

**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
ГОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»**

Новомосковский институт (филиал)

Обработка эксперимента

*Методические указания к выполнению
расчетного задания*

**Новомосковск
2008**

УДК 517
ББК 22.161
О 23

Рецензент:
ст.преподаватель кафедры ВТиТ *Федорова М.Л.*
(НИ (филиал) ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И.Менделеева)

Составитель: Исаков В.Ф.

О 23 Обработка эксперимента. Методические указания к выполнению расчётного задания / ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Сост.: В.Ф. Исаков; Новомосковск, 2008. - 32 с.

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов 2-го курса специальности ПТЭ700 дневного, заочного и вечернего отделений НИ РХТУ.

УДК 517
ББК 22.161

Введение

Учебный план специальности «Промышленная теплоэнергетика» содержит раздел математики «Статистические методы обработки экспериментальных данных». Поэтому возникла необходимость подготовки расчётного задания по теме «Обработка эксперимента». Из-за отсутствия достаточного количества литературы, как по практике, так и по теории, в методических указаниях кратко изложены все необходимые сведения для выполнения расчётного задания. Прежде чем приступить к выполнению расчётного задания необходимо прочитать теоретический материал по указанной теме и разобрать решение задач.

Изучение данного раздела математики предполагает знание теории вероятностей и математической статистики.

В методических указаниях в конце брошюры приведены 30 вариантов расчётного задания

Методические указания составлены на основе Госстандарта 2005 по специальности ПТЭ700.

1. Предварительная обработка экспериментальных данных

Предварительная обработка результатов измерений необходима для того, чтобы корректно использовать для построения эмпирических зависимостей статистические методы.

Содержание предварительной обработки в основном состоит в отсеивании грубых погрешностей измерения.

Другим важным моментом предварительной обработки данных является проверка соответствия распределения результатов измерения закону нормального распределения. Если эта гипотеза неприемлема, то следует определить, какому закону распределения подчиняются опытные данные, и если это, возможно, преобразовать данное распределение к нормальному.

После этого можно перейти к построению эмпирических формул, применяя например, метод наименьших квадратов.

1.1. Вычисление выборочных характеристик эмпирических распределений

Пусть имеется ряд наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины X . Среднее значение наблюдаемого признака можно определить по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Несмещённая оценка дисперсии определяется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение определяется по формуле

$$S = \sqrt{S^2}$$

Коэффициент вариации V определяется по формуле

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Если значения случайной величины X $x_1, x_2, \dots, x_k$ сгруппированы и имеют частоты $n_1, n_2, \dots, n_k$, то названные характеристики рассчитываются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i, \text{ где } N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}$$

1.2. Отсев грубых погрешностей

Если объём выборки $n \leq 25$, то применяется метод вычисления максимального относительного отклонения: $|x_i - \bar{x}| / S \leq \tau_{1-p} \dots (1)$, где x_i - наибольший или наименьший элемент выборки, τ_{1-p} - табличное значение статистики (оценка) τ , вычисленной при доверительной вероятности $q=1-p$.

Таким образом, для выделения аномального значения вычисляют $\tau = \frac{|x_i - \bar{x}|}{S} \dots (2)$, которое затем сравнивают с табличным значением τ_{1-p} . Если выполняется неравенство $\tau \leq \tau_{1-p} \dots (3)$, то наблюдение

(измерение) не отсеивают, если не выполняется, то наблюдение исключают. После исключения того или иного наблюдения характеристики эмпирического распределения пересчитываются по данным сокращённой выборки. На практике используется уровень значимости 0,05.

Процедуру отсева повторяют и для следующего по абсолютной величине максимального относительного отклонения.

Если объём выборки $n \leq 10$, то в формулу вычисления максимального относительного отклонения τ вводится уточняющий

множитель $1/\sqrt{(n-1)/n}$. В этом случае τ вычисляют по формуле

$$\tau = \frac{|x_i - \bar{x}|}{S\sqrt{(n-1)/n}} \quad \dots(4).$$

Если объём выборки $n > 25$, то отсев грубых погрешностей производится с помощью распределения Стьюдента. Критическое значение τ_p (p – процентная точка нормированного выборочного отклонения) выражается через критическое значение распределения

$$\text{Стьюдента } t_{p,n-2}: \quad \tau_{(p,n-2)} = \frac{t_{(p,n-2)}\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2 + [t_{(p,n-2)}]^2}}$$

...(5).

