еще и от скорости движения, условий перемешивания и т.д., то их называют гидродинамическими параметрами, например, коэффициенты массопередачи, теплоотдачи. Таким образом экспериментальное определение параметров компенсирует отказ от рассмотрения микроскопического механизма процесса.

1.3. Химико–технологический процесс как объект математического моделирования

Объектом химической технологии условимся называть типовой химико-технологический процесс, идущий в аппаратуре определенного конструктивного оформления (простой объект: теплообменник, реактор и т. д.), или технологическую цепочку, охватывающую несколько процессов и аппаратов (сложный объект). Объекты химической технологии обычно находятся под влиянием различных факторов (рис 1). При этом воздействие, поступающее на вход объекта, называют вектором входных переменных X, а реакцию на выходе объекта – вектором выходных переменных. Между входом и выходом существует взаимосвязь, которая характеризует протекающий в объекте процесс. Объект обычно подвергается возмущениям Z. Для их компенсации используют управляющее воздействие U.

При изучении объекта ищутся связи между параметрами в виде следующих соотношений: $Y_i = f_i(X, U, Z)$, i = 1,2…,m

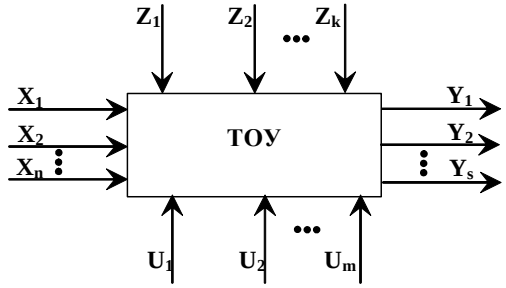


Рис. 1. Схема технологического объекта управления

На рис. 1. $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ – входные параметры – параметры, значения которых могут быть изменены, но возможность воздействия на них отсутствует. Например, состав исходного сырья (природный газ) и др.

$U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ – управляющие параметры – параметры, на которые можно оказывать прямое воздействие в соответствии с некоторыми требованиями, что позволяет управлять процессом. Например, расход сырья и др.

$Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_k)$ – возмущающие параметры – параметры, значения которых случайным образом изменяются с течением времени и которые недоступны для измерения. Например, активность катализатора.

$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_s)$ – выходные параметры – параметры, величины которых определяются режимом процесса и которые характеризуют состояние процесса, возникающее в результате суммарного воздействия входных, управляющих и возмущающих параметров.

В качестве случайных рассматриваются обычно параметры, которые по тем или иным причинам невозможно (или очень трудно) учесть, например падение активности катализатора, изменение состояния поверхности теплообменной аппаратуры, колебания наружной температуры воздуха и т.п. Такое подразделение входных параметров на основные и случайные условно. Случайным будет любой параметр, не вошедший в основной комплекс входных параметров, даже если он хорошо изучен. В зависимости от постановки задачи и технических возможностей некоторые измеряемые параметры относят к «шуму» объекта. Однако при этом уменьшается точность математической модели. В качестве выходных величин рассматриваются любые технологические или экономические показатели процесса.

По степени влияния случайных возмущающих воздействий в объектах принято различать:

1. Детерминированные процессы, в которых определяющие величины изменяются непрерывно по вполне определенным закономерностям. При этом предполагается, что значения выходных величин, характеризующих процесс, однозначно определяются заданием входных и управляющих воздействий. Например, процесс в проточном реакторе с мешалкой.

2. Стохастические процессы, в которых изменение определяющих величин происходит случайным образом. При этом значение выходных величин находятся в вероятностном соответствии с входными и не определяются ими однозначно. Например, контактно-каталитический процесс, в котором выход продукта изменяется в

зависимости от активности катализатора, степени перемешивания исходной смеси.

Объекты химической технологии могут быть описаны статическими и динамическими моделями.

Статические модели описывают стационарные, т. е. не изменяющиеся во времени, процессы. Динамические модели описывают переходные процессы, т. е. нестационарные, изменяющие во времени состояния.

1.4. Основные стадии математического моделирования

Математическое моделирование включает в себя три основных этапа:

1. формализацию изучаемого процесса–составление математического описания;
2. построение алгоритма расчета;
3. установление адекватности модели изучаемому процессу.

При построении математической модели используется блочный принцип математического описания. Согласно этого принципа выделяется ряд типовых элементарных процессов и каждый из этих процессов исследуется отдельно (по блокам). В начале исследуется гидродинамика процесса – основа структуры будущей модели. Гидродинамика отражает поведение так называемого «холодного» объекта, т. е. объекта без физико-химических превращений, но с реальными нагрузками. Гидродинамика изучает распределение масс в потоках, связанное с перемещением жидкости или газа. Далее изучают кинетику химических реакций, скорости процессов массы переноса и теплопереноса, кинетику фазовых переходов и т. д., с учетом гидродинамических условий найденной модели и составляют математическое описание каждого из процессов. Заключительным этапом в данном случае является объединение описаний всех исследованных «элементарных» процессов (блоков) в единую систему уравнений математического описания объекта моделирования.

Второй этап заключается в разработке и реализации на ЭВМ моделирующего алгоритма. Моделирующий алгоритм определяется как последовательность операций, которые необходимо выполнить над уравнениями математического описания для того, чтобы найти значения интересующих нас параметров процесса.

Необходимо также, чтобы модель достаточно верно описывала качественно и количественно свойства исследуемого процесса, т.е. она должна быть адекватна моделируемому процессу. Для проверки

адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерения в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях (при определенных значениях параметров). При этом используют статистические методы.

1.5. Основные группы уравнений, входящих в математическое описание процесса

В составе математического описания, разработанного на основе физической природы исследуемого объекта, можно выделить следующие группы уравнений:

1. Уравнения баланса масс и энергии, записанные с учетом гидродинамической структуры движения потоков. Данная группа уравнений характеризует распределение в потоках температур, составов и связанных с ними свойств: плотности, теплоемкости и т.д.
2. Уравнения кинетики процессов. Сюда относятся описания элементарных процессов протекания химической реакции, теплопереноса, массопереноса. Для записи уравнений используются гипотезы дополнительных связей между основными переменными процесса.
3. Теоретические, эмпирические или полуэмпирические соотношения между различными параметрами процесса – уравнения для физических или гидродинамических параметров: теплоемкости, вязкости, коэффициентов теплоотдачи и т.д.
4. Ограничения на параметры процесса, например, температура в зоне катализатора не может быть выше некоторой заданной, иначе катализатор потеряет свои свойства и т. д.

Данные группы уравнений входят в состав математической модели любого химико-технологического процесса. Они представляют аналитическую теорию исследования физико-химических процессов. Кроме того, модель строится так, чтобы она наиболее полно отражала характер поведения потоков вещества и энергии при одновременно достаточно простом математическом описании. Простота математического описания определяется возможностью решения модели на ЭВМ.

1.6. Материальный и тепловой балансы химико-технологического процесса

Исходным соотношением математического описания процессов в аппарате является общий материальный баланс, составленный для отдельных компонентов потока.

Если концентрации веществ неодинаковы в различных точках аппарата, то уравнение материального баланса составляют для элементарного объема. Для элемента объема аппарата материальный баланс записывается в соответствии с законом сохранения массы:

Количество вещества, поступающего в элементарный объем за данный промежуток времени	=	Количество вещества, выходящего из элементарного объема за промежуток времени	+	Количество вещества, накапливаемого в рассматриваемом элементарном объеме за данный промежуток времени

Математически закон сохранения массы можно представить в виде следующего соотношения

$$\Delta M = M_{вх}\Delta t - M_{вых}\Delta t\,, \qquad (1)$$

где Мвх, Мвых – массовые потоки (кг/с) на входе и выходе рассматриваемого элементарного объема, Δt – элементарный промежуток времени (время наблюдения), ΔM – элементарное накопление массы (кг) в рассматриваемом объеме за время Δt.

Если можно принять, что концентрации веществ в каждой точке объема аппарата одинаковы (хорошее перемешивание), уравнение (1) относят ко всему объему аппарата. В этом случае уравнение закона сохранения массы можно представить в дифференциальном виде. Для этого разделим уравнение на Δt и перейдем к приделу при Δt→0

Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \dfrac{dM}{dt}$

$$\frac{dM}{dt} = M_{вх} - M_{вых}\,, \qquad (2)$$

т.е. скорость накопления массы вещества в некотором объеме равна разности массовых потоков (кг/с) на входе и выходе этого объема.

При составлении уравнений материального баланса исследуемого химико-технологического процесса используют или уравнение (1) – при этом получают математическое описание в виде дифференциальных уравнений в частных производных, или уравнение (2) – получают обыкновенные дифференциальные уравнения.

Необходимо также заметить, что уравнение (2) – частный случай уравнения (1).

Аналогично составляется тепловой баланс, используя закон сохранения энергии. Для элементарного объема закон сохранения записывают в приращениях, т.е.

$$\Delta Q = Q_{вх} \cdot \Delta t - Q_{вых} \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Если можно принять, что температура и связанные с ней свойства потока в каждой точке всего объема аппарата одинаковы, то закон сохранения записывают для всего рассматриваемого объема в дифференциальной форме

$$\frac{dQ}{dt} = Q_{вх} - Q_{вых} \qquad (4)$$

Здесь ΔQ (Дж) – элементарное накопление энергии в элементарном объеме; Qвх, Qвых (Дж/с) – тепловые потоки на входе и выходе рассматриваемого объема, $\frac{dQ}{dt}$ - скорость накопления энергии в исследуемом объеме.

Уравнения (3,4) используются при составлении тепловых балансов химико-технологических процессов. Также, как и уравнение (1), соотношение (3) приводит к математическому описанию в виде дифференциальных уравнений в частных производных, а уравнение (4) – к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тип используемого математического аппарата определяет структуру будущей математической модели. Для установления структуры модели необходимо выявить особенности гидродинамической структуры потоков, которая проявляется в характере распределения времени пребывания частиц потока в аппарате, так как движение частиц определяет условия переноса энергии и массы.

В реальной непрерывной системе в силу стохастической природы движения ее частиц на микроуровне всегда имеет место неравномерность распределения частиц по времени пребывания в аппарате. К наиболее существенным источникам неравномерности распределения элементов потока по времени пребывания в промышленных аппаратах можно отнести: неравномерность профиля скоростей, турбулизацию потоков, молекулярную диффузию, наличие застойных областей в потоках, байпасные и перекрестные токи, температурные градиенты движущихся сред и т.д. Перечисленные причины, существующие в технологических аппаратах и действующие

в различных комбинациях, обусловливают специфический характер неравномерности в каждом конкретном случае.

Для оценки неравномерности потоков вводится ряд статистических функций распределения, так как характер распределения частиц подвержен статистическим законам. Функции распределения находятся по виду сигнала, проходящего через систему. В качестве такого сигнала используется подача вещества – индикатора на вход аппарата в виде возмущения. На основе статистической обработки экспериментальных данных распределения индикатора по аппарату устанавливают функции распределения.

Исследуя статистические функции распределения для различных по конструкции аппаратов получают различные модели гидродинамической структуры распределения частиц, которые и используются для составления материальных и тепловых балансов процесса, т.е. построения математической модели.

1.7. Блочный принцип построения математической модели

При построении математической модели широко используют блочный принцип, суть которого состоит в том, что модель строится из отдельных логически законченных блоков, отражающих обычно ту или иную сторону рассматриваемого процесса. Это может быть блок кинетики массопередачи, блок гидродинамики, блок фазового равновесия и т.п. Блочный принцип построения моделей позволяет: а) разбивать общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем самым упростить ее решение; б) использовать разработанные блоки в других моделях; в) модернизировать и заменять отдельные блоки на новые, не касаясь при этом остальных.

Представление математической модели процесса в виде совокупности подсистем (блоков) позволяет представить общее математическое описание как совокупность математических описаний отдельных блоков. Тогда общая структура математической модели может иметь вид, изображенный на рис.2

Применение блочного принципа построения математических моделей, который, в свою очередь, основан на системном подходе, позволяет во многих случаях также принципиально решить проблему масштабирования процессов. С точки зрения математического моделирования масштабный переход есть не что иное, как деформация математической модели при изменении геометрических размеров, характеризующих аппаратное оформление процесса. При

использовании блочного принципа построения математической модели влияние геометрических размеров на свойства процесса отражается лишь в одной подсистеме (блоке) – блоке «гидродинамика». Потому при наличии достаточно корректного в качественном и количественном отношении математического описания этого блока становится возможным осуществить масштабный переход.

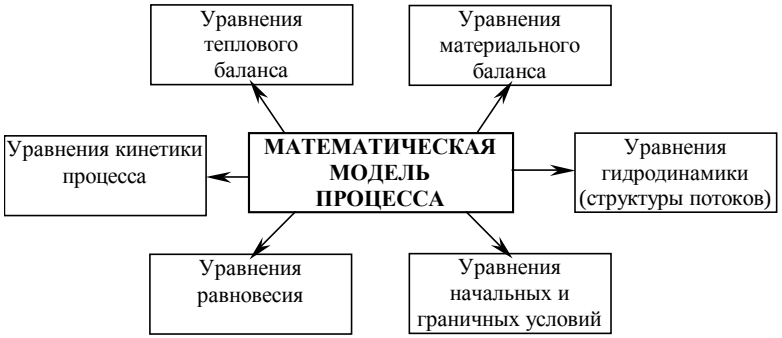


Рис. 2. Представление математического описания процесса

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную ступень детализации математического описания. Важно лишь, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. Что касается состава внутренних переменных блоков, то здесь существует достаточно большая свобода выбора. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ. Однако получить такое фундаментальное описание отдельных блоков при недостаточной исследованности отдельных явлений во многих случаях в настоящее время не представляется возможным. Это связано, как правило, с чрезвычайным усложнением математического описания блока, что само по себе приводит к резкому усложнения математической модели процесса в целом и, кроме того, может вызвать определенные вычислительные трудности. Поэтому при практическом использовании блочного принципа в математическом описании каждого блока на том или ином уровне его детализации приходится применить эмпирические соотношения.

2. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКСПЕРЕМЕНТАЛЬНО–СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

2.1. Основы корреляционного и регрессионного анализа

Для улучшения любого технологического процесса необходимо углубление знаний о влиянии факторов, действующих на его ход. Как правило, это влияние с достаточной полнотой раскрывается известными физическими и физико–химическими законами. При должном использовании последних, соответствующие процессы необходимо ориентировать на максимальный выпуск продукции заданного качества.

В преобладающем большинстве случаев зависимости выявлены только приближенно, качественно, из–за одновременного действия большого числа факторов и при сложном переплетении последних, а также колебания силы воздействия этих факторов и конечных результатов по случайным и многочисленным причинам в условиях реального производства. В условиях производства влияние того или иного технологического фактора всегда желательно изучать так, чтобы не страдало качество продукции, и не снижалась производительность цеха.

Этого нельзя достичь на производстве не только по выше упомянутым причинам, но и потому, что неизбежны колебания качества сырья и условий технологического режима, а также многочисленные погрешности наблюдений связанные как с техническим, так и с человеческим фактором.

Ставить задачу изучения механизма протекания всех этих процессов нереально, между тем задачу оптимизации и управления этими процессами решать необходимо. Для этих целей успешно применяются экперементально–статистические методы, с помощью которых составляют математическую модель, при неизвестном механизме протекающих в объекте процессов, изучая зависимость отклика системы на изменения входов.

Для проведения данных исследований используют пассивный или активный эксперимент.

Активный эксперимент–состоит в том, что в каждом опыте варьируют независимые переменные (факторы) по специальному плану.

Пассивный эксперимент–это сбор исходного статистического материала в режиме нормальной эксплуатации на промышленном объекте.

Связи, обнаруженные в результате эксперимента между двумя и большим числом переменных, называют статистическими, а установление, наличие и формы такой связи и составляет задачу ***корреляционного анализа***. Проведение статистического анализа результатов, который заключается в ранжировке коэффициентов уравнения регрессии, отсева незначимых и определения адекватности уравнения регрессии–называется ***регрессионным анализом***.

Математической моделью (5) процесса в данном случае служит функция отклика (φ), связывающая выходной параметр (Y), характеризующий результаты эксперимента, с переменными варьирующимися при проведении опытов–называемыми факторами (X1,X2, … ,Xn).

$$Y = \varphi\,(X1,X2, \dots ,Xn), \qquad (5)$$

где XI ,X2, ..., Xn – изучаемые факторы.

Пространство с координатами XI ,X2, ..., Xn – называется факторным пространством, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве – поверхностью отклика.

При использовании регрессионного и корреляционного анализа математическую модель представляют в виде полинома отрезка ряда Тейлора (6), в который разлагается неизвестная функция (5):

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_i + \sum_{\substack{i,u=1 \\ u \neq i}}^{K} \beta_{ui} X_u X_i + \sum_{i=1}^{K} \beta_{ii} X_i^{\,2} \quad , \qquad (6)$$

где $\beta_0 = \varphi(0), \beta_i = \dfrac{\partial \varphi(0)}{\partial X_i}, \beta_{u,i} = \dfrac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial X_u \partial X_i}, \beta_{ii} = \dfrac{\partial^2 \varphi(0)}{2 \partial X_i^{\,2}}$

Но в связи с тем что, изначальную функцию мы ищем:

$$Y = \varphi(X1,X2, \dots ,Xn) + \psi(Z), \qquad (7)$$

где ψ(Z)–функция случайных неконтролируемых возмущений

То есть на реальный процесс накладываются неконтролируемые, случайные возмущения, естественно и на результат эксперимента, т.е. отклик, будет случайной величиной и соответственно случайными величинами окажутся и коэффициенты ряда Тейлора. В связи с этим можно лишь оценить коэффициенты уравнения ряда Тейлора и записать его в виде оценочной функции $\hat{Y} = f\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$(8):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{K} b_i X_i + \sum_{\substack{u,i=1 \\ u \neq i}}^{K} b_{u,i} X_u X_i + \sum_{i=1}^{K} b_{ii} X_i^{\,2} \,, \qquad (8)$$

где коэффициенты b0, bi, bui, bii–являются оценками теоретических коэффициентов ряда Тейлора (β0, βi, βui, βii)

В случае нахождения функции отклика от одного фактора, расчет математической модели начинают с определения эмпирической линии регрессии. При проведении, эксперимента с объемом выборки N при условии, что каждый опыт повторен m раз, строится поле корреляции и эмпирическая линия регрессии (рис.3).

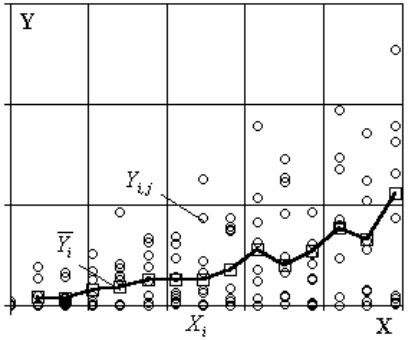


Рис. 3. Поле корреляции и империческая линия регрессии

Эмпирические линии регрессии строятся последовательным соединением точек (X_i, $\overline{Y_i}$), где

$$\overline{Y_i} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Y_{i,j}}{m}, \qquad (9)$$

где m количество параллельных опытов.

В случае отсутствия параллельных опытов эмпирическая линия регрессии строится последовательным соединением (X_i, $У_i$).

По виду эмпирической линии регрессии задаются соответствующим количеством членов ряда Тейлора, т.е. видом уравнения регрессии согласно уравнению (9).

Расчет коэффициентов уравнения регрессии проводят методом наименьших квадратов, например, в матричной форме, т.к. он наиболее удобен для решения данных задач на ЭВМ.

Данным способом можно рассчитать коэффициенты уравнения регрессии, которые линейны относительно коэффициентов или линеаризуются каким–либо способом, т. е. уравнениями вида:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \dots$$

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i \neq j}}^{n} b_{i,j} X_i X_j + \ldots$$

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i \neq j}}^{n} b_{i,j} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} X_i^2 + \ldots$$

Или уравнения которые линеаризуются путем логарифмирования:

$$\hat{Y} = b_1 b_2^x ; \ \hat{Y} = b_1 x^{b_2}$$

$$\lg\left(\hat{Y}\right) = \lg(b_1) + x \lg(b_2); \ \lg\left(\hat{Y}\right) = \lg(b_1) + b_2 \lg(x)$$

положив

$$\lg\left(\hat{Y}\right) = Z ; \ \lg(b_1) = a_1$$

$$\lg(b_2) = a_2 ; \ \lg(x) = t$$

получим линейное уравнение относительно новых переменных:

$$Z = a_1 + a_2 x ; \ Z = a_1 + b_2 t$$

По полученным a_1 и a_2 определяют коэффициенты b_1 и b_2 .