Для больших выборок отсев грубых погрешностей производится в следующем порядке:

- определяется $\max(\Delta x_i) = |x_i - \bar{x}|$ и по нему x_i ;
- по формуле(2) вычисляется τ ;
- по таблице Стьюдента находят процентные точки t распределения $t_{p,n-2} : t_{5\%,n-2}, t_{0,1\%,n-2}$;
- по формуле (5) вычисляют точки $\tau_{5\%,n}, \tau_{0,1\%,n}$.

Максимальные относительные отклонения в процессе вычисления разделяются на три группы: 1) $\tau \leq \tau_{5\%,n}$; 2) $\tau_{5\%,n} \leq \tau \leq \tau_{0,1\%,n}$; 3) $\tau \geq \tau_{0,1\%,n}$.

Наблюдения, попавшие в первую группу нельзя отсеивать. Наблюдения второй группы можно отсеять, если в пользу этой процедуры имеются ещё и другие соображения экспериментатора. Наблюдения третьей группы отсеивают всегда.

1.3. Проверка гипотезы нормальности распределения

Для статистических методов построения эмпирических зависимостей очень важно, чтобы результаты наблюдений подчинялись нормальному закону распределения, поэтому проверка гипотезы нормальности распределения – основное содержание предварительной обработки результатов наблюдений.

Существует несколько методов проверки гипотезы нормальности распределения:

- 1) по среднему абсолютному отклонению (CAO);
- 2) по размаху варьирования R;
- 3) по показателям асимметрии и эксцесса;
- 4) по критерию χ^2 (хи-квадрат);
- 5) по критерию Колмогорова и Смирнова (К-С - критерию).

Методика проверки гипотезы нормальности распределения по показателям асимметрии и эксцесса требует больших вычислений, а проверка по К-С критерию проводят только в редких случаях. Поэтому рассмотрим 1, 2 и 4 методики.

1). Объём выборки $n < 120$. Вычисляют среднее абсолютное отклонение $\Delta\bar{x}$ по формуле

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \quad \dots(1)$$

Для выборки, имеющей приближённо нормальный закон распределения, выполняется неравенство

$$\left| \frac{\Delta\bar{x}}{S} - 0,7979 \right| - \frac{0,4}{\sqrt{n}} < 0 \quad \dots(2)$$

2). Объём выборки $3 < n < 1000$. Вычисляют отношение $\frac{R}{S}$, где

$R = x_{\max} - x_{\min}$ - размах варьирования (простейшая мера рассеяния) и сравнивают с верхними и нижними границами этого отношения, приведёнными в таблице. Если $\frac{R}{S}$ меньше нижней или больше верхней границы, то нормального распределения нет. Важно, чтобы это условие выполнялось при $\alpha = 0,1$ (10% уровень значимости).

4). Применение критерия χ^2 предполагает использование свойств нормального распределения. Плотность распределения вероятностей нормальной случайной величины (СВ) X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \dots(3)$$

Здесь a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение СВ X .

Для применения критерия χ^2 необходимо сгруппировать данные в вариационный ряд

Значения СВ X	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	...	$[x_{k-1}, x_k)$
Частоты n_i	n_1	n_2	...	n_k

Величина частичного интервала h вычисляется по формуле Штюргеса $h = \frac{R}{1 + 3,222 \lg n}$. За начало первого интервала

рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{наим} - 0,5h$. Конец последнего интервала должен удовлетворять условию $x_{кон} - h \leq x_{наиб} < x_{кон}$. Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h .

Оценки параметров a и σ , входящих в формулу (3), вычисляются по формулам:

$$(4) \quad a \approx \bar{x}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \tilde{x}_i, \quad \text{где } N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad \sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \tilde{x}_i^2 - (\bar{x})^2,$$

где $\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ - середина промежутка $[x_{i-1}, x_i)$, Если $n < 30$, то

$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k n_i \tilde{x}_i^2 - (\bar{x})^2$ - оценка среднего квадратического отклонения.

Теоретические вероятности попадания значения СВ X в интервал (x_{i-1}, x_i) вычисляют по формуле

$$P(x_{i-1} < x < x_i) \approx 0,4 \frac{h}{S} e^{-\frac{(\tilde{x}_i - \bar{x}_e)^2}{2S^2}} \quad \dots(5)$$

Значение критерия χ^2 вычисляют по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=s-3$ (s – число групп выборки) находят $\chi^2_{кр(\alpha,k)}$ правосторонней критической области. Если $\chi^2 < \chi^2_{кр(\alpha,k)}$, то гипотезу о нормальности распределения генеральной совокупности H_0 принимают, а если $\chi^2 > \chi^2_{кр(\alpha,k)}$, то гипотезу H_0 отвергают.