2.2. Построение математических моделей по результатам пассивного эксперимента

Рассмотрим расчет коэффициентов уравнения регрессии на конкретном примере[2, 3]. Пусть изначально оценочная функция задана уравнением вида:

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X_1 + b_3 X_2 + b_4 X_1 X_2 + b_5 X_1^2 + b_6 X_2^2 \qquad (10)$$

По статистической выборке методом наименьших квадратов необходимо найти коэффициенты b1, b2,…,b6 такие, что бы сумма квадратов ошибок между рассчитанными значениями отклика и измеренными была минимальна $S = \sum \left(Y_{ad} - Y_{изм}\right)^2 \to \min$.

Для решения этой задачи представим весь исходный статистический материал в матричной форме. Будем называть матрицу

Z матрицей независимых переменных, а матрицу–столбец $\overline{Y}$ – вектором наблюдений при наличии параллельных опытов или матрицу Y, при отсутствии параллельных опытов. В матрице Z первый столбец есть фиктивная переменная при коэффициенте b1, второй при b2, третий при b3 и т.д.

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & X1_1 & X2_1 & X1_1 \times X2_1 & X1_1^2 & X2_1^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & X1_N & X2_N & X1_N \times X2_N & X1_N^2 & X2_N^2 \end{bmatrix} \quad \overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{Y_1} \\ \vdots \\ \overline{Y_N} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Расчет коэффициентов уравнения регрессии при параллельных опытах проводят по уравнению (8) полученного в результате решения системы нормальных уравнений в матричной форме.

$$B = (Z^T Z)^{-1} Z^T \overline{Y} \qquad (12)$$

При отсутствии параллельных опытов в уравнении (12) необходимо заменить $\overline{Y}$ на Y. После того как уравнение регрессии найдено необходимо провести статистический анализ результатов. Этот анализ заключается в ранжировке коэффициентов уравнения регрессии, отсева незначимых и определения адекватности уравнения регрессии. Такое исследование называется регрессионным анализом.

При проведении регрессионного анализа принимают как правило следующие допущения:

1. Входной параметр X измеряется с приближенной малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении Y. Большая ошибка Y объясняется наличием в каждом процессе невыявленных переменных, не вошедших в уравнение регрессии.

2. Результаты наблюдений Y_1, Y_2, ..., Y_N над выходной величиной Y представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины.

Обозначим произведение матриц $(Z^T Z)^{-1}$ через C, получим матрицу которая называется матрицей ошибок или ковариационной матрицей. Произведение диагональных элементов Cjj на дисперсию генеральной совокупности σ^2 определяет ошибку нахождения коэффициентов уравнения регрессии. Недиагональные коэффициенты матрицы C умноженные на дисперсию называются ковариационными

моментами, которые показывают наличие связи между коэффициентами уравнения регрессии, т.е.

$$C = \left(Z^T Z\right)^{-1} \sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma^2 b_1 & \operatorname{cov} b_1 b_2 & \cdots & \operatorname{cov} b_1 b_k \\ \operatorname{cov} b_2 b_1 & \sigma^2 b_2 & \cdots & \operatorname{cov} b_2 b_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{cov} b_k b_1 & \operatorname{cov} b_k b_2 & \cdots & \sigma^2 b_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

В связи с тем, что ковариационная матрица при обработке пассивного эксперимента недиагональная то, все коэффициенты уравнения регрессии взаимно связаны, следовательно, нельзя проверить значимость каждого коэффициента в отдельности. Эту задачу решают ранжированием коэффициентов уравнения регрессии. Чтобы расположить факторы входящих в состав уравнения регрессии, по степени их влияния на выходной параметр вычисляют величину критерия Стьюдента tj по уравнению (14):

$$t_j = \frac{\left|b_j\right|}{\sqrt{S^2_{VOSPR} C_{jj}}} \quad (14)$$

Формулу (14) применяют в тех случаях когда коэффициенты уравнения регрессии вычислены с использованием среднего значения выходной переменной по параллельным данным в точках, если коэффициенты уравнения регрессии рассчитывались по индивидуальным значениям выходной переменной то в формуле (14) S^2_{VOSPR} следует заменить на S^2_Y .Факторы имеющие большее значение tj, оказывают более существенное влияние на выходной параметр, а фактор для которого tj оказывается наименьшим исключается и вновь происходит перерасчет уравнения регрессии. При этом улучшаются интерполяционные свойства уравнения регрессии, однако полученные коэффициенты оказываются смещенными оценками для соответствующих генеральных коэффициентов.

Если между дисперсиями нет значимых различий, для оценки генеральной дисперсии σ^2, характеризующий фактор случайности, используют выборочные дисперсии S^2.

Дисперсию воспроизводимости и дисперсию относительно среднего вычисляют по формулам (15)–(16).

$$S^2_{VOSPR} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} (Y_{i,j} - \overline{Y_i})^2}{N(m-1)} \quad (15)$$

Дисперсия воспроизводимости S^2_{VOSPR} опытов, характеризующая ошибку наблюдений.

$$S^2_Y = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \overline{Y})^2}{N-1} \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} \quad (16)$$

Дисперсия относительного среднего S^2_Y характеризует рассев экспериментальных данных относительно среднего значения рассчитанного по экспериментальным данным.

Затем рассчитывают остаточную дисперсию S^2_{OST}, характеризующую ошибку между рассчитанным значением $\hat{Y}$ по уравнению регрессии и экспериментальными данными, в случае наличия параллельных опытов S^2_{OST} рассчитывают по формуле (17), а при отсутствии параллельных опытов по формуле (18).

$$S^2_{OST} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} (Y_{i,j} - \hat{Y}_i)^2}{Nm - q} \quad (17)$$

$$S^2_{OST} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - q}, \quad (18)$$

где q – количество коэффициентов в уравнении регрессии.

Пересчет коэффициентов уравнения регрессии продолжится до тех пор пока уменьшается остаточная дисперсия, т.е. тем самым упрощается уравнение регрессии описывающее эксперимент и улучшаются его интерполяционные свойства.. Если остаточная дисперсия возросла, то значит вычеркнутый коэффициент был значим

и вычеркивать его было нельзя, и на адекватность проверяют уравнение регрессии полученное на предыдущей итерации.

Адекватность уравнения регрессии проверяют по критерию Фишера (19). Для этого рассчитывают значение критерия Фишера F_p и сравнивают его с табличным при заданном уровне значимости p и степенях свободы fl = N–q и f2 = N(m–1)

$$F_P = \frac{S^2_{ad}}{S^2_{VOSPR}} \qquad (19)$$

$$S^2_{ad} = \frac{m\sum_{i=1}^{N}(\overline{Y_i} - \hat{Y}_i)^2}{N - q} \qquad (20)$$

S^2_{ad} –характеризует способность модели отображать результаты эксперимента.

Если расчетные значения критерия Фишера Fp меньше табличного $F_{1-p} = (f_1; f_2)$ то уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные иначе необходимо задаться другим видом уравнения регрессии и повторить расчет.

При отсутствии параллельных опытов и дисперсии воспроизводимости можно оценить качество уравнения регрессии сравнив S^2_{OST} и дисперсию относительного среднего S^2_Y. В этом случае критерий Фишера вычисляют по формуле (21).

$$F_P = \frac{S^2_Y}{S^2_{OST}} \qquad (21)$$

Чем больше значение Fp превышает табличное значение $F_{1-p} = (f_1; f_2)$ для выбранного уровня значимости p и степени свободы fl=N–l и f2=N–q, тем эффективнее уравнение регрессии, т.е. более точно описывает экспериментальные данные, в противном случае необходимо задаться другим уравнением регрессии.

2.3. Построение математических моделей по результатам активного эксперимента

Активные эксперименты обладают следующими преимуществами [4]:

1. Многомерный регрессионный анализ чувствителен к соблюдению исходных предпосылок, а именно:

1.1. результаты наблюдений y_1, y_2,…,y_n представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины;

1.2 дисперсии равны друг другу или, другими словами, если производить многократные повторные наблюдения над величиной y_i при некотором определенном наборе значений x_{i1}, x_{i2},…,x_{ip}, то дисперсия σ^2_{yi} не будет отличаться от дисперсии σ^2_{yk}, полученной при повторных наблюдениях для любого набора значений независимых переменных x_{k1}, x_{k2},…,x_{kp};

1.3 независимые переменные x_1, x_2,…,x_p изменяется с пренебрежимо малой погрешностью по сравнению с погрешностью в определении y.

Ясно, что эти требования могут быть выполнены только при активном эксперименте, кроме того, активный эксперимент просто лучше организован.

2. Поскольку план экспериментов составляется заранее, перед началом опытов, то ничто не мешает так составить этот план, чтобы максимально упростить последующую обработку экспериментов для построения регрессионных моделей.

3. Оптимальное использование факторного пространства при активном экспериментировании позволяет при минимальных затратах (минимальном количестве экспериментов) получить максимум информации об изучаемых явлениях протекающих в объекте управления.

4. При планировании экстремальных экспериментов кроме аппроксимации функций отклика (построение эмпирической зависимости) попутно можно решить порой более важные для исследователя задачи–поиск экстремума (максимума или минимума) в факторном пространстве и задачу оптимального управления процессом.

5. Методы планирования экспериментов позволяют опытным путем проранжировать факторы по степени их влияния на функцию отклика.

6. Планируемые эксперименты позволяют получить математическое описание таких процессов, которое ранее было

затруднительным, и формализовать методами дисперсионного анализа изучения явлений, зависящих от качественных факторов.

7. Планирование эксперимента позволяет изучать и математически описывать процессы и явления при неполном знании их механизма.

Под планированием эксперимента будем понимать разработку оптимальной стратегии исследования исходя из задач, поставленных экспериментатором.

В области химии и химической технологии наиболее распространенными являются следующие задачи:

1. Определение оптимальных режимов.
2. Изучение механизма процесса.
3. Математическое описание физико–химических свойств веществ и систем.
4. Построение математических моделей для использования их в автоматизированных системах управления технологическими процессами.

Необходимая для планирования эксперимента информация зависит от целей исследования. Так, для решения первой задачи необходимо знать число факторов, подлежащих изучению, и целесообразные интервалы их изменения; число и характер параметров оптимизации; экономические и временные ограничения и ряд других более второстепенных сведений. Для решения второй задачи необходимо дополнительно выдвинуть одну или несколько гипотез о механизме процесса. Аналогичным образом можно сформулировать необходимую исходную информацию и в остальных случаях.

Для построения линейных и неполных степенных математических моделей применяют полный факторный эксперимент (ПФЭ). При планировании по схеме ПФЭ реализуются все возможные комбинации факторов на всех выбранных для исследования уровнях. Необходимое количество опытов N при ПФЭ определяется по формуле:

$$N = n^k \qquad (22)$$

где n – количество уровней; k – число факторов.

Если эксперимент проводят только на двух уровнях, при двух значениях факторов и при этом в процессе эксперимента осуществляются все возможные комбинации из k факторов, то постановка опытов по такому плану называется ПФЭ типа 2^k (или планом первого порядка). Уровни факторов представляют собой границу изучаемой области по данному фактору.

Все расчеты коэффициентов уравнения регрессии производят в безразмерной системе координат. Переход от натуральной системы, т.е. системы координат в которой ставят опыты, к кодированной осуществляют посредством переноса начала координат в центр изучаемой области, т.е. в точку с координатами Z_S^0 и Z_{S+1}^0 и последующим изменением масштаба. Формула перехода от натуральной системы к кодированной имеет следующий вид:

$$X_j = \frac{Z_j - Z_j^0}{\Delta Z_j}, \quad j = \overline{1,k} \qquad (23)$$

где: X_j – значение фактора в кодированной системе координат; Z_j – значение фактора в натуральной системе координат; Z_j^0 – координата центра плана; ΔZ_j – интервал варьирования изучаемой переменной.

Значения Z_j^0 и ΔZ_j вычисляют по формулам:

$$Z_j^0 = \frac{Z_j^{\max} + Z_j^{\min}}{2} \qquad (24)$$

$$\Delta Z_j = \frac{Z_j^{\max} - Z_j^{\min}}{2} \qquad (25)$$

где: $Z_j^{\max}$ и $Z_j^{\min}$ граница изучаемой области факторного пространства соответственно максимальное и минимальное значение изучаемого фактора.

Как видно из таблицы 1 составление плана ПФЭ не вызывает трудностей. Первая колонка состоит из последовательного чередования по одному +1 и –1, во второй колонке чередование по два, в третьей – четыре и т.д.

Таблица 1.

План и результаты полного трехфакторного эксперимента

N	X1	X2	X3	Y
1	+1	+1	+1	Y1
2	–1	+1	+1	Y2
3	+1	–1	+1	Y3
4	–1	–1	+1	Y4
5	+1	+1	–1	Y5
6	–1	+1	–1	Y6
7	+1	–1	–1	Y7
8	–1	–1	–1	Y8

Благодаря ортогональности матрицы планирования коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \qquad b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{ij} Y_i \ \left(j = 1,2...k\right)$$

$$b_{js} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{ij} \cdot X_{is} Y_i \ \left(j; s = 1,2...k,\ j \neq s\right) \qquad (26)$$

$$b_{jsf} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_{ij} \cdot X_{is} \cdot X_{if} \cdot Y_i \ \left(j; s;\ f = 1,2...k,\ j \neq s \neq f\right)$$

Если поставить дополнительно параллельные опыты в центре плана, можно определить дисперсию воспроизводимости $S_{воспр}$, проверить значимость коэффициентов регрессии и при наличии степеней свободы – адекватность уравнения.

Дисперсия воспроизводимости рассчитывается по формуле:

$$S^2_{воспр} = \frac{\sum_{u=1}^{m}\left(Y_u - \overline{Y}\right)^2}{m-1}; \qquad (27)$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{u=1}^{m} Y_u}{m}, \qquad (28)$$

где m – количество дополнительных опытов; $\overline{Y}$ – среднее значение дополнительных опытов.

При переходе к безразмерной системе координат ковариационная матрица (13) получается диагональной, т.е. ковариационные моменты равны нулю и следовательно коэффициенты уравнения регрессии взаимно не связаны и рассчитаны с одинаковой точностью. В этом случае значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяют в отдельности по критерию Стьюдента

$$t_j = \frac{\left|b_j\right|}{S_{bj}} \qquad (29)$$

$$S_{bj} = \frac{S_{воспр}}{\sqrt{N}} \qquad (30)$$

где S_{bj} – дисперсия коэффициента уравнения регрессии; t_j – значение критерия Стьюдента для коэффициента уравнения регрессии.

Табличное значение критерия Стьюдента для заданного уровня значимости p и числа степеней свободы f=m–1 выбирают из таблицы значение $t_p(f)$ и если $t_j > t_p(f)$, то коэффициент значим, а если $t_j < t_p(f)$, то коэффициент вычеркивается из уравнения регрессии.

После исключения из уравнения регрессии незначимых коэффициентов проверяют адекватность по критерию Фишера:

$$F = \frac{S^2_{ост}}{S^2_{воспр}} \qquad (31)$$

$$S^2_{ост} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{N-q} \qquad (32)$$

где: $S^2_{ост}$ – остаточная дисперсия уравнения регрессии; $\hat{Y}_i$ – значение i отклика уравнения регрессии после вычеркивания незначимых коэффициентов; q – количество коэффициентов в уравнении регрессии после вычеркивание незначимых. Уравнение регрессии адекватно, если табулированные значения критерия Фишера $F_{1-p}(f_1,f_2)$ где f_1=N–q, f_2=m–1 больше рассчитанного, т.е. $F < F_{1-p}\left(f_1,\ f_2\right)$.

3. НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Основные теоретические положения

Большинство объектов химической технологии являются объектами с наличием неопределенности. Источником неопределенности является: большое число и сложность взаимосвязей между параметрами состояния объекта; наличие параметров, не имеющих строго очерченных границ (например: активность катализатора); в некоторых случаях невозможность проведения измерений и т.п. В этих условиях важную роль приобретает качественный анализ объектов, включающий в себя элементы естественного языка, т.е. знания о происходящих процессах в объекте выраженные простым человеческим языком. Например: «активность катализатора» - «высокая», «низкая», «очень низкая» и т.п.

Для математического описания состояния и функционирования химико-технологической системы с наличием неопределенности используют нечеткие (размытые) модели. Следует отметить, что для простых и хорошо изученных систем не выделяют качественный этап анализа и строят модели, используя количественную информацию об объекте с применением достаточно хорошо разработанных традиционных точных математических методов. При анализе сложных и недостаточно изученных систем существенным является качественный этап и последующий переход к построению нечеткой модели.

Проблема математической обработки качественной информации включает сбор, оценку достоверности, систематизацию, формализацию, переработку информации качественного характера с применением вычислительной техники. Для компьютерной обработки качественной информации необходимо сопоставить термины словесного описания состояния моделируемой системы, числовым системам. Формализация представления знаний об объекте в терминах словесного описания выполняется с применением математического аппарата нечеткой логики и нечетких множеств. Понятие нечеткого множества - эта попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа “такой-то элемент принадлежит данному множеству” теряют смысл, поскольку необходимо указать “насколько сильно” или с какой степенью конкретный элемент удовлетворяет свойствам данного множества.

3.2. Некоторые сведения из нечеткой логики

Основоположником нечеткой («fuzzy») логики является по праву профессор Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде. Он впервые в 1965 г. в своей журнальной статье, которая называлась «Fuzzy Sets» определил понятие «нечеткое множество» «fuzzy set» и распространил методы классической теории множеств на нечеткие множества и тем самым создал теорию нечетких множеств[6,7].

Основная идея Заде состояла в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть

описан в рамках традиционных математических аппаратов. В связи с этим он расширил классическое понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале от 0 до 1, а не только значения 0 либо 1. Л. Заде ввел понятие лингвистической переменной и, допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, тем самым он создал математический аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражения.

В теории обычных или четких множеств вводится понятие множества как конечная или бесконечная совокупность объектов или набора элементов, обладающих общими для всех элементов характеристическими свойствами. Такими элементами могут быть целые числа, технологические параметры, влияющие на выходную переменную и т.п.

В теории множеств вводится ряд обозначений:

$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ – читается «x принадлежит A»

$\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$ – читается «x не принадлежит A»,

где **x** – элемент, **A** – множество.

Для обозначения того факта, что элемент **x** может принадлежать или не принадлежать множеству **A** водится характеристическая функция $\mu_A(x)$, принимающая только лишь два значения 0 или 1:

$$м_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases}$$

В этом случае выполняется четкая, однозначная классификация элемента **x** на принадлежность его к множеству **A**. Во многих практических случаях не всегда удается выполнить такую четкую классификацию.

Пусть **E** – универсальное множество (в случае рассмотрения какого-либо технологического параметра – это его диапазон изменения с определенным шагом), **x** – элемент **E**, а **P** – некоторое характеристическое свойство.

Тогда *обычное (четкое) подмножество* **A** универсального множества **E**, элементы которого удовлетворяют свойству **P**, определяются как множество упорядоченных пар

$$\mathbf{A=\{\mu_A(x)/x\}},$$

где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если **x** удовлетворяет свойству **P**, и 0 – в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов **x** из **E** нет однозначного ответа «да/нет» относительно

свойства **P**. В связи с этим ***нечеткое подмножество A*** универсального множества **E** определяется как множество упорядочных пар с характеристической функцией $\mu_A(x)$, которую называют ***функцией принадлежности*** (англ. – membership function). При этом ***функция принадлежности*** $\mu_A(x)$ ставит в соответствие каждому элементу $x \in E$ число $\mu_A(x)$ из **интервала** [0,1]. Это число определяет ***степень принадлежности*** элемента **x** подмножеству **A**.

Примеры записи нечеткого множества.

Пусть $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ – универсальное множество

$\mu_A(x_1)=0{,}1$; $\mu_A(x_2)=0{,}3$; $\mu_A(x_3)=0$; $\mu_A(x_4)=0{,}6$

Тогда нечеткое множество A можно представить в виде:

$\mathbf{A=\{0{,}1/x_1;\ 0{,}3/x_2;\ 0/x_3;\ 0{,}6/x_4\}}$ или

$\mathbf{A=0{,}1/x_1 + 0{,}3/x_2 + 0/x_3 + 0{,}6/x_4}$

причем знак суммирования («+») обозначает объединение одноточечных множеств $\mu_A(x_i)/x_i$.

Необходимо различать понятия «случайность» и «нечёткость». Случайность носит *вероятностный характер*, нечёткость же связана с *неточностью и приблизительностью представления* о свойствах, взаимосвязях исследуемой системы. Следует также подчеркнуть одну особенность функции принадлежности в сравнении с функциями распределения вероятностей. Если последние имеют объективную основу, например, в виде накопленных статистических данных, то функции принадлежности являются субъективными.

Приведенные определения являются основой для формализации различного вида неопределенностей. Например: пусть диапазон измерения температуры теплоносителя исследуемого теплообменника определяется универсальным множеством E={10, 15, 20, 25, 30}. Оператор, наблюдая за технологическим процессом, словесно охарактеризовал температуру теплоносителя нечетким термином «высокая». На этапе формализации качественной информации термин «высокая» сопоставляется с нечетким множеством - **A** универсального множества **E**. Предположим, что это сопоставление дало следующий результат:

$$A \overset{\Delta}{=} \text{”высокая”} = 0/10 + 0{,}2/15 + 0{,}5/20 + 0{,}8/25 + 1{,}0/30$$

В этом выражении знак «$\overset{\Delta}{=}$» обозначает равно по определению. Анализ нечеткого множества - **A** показывает, что температура x_1=10 °C не может быть отнесена к понятию «высокая», поэтому $\mu_A(x_1)=0$, в то же время для элемента x_5=30°C степень принадлежности к данному термину принята равной 1, т.е. это значение температуры при заданном

универсальном множестве строго соответствует термину «высокая». Таким образом, чем выше степень принадлежности, тем с большей мерой элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества.

В приведенном примере использован прямой метод определения функций принадлежности, когда эксперт просто задаёт значение степени принадлежности $\mu_A(x)$ для каждого $x \in E$. Как правило прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения. При прямых методах используются такие групповые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо, и каждый должен дать один из двух ответов, например: “этот человек высокий” или “этот человек не высокий”, - тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, даёт значение $\mu_{\text{“высокий”}}$ для данного лица.

Кроме указанного в нечеткой логике для задания функций принадлежности используются также *типовые* формы приведенных ниже функций (рис.3):

- треугольная (trimf);
- трапецеидальная (trampf);
- гауссова (gaussmf);
- двойная гауссова (gauss2mf);
- обобщённая колоколообразная (gbellmf);
- сигмоидальная (sigmf);
- двойная сигмоидальная (dsigmf);
- произведение двух сигмоидальных функций (psigmf);

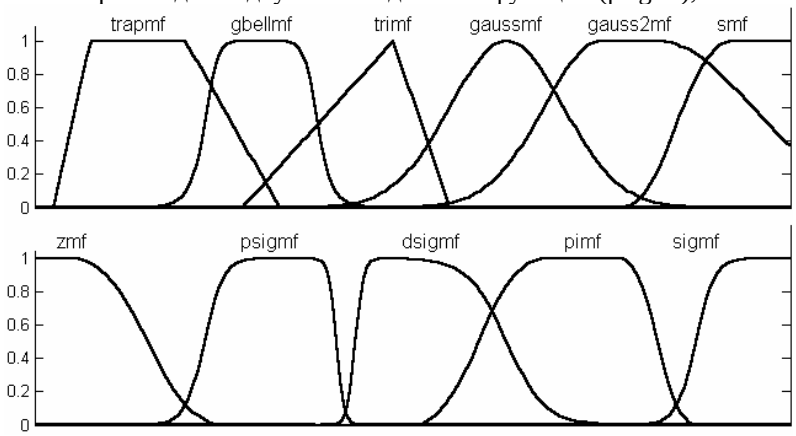


Рис.3. Типовые функции принадлежности нечетких множеств

Конкретный вид данных функций определяется значениями параметров, входящих в их аналитические представления, например:

$$\mathrm{trimf}(x,a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{c-x}{c-b}\right),0\right)$$

$$\mathrm{trapmf}(x,a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{c-x}\right),0\right)$$

$$\mathrm{gaussmf}(x,y,c) = e^{-\left(\frac{x-c}{y}\right)^2}$$

$$\mathrm{gbellmf}(x,a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

$$\mathrm{sigmf}(x.a.c) = \frac{1}{1+\exp(-a(x-c))}$$

Главным первичным понятием фази-логики является понятие *лингвистической переменной* (англ. – *linguistic variable*).

Лингвистической называют ***переменную***, которая задана на количественной шкале базисной переменной *x* и принимает значения в виде слов и словосочетаний естественного языка.

Лингвистическим термом (англ. – *linguistic term*) называют отдельное значение лингвистической переменной, которое задается не в виде конкретного числа, а с помощью одной функции принадлежности. Другими словами, *каждому терму соответствует нечеткое множество*. Множество всех возможных значений лингвистической переменной, определяют как ***терм – множество*** *(*англ. – *term set)*. Например, если физическая переменная – «температура теплоносителя» *x* в теплообменнике (рис. 4) – характеризуется нечеткими понятиями «малая», «нормальная», «высокая», то совокупность этих 3 значений рассматривается как лингвистическая переменная, принимающая эти лингвистические значения, или термы.

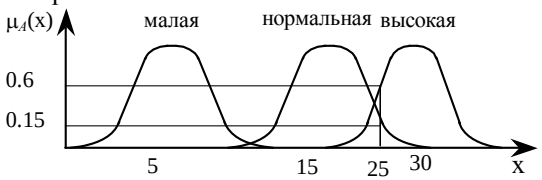


Рис.4. Термы лингвистической переменной «температура теплоносителя»

Процедуру определения значения ФП $\mu_A(x^*)$, соответствующего конкретному значению x^* переменной x, называют ***фазификацией*** (англ. – *fuzzification*). Например, для лингвистической переменной – «температура теплоносителя» $x^*=25^0$ С принадлежит к терму «малая» с ФП $\mu_A(x^*)=0$, к терму «нормальная» с ФП $\mu_B(x^*)=0{,}15$, а к терму «высокая» с ФП $\mu_C(x^*)=0{,}6$ (рис.3.2).

3.3. Операции над нечеткими множествами

3.3.1. Логические операции

Рассмотрим основные логические операции, которые возможны с нечеткими множествами.

1. Включение

Пусть *A* и *B* – нечеткие множества на универсальном множестве *E*. Говорят, что *A* содержится в *B*, если $\forall x \in E$ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ($\forall$–читается «для всех»).

Обозначение: $A \subset B$.

2. Равенство

A и B равны, если $\forall x \in E$ $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Обозначение: A =B.

3. Дополнение

Пусть M= [0, 1], A и B – нечеткие множества, заданные на E. A и B дополняют друг друга, если:

$\forall x \in E$ $\mu A(x) = 1-\mu_B(x)$.

Обозначение: $B = \overline{A}$ или $A = \overline{B}$.

4. Пересечение

$A \cap B$ – наименьшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B, с функциями принадлежности:

$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$.

5. Объединение

$A \cup B$ – наибольшее нечеткое подмножество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности

$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$.

6. Разность

$A - B = A \cap \overline{B}$ с функцией принадлежности

$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\overline{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1-\mu_B(x))$.

Примеры.

Пусть: $A = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$;

$B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$;

$C = 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4$.

Здесь:

1. $A \subset B$, то есть A содержится в B, C несравнимо ни с A, ни с B.
2. $A \neq B \neq C$.
3. $\overline{A} = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4$;

$\overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0{,}9/x_3 + 0/x_4$;

4. $A \cap B = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$;

$A \cap C = 0{,}1/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 0{,}9/x_4$;

5. $A \cup B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$;

$A \cup C = 0{,}4/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 1/x_4$;

7. $A - B = A \cap \overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4$;

$B - A = \overline{A} \cap B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$;

3.3.2. Алгебраические операции

Теперь представим алгебраические операции с нечеткими множествами. ***Алгебраическое произведение*** *A* и *B* обозначается $A \cdot B$ и определяется так:

$\forall x \in E\ \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$.

Алгебраическая сумма этих множеств обозначается A + B и определяется так:

$\forall x \in E\ \mu_{A+B}(X) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$.

На основе операции алгебраического произведения определяется операция *возведения в степень* α нечеткого множества *A*, где α - положительное число. Нечеткое множество A^α определяется функцией принадлежности $\mu_A{}^\alpha(x) = \mu^\alpha{}_A(x)$. Частными случаями возведения в степень являются:

- $CON(A) = A^2$ - операция *концентрирования* (уплотнения),
- $DIL(A) = A^{0,5}$ - операция *растяжения*,

эти операции используются как лингвистические модификаторы, с помощью которых деформируют функции принадлежности, характеризующие исходные термы.

Применение модификатора «очень» (ему соответствует операция CON(*A*)) позволяет уменьшить степень нечеткости относительно исходной информации, а модификатора «довольно» («более или менее») (ему соответствует операция DIL(*A*)) увеличить неопределенность.

Рассмотренные операции над нечеткими множествами позволяют проводить формализацию составных терминов. Например, пусть диапазон изменения давления в реакторе определен в виде универсального множества E={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Величина параметра,

характеризуемого термином «низкое», формализована с помощью нечеткого подмножества A универсального множества E:

$$A \overset{\Delta}{=} \text{«низкое»} = 1/1+0.8/2+0.7/3+0.5/4+0.3/5+0.1/6$$

В некоторый момент времени оператор, наблюдая за процессом, охарактеризовал давление в реакторе «не очень низкое». Необходимо дать количественную оценку составному термину $C \overset{\Delta}{=}$ «не очень низкое». Применяя операцию концентрирования к подмножеству A, получим

$$A^2 \overset{\Delta}{=} \text{«очень низкое»} = 1/1+0.64/2+0.49/3+0.25/4+0.09/5+0.01/6$$

Далее применим к подмножеству $\tilde{A}^2$ операцию дополнения нечетких подмножеств, получим требуемую количественную оценку

$$C = \overline{A}^2 \overset{\Delta}{=} \text{« не очень низкое»} = 0/1+0.36/2+0.51/3+0.75/4+0.91/5+0.99/6$$

Декартово (прямое) произведение нечетких множеств.

Декартово произведение четких *P* множеств *A* и *B* – это множество упорядоченных пар (или кортежей) *(x, y)*, первый элемент *x* которых относится к множеству *A*, а второй элемент *y* – к множеству *B*. Например, для двух множеств $A=\{x_1, x_2, x_3\}=\{1; 2; 3\}$, $B=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\{1; 2; 3; 4\}$ декартово произведение равно

$$P=A\times B=\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3,y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\} = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}.$$

Подчеркнем, что для понятия «кортеж» существен не просто набор элементов, а порядок их следования. В общем виде декартово произведение *P* двух четких множеств *A* и *B* записывается так:

$$P= A\times B=\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Декартово произведение также является множеством и может служить базисным для описания взаимосвязей между множествами *A* и *B*, элементы которых принадлежат разным базисным множествам *X* и *Y*.

В случае если A_1, A_2 нечеткие подмножества универсальных множеств E_1, E_2 соответственно, то ***декартово или прямое произведение*** $A = A_1\times A_2$, является нечетким подмножеством множества $E = E_1 \times E_2$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A1\times A2}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}, (x_1, x_2,) \in A_1\times A_2$$

Например, пусть имеем универсальные множества $E_1=E_2=\{1; 2; 3\}$ и нечеткие подмножества A_1={0,5/1; 1/2; 0,6/3}и

A_2={1/1; 0,6/2}. Декартово произведение нечетких подмножеств A_1 и A_2 будет равно

$A_1 \times A_2$={0,5/(1,1); 0,5/(1,2); 1/(2,1); 0,6/(2,2); 0,6/(3,1); 0,6/(3,2)}.

Декартово произведение нечетких множеств тесно связано с понятием нечеткого отношения.

3.3.3. Нечеткие отношения

Параметры химико-технологической системы (ХТС) могут быть связаны между собой различного вида **отношениями.** Например, нас интересует влияние параметра ХТС на качество выпускаемой продукции, то данная связь может быть описана различного вида отношениями: «влияет», «не влияет», « сильно влияет», «слабо влияет» и др. Наиболее распространенной формой задания отношений является словесное описание.

Нечеткие отношения существуют между нечеткими множествами, например, между множеством A={[x,$\mu_A(x)$] | $x \in X$} и множеством B={[y,μ_B(y)]| y∈Y}.

Нечетким отношением **R** на множестве U называется нечеткое подмножество декартова произведения $A \times B$, характеризующееся функцией принадлежности μ_R: $A \times B \to [0,1]$

В этом случае нечеткое отношение определяется как

$$\mathbf{R=\{[(x, y),\mu_R(x, y)] \mid (x, y) \in A \times B\},}$$

где $\mu_R(x,y)$ – функция принадлежности, понимается как субъективная мера выполнения отношения R и характеризующая одновременную принадлежность обоих элементов x и y, образующих пары (x, y), к декартову произведению $A \times B$.

Обозначение: нечеткое отношение **R** на $X \times Y$ запишется в следующем виде: $x \in X$, $y \in Y$: $\boldsymbol{xRy}$. В случае, когда $X = Y$, то есть X и Y совпадают, нечеткое отношение R: $X \times X \to [0, 1]$ называется нечетким отношением на множестве X.

Примеры.

1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Введем нечеткое отношение $R = XRY$, которое может быть задано, например матрицей отношения, табл. 2.

Таблица 2.

Задание нечеткого отношения

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

Из приведенной таблицы видно, что пары (x_1, y_1),(x_1, y_2),(x_2, y_1), находятся в веденном отношении R с функцией принадлежности μ_R(x, y)=0, т.е. можно сказать, что они не находятся в отношении R.

2. Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$, то есть множество всех действительных чисел. Отношение $x >> y$ (x много больше y) можно задать следующей функцией принадлежности:

$$\text{м}_R = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le y, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

3.3.4 Операции над нечеткими отношениями

Объединение двух отношений

Объединение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

$$\text{м}_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \text{м}_{R_1}(x,y) \vee \text{м}_{R_2}(x,y) = \max\left(\text{м}_{R_1}(x,y), \text{м}_{R_2}(x,y)\right).$$

Пересечение двух отношений

Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\text{м}_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \text{м}_{R_1}(x,y) \wedge \text{м}_{R_2}(x,y) = \min\left(\text{м}_{R_1}(x,y), \text{м}_{R_2}(x,y)\right).$$

Алгебраическое произведение двух отношений

Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением

$$\text{м}_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \text{м}_{R_1}(x,y) \cdot \text{м}_{R_2}(x,y).$$

Алгебраическая сумма двух отношений

Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается R_1+R_2 и определяется выражением

$$\text{м}_{R_1+R_2}(x,y) = \text{м}_{R_1}(x,y) + \text{м}_{R_2}(x,y) + \text{м}_{R_1}(x,y) \cdot \text{м}_{R_2}(x,y).$$

Дополнение отношения

Дополнение отношения R обозначается $\overline{\text{R}}$ и определяется функцией принадлежности

$$\text{м}_{\overline{\text{R}}}(x,y) = 1 - \text{м}_{\text{R}}(x,y).$$

Композиция (свертка) двух нечетких отношений

Пусть R_1 - нечеткое отношение R_1: $(X \times Y) \to [0, 1]$ между X и Y, и R_2 - нечеткое отношение R_2: $(Y \times Z) \to [0, 1]$ между Y и Z. Нечеткое

отношение между X и Z, обозначаемое $R_2 \bullet R_1$, определенное через R_t и R_2 выражением

$$\mu_{R_1R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,z)\right] = \max\left[\min\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,z)\right)\right]$$

где символом $\bigvee_y$ обозначена операция выбора наибольшего по y значения, называется (max-min) – композицией ((max-min) - сверткой) отношений R_1 и R_2.

Пример. Пусть отношения R_1 и R_2 определяются следующим образом:

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

Тогда

$R_1 \bullet R_2$	z_1	z_2	z_3	z_3
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

При этом

$$\text{м}_{R_1 \bullet R_2}(x_1,z_1) = [\text{м}_{R_1}(x_1,y_1) \wedge \text{м}_{R_2}(y_1,z_1)] \text{V} [\text{м}_{R_1}(x_1,y_2) \wedge \text{м}_{R_2}(y_2,z_1)] \text{V}$$

$$\text{V}[\text{м}_{R_1}(x_1,y_3) \wedge \text{м}_{R_2}(y_3,z_1)] =$$

$=(0{,}1 \wedge 0{,}9)$ V $(0{,}7 \wedge 0{,}3)$ V $(0{,}4 \wedge 0{,}1) = 0{,}1$ V $0{,}3$ V $0{,}1 = 0{,}3$;

$\text{м}_{R_1 \bullet R_2}(x_1,z_2)$ = $(0{,}1 \wedge 0)$ V $(0{,}7 \wedge 0{,}6)$ V $(0{,}4 \wedge 1) = 0$ V $0{,}6$ V $0{,}4 = 0{,}6$;

$$\text{м}_{R_1 \bullet R_2}(x_1,z_3) = 0{,}1$$

$$\text{м}_{R_1 \bullet R_2}(x_2,z_4) = 0{,}5$$

Замечание

В данном примере вначале использован “аналитический” способ композиции отношений R_1 и R_2 то есть i-я строка R_1 “умножается” на j-й столбец R_2 с использованием операции $\wedge$, полученный результат “свертывается” с использованием операции V в $\mu_R(x_i, z_j)$, т.е. (max-min) – композиция представляет операцию, аналогичную умножению матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используются операции нахождения минимального ($\wedge$) и максимального (V) элементов соответственно.

(max -*) - композиция

В выражении $\text{м}_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y [\text{м}_{R_1}(x,y) \wedge \text{м}_{R_2}(y,z)]$ для (max - min) - композиции отношений R_1 и R_2 операцию $\wedge$ (то есть min) можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: ассоциативность, и монотонность (в смысле не убывания) по каждому аргументу. Тогда

$$\text{м}_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y [\text{м}_{R_1}(x,y) * \text{м}_{R_2}(y,z)].$$

В частности, операция $\wedge$ может быть заменена алгебраическим умножением, тогда говорят о (**max-prod**) - композиции.

3.4. Нечеткие выводы

Главной операцией фази-логики является процедура нечеткого вывода (англ. – *fuzzy-reasoning*), с помощью которой из нечетких условий получают приближенные решения. Эта процедура основана на операции импликации, используемой в традиционной математической логике.

Импликация (от лат. implicatio – связывание) – логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «если A, то B». Высказывание A называется *посылкой* (англ. – *pramise*) высказывания $A \to B$, а высказывание B – его *заключением* (англ. – *conclusion*). Высказывание $A \to B$ считается ложной импликацией лишь в том случае, когда посылка A истинна, а заключение B ложно (табл. 3).

Таблица 3.

Правила логического вывода

Исходные высказывания		Импликация	Модус-поненс	«И»
A	B	$A \to B$	$B = A \cap (A \to B)$	$A \cap B$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0

Из таблицы видно, что импликации $A \to B$ соответствует логическая функция $\overline{A} \cup B$. Это означает, что классическая импликация $A \to B$ соответствует процедуре слишком оптимистичного вывода, так как общее высказывание $A \to B$ истинно не только, когда

высказывания A и B истинны (как при операции «И»), но и когда A и B ложны или когда A ошибочно и B истинно.

В тоже время правило «modus ponens» (3 колонка табл.2) устанавливает истинность заключения B лишь в случае истинности посылки A и импликации $A \to B$, т.е. общее умозаключение, получаемое с помощью правила «modus ponens», является более осторожным и предусмотрительным, чем простая импликация $A \to B$. Логическая функция, описывающая правило «modus ponens», имеет вид
$B = A \cap (A \to B) = A \cap (\neg A \cup B)$.

Заметим, что она совпадает с простой логической функцией «И», соединяющей высказывания A и B (4 колонка табл.2).