2. Статистические методы построения и преобразования парных зависимостей по экспериментальным данным

К парным зависимостям типа $y=f(x)$ относится подавляющее большинство всех формул, используемых в естественно научных и технических дисциплинах. По результатам экспериментов такие формулы обычно строили, применяя метод наименьших квадратов (МНК). Суть метода МНК состоит в том, чтобы, зная расположение экспериментальных точек на плоскости, так провести линию регрессии, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i^2 вдоль оси Оу (ординаты) этих точек U от проведённой прямой была минимальной.

Уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах записывается в виде $y=ax+b$, где a и b числа, подлежащие определению. Учитывая сказанное, задача МНК выражается

формулой $U = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]_{\min}^2$, где $y_i - (ax_i + b) = \Delta_i$ - отклонение

экспериментального значения y_i от соответствующего значения $\hat{y}_i = ax_i + b$. Коэффициенты a и b находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

После преобразования и решения системы по формулам Крамера, получим $a = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$, $b = \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum xy \cdot \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$

Используя МНК можно построить любые формы нелинейной парной связи. Для этого используют линеаризующие преобразования, приведённые в приложении 1 (П1), так как только линейные по параметрам функции восстанавливаются МНК. Качество предсказания результатов проверяют с помощью уравнения $v = cu + d$. После вычисления коэффициентов c и d по МНК выполняют обратные преобразования, то есть по c и d определяют a и b в соответствии с указаниями таблицы.

Выбор формулы производится или из теоретических соображений, или на основании характера расположения точек на координатной плоскости, соответствующим экспериментальным значениям. Используя МНК, найти параметры по нескольким подходящим формулам. Рассчитать остаточные дисперсии для каждой формулы. Затем выбрать формулу, которая имеет наименьшую остаточную дисперсию.

3. Статистическое оценивание парной корреляции и регрессии

Коэффициент парной корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad \text{или} \quad r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2}}$$

Стандартные отклонения S_x , S_y , S_{xy} определяются по формулам:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2 - (\sum x)^2 / n}{n-1}}, \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2 - (\sum y)^2 / n}{n-1}},$$

$$S_{xy} = \frac{\sum xy - (\sum x \sum y) / n}{n-1}$$

Среднее произведение отклонений S_{xy} является оценкой, так называемой ковариации (корреляционного момента).

Коэффициенты a_{yx} и a_{xy} вычисляются по формулам:

$$a_{yx} = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad a_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}.$$

Стандартное отклонение для y при условии, что x принимает определённое значение, равно $S_{y_x} = \sqrt{\frac{\sum (y - ax - b)^2}{n - 2}}$.

Оцениваются два параметра a и b поэтому в знаменателе стоит выражение $n-2$. Так как S_{y_x} есть мера ошибки, которая получается при оценке или предсказании y по заданным x . Это стандартное отклонение называется также стандартной ошибкой оценивания или стандартной ошибкой предсказания. Две линии, параллельные линии регрессии и отстоящие на расстоянии $2S_{y_x}$, образуют полосу, содержащую около 95% всех наблюдений.

Стандартные отклонения коэффициентов регрессии S_a и S_b вычисляют по формулам:

$$S_a = \frac{S_{y_x}}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}}, \quad S_b = S_{y_x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} \quad \text{или} \quad S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

$$\text{Контроль для } S_a \text{ и } S_b \text{ производят по формуле } \frac{S_b}{S_a} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

Квадрат стандартной ошибки оценивания называется остаточной дисперсией: остаточная дисперсия $S^2_{y_x}$ - рассеяние относительно прямой регрессии - это дисперсия y после исключения влияния рассеяния x : $S^2_{y_x} = S_y^2(1 - r^2) \frac{n-1}{n-2}$. При больших объёмах выборки используют формулу: $S_{y_x} \approx S_y \sqrt{1 - r^2}$.

Проверка значимости коэффициента регрессии

Если уравнение регрессии генеральной совокупности имеет вид $y_x = \alpha x + \beta$, а его оценка $y_x = ax + b$, то проверка значимости коэффициента регрессии равносильна проверке гипотезы $H_0 : \alpha = 0$. Граница значимости устанавливается на основании определения Стьюдента: $t = \frac{|a|}{S_a}$ с $(n-2)$ степенями свободы. Значение $t_{kp(0,05;n-2)}$ находят по таблице. Если $t > t_{kp(0,05;n-2)}$, то α значимо отличается от нуля и гипотеза H_0 отвергается.