Из табл. 2 и приведенной формулы вытекает следующее основное, обобщенное правило логического вывода:

Функция истинности заключения B равна максимальному значению функция истинности конъюнкции (операции «И») посылки A и импликации $A \to B$, т.е.

$$\mu_B = \max_A \{\mu_{A \cap A \to B}\} = \max_A \{\min[\mu_A, \mu_{A \to B}]\} =$$
$$= \max_A \{\min[\mu_A, \min(\mu_A, \mu_B)]\}$$

Распространим теперь алгоритм логического вывода, полученный для высказывания $A \to B$, на нечеткие множества.

Нечеткие отношения играют важную роль в формализации нечётких условий, например при нечётком описании поведения ХТС.

Механизм нечетких логических выводов, используемый в различного рода экспертных и управляющих системах в своей основе имеет нечеткую базу знаний. Последняя в свою очередь формируется специалистами предметной области в виде совокупности нечетких предикатных правил.

Нечетким логическим выводом *(fuzzy logic inference)* называется аппроксимация зависимости $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ с помощью нечеткой базы знаний и операций над нечеткими множествами.

Нечеткой базой знаний *(fuzzy knowledge base)* о влиянии факторов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на значение отклика y называется совокупность логических высказываний (предикатных правил Π_i) типа:
Π_1: если x есть A_1, то y есть B_1,
Π_2: если x есть A_2, то y есть B_2,
…
Π_n: если x есть A_n ,то y есть B_n,
где: x - входная переменная (имя для известных значений данных),

y - переменная вывода (имя для значения данных, которое будет вычислено);
A и B – функции принадлежности, определенные, соответственно, на x и y.

Совокупность импликаций $\{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n\}$- отражает функциональную взаимосвязь входных и выходных переменных и является основой построения нечеткого отношения $X\boldsymbol{R}Y$, заданного на произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных.

Пример подобного правила:
если x - низкая, то y - средняя.

Формализация этого предложения задаётся через декартово произведение следующим образом
«если x - низкая, то y – средняя» = **A** x **B**

Приведем более детальное пояснение. Знание эксперта $A \to B$ отражает нечеткое причинное отношение предпосылки и заключения, поэтому его можно назначить нечетким отношением и обозначить через R: $\boldsymbol{R = A \to B}$,
где "$\to$" называют *нечеткой импликацией*

Отношение R можно рассматривать как нечеткое подмножество прямого произведения A×B полного множества предпосылок X и заключений Y. Полученное нечёткое отношение можно использовать для вычисления величины параметра $y \in Y$ при изменении параметра $x \in X$. Для этого используется **композиционное правило вывода.** Значение этого правила для решения практических задач заключается в следующем. Если связь между параметрами ХТС задана в виде нечетких отношений R, и величина входного параметра $x \in X$ определена нечетким подмножеством A`, то величина выходного параметра $y \in Y$, определённого нечетким подмножеством B` может быть вычисленна с помощью композиции

$$\underline{\boldsymbol{B' = A' \bullet R = A' \bullet (A \to B)}},$$

где "•"- введенная выше операция свёртки.

Приведенную композицию запишем через функцию принадлежности по аналогии с правилом обобщенного логического вывода

$$\boldsymbol{\mu_B(y) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\},\ x \in A,\ y \in B}\ .$$

Как операцию композиции, так и операцию импликации в алгебре нечётких множеств можно реализовывать по-разному (при этом, естественно, будет разниться и итоговый получаемый результат). Например, функцию принадлежности $\mu_R(x, y)$ можно определить различными процедурами,

с помощью оператора Мамдани:

$$\mu_R(x,y) = \min_{A\times B}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

оператора Заде:

$$\mu_R(x, y)=\max\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)], [1-\mu_A(x)]\}$$

или оператора Лукасевича:

$$\mu_R(x, y)=\min\{1,[1-\mu_A(x)+ \mu_B(y)]\}.$$

Таким образом, композиционное правило вывода задает закон функционирования **нечеткой модели системы** и является в известном смысле обобщением правила **modus ponens** .

В случае, когда входная величина имеет четкое значение ($x=x^*$) приведенный алгоритм логического вывода упрощается:

$$\mu_{B^*}(y)= \mu_R(x^*, y)=\min\{\mu_A(x^*), \mu_B(y)\}= \mu_A(x^*)\cdot\mu_B(y).$$

Нечеткий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа.

1. Нечеткость (введение нечеткости, **фаззификация**, **fuzzification**).Функции принадлежности, определенные на входных переменных, применяются и к их фактическим значениям для определения истинности каждой предпосылки каждого правила.

2. Логический вывод. Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правила логического вывода обычно используются только операции **min (минимум)** или **prod (умножение)**. *В логическом выводе **min** функция принадлежности вывода "отсекается" по высоте*, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика "И")._*В логическом выводе **prod** функция принадлежности вывода масштабируется* при помощи вычисленной степени истинности предпосылки правила.

3. Композиция. *Нечеткие подмножества*, назначенные для каждой переменной вывода (во всех правилах), *объединяются вместе*, чтобы сформировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода. При подобном *объединении обычно* используются операции **max (максимум) или sum (сумма).** *При композиции **max** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам (нечеткая логика "ИЛИ"). При композиции **sum** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.*

4. В заключении (дополнительно)- *приведение к четкости (**дефаззификация**), которое используется, когда полезно преобразовать нечёткий набор выводов в чёткое число.*

Методы приведения к четкости (*дефаззификация*)

Дефаззификацией *(defuzzification)* называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число.

В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению характеристик случайных величин (математического ожидания, моды, медианы) в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности.

Одним из рассмотренных методов является - *центроидный* (centroid of area).

Для непрерывного варианта:

$$z^* = \frac{\int_\Omega zC(z)dz}{\int_\Omega C(z)dz};$$

для дискретного варианта:

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} б_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} б_i}.$$

Другие возможные методы приведения к четкости иллюстрирует рис. 5: наименьший максимум (smallest of max, som), наибольший максимум (largest of max, lom), средний максимум (mean of mom), бисекторный (bisector of area).

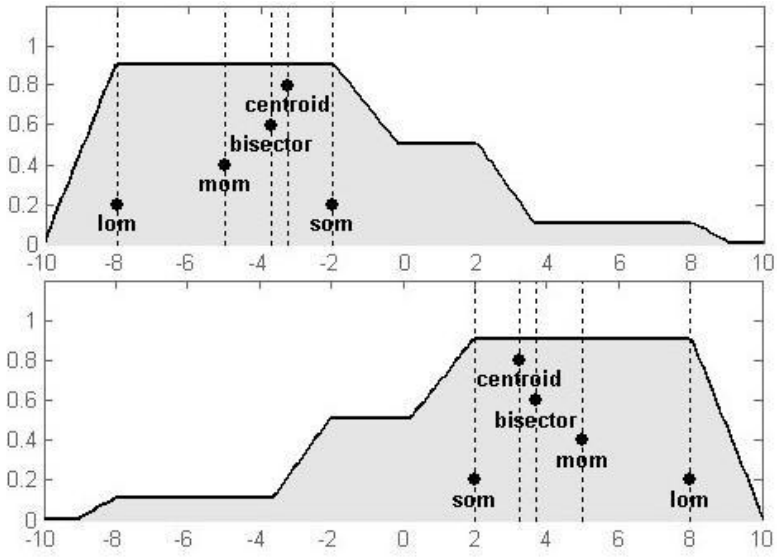


Рис. 5. Методы приведения к четкости

Данный алгоритм математически может быть описан следующим образом.

1. Нечеткость: находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $A_1(x^*)$, $A_2(x^*)$, $B_1(y^*)$, $B_2(y^*)$.

2. Нечеткий вывод: находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции min):

$\alpha_1 = A_1(x^*) \wedge B_1(y^*)$,

$\alpha_2 = A_2(x^*) \wedge B_2(y^*)$.

где через “$\wedge$”, как и раньше, обозначена операция логического минимума (min), затем находятся усеченные функции принадлежности

$C'_1(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z))$,

$C'_2(z) = (\alpha_2 \wedge C_2(z))$.

3. Композиция: с использованием операции max (обозначаемой как “$\vee$”) производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности

$\mu_\Sigma(z) = C(z) = C'_1(z) \vee C'_2(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z))$.

4. Наконец, приведение к четкости (для нахождения z*) проводится, например, центроидным методом (как центр тяжести для кривой $\mu_\Sigma(z)$):

$$z^* = \frac{\int_\Omega z\mu_\Sigma(z)dz}{\int_\Omega \mu_\Sigma(z)dz}$$

Алгоритм иллюстрируется рис. 6.

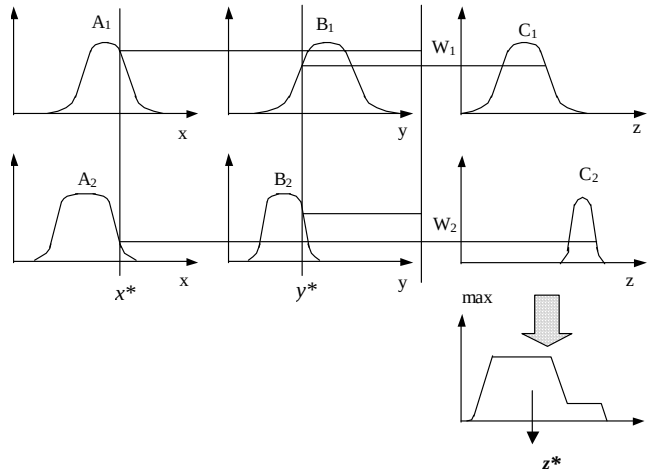


Рис. 6. Иллюстрация к алгоритму Мамдани

3.5. Структура Fuzzy Logic Toolbox

Fuzzy Logic Toolbox - это пакет прикладных программ, входящих в состав среды MatLab. Он позволяет создавать системы нечеткого логического вывода и нечеткой классификации в рамках среды MatLab, с возможностью их интегрирования в Simulink. Базовым понятием Fuzzy Logic Toolbox является FIS-структура - система нечеткого вывода (Fuzzy Inference System). FIS-структура содержит все необходимые данные для реализации функционального отображения “входы-выходы” на основе нечеткого логического вывода согласно схеме, приведенной на рис. 7.

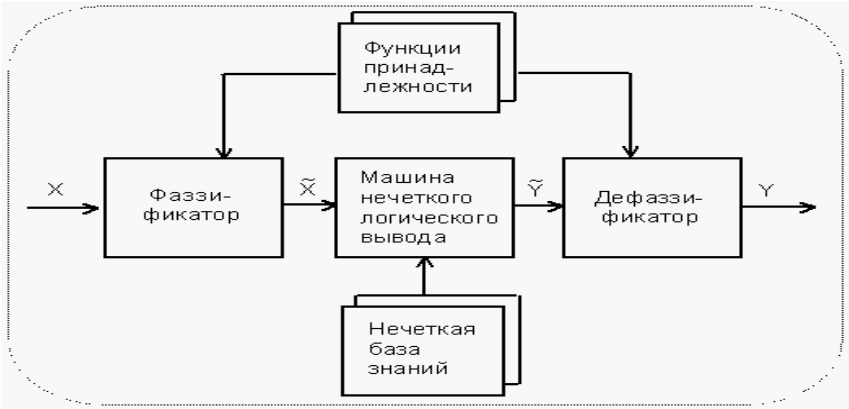


Рис. 7. Нечеткий логический вывод

Обозначения:

X - входной четкий вектор;

$\tilde{X}$ - вектор нечетких множеств, соответствующий входному вектору X;

$\tilde{Y}$ - результат логического вывода в виде вектора нечетких множеств;

Y - выходной четкий вектор.

Состав графического интерфейса

В состав программных средств Fuzzy Logic Toolbox входит программа, позволяющая работать в режиме графического интерфейса:

•редактор нечеткой системы вывода Fuzzy Inference System Editor (FIS Editor или FIS-редактор) вместе со вспомогательными программами - редактором функций принадлежности (Membership Function Editor), редактором правил (Rule Editor), просмотрщиком правил (Rule Viewer) и просмотрщиком поверхности отклика (Sunface Viewer).

Лабораторная работа №1
Построение и исследование математической модели по результатам пассивного эксперимента

Цель работы: построение статистических математических моделей на основании проведения пассивного эксперимента при помощи корреляционного и регрессионного анализа.

Порядок выполнения работы

1. По заданной выборке из генеральной совокупности экспериментальных данных построить эмпирическую линию регрессии в случае наличия одного фактора. Для этого, согласно своим данным для каждого значения X рассчитать средние значение $\overline{Y_i}$ по формуле (5) при наличии параллельных опытов. Построить график зависимости X от Y или $\overline{Y_i}$. При наличии двух факторов построить эмпирическую поверхность.

2. По виду эмпирической линии регрессии выбрать структуру уравнения регрессии. Выбор вида и расчет коэффициентов уравнения регрессии можно производить двумя способами:

- взять уравнение регрессии, в виде полинома отрезка ряда Тейлора;
- начать расчет с линейных членов ряда Тейлора.

3. Найти коэффициенты выбранного уравнения регрессии по методу наименьших квадратов в матричной форме $\hat{Y} = f(x)$. После расчета коэффициентов уравнения регрессии провести статистический анализ уравнения регрессии (регрессионный анализ). Этот анализ состоит в следующем:

- провести ранжировку коэффициентов уравнения регрессии;
- установить адекватность уравнения.

Для проведения ранжировки коэффициентов уравнения регрессии рассчитать матрицу ошибок C по формуле (9).

4. Провести ранжировку коэффициентов уравнения регрессии $\hat{Y} = f(x)$ по их значимости (критерий Стьюдента). Вычеркнуть незначимый коэффициент из уравнения регрессии, а оставшиеся коэффициенты пересчитать. После каждого вычеркивания коэффициента необходимо рассчитывать остаточную дисперсию. Как

только остаточная дисперсия стала больше чем на предыдущей итерации необходимо вернуться к предыдущему уравнению.

5. Проверить адекватность уравнения регрессии $\hat{Y} = f(x)$ по критерию Фишера.

6. Если уравнение регрессии не адекватно, то в исследуемое уравнение $\overline{y} = f(x)$ необходимо добавить следующие члены ряда Тейлора и все расчеты произвести заново, начиная с пункта 2.

7. Рассчитать коэффициенты полученного уравнения регрессии при помощи пакета программ MathCAD.

Отчет должен содержать:

1. Цель работы.
2. Вариант задания.
3. Этапы построения математической модели при помощи регрессионного и корреляционного анализа.
4. Вывод.

Вопросы для защиты лабораторной работы.

1. Дать определение генеральной совокупности и выборки?
2. Что такое корреляционные анализ?
3. Что такое эмпирическая линия регрессии?
4. Что такое регрессионный анализ?
5. Допущения принимаемые для проведения регрессионного анализа?
6. Виды уравнений регрессии, понятие трансцендентной регрессии?
7. Что такое система нормальных уравнений и как она получается?
8. Понятие дисперсии. Дисперсия воспроизводимости, относительного среднего, адекватности.
9. План расчета уравнения регрессии.
10. Что такое число степеней свободы.
11. Как проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии при отсутствии параллельных опытов (при наличии параллельных опытов)?
12. Как проверить адекватность уравнения регрессии при отсутствии параллельных опытов (при наличии параллельных опытов)?
13. Что делать если уравнение регрессии не адекватно?

Задания к лабораторной работе №1

Задание 1

В лабораторных условиях исследуется синтез полимера. Синтез проводят в растворе. Изучается влияние одного фактора X – концентрация мономера (2–40)% на выход полимера Y(%). Экспериментальные данные приведены в табл. 4.

Таблица 4.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y	X	Y
2	0.12	22	4.77
4	0.33	24	3.28
6	0.44	26	4.84
8	1.32	28	11.17
10	1.09	30	13.24
12	1.46	32	5.28
14	3.22	34	5.01
16	4.14	36	11.25
18	2.36	38	8.81
20	5.97	40	7.89

Задание 2

Изучалось влияние температуры X_1 (0÷38)°C, продолжительности X_2 (0÷5,3)часов на предел прочности при растяжении Y мПа анионовых мембран. Экспериментальные данные приведены в табл. 5.

Таблица 5.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0	0	0.00	2.6	20	1.59
0.3	2	0.11	3.0	22	1.18
0.5	4	0.53	3.1	24	1.14
0.9	6	0.51	3.5	26	1.57
1.0	8	0.21	3.7	28	2.49
1.1	10	0.23	4.2	30	1.17
1.4	12	0.81	4.3	32	2.69
1.9	14	0.26	4.6	34	1.24
2.3	16	0.32	4.7	36	2.01
2.5	18	0.39	5.3	38	3.06

Задание 3

Изучается влияние на выход продукта Y (%) одного фактора: давления X (3÷70)кПа. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 6.

Таблица 6.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y_1	Y_2	Y_3	X	Y_1	Y_2	Y_3
3	46.33	18.42	89.86	33	$3.99\cdot10^3$	$7.02\cdot10^3$	$1.70\cdot10^3$
6	111.24	177.65	352.80	36	560.41	$6.64\cdot10^3$	$1.94\cdot10^3$
9	261.18	160.29	566.68	39	$5.93\cdot10^3$	$7.12\cdot10^3$	$1.11\cdot10^4$
12	145.33	677.29	254.62	42	$1.09\cdot10^3$	$3.88\cdot10^3$	$7.88\cdot10^3$
13	$1.07\cdot10^3$	993.83	$1.08\cdot10^3$	45	$2.72\cdot10^3$	$4.31\cdot10^3$	$2.04\cdot10^4$
18	$1.69\cdot10^3$	$1.19\cdot10^3$	$1.86\cdot10^3$	48	$1.25\cdot10^4$	$1.74\cdot10^3$	$3.68\cdot10^3$
21	$2.39\cdot10^3$	$2.39\cdot10^3$	$3.63\cdot10^3$	61	$1.02\cdot10^4$	$1.53\cdot10^4$	$2.22\cdot10^4$
24	$1.06\cdot10^3$	$2.58\cdot10^3$	$1.06\cdot10^3$	64	$8.44\cdot10^3$	$3.12\cdot10^3$	$5.79\cdot10^3$
27	564.52	$4.20\cdot10^3$	$3.85\cdot10^3$	67	$9.47\cdot10^3$	$1.78\cdot10^3$	$2.75\cdot10^4$
30	$4.27\cdot10^3$	$3.69\cdot10^3$	$6.72\cdot10^3$	70	$1.07\cdot10^4$	$1.59\cdot10^4$	$5.79\cdot10^3$

Задание 4

В процессе охлаждения электролитического хлора было изучено влияние удельной теплоёмкости хлора при постоянном давлении X_1(0–28) кДж/(кг·К), динамического коэффициента вязкости хлора X2(0–2,80) Па·с на коэффициент теплопроводности хлора Y (кДж/(м·ч·К)). Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 7.

Таблица 7.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
0	0	0.00	2.29	2.35	16	1.50	2.84	2.16	1.27
1	0.15	0.31	3.09	3.57	17	1.65	0.36	4.12	1.29
2	0.30	1.17	2.16	3.44	18	1.80	0.05	0.09	11.08
3	0.45	0.91	2.39	1.18	18	1.95	2.47	2.56	5.93
4	0.60	1.06	2.22	1.64	23	2.05	3.43	6.71	16.55
8	0.75	0.45	4.00	3.98	24	2.20	0.36	3.64	0.99
9	0.90	1.65	4.63	5.24	25	2.35	3.47	7.46	18.96
10	1.05	0.61	2.47	1.02	26	2.50	0.33	8.53	3.29
11	1.20	0.45	2.64	7.32	27	2.65	3.83	3.29	8.81
15	1.35	0.57	6.55	8.19	28	2.80	3.88	11.12	3.49

Задание 5

При исследовании показателя степени усвояемости аммиака Y в фосфорных соединениях изучалось влияние давления аммонизации X (0,1÷2,0) МПа. Экспериментальные данные приведены в табл. 8.

Таблица 8.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y	X	Y
0.1	0.04	1.1	7.24
0.2	0.16	1.2	4.85
0.3	0.44	1.3	5.13
0.4	0.66	1.4	9.02
0.5	1.39	1.5	10.83
0.6	1.28	1.6	8.97
0.7	2.53	1.7	12.53
0.8	2.52	1.8	10.29
0.9	2.66	1.9	19.33
1.0	3.45	2.0	18.25

Задание 6

Исследовалось влияние концентрации инициатора X_1 (0÷0,19)Г/л, концентрация винилхлорида X_2 (10÷35)Г/л на продолжительность процесса полимеризации Y (час). Экспериментальные данные приведены в табл. 9.