Доверительные интервалы для коэффициента регрессии и свободного члена

Доверительные интервалы для коэффициента регрессии и для свободного члена определяются по формулам: $a \pm t \cdot S_a$, $b \pm t \cdot S_b$.

При больших значениях n можно границы t - распределения заменить границами нормального распределения.

Доверительные интервалы для прямой регрессии

Каждая заданная прямая регрессии при изменении $\bar{y}$ смещается параллельно самой себе вверх или вниз. Если изменяется коэффициент регрессии a , то прямая линия поворачивается вокруг точки $(\bar{x}, \bar{y})$ (см. рис.).

Определим два стандартных отклонения.

1. Стандартное отклонение для среднего значения

$$\hat{\hat{y}} \text{ в точке } x: S_{\hat{\hat{y}}} = S_{y_x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}$$

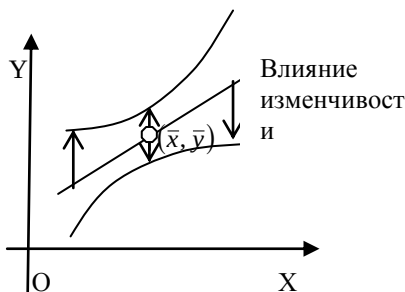
2. Стандартное отклонение для индивидуального значения $\hat{y}_\bullet$ в точке x :

$$S_{\hat{y}_\bullet} = S_{y_x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}$$

Доверительные интервалы для:

- 1) всей прямой $\hat{y} \pm S_{\hat{y}} \sqrt{2F_{(2, n-2)}}$
- 2) среднего наблюдения в точке x $\hat{\hat{y}} \pm S_{\hat{\hat{y}}} \cdot t_{(n-2)}$
- 3) индивидуального наблюдения в точке x $\hat{y}_\bullet \pm S_{\hat{y}_\bullet} \cdot t_{(n-2)}$

Эти интервалы справедливы только для области измерений. Они отображаются гиперболами, зависящими от x . Доверительный интервал 3 наибольший из трёх, интервал 2 наименьший. На рисунке показана доверительная область для линейной регрессии. Этот рисунок показывает возрастание статистической ненадежности при удалении от средней точки прямой регрессии.



4. Решение задач по обработке опытных данных

4.1. Решение задач предварительной обработки опытных данных.

Задача №1. В результате эксперимента получены значения величины X , приведённые в таблице 1. Произвести отсев грубых погрешностей.

Таблица 1

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Значения X	22	25	25	26	27	27	28	28	29	29	
№ измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Значения X	30	30	33	33	33	34	34	35	35	41	59

Решение. Для удобства вычислений составим и заполним таблицу.

Таблица 2

№ п/п	Зн. X	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$ x_i - \bar{x} $	$\frac{ x_i - \bar{x} }{S}$
1	22	-9,571	91,612	9,571	1,248
2	25	-6,571	43,184	6,571	0,857
3	25	-6,571	43,184	6,571	0,857
4	26	-5,571	31,041	5,571	0,726
5	27	-4,571	20,898	4,571	0,596
6	27	-4,571	20,898	4,571	0,596
7	28	-3,571	12,755	3,571	0,466
8	28	-3,571	12,755	3,571	0,466
9	29	-2,571	6,612	2,571	0,335
10	29	-2,571	6,612	2,571	0,335
11	30	-1,571	2,469	1,571	0,205
12	30	-1,571	2,469	1,571	0,205
13	33	1,429	2,041	1,429	0,186
14	33	1,429	2,041	1,429	0,186
15	33	1,429	2,041	1,429	0,186
16	34	2,429	5,898	2,429	0,317
17	34	2,429	5,898	2,429	0,317
18	35	3,429	11,755	3,429	0,447
19	35	3,429	11,755	3,429	0,447
20	41	9,429	88,898	9,429	1,229

21	59	27,429	752,327	27,429	3,575
Σ	663		1177,143		

Вычисляем характеристики величины X: среднее выборочное $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{663}{21} = 31,571$, среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1177,143}{20}} = 7,672 \text{ и максимальное относительное}$$

отклонение $\tau = \frac{|x_i - \bar{x}|}{S} = 3,575$ (см. последний столбец и последнюю

строку таблицы). По таблице П.2 [1 (стр. 199)] находим $\tau_{(n;p)}$:

$\tau_{(21;0,95)} = 2,64$. Так как выполняется

условие $\tau = 3,575 > \tau_{(21;0,95)} = 2,64$, то измерение под номером 21 исключается из выборки.

Вновь вычисляем характеристики величины X по уменьшенной выборке.

Таблица 3

№ п/п	x	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$ x_i - \bar{x} $	$\frac{ x_i - \bar{x} }{S}$
1	22	-8,2	67,24	8,2	1,816
2	25	-5,2	27,04	5,2	1,152
3	25	-5,2	27,04	5,2	1,152
4	26	-4,2	17,64	4,2	0,930
5	27	-3,2	10,24	3,2	0,709
6	27	-3,2	10,24	3,2	0,709
7	28	-2,2	4,84	2,2	0,487
8	28	-2,2	4,84	2,2	0,487
9	29	-1,2	1,44	1,2	0,266
10	29	-1,2	1,44	1,2	0,266
11	30	-0,2	0,04	0,2	0,044
12	30	-0,2	0,04	0,2	0,044
13	33	2,8	7,84	2,8	0,620

14	33	2,8	7,84	2,8	0,620
15	33	2,8	7,84	2,8	0,620
16	34	3,8	14,44	3,8	0,842
17	34	3,8	14,44	3,8	0,842
18	35	4,8	23,04	4,8	1,063
19	35	4,8	23,04	4,8	1,063
20	41	10,8	116,64	10,8	2,392
Σ	604		387,2	72,8	

Среднее выборочное $\bar{x} = \frac{604}{20} = 30,2$, среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{\frac{387,2}{19}} = 4,514$ и максимальное относительное отклонение $\tau = 2,392$ (см. последний столбец и 20-ую строку таблицы). По таблице П.2 [1 (стр. 199)] находим $\tau_{(n;p)}$: $\tau_{(20;0,95)} = 2,62$. Так как выполняется условие $\tau = 2,392 < \tau_{(20;0,95)} = 2,62$, то аномальных значений нет.

Задача №2. Используя данные и результаты задачи №1 сделать проверку гипотезы нормальности эмпирического распределения (H_0). (Применить три метода)

Решение. 1. Быстрая проверка гипотезы нормальности распределения по среднему абсолютному отклонению (CAO). Данные берём из таблицы 3.

Стандартное отклонение $S = 4,514$, объём выборки $n=20$, сумма абсолютных отклонений $\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| = 72,8$

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| = \frac{3,64}{4,514} = 0,806 \text{ (CAO)}$$

Проверим выполнение условия $\left| \frac{\Delta\bar{x}}{S} - 0,7979 \right| - \frac{0,4}{\sqrt{n}} < 0$

$$\left| \frac{3,64}{4,514} - 0,7979 \right| - \frac{0,4}{\sqrt{20}} = 0,0081 - 0,089 = -0,081$$

Так как выполняется условие $-0,081 < 0$, то выборка имеет приближённо нормальный закон распределения.

2. Быстрая проверка гипотезы нормальности распределения с использованием размаха. Данные берём из таблицы 3.

Стандартное отклонение $S = 4,514$, объём выборки $n=20$,
 $\max(x)=41$, $\min(x)=22$. $R = \max(x) - \min(x) = 41 - 22 = 19$, $\frac{R}{S} = \frac{19}{4,514} = 4,21$

По таблице П6 [2, (стр. 202)] находим нижнюю ng и верхнюю vg границы величины R/S при «жёстком» 10% -ном уровне значимости: $ng=3,29$; $vg=4,32$. Так как выполняется условие $3,29 < R/S = 4,21 < 4,32$, то гипотеза H_0 принимается: выборка имеет приближённо нормальный закон распределения.

3. Основательная проверка гипотезы H_0 по критерию χ^2 (хи - квадрат).

Для проверки по критерию χ^2 сгруппируем исходные данные. Число групп определяем по формуле Штьоргеса $k \approx [1 + 3,32 \lg 20] = [5,319] = 5$. Величина интервала составляет $[R/k] = [19/5] = 4$. Получаем интервальный вариационный ряд, приведенный в таблице 4.

Таблица 4.

№ группы	Границы полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$	Средина интервала $\tilde{x}_i = (x_i + x_{i-1})/2$	Частота n_i
1	22-26	24	3
2	26-30	28	7
3	30-34	32	5
4	34-38	36	4
5	38-42	40	1

Среднее выборочное $\bar{x} = 30,2$, среднее квадратическое отклонение $S = 4,514$.