Таблица 9.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0.00	10	0.00	0.10	23	1.59
0.01	11	0.11	0.11	24	0.18
0.02	12	0.33	0.12	25	0.14
0.03	13	0.41	0.13	27	1.57
0.04	15	0.21	0.14	28	2.49
0.05	16	0.23	0.15	29	1.17
0.06	17	0.61	0.16	31	2.69
0.07	19	0.26	0.17	32	1.24
0.08	20	0.32	0.18	33	2.01
0.09	21	0.39	0.19	35	3.06

Задание 7

В лабораторных условиях исследовался процесс титрирования фенола и крезолов в среде бутиловых спиртов Y(%) от давления X

(0÷19) кПа. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 10

Таблица 10.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y_1	Y_2	Y_3	X	Y_1	Y_2	Y_3
0	21.96	32.75	53.91	10	$1.00\cdot10^4$	$4.94\cdot10^4$	$9.39\cdot10^3$
1	47.53	245.59	374.85	11	$2.32\cdot10^4$	$6.13\cdot10^4$	$1.17\cdot10^4$
2	347.94	801.55	875.77	12	$1.58\cdot10^4$	$1.97\cdot10^4$	$7.22\cdot10^4$
3	822.98	$1.44\cdot10^3$	518.33	13	$4.25\cdot10^4$	$4.43\cdot10^4$	$5.53\cdot10^4$
4	264.51	$3.74\cdot10^3$	$2.74\cdot10^3$	14	$3.91\cdot10^4$	$8.31\cdot10^4$	$1.54\cdot10^5$
5	$3.03\cdot10^3$	$1.72\cdot10^3$	$5.63\cdot10^3$	15	$1.23\cdot10^4$	$7.24\cdot10^4$	$2.95\cdot10^4$
6	$2.93\cdot10^3$	$2.53\cdot10^3$	$1.28\cdot10^4$	16	$6.44\cdot10^4$	$1.15\cdot10^5$	$1.89\cdot10^5$
7	$3.56\cdot10^3$	$9.56\cdot10^3$	$4.24\cdot10^3$	17	$4.54\cdot10^4$	$1.94\cdot10^5$	$5.21\cdot10^4$
8	$1.12\cdot10^4$	$2.87\cdot10^3$	$1.74\cdot10^4$	18	$2.93\cdot10^3$	$1.67\cdot10^5$	$2.61\cdot10^5$
9	$8.82\cdot10^3$	$3.79\cdot10^3$	$3.37\cdot10^4$	19	$7.11\cdot10^4$	$1.76\cdot10^5$	$5.79\cdot10^4$

Задание 8

Определялись условия разложения броматов фосфорной кислоты. В качестве факторов, от которых зависит степень разложения Y, выбрали следующие X_1 – продолжительность реакции (0,05÷1,45) мин, X_2 – норма фосфорной кислоты (0,05÷1,62) доли. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 11.

Таблица 11.

Результаты пассивного эксперимента

X1	X2	Y1	Y2	Y3	X1	X2	Y1	Y2	Y3
0.05	0.05	0.00	2.31	2.37	0.54	0.82	3.41	2.59	1.53
0.06	0.05	0.32	3.16	3.65	0.59	0.83	0.36	4.13	1.29
0.07	0.17	1.27	2.33	3.71	0.85	0.98	0.07	0.14	16.25
0.09	0.18	1.04	2.75	1.35	0.90	1.05	3.33	3.45	8.01
0.20	0.19	1.07	2.24	1.66	1.01	1.28	5.65	11.04	27.22
0.28	0.20	0.51	4.59	4.57	1.11	1.39	0.39	4.02	1.10
0.34	0.28	1.86	5.21	5.89	1.15	1.52	6.76	14.54	36.95
0.36	0.29	0.66	2.66	1.10	1.38	1.55	0.53	13.78	5.32
0.50	0.60	0.69	4.01	11.11	1.43	1.60	2.95	3.45	9.24
0.52	0.75	0.77	8.77	10.96	1.45	1.62	7.19	20.61	6.46

Задание 9

В лабораторных условиях исследовалась прочность Y (кгс/см^2) пастизолей. Изучалось влияние весового отношения пластификатора к ПВХ X(0,10÷1,10). Экспериментальные данные приведены в табл. 12.

Таблица 12.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y	X	Y
0.10	6.39	0.60	429.17
0.15	24.29	0.65	506.87
0.20	47.17	0.70	880.29
0.25	59.88	0.75	858.78
0.30	114.01	0.80	356.96
0.35	172.95	0.85	904.15
0.40	269.74	0.90	610.36
0.45	233.79	1.00	179.44
0.50	375.95	1.05	200.25
0.55	526.93	1.10	409.79

Задание 10

Определялись условия разложения броматов фосфорной кислоты. В качестве факторов, от которых зависит степень разложения Y, выбрали следующие X_1 – продолжительность реакции (0,09÷1,49)мин, X_2 – норма фосфорной кислоты (0,06÷0,31)доли. Экспериментальные данные приведены в табл. 13.

Таблица 13.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0.09	0.06	1.36	0.41	0.16	4.60
0.19	0.15	2.18	0.81	0.17	3.51
0.16	0.17	2.91	0.01	0.90	3.76
0.19	0.06	2.09	0.39	0.59	5.46
0.43	0.21	4.56	0.88	1.45	11.39
0.47	0.31	3.37	1.34	0.25	5.15
0.69	0.53	6.79	0.82	1.39	9.92
0.49	0.14	3.11	1.34	0.34	4.98
0.24	0.44	3.06	0.82	1.55	13.19
0.84	0.70	5.48	1.49	0.31	7.46

Задание 11

Определить зависимость растворимости тиосульфата натрия Y от температуры X (0–64) °С. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 14.

Таблица 14.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y_1	Y_2	Y_3	X	Y_1	Y_2	Y_3
0	35.14	70.08	71.89	28	$2.06\cdot10^3$	$2.74\cdot10^3$	$1.61\cdot10^3$
1	43.62	248.53	286.65	32	$4.40\cdot10^3$	$5.86\cdot10^3$	$1.84\cdot10^3$
2	229.23	302.03	480.82	36	$2.78\cdot10^3$	89.58	$1.06\cdot10^4$
4	424.48	452.83	222.79	40	$6.95\cdot10^3$	$3.25\cdot10^3$	$7.54\cdot10^3$
8	112.20	$1.31\cdot10^3$	969.38	44	$5.99\cdot10^3$	$7.95\cdot10^3$	$1.96\cdot10^4$
12	$1.09\cdot10^3$	$1.71\cdot10^3$	$1.69\cdot10^3$	48	$1.81\cdot10^3$	$1.29\cdot10^4$	$3.54\cdot10^3$
16	918.23	$2.95\cdot10^3$	$3.34\cdot10^3$	52	$8.74\cdot10^3$	$8.42\cdot10^3$	$2.14\cdot10^4$
20	987.11	$2.36\cdot10^3$	978.49	56	$5.85\cdot10^3$	$1.45\cdot10^4$	$5.59\cdot10^3$
22	$2.78\cdot10^3$	$1.29\cdot10^3$	$3.60\cdot10^3$	60	$3.57\cdot10^3$	$9.93\cdot10^3$	$2.66\cdot10^4$
24	$1.98\cdot10^3$	$5.06\cdot10^3$	$6.32\cdot10^3$	64	$8.25\cdot10^3$	$1.79\cdot10^4$	$5.61\cdot10^3$

Задание 12

В химической лаборатории исследуется электрохимический синтез пероксадисульфата. Изучается влияние двух факторов: X_1 – температура (0,11-2,87)•10^2°C; X_2 – концентрация исходных веществ (0,14-0,87) % на выход пероксадисульфата Y(%). Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 15.

Таблица 15.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
0.11	0.14	0.04	0.03	0.16	1.34	0.29	0.96	1.88	0.46
0.16	0.24	0.15	0.28	0.56	0.17	2.28	14.71	23.93	6.99
0.28	0.00	0.00	0.00	0.00	1.70	0.07	0.06	0.35	0.54
0.12	0.08	0.02	0.05	0.02	0.29	0.16	0.07	0.10	0.21
0.74	0.86	2.44	4.10	4.48	0.68	0.39	0.63	0.62	2.97
0.99	0.89	0.79	4.15	6.50	2.94	2.77	17.72	8.52	18.04
1.22	0.53	0.38	3.19	4.85	2.25	2.45	17.41	49.57	71.78
0.48	0.88	1.46	3.97	1.62	1.77	0.05	0.17	0.06	0.11
0.23	1.72	0.94	15.55	14.26	1.89	2.69	19.91	5.06	78.12
1.57	0.35	0.14	1.71	3.11	2.04	0.87	3.29	7.46	2.71

Задание 13

В лабораторных условиях исследовалась разнотолщенность Y (%) пастизолей. Изучалось влияние концентрации преджелатинизации X (1,2÷7,0)%масс. Экспериментальные данные приведены в табл. 16.

Таблица 16.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y	X	Y
1.2	0.10	4.4	113.54
1.4	0.58	4.6	82.46
1.8	2.25	5.0	94.05
2.0	4.23	5.2	177.57
2.4	10.68	5.6	227.55
2.6	11.57	5.8	200.42
3.0	26.34	6.2	298.19
3.2	29.43	6.4	257.26
3.6	34.69	6.8	509.28
4.0	49.58	7.0	505.22

Задание 14

Установить влияние примесей, содержащихся в экстракционной фосфорной кислоте, на степень разложения Y фосфорита. В качестве факторов выбраны следующие концентрации: X_1 – MgO (0÷0,09)% масс, X_2 – SO_3(0,01÷0,60) % масс. Экспериментальные данные приведены в табл. 17.

Таблица 17.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0.00	0.01	1.19	0.05	0.15	4.17
0.01	0.06	0.78	0.18	0.09	3.56
0.05	0.08	2.27	0.20	0.26	1.07
0.09	0.10	1.91	0.22	0.31	4.13
0.09	0.15	4.06	0.32	0.38	12.62
0.05	0.04	2.95	0.09	0.54	5.83
0.06	0.20	6.61	0.23	0.09	10.53
0.01	0.09	2.93	0.31	0.07	5.84
0.12	0.26	2.08	0.54	0.55	14.52
0.13	0.30	5.77	0.09	0.60	8.86

Задание 15

Исследовалось влияние концентрации винилхлорида X (0÷0,19)Г/л на продолжительность процесса полимеризации Y (час). Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 18.

Таблица 18.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y_1	Y_2	Y_3	X	Y_1	Y_2	Y_3
0	8.95	24.07	165.24	10	$1.74\cdot10^4$	$2.46\cdot10^4$	$1.18\cdot10^5$
1	622.05	753.21	99.59	12	$2.12\cdot10^4$	$6.42\cdot10^4$	$1.22\cdot10^5$
2	$1.54\cdot10^3$	463.49	487.24	14	$1.33\cdot10^5$	$1.58\cdot10^5$	$1.45\cdot10^5$
3	463.88	248.17	$4.49\cdot10^3$	16	$1.28\cdot10^5$	$2.42\cdot10^4$	$5.87\cdot10^4$
4	$5.83\cdot10^3$	356.49	$9.52\cdot10^3$	18	$1.44\cdot10^5$	$1.72\cdot10^5$	$8.58\cdot10^4$
5	$1.19\cdot10^4$	$1.38\cdot10^3$	$1.15\cdot10^4$	20	$2.36\cdot10^5$	$8.68\cdot10^4$	$1.07\cdot10^5$
6	$6.16\cdot10^3$	$1.48\cdot10^4$	$1.33\cdot10^4$	22	$2.59\cdot10^5$	$1.85\cdot10^5$	$2.18\cdot10^5$
7	$2.91\cdot10^4$	$8.42\cdot10^3$	$1.65\cdot10^4$	24	$3.83\cdot10^4$	$2.16\cdot10^5$	$1.73\cdot10^5$
8	$4.58\cdot10^4$	$1.65\cdot10^4$	$7.21\cdot10^4$	26	$3.85\cdot10^5$	$4.07\cdot10^5$	$2.83\cdot10^5$
9	$1.42\cdot10^4$	$3.04\cdot10^4$	$9.76\cdot10^4$	28	$4.43\cdot10^5$	$5.92\cdot10^4$	$1.79\cdot10^5$

Задание 16

Установить влияние некоторых факторов на теплоёмкость водорода Y (кДж/(кг·К)), полученную интерполяцией по узловым точкам. В качестве факторов выбраны: температура $X_1(0{,}01–0{,}38)\bullet10^3$ °С и давление X_2(0–45) МПа. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 19.

Таблица 19.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
0.01	0	0.00	0.54	0.55	0.20	23	2.78	1.41	0.83
0.02	2	0.18	1.18	1.36	0.22	25	0.36	2.76	0.87
0.04	6	0.88	1.08	1.72	0.24	26	0.06	0.08	9.00
0.06	7	0.83	1.47	0.72	0.26	27	2.90	2.01	4.65
0.08	8	0.36	0.49	0.37	0.28	29	4.25	5.53	13.65
0.10	9	0.41	2.44	2.43	0.30	31	0.29	1.97	0.54
0.12	10	1.41	2.64	2.99	0.32	34	4.52	6.49	16.49
0.14	15	0.46	1.25	0.52	0.34	38	0.41	7.05	2.72
0.16	18	0.54	2.11	5.85	0.36	39	3.05	2.38	6.36
0.18	20	0.64	4.87	6.09	0.38	45	5.04	9.63	3.02

Задание 17

Параметром оптимизации в лабораторных опытах была степень превращения Y изопропил бензола в двуокись углерода. Фактор был один, а именно, X – объемная скорость потока $(0\div19)г^{-1}$. Экспериментальные данные приведены в табл. 20.

Таблица 20.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y	X	Y
0	0.09	10	20.63
1	0.40	11	21.87
2	0.92	12	44.91
3	2.01	13	39.26
4	2.28	14	58.86
5	4.20	15	53.42
6	6.19	16	93.13
7	8.01	17	98.14
8	16.51	18	107.68
9	19.54	19	143.86

Задание 18

Исследовалось влияние на выход полимера Y(кг) – концентрации инициатора X_1 (0÷4,1)%, продолжительности реакции X_2 (0,01÷0,45).Экспериментальные данные приведены в табл. 21.

Таблица 21.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y
0.0	0.01	0.01	1.5	0.13	0.03
0.1	0.02	0.02	1.9	0.15	0.02
0.5	0.03	0.02	2.0	0.18	0.03
0.4	0.07	0.02	2.4	0.23	0.05
0.8	0.01	0.03	2.9	0.25	0.14
0.6	0.05	0.03	3.4	0.29	0.03
0.2	0.09	0.06	3.8	0.36	0.12
0.4	0.08	0.02	3.9	0.02	0.34
1.1	0.01	0.03	4.0	0.05	0.17
1.3	0.12	0.06	4.1	0.45	0.05

Задание 19

Изучалась зависимость выхода по току хлора Y(%) от степени превращения NaCl X (1 – 48) доли ед. для промышленных электролизёров. Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 22.

Таблица 22.

Результаты пассивного эксперимента

X	Y_1	Y_2	Y_3	X	Y_1	Y_2	Y_3
1	29.28	70.08	71.89	30	$1.89\cdot10^4$	$3.01\cdot10^4$	$1.77\cdot10^4$
4	72.69	497.07	573.30	32	$4.40\cdot10^4$	$7.04\cdot10^4$	$2.21\cdot10^4$
8	573.09	906.09	$1.44\cdot10^3$	34	$3.01\cdot10^4$	$1.17\cdot10^3$	$1.37\cdot10^5$
10	$1.42\cdot10^3$	$1.81\cdot10^3$	891.16	36	$8.11\cdot10^4$	$4.55\cdot10^4$	$1.06\cdot10^5$
12	467.51	$6.55\cdot10^3$	$4.85\cdot10^3$	38	$7.49\cdot10^4$	$1.19\cdot10^5$	$2.94\cdot10^5$
14	$5.46\cdot10^3$	$1.02\cdot10^4$	$1.02\cdot10^4$	40	$2.41\cdot10^4$	$2.06\cdot10^5$	$5.66\cdot10^4$
16	$5.36\cdot10^3$	$2.07\cdot10^4$	$2.34\cdot10^4$	42	$1.24\cdot10^5$	$1.43\cdot10^5$	$3.64\cdot10^5$
20	$6.58\cdot10^3$	$1.89\cdot10^4$	$7.83\cdot10^3$	44	$8.77\cdot10^4$	$2.61\cdot10^5$	$1.01\cdot10^5$
24	$2.09\cdot10^4$	$1.17\cdot10^4$	$3.24\cdot10^4$	46	$5.66\cdot10^3$	$1.89\cdot10^5$	$5.05\cdot10^5$

Задание 20

Исследовалось влияние pH анолита X_1 (0÷2,7)Г/л и концентрация добавок сульфата натрия в анолите X_2(0–10,0)% на расход рутения Y (мг/т). Все наблюдения проводились три раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 23.

Таблица 23.

Результаты пассивного эксперимента

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
0	0.0	1.64	1.68	1.86	1.0	5.5	1.64	0.84	0.60
0.1	0.5	0.99	1.58	2.67	1.5	6.0	0.81	1.89	7.79
0.2	1.5	0.59	2.00	0.91	1.6	6.5	3.59	1.72	3.74
0.3	2.0	0.98	0.37	4.47	1.7	7.0	7.08	4.82	7.05
0.4	2.5	1.35	0.11	2.89	1.8	7.5	3.51	5.26	3.44
0.5	3.0	0.24	2.12	4.31	1.9	8.0	0.49	2.18	5.37
0.6	3.5	1.72	2.28	3.59	2.0	8.5	8.04	7.48	18.12
0.7	4.0	0.53	2.44	1.35	2.5	9.0	5.13	9.18	2.85
0.8	4.5	4.48	3.45	10.96	2.6	9.5	0.09	1.54	1.02
0.9	5.0	2.79	0.31	6.61	2.7	10.0	3.15	0.86	20.32

Лабораторная работа №2
Построение и исследование математической модели по результатам активного эксперимента.

Цель работы: изучение метода планирования эксперимента для получения линейной и неполной степенной математической модели статики сложных объектов.

Порядок выполнения лабораторной работы.

1. По заданной матрице планирования вычислить коэффициенты уравнения регрессии, изначально задавшись уравнением вида:
2. $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$
3. Проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии по критерию Стьюдента при уровне значимости p=0,05.
4. Проверить адекватность уравнения регрессии по критерию Фишера.
5. Получить уравнение регрессии в натуральных координатах и сравнить с результатом эксперимента построив таблицы. Для этого в уравнение регрессии надо подставить выражение (23).

Отчет должен содержать:

1. Цель работы.
2. Вариант задания.
3. Этапы построения математической модели при помощи ПФЭ.
4. Вывод.

Вопросы для защиты лабораторной работы

1. Что называется ПФЭ?
2. Как выбираются факторы планирования, их основные (базовые) уровни и интервалы варьирования?
3. Порядок проведения эксперимента методом ПФЭ.
4. Как составляется матрица планирования ПФЭ?
5. Какими свойствами обладает матрица планирования ПФЭ (доказать эти свойства)?
6. Как проверить значимость оценок коэффициентов уравнения регрессии?
7. Как проверить адекватность математической модели?
8. При каких условиях не соблюдается требование адекватности математической модели и как следует поступить в этом случае?
9. Укажите преимущества и недостатки ПФЭ.
10. В чем отличие в получении математических моделей полученных по результатам активного и пассивного экспериментов?

Задания к лабораторной работе №2

Задание 1

В лабораторных условиях исследуется синтез полимера. Синтез проводят в растворе. Изучается влияние трех факторов: Z_1 – концентрация мономера (20–28 %); Z_2 – концентрация инициатора полимеризации (0,15–0,25 %); Z_3 – температура (343–363 К) на выход полимера Y(%). Результаты эксперимента представлены в табл. 24.

Таблица 24.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	42,5
2	–1	+1	+1	52
3	+1	–1	+1	44
4	–1	–1	+1	54
5	+1	+1	–1	46
6	–1	+1	–1	54,5
7	+1	–1	–1	46
8	–1	–1	–1	62

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: $Y_1 = 43$, $Y_2 = 47$, $Y_3 = 48$

Задание 2

Изучается влияние на выход продукта Y (%) трех факторов: температуры Z_1 (100÷200°C), давления Z_2 ($2\cdot10^5 \div 6\cdot10^5$ Па), и времени пребывания Z_3 (10÷15 мин). Результаты эксперимента представлены в табл. 25.