Вероятность попадания СВ X в заданный интервал определяем по формуле

$$P(x_{i-1} < x < x_i) \approx 0,4 \frac{h}{S} \exp\left(-\frac{(\tilde{x}_i - \bar{x})^2}{2S^2}\right) = 0,354 \exp\left(-\frac{(\tilde{x}_i - 30,2)^2}{40,752}\right)$$

Теоретические частоты n_i определяем по формуле $n_i = n \cdot p_i$.

Здесь $n=20$ – объём выборки. Результаты вычислений заносим в таблицу 5.

Таблица 5

№ групп ы	Эмпиричес кая частота n_i	Средина интервал а $\tilde{x}_i$	Вероят ность p_i	Теоретиче ская частота n'_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	3	24	0,138	2,760	0,021
2	7	28	0,315	6,295	0,079
3	5	32	0,327	6,547	0,366
4	4	36	0,155	3,105	0,258
5	1	40	0,034	0,672	0,161
Σ	20		0,969	9,379	0,884

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 0,884. \text{ Определяем число степеней свободы}$$

$s=k-3$. здесь $k=5$ – число групп выборки, 3- число параметров, которые рассчитываются по данным этой выборки. По числу степеней свободы $s=5-3=2$ и по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ находим $\chi^2_{kp(\alpha,s)}$:

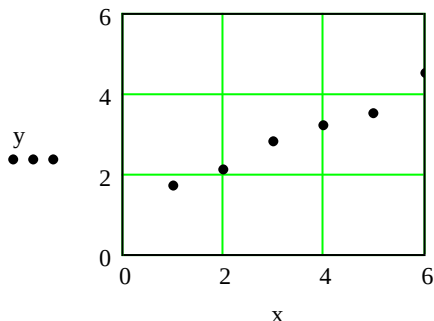
$\chi^2_{kp(0,05;2)} = 6$. Так как выполняется условие $\chi^2_{kp(0,05;2)} = 6 > \chi^2 = 0,884$, то гипотеза H_0 принимается.

Задача №3. В таблице 6 приведены значения величин X и Y , полученные в результате эксперимента. На плоскости Oxy построить точки, соответствующие значениям X и Y . Подобрать наиболее подходящие три формулы зависимости X и Y по расположению точек, используя рисунки (Приложение 1 и 2). Найти эмпирическую формулу зависимости с минимальной остаточной дисперсией.

Таблица 6

Значения величины X	1	2	3	4	5	6
Значения величины Y	1,7	2,1	2,8	3,2	3,5	4,5

Решение. Построим точки (x_i, y_i) $i=1, \dots, n$ на плоскости Оху (см. рис.). По характеру расположения точек определяем подходящие три зависимости $y = f(x)$ по (П.2) и (П.1):
 $y_4 = \exp(a_4 + b_4 x)$, $y_8 = \frac{1}{a_8 + b_8 x}$,



$y_{15} = a_{15} + b_{15}x^2$. Для наглядности и упрощения расчётов составляем таблицу 7 с учётом П1. Линеаризацию формулы 4 делаем заменой переменных $u=x$, $v=\ln y$. Тогда функция принимает вид $v = a_4 + b_4 u$. Коэффициенты a_4 и b_4 вычисляем по методу МНК:

$$a_4 = \frac{\sum v \cdot \sum u^2 - \sum uv \cdot \sum u}{n \sum u^2 - (\sum u)^2} = \frac{6,22 \cdot 91 - 25,04 \cdot 21}{6 \cdot 91 - 21^2} = 0,38$$

$$b_4 = \frac{n \sum uv - \sum u \cdot \sum v}{n \sum u^2 - (\sum u)^2} = \frac{6 \cdot 25,04 - 21 \cdot 6,22}{105} = 0,19$$

По полученной формуле $y = \exp(0,38 + 0,19x)$ вычисляем значение функции $\hat{y}$ при данных значениях x и $(y - \hat{y})^2$.

$$\text{Вычисляем остаточную дисперсию } S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2 = \frac{0,124}{4} = 0,03$$

Таблица 7

x	y	$u = x$	$v = \ln y$	u^2	uv	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
1	1,7	1	0,53	1	0,53	1,769	0,005
2	2,1	2	0,74	4	1,48	2,132	0,001
3	2,8	3	1,03	9	3,09	2,569	0,053
4	3,2	4	1,16	16	4,65	3,097	0,011
5	3,5	5	1,25	25	6,26	3,732	0,054
6	4,5	6	1,50	36	9,02	4,498	0,000
Σ		21	6,22	91	25,04		0,124

Продолжение табл. 7

x	y	$u = x$	$v = 1/y$	u^2	uv	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
1	1,7	1	0,59	1	0,59	1,824	0,015
2	2,1	2	0,48	4	0,95	2,090	0,000
3	2,8	3	0,36	9	1,07	2,447	0,124
4	3,2	4	0,31	16	1,25	2,952	0,061
5	3,5	5	0,29	25	1,43	3,720	0,048
6	4,5	6	0,22	36	1,33	5,027	0,277
Σ		21	2,24	91	6,62		0,527
x	y	$u = x^2$	$v = y$	u^2	uv	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
1	1,7	1	1,7	1	1,70	1,921	0,049
2	2,1	4	2,1	16	8,40	2,143	0,002
3	2,8	9	2,8	81	25,20	2,512	0,083
4	3,2	16	3,2	256	51,20	3,028	0,030
5	3,5	25	3,5	625	87,50	3,692	0,037
6	4,5	36	4,5	1296	162,00	4,504	0,000
Σ		91	17,8	2275	336,00		0,200

Линеаризацию формулы 8 делаем заменой переменных $u=x$, $v=1/y$. Вновь результаты расчёта заносим в таблицу. Получаем коэффициенты $a_b = \frac{2,24 \cdot 91 - 6,62 \cdot 21}{105} = 0,62$, $b_b = \frac{6 \cdot 6,62 - 21 \cdot 2,24}{105} = -0,07$.

И уравнение регрессии принимает вид $y = \frac{1}{0,62 - 0,07x}$,

остаточная дисперсия составила $S^2 = \frac{0,527}{4} = 0,13$.

Аналогичные расчёты делаем для формулы 15: $a_{15} = 1,85$;
 $b_{15} = 0,07$; $y = 1,85 + 0,07x^2$, $S^2 = \frac{0,2}{4} = 0,05$.

Определяем наименьшую остаточную дисперсию $\min \{0,03; 0,13; 0,05\} = 0,03 = S_4^2$. Следовательно, уравнение регрессии $y = \exp(0,38 + 0,19x)$ наилучшим образом описывает результаты экспериментов. Ответ: $y = \exp(0,38 + 0,19x)$.

Задача №4. В таблице 8 приведены значения величин X и Y , полученные в результате эксперимента. Найти:

- 1) уравнение прямой линии регрессии y на x $y = ax + b$;
- 2) а) стандартные отклонения: S_x , S_y , S_{yx} , S_b , S_a , б) коэффициент корреляции r ;
- 3) проверить значимость: а) коэффициента корреляции r , б) коэффициента регрессии a , в) уравнение прямой линии регрессии в целом;
- 4) доверительный интервал для α и β уравнения регрессии генеральной совокупности $y_x = \alpha x + \beta$;
- 5) доверительный интервал для прямой линии регрессии $y = ax + b$;
- 6) построить на плоскости Oxy точки (x_i, y_i) , прямую линию $y = ax + b$ и доверительные границы для неё.

Таблица 8

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,9	1,1	0,6	0,3	2,1	2,1	0,2	4	4,1	5,1

Решение. 1. Составим и заполним таблицу 9.

Таблица 9

x	y	x^2	y^2	xy
1	0,9	1	0,81	0,9
2	1,1	4	1,21	2,2
3	0,6	9	0,36	1,8
4	0,3	16	0,09	1,2

5	2,1	25	4,41	10,5
6	2,1	36	4,41	12,6
7	0,2	49	0,04	1,4
8	4	64	16	32
9	4,1	81	16,81	36,9
10	5,1	100	26,01	51
Σ	55	20,5	385	150,5

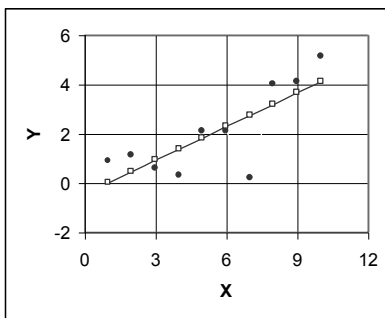
Данные для вычисления **a** и **b** берём из последней строки таблицы 9. $a = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 \cdot 150,5 - 55 \cdot 20,5}{10 \cdot 385 - 55^2} = 0,46,$

$$b = \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum xy \cdot \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{20,5 \cdot 385 - 150,5 \cdot 55}{10 \cdot 385 - 55^2} = -0,47$$

Уравнение прямой линии регрессии **y** на **x** имеет вид $y_x = 0,46x - 0,47$

Построим экспериментальные точки (x_i, y_i) , на плоскости **Oxy** и прямую линию $y_x = 0,46x - 0,47$ (см. рис.).