Таблица 25.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	15	15.27	15.03
2	–1	+1	+1	14.44	14.31	14.67
3	+1	–1	+1	14.3	15.33	14.31
4	–1	–1	+1	17.12	16.38	18.68
5	+1	+1	–1	19.1	16.33	17.99
6	–1	+1	–1	17.59	18.81	19.53
7	+1	–1	–1	13.82	13.56	13.21
8	–1	–1	–1	15.91	15.5	17.23

Задание 3

При исследовании показателя степени усвояемости аммиака в Y в фосфорных соединениях изучалось влияние температуры аммонизации Z_1 (20÷70°C), продолжительность аммонизации Z_2 (15÷20 мин), норма аммиака Z_3(100%÷150%). Результаты эксперимента представлены в табл. 26.

Таблица 26.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	28
2	–1	+1	+1	27
3	+1	–1	+1	36
4	–1	–1	+1	12
5	+1	+1	–1	21
6	–1	+1	–1	18
7	+1	–1	–1	40
8	–1	–1	–1	26

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: $Y_1 = 27$, $Y_2 = 31$, $Y_3 = 28,5$

Задание 4

В лабораторных условиях исследовался процесс извлечения ванадия Y(%) от концентрации соляной кислоты Z_1 (6,0÷9,0 моль/л), соотношения объемов органической и твердой фаз Z_2 (5,0÷7,0 мл/м) и объемное соотношение соляной кислоты и твердого продукта Z_3 (0,30÷0,40 мл/г). Результаты эксперимента представлены в табл. 27.

Таблица 27.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	15	15.27	15.03
2	–1	+1	+1	14.44	14.31	14.67
3	+1	–1	+1	14.3	15.33	14.31
4	–1	–1	+1	17.12	16.38	18.68
5	+1	+1	–1	19.1	16.33	17.99
6	–1	+1	–1	17.59	18.81	19.53
7	+1	–1	–1	13.82	13.56	13.21
8	–1	–1	–1	15.91	15.5	17.23

Задание 5

В лабораторных условиях исследовалась прочность Y (кгс/см^2) пастизолей. Изучалось влияние весового отношения пластификатора к ПВХ Z_1 (0,81÷0,83), температуры преджелатинизации Z_2 (80,8÷81,6 °С), температуры желатинизации Z_3 (184÷188°С). Результаты эксперимента представлены в табл. 28.

Таблица 28.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	93,4
2	–1	+1	+1	89,4
3	+1	–1	+1	88,2
4	–1	–1	+1	95,7
5	+1	+1	–1	92,7
6	–1	+1	–1	72,2
7	+1	–1	–1	82,1
8	–1	–1	–1	75,9

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 83,8, Y_2 = 84,5, Y_3 = 83,1

Задание 6

Исследовалось влияние на выход полимера Y(кг) – температуры Z_1 (60÷70°С), концентрации инициатора Z_2 (0,8÷1,2 %), продолжительности реакции Z_3 (6÷12 ч). Результаты эксперимента представлены в табл. 29.

Таблица 29.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	18.2	18.53	19.84
2	–1	+1	+1	15.27	15.13	14.87
3	+1	–1	+1	20.22	21.68	20.94
4	–1	–1	+1	17.12	16.38	17.66
5	+1	+1	–1	16.3	14.02	16.45
6	–1	+1	–1	16.04	17.15	18.46
7	+1	–1	–1	18.96	18.6	18.34
8	–1	–1	–1	15.91	15.5	16.39

Задание 7

В лабораторных условиях исследовалась разнотолщенность Y (%) пастизолей. Изучалось влияние весового отношения пластификатора к ПВХ Z_1 (0,81÷0,83), температуры преджелатинизации Z_2 (80,8÷81,6 °С), температуры желатинизации Z_3 (184÷188°С). Результаты эксперимента представлены в табл. 30.

Таблица 30.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	13
2	–1	+1	+1	15
3	+1	–1	+1	19
4	–1	–1	+1	18,6
5	+1	+1	–1	14
6	–1	+1	–1	18
7	+1	–1	–1	13
8	–1	–1	–1	27

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 17,3, Y_2 = 18, Y_3 = 17,7

Задание 8

Исследовалась скорость процесса сополимеризации Y (моль/л с) α, β, β–трифторспирола с метакриловой кислотой. В качестве независимых факторов были выбраны: Z_1 – суммарная концентрация исходных мономеров (8,08÷11,18 моль/л); Z_2 – концентрация инициатора перекиси бензола (0,0504÷0,1512 моль/л); Z_3 – температура реакции (60÷80°С). Результаты эксперимента представлены в табл. 31.

Таблица 31.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	12	12.22	13.44
2	–1	+1	+1	10.59	10.5	11.7
3	+1	–1	+1	15.57	17.13	15.94
4	–1	–1	+1	16.05	15.36	15.45
5	+1	+1	–1	12.11	10.42	11.28
6	–1	+1	–1	16.76	17.92	17.88
7	+1	–1	–1	22.27	21.85	22.43
8	–1	–1	–1	23.87	23.25	23.46

Задание 9

В лабораторных условиях исследовалась толщина Y (мм) пастизолей. Изучалось влияние весового отношения пластификатора к ПВХ Z_1 (0,81÷0,83), температуры преджелатинизации Z_2 (80,8÷81,6 °С), температуры желатинизации Z_3 (184÷188°С). Результаты эксперимента представлены в табл. 32.

Таблица 32.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	1,82
2	–1	+1	+1	1,58
3	+1	–1	+1	1,17
4	–1	–1	+1	1,77
5	+1	+1	–1	1,47
6	–1	+1	–1	1,56
7	+1	–1	–1	2,22
8	–1	–1	–1	0,91

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 1,05, Y_2 = 1,11, Y_3 = 1,07

Задание 10

Определялся оптимальный состав фотохромного стекла в системе Li_2O–Al_2O_3–SiO_2. В качестве параметра оптимизации (Y) рассматривалась оптическая плотность в облученном состоянии. Надо было определить состав стекла и условия его варки, обеспечивающие максимальную плотность.

В качестве независимых факторов были выбраны: Z_1 – температура варки (1300÷1350°С); Z_2 – время выдержки (1,5÷2 час); Z_3 – содержание A_2O_3 (0,124÷0,157 мол. доли). Результаты эксперимента представлены в табл. 33.

Таблица 33.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	12	12.22	13.08
2	–1	+1	+1	15.27	15.13	14.87
3	+1	–1	+1	17.65	18.92	18.28
4	–1	–1	+1	18.51	17.71	19.1
5	+1	+1	–1	10.48	9.02	10.58
6	–1	+1	–1	7.24	7.74	8.34
7	+1	–1	–1	14.85	14.56	14.4
8	–1	–1	–1	15.91	15.5	16.39

Задание 11

В лабораторных условиях исследовалась относительное удлинение Y (%) пастизолей. Изучалось влияние весового отношения пластификатора к ПВХ Z_1 (0,81÷0,83), температуры преджелатинизации Z_2 (80,8÷81,6 °С), температуры желатинизации Z_3 (184÷188°С). Результаты эксперимента представлены в табл. 34.

Таблица 34.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	408
2	–1	+1	+1	375
3	+1	–1	+1	395
4	–1	–1	+1	412
5	+1	+1	–1	350
6	–1	+1	–1	334
7	+1	–1	–1	372
8	–1	–1	–1	339

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 380, Y_2 = 395, Y_3 = 378

Задание 12

Исследовалось влияние на выход полимера Y(кг) – температуры Z_1 (160÷170°С), концентрации инициатора Z_2 (8÷15 %), продолжительности реакции Z_3 (1÷5 ч). Результаты эксперимента представлены в табл. 35.

Таблица 35.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	24.01	27.86	25.49
2	–1	+1	+1	26.9	28.88	30.09
3	+1	–1	+1	22.34	23.65	21.14
4	–1	–1	+1	24.18	25.89	26.65
5	+1	+1	–1	20.96	20.4	20.68
6	–1	+1	–1	12.83	13.18	13.3
7	+1	–1	–1	15.99	14.86	14.64
8	–1	–1	–1	17.4	16.76	17.15

Задание 13

В лабораторных условиях исследовался процесс образования корок Y(г) на стенках реактора полимеризатора во время полимеризации винилхлорида. Изучалось влияние количества инициатора Z_1 (0,08÷1,2 г), количество стабилизатора Z_2 (0,6÷0,8 г), pH среды полимеризации Z_3 (6÷13). Результаты эксперимента представлены в табл. 36.

Таблица 36.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	0,63
2	–1	+1	+1	0,52
3	+1	–1	+1	0,42
4	–1	–1	+1	0,53
5	+1	+1	–1	0,59
6	–1	+1	–1	0,15
7	+1	–1	–1	0,40
8	–1	–1	–1	0,10

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 0,41, Y_2 = 0,45, Y_3 = 0,46

Задание 14

В лабораторных условиях исследовался процесс извлечения ванадия Y(%) от концентрации соляной кислоты Z_1 (1,0÷5,0 моль/л), соотношения объемов органической и твердой фаз Z_2 (2,0÷7,0 мл/м) и объемное соотношение соляной кислоты и твердого продукта Z_3 (1,5÷3,5 мл/г). Результаты эксперимента представлены в табл. 37.

Таблица 37.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	27.01	29.87	29.66
2	–1	+1	+1	23.37	26.29	25.65
3	+1	–1	+1	23.23	23.54	21.41
4	–1	–1	+1	20.76	22.67	19.95
5	+1	+1	–1	20.96	18.4	20.49
6	–1	+1	–1	20.7	21.26	21.71
7	+1	–1	–1	26.27	24.32	27.45
8	–1	–1	–1	27.58	26.73	26.8

Задание 15

Параметром оптимизации в лабораторных опытах была степень превращения Y изопропил бензола в двуокись углерода. Факторов было три: Z_1 – температура (100÷430 °С); Z_2 – объемная скорость потока (100÷400 $г^{-1}$); Z_3 – концентрация изопропилбензола в газовой фазе (1,0÷2,0 мг/л). Результаты эксперимента представлены в табл. 38.

Таблица 38.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	12
2	–1	+1	+1	10,2
3	+1	–1	+1	14,3
4	–1	–1	+1	15
5	+1	+1	–1	10,4
6	–1	+1	–1	16,2
7	+1	–1	–1	19,5
8	–1	–1	–1	22,5

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 15,4, Y_2 = 15,9, Y_3 = 15,2

Задание 16

Определялся оптимальный состав фотохромного стекла в системе $Li_2O–Al_2O_3–SiO_2$. В качестве параметра оптимизации (Y) рассматривалась оптическая плотность в облученном состоянии. Надо было определить состав стекла и условия его варки, обеспечивающие максимальную плотность.

В качестве независимых факторов были выбраны: Z_1 – исходная концентрация хлора (0,022÷0,063 Г–атом/100г стекла); Z_2 – исходная концентрация брома (0,0094÷0,028 Г–атом/100 г); Z_3 – соотношение Ag:Cl (0,035÷0,1). Результаты эксперимента представлены в табл. 39.

Таблица 39.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	14	14.26	14.02
2	–1	+1	+1	13.9	13.07	13.4
3	+1	–1	+1	14.52	15.57	14.53
4	–1	–1	+1	17.33	16.59	18.91
5	+1	+1	–1	5.82	5.01	5.48
6	–1	+1	–1	8.28	8.85	9.19
7	+1	–1	–1	11.88	11.65	11.35
8	–1	–1	–1	11.67	11.37	12.64

Задание 17

Изучалось влияние температуры Z_1 (60÷80°С), продолжительности Z_2 (2÷6 часов), степени титрования Z_3 (30÷75 %) на объемное электрическое сопротивление Y Ом·м анионовых мембран. Результаты эксперимента представлены в табл. 40.

Таблица 40.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	8,4
2	–1	+1	+1	5,6
3	+1	–1	+1	12,6
4	–1	–1	+1	7
5	+1	+1	–1	5,6
6	–1	+1	–1	2,8
7	+1	–1	–1	4,2
8	–1	–1	–1	1,4

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 7,1, Y_2 = 6,4, Y_3 = 8,0

Задание 18

Изучалась зависимость соотношения между водной и общей формами P_2O_5 (Y %) от температуры процесса аммонизации Z_1 (20÷80°С); содержания воды в спиртовой фазе Z_2 (9,75÷11,34 %); давления в аппарате Z_3 (5÷8 МПа) при получении монокальций фосфата кислотным разложением фосфатов с применением жидкой экстракции. Результаты эксперимента представлены в табл. 41.

Таблица 41.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	28.01	30.98	30.75
2	–1	+1	+1	26.38	29.68	28.95
3	+1	–1	+1	22.12	22.4	20.38
4	–1	–1	+1	17.98	19.63	17.28
5	+1	+1	–1	33.77	29.64	33.02
6	–1	+1	–1	27.94	28.7	29.3
7	+1	–1	–1	32.32	29.92	33.77
8	–1	–1	–1	38.61	37.42	37.52

Задание 19

Изучалось влияние температуры Z_1 (60÷80°С), продолжительности Z_2 (2÷6 часов), степени титрования Z_3 (30÷75 %) на предел прочности при растяжении Y мПа анионовых мембран. Результаты эксперимента представлены в табл. 42.

Таблица 42.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	+1	+1	9
2	–1	+1	+1	12,1
3	+1	–1	+1	10,3
4	–1	–1	+1	5
5	+1	+1	–1	2,4
6	–1	+1	–1	3,7
7	+1	–1	–1	4
8	–1	–1	–1	3

В центре плана были поставлены дополнительные параллельные опыты и получены следующие результаты: Y_1 = 3,1, Y_2 = 2,0, Y_3 = 2,5

Задание 20

Определялись условия разложения броматов фосфорной кислоты. В качестве факторов, от которых зависит степень разложения Y, выбрали следующие Z_1 – температура реакции (10÷50 °С), Z_2 – продолжительность реакции (75÷90 мин), Z_3 – норма фосфорной кислоты (60÷80 %).Результаты эксперимента представлены в табл. 43.

Таблица 43.

Результаты полного трехфакторного эксперимента

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	+1	+1	19	20.28	20.18
2	–1	+1	+1	25.66	26.67	28.69
3	+1	–1	+1	29.04	30.92	27.48
4	–1	–1	+1	21.4	22.14	23.58
5	+1	+1	–1	22.83	22.32	22.52
6	–1	+1	–1	12.83	13.04	13.3
7	+1	–1	–1	15.99	15.47	14.64
8	–1	–1	–1	14.32	14.58	14.12

Лабораторная работа №3
Построение и исследование нечеткой математической модели

Цель работы: освоить методику построения нечеткой математической модели.

Выделяют три возможных подхода, направленных на реализацию нечеткой модели системы.

Первым из подходов является использование качественных представлений о моделируемом процессе для записи множества условных предложений.

Вторым – нечеткая интерпретация существующего математического описания. Это определяется тем, что результаты, получаемые с помощью достаточно сложных моделей, носят качественный характер и отражают наиболее выраженные, характерные особенности изучаемого процесса.

Третьим – использование процедуры идентификации на основе последовательности данных текущих измерений.

Можно отметить, что при моделировании реальных технологических процессов комбинация этих подходов, видимо, должна быть наиболее эффективна.

В этой лабораторной работе исследуется третий подход.

В качестве исходных данных для построения нечеткой модели использовать статистический материал из первой лабораторной работы.

Порядок выполнения лабораторной работы

Построение нечеткой аппроксимирующей системы рассмотрим на конкретном примере

Требуемые действия отобразим следующими пунктами.

1. Скопировать в свой каталог с диска F:\MSA\ папку msulr3.

2. При загрузке **Matlab Command Window** на системный запрос >> написать команду **cd 'H:\'**.

3. Командой >>Fuzzy из режима командной строки запускается основная интерфейсная программа пакета Fuzzy Logic – редактор нечеткой системы вывода. Вид открывающегося при этом окна приведен на рис.8.

Строка меню редактора содержит следующие позиции:

•File – работа с файлами моделей (их создание, сохранение считывание и печать).

•Edit – операции редактирования (добавление и исключение входных и выходных переменных).

•View – переход к дополнительному инструментарию.

4. В меню File открыть файл **msulr3.fis**. Просмотреть все окна на предлагаемом примере. Запустите предлагаемый пример и с помощью Rule Viewer посмотрите работу нечеткого логического вывода.

5. Далее сгенерируйте по аналогии свою нечеткую модель согласно следующему алгоритму:

6. В окне **FIS Editor** в меню **View** выбрать пункт **Editor Rules**

7. В появившемся окне **Rule Editor:msulr3** удалить все правила нажатием клавиши **Delete Rule**.

8. В окне **Rule Editor: msulr3** выбрать меню **View** пункт **Edit membership function…**

9. В появившемся окне **Membership function edit: msulr3** в разделе **Membership function plots** удалить все функции принадлежности для температуры, выделив щелчком мыши и нажав клавишу **Del**.

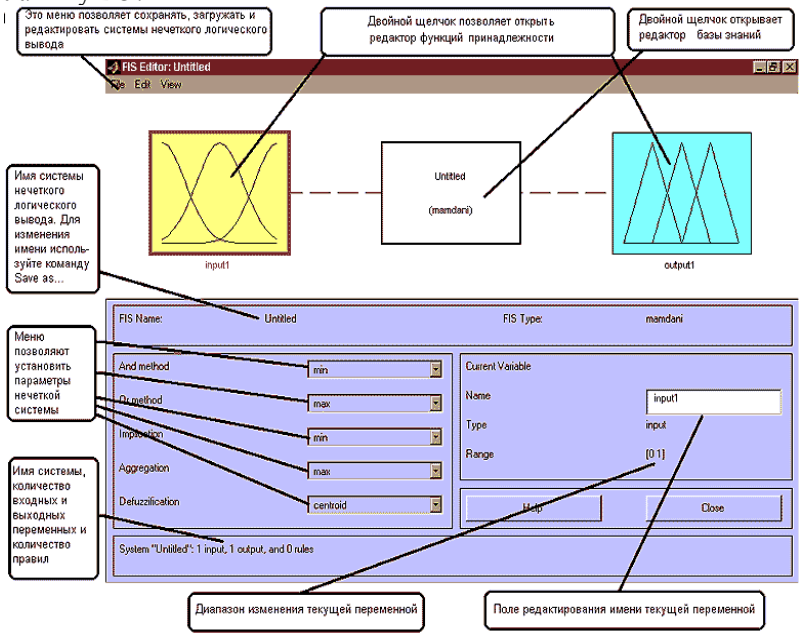


Рис. 8. Вид окна FIS Editor

10. После удаления всех функций принадлежности для температуры щелкнуть по ярлычку давление, а затем концентрация и проделать все то же самое как в пункте 9.

11. В соответствии со своим заданием определить **диапазон** изменения входных параметров и выходного параметра. В середине этого диапазона изъять одну строку экспериментальных данных, она затем будет использоваться для оценки точности аппроксимации

12. В окне **Membership function edit:msulr3** в поле **Range** в квадратных скобках [] указать диапазон изменения по каждому параметру, после чего щелкнуть мышкой в поле **Display Range**.

13. В окне **Membership function edit: msulr3** в меню **Edit** выбрать пункт А**dd MFs…** В появившемся окне в поле **MF type** выбрать **gaussfm**, а в поле **Number of MFs** число экспериментальных точек в лабораторной работе. Если входных или выходных массивах есть повторяющиеся элементы то их указывать два раза не нужно, соответственно уменьшится количество функций принадлежности.

14. После добавления функции принадлежности в окне **Member Function plots** щелкнуть по первой функции принадлежности мышкой и в разделе **Current Membership Function** в поле **Name** указать имя, например T621, в поле **Params** в квадратных скобках [ ] стереть второе число и указать значения соответствующих первому элементу входного или выходного массивов. Операцию повторить до тех пор, пока не будут переименованы все функции принадлежности в разделе **Membership function plots**, после перейти к редактированию давления и концентрации по п. 12, 13.

15. В окне MFE выбрать меню **File** пункт **Save to disk as…** и сохранить файл **msu lr3. fis** в папку, откуда открывали модель, на запрос **This file already exsts** ответить "**Yes**".

16. Перейти в окно **Rule Editor: msu lr3** и написать правила. Для этого необходимо в разделе температура выделить значение, соответствующее правилу, затем в разделе давление, и концентрации и нажать клавишу **Add rule**. Операцию повторить до тех пор, пока не напишите все правила. После этого сохранить файл как в пункте 14.

17. Оценка точности аппроксимации

В окне **FIS Editor** в меню **View** выбрать пункт **View Rules.** В окне **Input** установить значения входных экспериментальных точек, не вошедших в модель и сравнить полученное значение выхода нечеткой модели с истинным значением, полученным по эксперименту для этого рассчитать относительную погрешность

18. Варьируя параметрами исходных функций принадлежности и методами дефаззификации, а также логическими связками в алгоритме Мамдани (***задаётся преподавателем***) получить минимальную относительную погрешность аппроксимации экспериментальных точек нечеткой моделью. Все эксперименты

фиксировать в протоколе, занося варьируемые параметры и расчетную погрешность в табл. 44.

Таблица 44.

Примерный вид таблицы настройки нечеткой модели

Функции принадлежности	Implication	Aggregation	Defuzzification	δ, %

Где δ рассчитывается по следующей формуле

$$\delta = \frac{X_{ИСТЕННОЕ} - X_{РАССЧЕТНОЕ}}{X_{ИСТЕННОЕ}} 100\%$$

19. Сравнить поверхность аппроксимирующей модели полученной в первой лабораторной работе методом пассивного эксперимента с поверхностью нечеткой математической модели, сделать вывод о точности аппроксимирующих моделей.

Содержание отчета

1. Модель (аналитическая запись)
2. Окно **Rule Editor**
3. Окно **Membership Function Editor: msulr3** (для всех входных и выходных переменных)
4. Окно **Fis Editor: msulr3.**
5. Поверхность «четкой» (полученной в первой лабораторной работе) и «нечеткой» аппроксимирующих моделей.
6. Таблица эксперимента по настройке нечеткой модели.
7. Выводы по работе.

Вопросы для защиты лабораторной работы

1. Дайте определение нечёткого множества.
2. Дайте определение лингвистической переменной, что такое терм, приведите примеры.
3. Нарисуйте график ФП $\mu_t(x)=\exp(4-|x-m|)$, соответствующей терму «нормальная температура человеческого тела» m=36,6 °С.
4. Убедитесь с помощью арифметических аналогов логических операций «И», «ИЛИ», что эти операции эквивалентны процедурам максимизации и минимизации соответствующих функций истинности.
5. Каким операциям булевой алгебры соответствуют процедуры фази-пересечения и фази-объединения нечетких множеств?
6. С помощью каких процедур находят ФП фази-пересечения и фази-объединения, если известны ФП исходных множеств?

7. Постройте ФП двух фази-множеств, образованных с помощью союзов «И», «ИЛИ» из трех исходных терм-множеств малая, нормальная, высокая.

8. Сформулируйте обобщенное правило логического вывода, пользуясь ФИ посылки A, импликации $A \rightarrow B$ и заключения B.

9. Проиллюстрируйте на двух произвольных графиках $\mu(x)$ и $\mu(y)$ алгоритм определения ФП y при фиксированном значении x*.

10. Как по графику $\mu_p^*(y)$ можно найти "четкое" значение отклика y^*?

11. Какие основные операции и процедуры осуществляются в системе, реализующей концепцию Мамдани?

12. С помощью каких процедур определяют ФП для сложных посылок, которые состоят из нескольких простых, соединенных союзами «ИЛИ», «И»?

13. С помощью какой процедуры находят результирующую ФП, соответствующую совокупности j-х правил, соединенных союзом «ИЛИ»?

14. Назовите основные этапы синтезирования фази-модели.

Лабораторная работа №4
Построение и исследование математической модели объекта управления

Цель работы: освоить методику построения математической модели объекта управления экспериментально–аналитическим методом.

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка предназначена для изучения процесса регулирования температуры в баке с водой (рис. 8.). Объект регулирования представляет собой емкость (1) из алюминия со встроенными теплонагревательными элементами (ТЭН), суммарной мощностью 3КВт (10). Для измерения температуры используется термопара градуировки ХК (2), установленная на выходе из емкости на трубопроводе. Термопара преобразует измеряемую температуру в ЭДС (сигнал напряжения). ТермоЭДС преобразуется с помощью нормирующего преобразователя ПТ–ТП68 (3) в стандартный сигнал постоянного тока (0÷5 мА). Для работы с пневматическим регулятором, последний преобразуется в сигнал давления сжатого воздуха (0,2÷1кгс/см2) при помощи ЭПП63 (4), а затем поступает на вторичный прибор ПВ10.1Э (5). К прибору конструктивно присоединен пневматический ПИ-регулятором ПР3.31, вырабатывающий регулирующее воздействие по соответствующему закону регулирования. Это воздействие поступает на мембранный исполнительный механизм ИМ (9), изменяющий расход воды, поступающей в емкость, посредством регулирующего органа.

Токовый сигнал, пропорциональный измеряемой температуре, преобразуется в сигнал напряжения (0÷10 мВ) на сопротивлении Rн и поступает на автоматический потенциометр типа КСП-4 (6), который имеет встроенные сигнальные контакты. Эти контакты включены в схему сигнализации позиционного регулятора (7), выполненного из элементов релейной автоматики. При помощи этого регулятора осуществляется управление включением ТЭНов (10) согласно уставкам прибора КСП-4 по максимальной и минимальной температуре.

Питание схемы осуществляется: давлением сжатого воздуха 1,4±0,14 кгс/см^2 через редуктор с фильтром (13) и контролируется техническим манометром (12); напряжением 220В 50Гц через блок тумблеров (14).

Кнопочная станция (8) служит для ручного управления нагревательными элементами.

Сигнальная арматура (11) устанавливается на лицевой стороне щита.

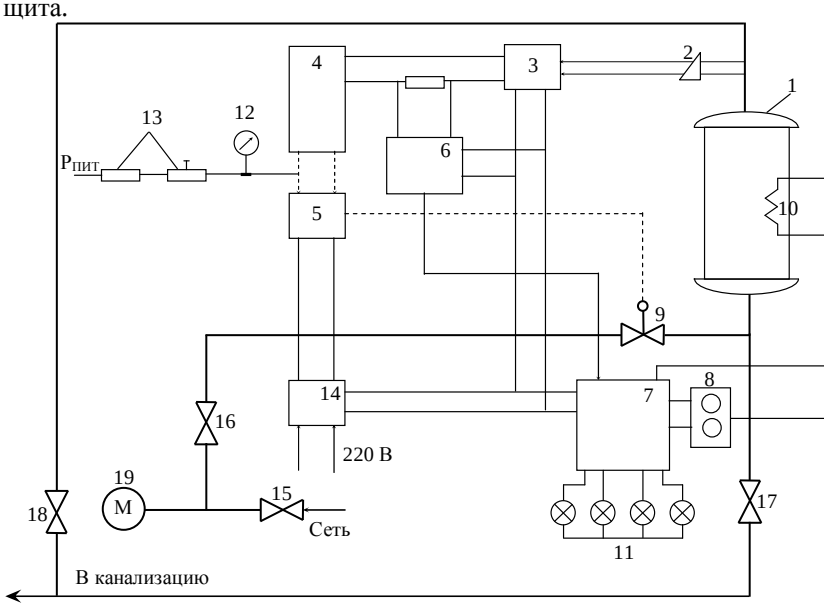


Рис.8. Лабораторная установка

Задание.

1. Изучить лабораторный стенд, местоположение приборов и органов ручного и автоматического управления.
2. Определить каналы передачи регулирующих и возмущающих воздействий в исследуемом объекте;
3. Снять кривую разгона объекта по каналу расход воды температура на выходе теплообменника и аппроксимировать ее апериодическим звеном первого порядка методом Ормана (см. прил №4).
4. Получить аналитическим способом математическую модель объекта управления;
5. С применением пакета программ MatLab построить кривую разгона и сравнить ее с полученной на объекте.

Порядок выполнения. Для подготовки лабораторной установки к работе необходимо:

1. Включить питание лабораторной установки сжатым воздухом и установить давление питания Рпит=1.4кгс/см^2.

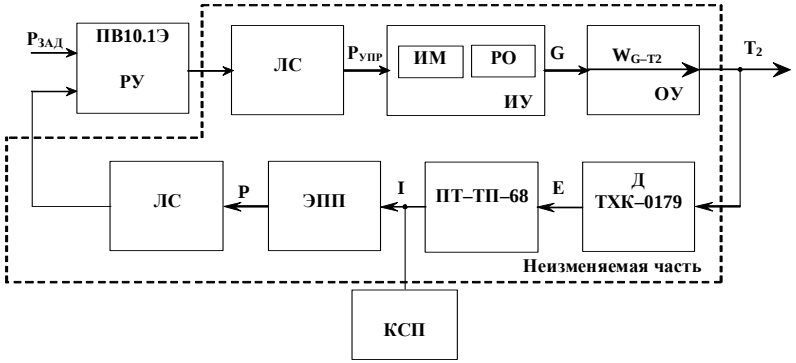
2. Открыть вентили 16, 18 и закрыть вентиль 17.
3. На манометре 19, смонтированном на трубопроводе, вентилем 15 установить давление воды Рсети=100 кПа, при этом давление на исполнительном устройстве установить задатчиком прибора ПВ 10.1.Э равное Р=0.2 кгс/см^2 (исполнительное устройство открыто) .
4. Включить электропитание лабораторной установки на щите питания лаборатории .
5. Включить питание приборов и схемы на щитке питания лабораторной установки.
6. Включить питание прибора КСП-4.
7. Нажать кнопку «Руч» и «Откл» станции управления ПВ10.1Э, для перехода в ручной режим работы для снятия кривой разгона объекта.
8. Для снятия кривой разгона необходимо выбрать линейный участок на статической характеристике (приложение 6). Затем установить величину давления P_1 (равное давлению начала линейного участка статической характеристики) ручным задатчиком на станции управления ПВ10.1Э и дождаться того времени пока стрелка потенциометра не установится это будет соответствовать начальной температуре T_1, после этого с помощью станции управления установить значение давления P_2 (равное давлению конца линейного участка статической характеристики) и с этого момента включить лентопротяжный механизм КСП–4 который отобразит график кривой разгона объекта управления. После окончания переходного процесса необходимо записать температуру T_2, скорость диаграммной ленты и произвести аппроксимацию кривой разгона методом Ормана (приложение 4).

1. Получение математической модели объекта управления экспериментально–аналитическим методом

Вторая часть работы состоит в получении математической модели объекта по каналу управления. Для этого первоначально необходимо выполнить анализ структурной схемы лабораторной установки (рис. 9) с целью получения передаточных функций всех звеньев входящих в неизменяемую часть системы.

Примем некоторые допущения для упрощения написания математической модели теплообменника:

1. Потерями тепла в окружающую среду можно пренебречь.
2. Теплоемкость и плотность воды не зависят от температуры.
3. Температура внутри теплообменника по всему объему одинакова и равна температуре на выходе.



ЛС–линии связи; ИМ–исполнительный механизм; РО–регулирующий орган; ИУ–исполнительное устройство; ОУ–объект управления; Д–датчик; ПТ–ТП 68–нормирующий преобразователь; КСП–вторичный прибор; ЭПП–электропневмопреобразователь; РУ–ручное управление.

Рис. 9. Структурная схема лабораторной установки

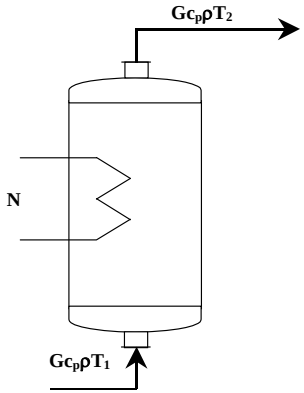


Рис. 10. Фрагмент технологической схемы

Исходные данные:

1. Мощность ТЭН N=3 кВт.
2. Плотность воды ρ=1000 кг/м^3
3. Теплоемкость воды c_p=4200Дж/кг×К
4. С помощью линейки необходимо измерить высоту H и диаметр D теплообменника.

Составим уравнение теплового баланса для теплообменника:

$$\Delta Q = Q_{BX}^{K}\Delta t - Q_{BЫX}^{K}\Delta t + N\Delta t \qquad (33)$$

где: $Q_{BX}^{K} = Gc_p\rho T_1$–конвективный входной тепловой поток;

$Q_{BЫX}^{K} = Gc_p\rho T_2$ –конвективный выходной тепловой поток;

$\Delta Q = Vc_p\rho\Delta T_2$ –элементарное накопление тепла в объеме V;

N–тепловой поток приходящий в теплообменник теплопередачей от нагревательного элемента.

В результате подстановки уравнение теплового баланса примет вид:

$$Vc_p\rho\Delta T_2 = Gc_p\rho T_1\Delta t - Gc_p\rho T_2\Delta t + N\Delta t \qquad (34)$$

или если разделить правую и левую часть уравнения (34) на Δt, и с учетом предела $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T_2}{\Delta t} = \frac{dT_2}{dt}$, получим тепловой баланс в дифференциальной форме:

$$Vc_p\rho\frac{dT_2}{dt} = Gc_p\rho T_1 - Gc_p\rho T_2 + N \qquad (35)$$

Для наглядного представления математической модели используем потоковый топологический граф, который показывает влияние входных переменных на выходные.

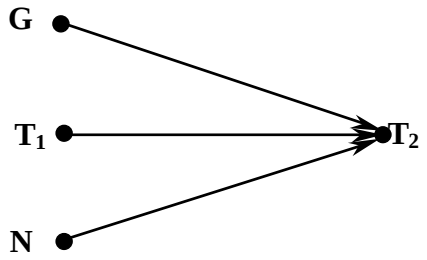


Рис. 11. Граф влияния на выходную температуру T_2 входных переменных.

2. Получение передаточной функции по каналу управления

По графу (рис 11) можно получить структурную схему по каналу управления.

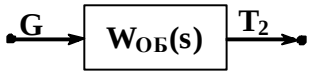


Рис.12. Структурная схема объекта по каналу управления

Получим передаточную функцию Wоб(s), для этого линеаризуем уравнение теплового баланса (35), с этой целью дадим приращение по каналу управления, получим:

$$Vc_p\rho\frac{d(T_2+\Delta T_2)}{dt}=(G+\Delta G)c_p\rho T_1-(G+\Delta G)c_p\rho(T_2+\Delta T_2)+N \qquad (36)$$

Вычтем из уравнения (36) уравнение (35), получим:

$$Vc_p\rho\frac{d\Delta T_2}{dt}=\Delta Gc_p\rho T_1-\Delta Gc_p\rho T_2-Gc_p\rho\Delta T_2 \qquad (37)$$

Возьмем преобразование Лапласа от уравнения (37), получим:

$$\Delta T_2(s)(Vc_p\rho s+Gc_p\rho)=\Delta G(s)(c_p\rho T_1-c_p\rho T_2) \qquad (38)$$

Из уравнения (38) получим передаточную функцию Wоб(s).

$$W_{об}(s)=\frac{\Delta T_2(s)}{\Delta G(s)}=\frac{c_p\rho(T_1-T_2)}{Vc_p\rho s+Gc_p\rho}=\frac{(T_1-T_2)/G}{V/G\,s+1}=\frac{K_{об}}{T_{об}s+1}$$

где: $T_{об}=\frac{V}{G}$, $[c]$, $K_{об}=\frac{T_1-T_2}{G}$, $\left[\frac{k\,c}{м^3}\right]$.

Определим неизвестные величины передаточной функции объекта регулирования:

Расход воды на выход из теплообменника найдем из уравнения теплового баланса в статике:

$$Gc_p\rho T1+N=Gc_p\rho T2, \qquad (39)$$

тогда

$$K_{об}=\frac{c_p\rho(T_1-T_2)(T_2-T_1)}{N}$$

$$V=\frac{\pi D^2}{4}H$$

$$T_{об}=\frac{\pi D^2Hc_p\rho(T_2-T_1)}{4N}$$

По исходным данным и измеренным геометрическим размерам теплообменника необходимо определить численные значения параметров передаточной функции объекта.

3. Расчет передаточных функций средств автоматизации АСР

Согласно структурной схемы лабораторной установки (рис. 9) определим передаточные функции технических средств автоматизации.

В качестве первичного преобразователя используется термопара типа ТХК–0179, которая описывается передаточной функцией вида

$$W_Д(s)=\frac{K_Д}{T_Д s+1}$$

Постоянную времени термопары выбирают из приложения 5.
Коэффициент передачи рассчитывают по следующей формуле

$$K_Д=\frac{\Delta E}{\Delta T},$$

где ΔE–приращение выходного сигнала, термоЭДС, мВ
ΔT–приращение входного сигнала, температуры, °С.

В качестве нормирующего преобразователя выбран ПТ–ТП 68, который имеет передаточную функцию вида $W_{ПТ\text{-}ТП68}(s)=K_{НП}$:

$$K_{НП}=\frac{\Delta I}{\Delta E},$$

где ΔI–диапазон изменения выходного сигнала, mA
ΔE–диапазон изменения входного сигнала, мВ

В качестве электропневмо–преобразователя выбран ЭПП63, который имеет передаточную функцию вида $W_{ЭПП63}(s)=K_{ЭПП}$:

$$K_{ЭПП}=\frac{\Delta P}{\Delta I},$$

где ΔP–диапазон изменения выходного пневматического сигнала, кгс/см2
ΔI–диапазон изменения входного сигнала, mA.

Передаточная функция линии связи имеет вид:

$$W_{ЛС}(s)=\frac{e^{-\tau_{ЛС}}}{T_{ЛС}s+1}$$

Для нахождения параметров передаточной функции необходимо померить длину линий связи и выбрать постоянную времени и запаздывания из приложения 3.

4. Расчет исполнительного устройства

Передаточная функция исполнительного устройства в динамике описывается апериодическим звеном первого порядка.

$$W_{ИУ}(s)=\frac{G_X(s)}{P_{упр}(s)}=\frac{K_{ИУ}}{T_{ИУ}s+1}$$

1. Для расчета постоянной времени $T_{ИУ}$ экспериментально определить время переходного процесса tпер от момента появления управляющего воздействия $P_{упр}$, до момента установившего значения расхода G_x (фиксировать по установлению указателя положения исполнительного устройства).

Произвести расчет по формуле:

$$T_{ИУ} \cong \frac{t_{пер}}{4}, [C]$$

2. Коэффициент передачи исполнительного устройства $K_{ИУ}$ определяется в статическом режиме

$$K_{ИУ} = \frac{\Delta G_x}{\Delta P_{упр}}$$

Для расчета $K_{ИУ}$ необходимо определить значение расхода G^{max} максимально проходимого через исполнительное устройство из формулы расчета условной пропускной способности (K_{VY}).

$$K_{VY} = 1.2 \times G^{max} \times \sqrt{\frac{\rho_B}{\Delta P_{PO}}}$$

при этом ρ_B=1г/см^3, а ΔP_{PO} необходимо определить экспериментально–аналитическим способом. Для этого следует измерить ряд параметров подачи воды в теплообменник

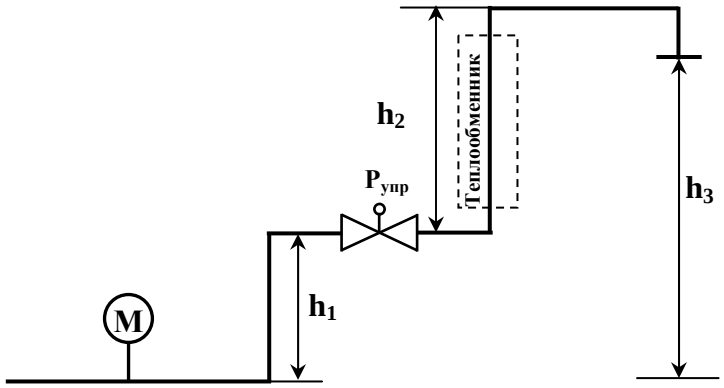


Рис. 13 Схема подачи воды в теплообменник

А именно:

1. Снять показания манометра $P_{СЕТИ}$;
2. Измерить высоты h_1, h_2, h_3.

3. Перепад давления на регулирующем органе рассчитать по формуле

$$\Delta P_{PO} = \Delta P_{СЕТИ} - \Delta P_{Л} \pm P_{ГИДР},$$

где $\Delta P_{Л}$–перепад давления в линии (можно пренебречь), $P_{ГИДР}$–гидравлический напор (т.к. необходимо сначала поднять воду на высоту h_1, затем на высоту h_2, а с высоты h_3 вода сливается в канализацию, и если по результатам измерения окажется, что $h_3=h_1+h_2$, то суммарный гидростатический напор $P_{ГИДР}$=0, тогда $\Delta P_{PO} \approx \Delta P_{СЕТИ}$)

4. Определить по табличке, расположенной на исполнительном устройстве, K_{VY}

5. Рассчитать G^{max}

$$G^{max} = \frac{K_{VY}}{1.2}\sqrt{\frac{\Delta P_{PO}}{\rho_B}}$$

6. Из уравнения теплового баланса в статике найдем расход воды G обеспечивающий нагревание ее до заданной температуры $T_{зад}$.

Для расчета давления управления $P_{упр}$ обеспечивающего расход G составим пропорции (из допущения о линейности расходной характеристики регулирующего органа).

$$\left.\begin{matrix} G^{max} - 100\%\ откр.\ кл. \\ G - X\% \end{matrix}\right\} \quad X = \frac{G}{G^{max}} \times 100\%$$

$$\left.\begin{matrix} X\% - \Delta P_{упр} \\ 100\% - \Delta P_{полн} \end{matrix}\right\} \quad \Delta P_{упр} = \frac{X \times \Delta P_{полн}}{100\%} = \Delta P_{полн} \times \frac{G}{G^{max}},$$

где $\Delta P_{полн}$ приращение давления на клапане когда он полностью открыт $\Delta P_{полн}$ =(1-0,2)=0,8 кгс/см^2.

Определим $K_{ИУ} = \frac{\Delta G}{\Delta P_{упр}}$

Отчет должен содержать:

1. Цель работы.
2. Принципиальную и структурную схему лабораторной установки.
3. Кривую разгона объекта и аппроксимированную методом Ормана.
4. Исходные данные для построения математической модели системы управления.
5. Расчет математической модели экспериментально–аналитическим методом.
6. Кривую разгона объекта построенную по данным расчета в MatLab.

7. Выводы.

Вопросы для защиты лабораторной работы

1. Дайте определение математической модели.
2. Основные стадии математического моделирования.
3. Основные группы уравнений, входящие в математическое описание процесса.
4. Понятие материального баланса.
5. Понятие теплового баланса.
6. Блочный принцип построения математической модели.
7. Виды математических моделей.
8. Понятие системы допущений при построении математических моделей.
9. Модель идеального смешения.
10. Модель идеального вытеснения.
11. Получите передаточную функцию объекта по каналу T_1–T_2.
12. Получите передаточную функцию объекта по каналу N–T_2.

Библиографический список

1. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1985.–448 с.
2. Ахназарова С. Л., Кафаров В. В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. М.: Высшая школа, 1985.–328 с.
3. Рузинов Л. П., Слободчекова Р. И. Планирование эксперимента в химии и химической технологии. М.: Высшая школа, 1980.–280 с.
4. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирическитх формул: Учеб. пособие для втузов.–М.: Высшая школа, 1988.–238 с.
5. Кафаров В. В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. М.: Высшая школа, 1991,–400 с.
6. Системный анализ процессов химической технологии. Применение метода нечетких множеств. /В. В. Кафаров, И. Н. Дорохов, Е. П. Марков.–М.: Наука, 1986.–355 с.
7. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001.–480 с.
8. Прусенко В. С. Пневматические системы автоматического регулирования технологических процессов. М.: Машиностроение, 1987.–360 с.
9. Лапшенков Г. И., Полоцкий Л. М. Автоматизация производственных процессов в химической промышленности. Технические средства и лабораторные работы. М.: Химия, 1988.–288 с.

Приложение 1

Регрессионный анализ в среде Mathcad

Встроенные функции Mathcad для вычисления одномерной регрессии.

linfit(VX,VY,F)	вектор с параметрами, дающими наилучшее приближение точек с координатами, хранящимися в векторах VX и VY с помощью линейной комбинации функций записанных в векторе F
regress(VX,VY,n)	возвращает вектор требуемый interp, чтобы найти полином порядка n, который наилучшим образом приближает данные из VX и VY. VX есть m–мерный вектор, содержащий координаты X. VY есть m–мерный вектор, содержащий координаты y соответствующие m точкам, определенных в VX.
genfit(VX,VY,Vg,F)	возвращает вектор, содержащий n параметров $u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}$, которые обеспечивают наилучшие приближения данных из VX и VY функцией F, зависящей от X и параметров u_0, $u_1,\ldots,u_{n-1}$. F–функция, которая возвращает n+1–мерный вектор, содержащий F и ее частные производные относительно параметров. Vg есть n–мерный вектор начальных значений для n параметров.
interp(VS,VX,VY,X)	возвращает интерполируемое значение y, соответствующее аргументу x. Вектор VS вычисляется на основе данных VX и VY одной из функций regress, loess.

Линейная регрессия общего вида.

В Mathcad реализована возможность выполнения линейной регрессии общего вида. Заданная совокупность точек приближенно описывается функцией вида:

$$F(x, k_1, k_2,\ldots,k_n)=k_1\times F_1(x)+k_2\times F_2(x)+\ldots+k_n\times F_n(x)$$

Таким образом, функция регрессии является линейной комбинацией функций $F_1(x)$, $F_2(x),\ldots,F_n(x)$ причем сами эти функции

могут быть нелинейными, что резко расширяет возможности такой аппроксимации и распространяет ее на нелинейные функции.

Пример проведения линейной регрессии общего вида.

$$VX := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad VY := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad F(x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ e^x \end{bmatrix}$$

K:=linfit(VX,VY,F)

g(t):=F(t)•F

Полиномиальная регрессия.

Если набор измеренных соответствующих значений Y и X, между которыми предполагается полиномиальная зависимость и нужно приблизить эти значения с помощью полинома наилучшим в определенном смысле образом.

Используйте regress, когда нужно использовать единственный полином, чтобы приблизить все данные. Функция regress допускает использование полинома любого порядка. Так как regress пытается приблизить все точки данных, используя один полином, это не даст хороший результат, когда данные не связанны единой полиномиальной зависимостью.

Пример использования функции regress:

$$VX := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad VY := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad n:=3$$

Z:=regress(VX,VY,n)

F(x):=interp(Z,VX,VY,x)

Нелинейная регрессия общего вида.

Под нелинейной регрессией общего вида подразумевают нахождение вектора k параметров произвольной функции $F(x, k_1, k_2,\ldots, k_n)$ при которой обеспечивается минимальная среднеквадратичная погрешность аппроксимации исходных точек.

Для проведения нелинейной регрессии общего вида используется функция genfit.

Пример выполнения нелинейной регрессии общего вида:

$$VX \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad VY \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad F(z,u) \equiv \begin{bmatrix} e^{u0+u1z+u2z^2} \\ e^{u0+u1z+u2z^2} \\ z\,e^{u0+u1z+u2z^2} \\ z^2\,e^{u0+u1z+u2z^2} \end{bmatrix} \quad Vg \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P≡genfit(VX,VY,Vg,F)
$Z(t) \equiv F(t,P)_0$

Многомерная полиномиальная регрессия.

Функция regress, рассмотренная выше, также полезна когда имеется набор измеренных величин Z, соответствующих значениям X и Y, и необходимо приблизить полиномиальную поверхность проходящую через значения Z.

При использовании этой функции для приближения Z, соответствующих двум независимым X и Y, толкования их аргументов должны быть изменены:

regress(M_{xy},VZ,n)	возвращает вектор требуемый interp, чтобы найти полином порядка n, который наилучшим образом приближает данные из M_{xy} и VZ. M_{xy} есть m×2 матрица, содержащая координаты X–Y. VZ есть m–мерный вектор, содержащий координаты Z соответствующие m точкам, определенных в M_{xy}.
interp(VS,M_{xy},VZ,X)	возвращает интерполируемое значение z, соответствующее точке $x=\nu_0$ и $y=\nu_1$. Вектор VS вычисляется на основе данных M_{xy} и VZ одной из функций regress, loess.

Табличные значения критерия ***Стьюдента и Фишера в MathCad*** вычисляют при помощи функций qt(1–p, f) и qF(1–p, f_1, f_2) соответственно.

Приложение 2

Терминологический словарь

Адекватность	– соответствие
Адекватность уравнения регрессии	– соответствие уравнения регрессии опытным данным. Обычно соответствие оценивают в пределах ошибки воспроизводимости
Активный эксперимент	– эксперимент, состоящий из одновременного варьирования всеми факторами и проверки достоверности результатов математико–статистическими методами
Выборка	– часть генеральной совокупности
Генерирующее соотношение	– соотношение, показывающее, какие взаимодействия заменены новыми факторами при построении дробной реплики
Генеральная совокупность	– совокупность всех значений случайной величины
Дисперсия	– величина, характеризующая рассеяние значений случайной величины относительно ее математического ожидания
Дисперсия воспроизводимости	– дисперсия, характеризующая воспроизводимость эксперимента; вычисляется по данным параллельных измерений
Дисперсия выборочная	– дисперсия, вычисленная по данным выборки
Дисперсия остаточная	– дисперсия, характеризующая рассеяние опытных данных относительно уравнения регрессии
Доверительный интервал	– интервал, внутри которого с заданной степенью достоверности находится значение параметра
Дробная реплика	– план эксперимента, являющийся частью полного факторного эксперимента
Интервал варьирования	– разность между двумя натуральными значениями фактора, соответствующая единице кодированного значения фактора

Ковариация	– величина, характеризующая взаимосвязь между двумя случайными величинами. Недиагональные элементы ковариационной матрицы, умноженные на соответствующую дисперсию, являются ковариациями, характеризующими взаимосвязь коэффициентов регрессии
Ковариационная матрица	– матрица, обратная информационной матрице
Кодирование фактора	– линейное преобразование факторного пространства с переносом начала координат в центр эксперимента и выбором масштаба по осям координат в единицах варьирования факторов
Кодированная система координат	– безразмерная система координат, в которой на осях откладывают кодированные значения факторов
Коэффициент конкордации	– величина, характеризующая степень согласованности различных источников априорной информации
Коэффициент корреляции	– коэффициент, показывающий наличие линейной связи между двумя случайными величинами
Коэффициент регрессии	– коэффициент уравнения регрессии
Линейный эффект	– величина, характеризующая линейную зависимость параметра оптимизации от значений соответствующего фактора; определяется по величине и знаку коэффициента при соответствующем члене (первой степени) уравнения регрессии
Математическая модель	– приближенное математическое описание объекта исследования
Математическое ожидание случайной величины	– сумма произведений каждого значения этой величины на ее вероятность. Если вероятности всех значений равны, то математическое ожидание равно среднему арифметическому
Матрица планирования	– стандартная форма записи условий эксперимента с использованием

	кодированных значений факторов
Оптимальный режим	– набор значений факторов, позволяющий получить наивыгоднейшее значение параметра оптимизации
Параллельные измерения	– измерения, выполненные при одинаковых значениях факторов. Используют для оценки дисперсии воспроизводимости
Параметр оптимизации (функция отклика)	– величина, характеризующая результаты эксперимента
Пассивный эксперимент	– эксперимент, в котором математико–статические методы используют только для обработки результатов
План первого порядка	– план экспериментов, позволяющий вычислить линейные коэффициенты регрессии
План второго порядка	– план экспериментов, позволяющий вычислить коэффициенты полного уравнения регрессии второй степени
План третьего порядка	– план, позволяющий вычислить коэффициенты полного уравнения регрессии третьей степени
Поверхность отклика	– геометрическое изображение функции отклика, геометрический образ процесса
Полный факторный эксперимент	– эксперимент, включающий все возможные комбинации изучаемых факторов при выбранном числе уровней
Рандомизация	– способ включения систематических ошибок в число случайных ошибок
Ранжирование факторов	– расположение факторов в порядке убывания их влияния на параметр оптимизации
Система нормальных уравнений	– система линейных уравнений, с помощью которой вычисляют коэффициенты регрессии методом наименьших квадратов
Уравнение регрессии	– математическая модель процесса,. Полученная посредством математико–статической обработки экспериментальных данных и представленная в полиномиальной форме

Уровень факторов	– значения факторов, которыми задаются при изучении их влияния на параметр оптимизации
Факторное пространство	– пространство, координаты которого соответствуют рассматриваемым факторам
Факторы	– независимые переменные, варьируемые экспериментатором при изучении объекта исследования
Центр эксперимента	– условия проведения эксперимента, при которых значения всех факторов соответствуют серединам интервалов, определяемых граничными значениями каждого из факторов
Число степеней свободы	– понятие, учитывающее в статистических ситуациях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин; вычисляют как разность между числом экспериментальных точек и числом связей
Эффект	– в данном случае – степень влияния факторов на параметр оптимизации
Эффект взаимодействия	– характеризует совместное влияние нескольких факторов или влияние одних факторов на связь других факторов с параметром оптимизации

Приложение 3

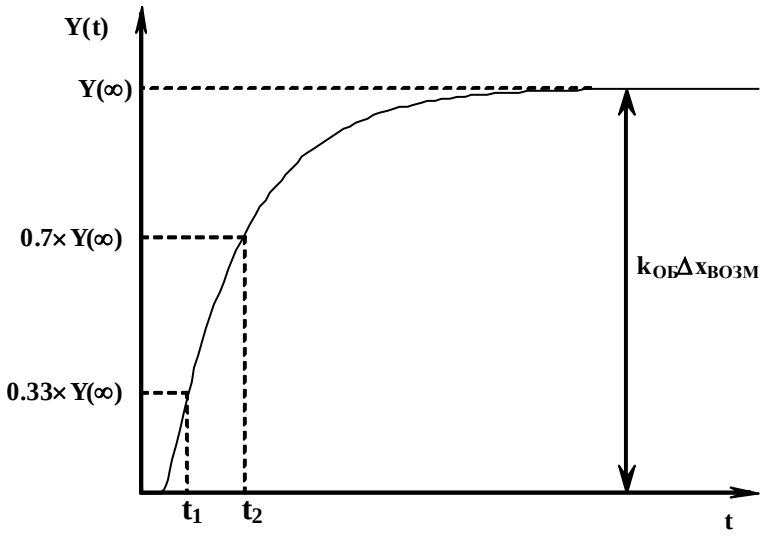
Обобщенные показатели динамических свойств пневматических линей связи (ПЛС) [8]

L, м	Усилитель мощности (тип РУ)	d = 4,0 мм					d = 4,8 мм				
		$\tau_Л$, с	$T_Л$, с	$t_{0.99}$,с	V, л	Q, $м^3/с$	$\tau_Л$, с	$T_Л$, с	$t_{0.99}$,с	V, л	Q, $м^3/с$
100		0,6	3,3	10,0	1,26	1,2	0,5	3,0	9,0	1,8	1,84
	04	1,0	4,5	11,0		0,94	0,8	5,0	10,0		1Д
	04, АУС, «Старт»	0,6	3,5	10,0		1,08	0,7	3,0	9,0		1,84
200		1,8	9,0	30,0	2,52	0,86	1,2	7,0	25,0	3,62	1,55
	04	2,8	9,5	30,0		0,81	2,0	10,0	25,0		1,08
	04М, АУС, «Старт»	2,2	9,0	28,d		0,86	2,0	9,0	25,0		1,2
300		4	17,0	60,0	3,77	0,68	2,5	13,0	40,0	5,43	1,29
	04	4,5	19,0	65,0		0,61	3,0	16,0	48,0		1,04
	04М, АУС, «Старт»	4,0	18,0	65,0		0,64	3,0	13,0	43,0		1,29

где L – длина линии связи; d – внутренний диаметр трубы; τЛ - обобщенное время чистого запаздывания; ТЛ - обобщенная постоянная времени; $t_{0,99}$ – время, в течение которого давление в конце линии связи повысится до 99 % от верхнего предела максимального скачка на входе; V – объем ПЛС; Q - максимальный расход сжатого воздуха, пропускаемого линией связи.

Приложение 4

Метод Ормана [9]



$T_{ОБ}=1.25(t_2-t_1)$

$\tau_{ОБ}=0.5(3t_1-t_2)$

$k_{ОБ}=\Delta Y/\Delta X_{ВОЗМ}$

$$W(s)=\frac{k_{ОБ}e^{-\tau_{ОБ}s}}{T_{ОБ}s+1}$$

Приложение 5

Градировочная таблица для термопары градуировки Хромель–Копель

Свободные концы при температуре 0°С.

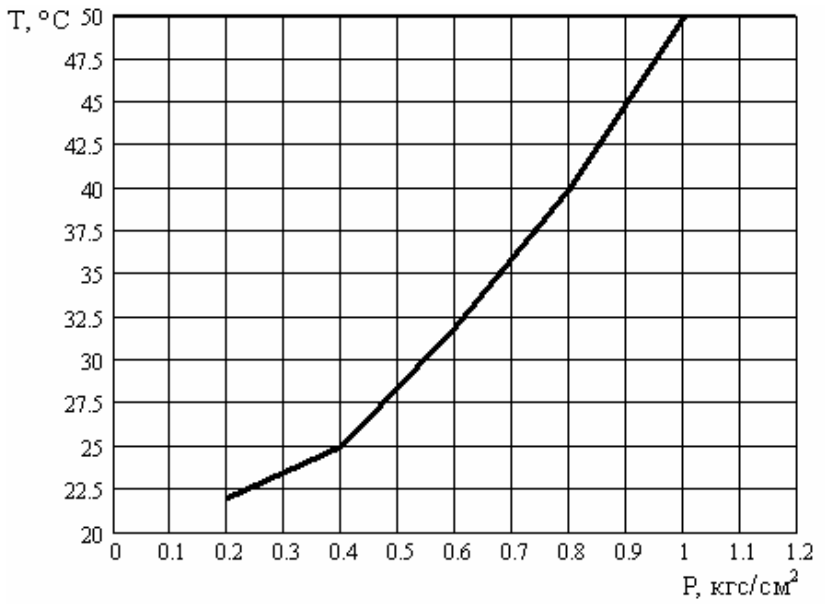
°С	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Милливольты									
0	0	0,65	1,31	1,98	2,66	3,35	4,05	4,76	5,48	6,21
100	6,95	7,69	8,43	9,18	9,93	10,69	11,46	12,24	13,03	13,84
200	14,66	15,48	16,3	17,12	17,95	18,77	19,6	20,43	21,25	22,08
300	22,91	23,75	24,6	25,45	26,31	27,16	28,02	28,89	29,76	30,62
400	31,49	32,35	33,2	34,08	34,95	35,82	36,68	37,55	38,42	39,29
500	40,16	41,03	41,91	42,79	43,68	44,56	45,45	46,34	47,23	48,12
600	49,02	49,9	50,78	51,66	52,53	53,41	54,28	55,15	56,03	56,9
700	57,77	58,64	58,81	60,37	61,24	62,11	62,97	63,83	64,7	65,56
800	66,42									

Инерционность термопар

Тип термопары	Инерционность, с
ТХК – 0515	10, 20, 40
ТХК – 0179	10, 20, 40
ТХК – 0806	240
ТХК – 920	60

Приложение 6

Статическая характеристика теплообменника



Приложение 7

Пример оформления титульного листа лабораторной работы

Российский Химико–Технологический Университет
им. Д. И. Менделеева

Новомосковский институт

Кафедра АПП

Лабораторная работа № 1

по курсу Моделирование систем

«Построение и исследовании математической модели по результатам пассивного эксперимента»

Студенты	Допуск	Выполнение	Защита

Группа

Преподаватель

Новомосковск 2003 г.

Учебно–методическое издание
СИДЕЛЬНИКОВ Сергей Иванович
ЛОПАТИН Александр Геннадиевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Редактор Селиверствова Е. Н.
Лицензия ЛР № 020714 от 02.02.98
Подписано в печать . . . Формат 60x84 1/16
Бумага типографская №2. Отпечатано на ризографе
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 100 экз.
Заказ № .

Российский химико-технологический университет
им. Д. И. Менделеева
Новомосковский институт. Издательский центр
Адрес университета:125047, Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульской обл., Дружбы 8