2. Оценим стандартные отклонения: $S_x, S_y, S_{yx}, S_b, S_a$.



$$Q_x = \sum x^2 - (\sum x)^2 / n$$

$$Q_x = 385 - 55^2 / 10 = 82,5$$

$$Q_y = \sum y^2 - (\sum y)^2 / n, Q_y = 70,15 - 20,5^2 / 10 = 28,13$$

$$Q_{xy} = \sum xy - (\sum x \cdot \sum y) / n, Q_{xy} = 150,5 - (55 \cdot 20,5) / 10 = 37,75$$

$$S_x = \sqrt{\frac{Q_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{82,5}{9}} = 3,03, S_y = \sqrt{\frac{Q_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{28,13}{9}} = 1,77, S_{xy} = \frac{37,75}{9} = 4,19,$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{Q_y - (Q_{xy})^2 / Q_x}{n-2}} = \sqrt{\frac{28,13 - (37,75)^2 / 82,5}{8}} = 1,16$$

$$S_b = S_{yx} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{((\sum x)/n)^2}{Q_x}} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(55/10)^2}{82,5}} = 0,8, S_a = \frac{S_{yx}}{\sqrt{Q_x}} = \frac{1,16}{\sqrt{82,5}} = 0,13$$

Контроль по формуле: $\frac{S_b}{S_a} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}, \frac{S_b}{S_a} = \sqrt{\frac{385}{10}} = 6,2, \frac{S_b}{S_a} = \frac{0,80}{0,13} = 6,2$

Оценим коэффициент корреляции r : $r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}} = \frac{37,75}{\sqrt{82,5 \cdot 28,13}} = 0,78$

3. Проверим значимость: а) коэффициента корреляции r , б) коэффициента регрессии a , в) уравнение прямой линии регрессии в целом.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,78\sqrt{8}}{\sqrt{1-(0,78)^2}} = 3,57$$

По таблице Стьюдента по заданным $\alpha=0,05$ и $k=n-2$ находим $t_{kp(0,05;8)}$: $t_{kp(0,05;8)} = 2,31$. Так как выполняется условие $t = 3,57 > t_{kp} = 2,31$, то гипотеза $H_0: r_g = 0$ отклоняется. Это значит, что оценка коэффициента корреляции с вероятностью 0,95 отличается от нуля.

$$t = \frac{|a|}{S_a} = \frac{0,46}{0,13} = 3,57$$

Так как выполняется условие $t = 3,57 > t_{kp} = 2,31$, то гипотеза $H_0: \alpha = 0$ отклоняется. Это значит, что оценка коэффициента регрессии, a с вероятностью 0,95 отличается от нуля.

$$F = \frac{S_y^2}{S_{y_x}^2} = \left(\frac{1,77}{1,16} \right)^2 = 2,3$$

По таблице Фишера находим $F_{kp(0,05;9;8)}$: $F_{kp(0,05;9;8)} = 3,39$

Выполняется условие $F = 2,3 < F_{kp} = 3,39$ поэтому уравнение

$y_x = 0,46x - 0,47$ статистически не значимо описывает результаты экспериментов.

4. Найдём доверительный интервал для α и β уравнения регрессии генеральной совокупности $y_x = \alpha x + \beta$.

$$a - t_{kp} S_a < \alpha < a + t_{kp} S_a,$$

$$0,46 - 2,31 \cdot 0,13 < \alpha < 0,46 + 2,31 \cdot 0,13, \quad 0,16 < \alpha < 0,76.$$

$$b - t_{kp} S_b < \beta < b + t_{kp} S_b,$$

$$-0,47 - 2,31 \cdot 0,8 < \beta < -0,47 + 2,31 \cdot 0,8, \quad -2,12 < \beta < 1,58.$$

5. Найдём доверительные границы для прямой линии регрессии $y_x = 0,46x - 0,47$. Для этого составим таблицу 10

x	$x - \bar{x}$	$\hat{y}$	m_1	m_2	B_x	$\hat{y} - B_x$	$\hat{y} + B_x$
1,5	-4	0,22	0,29	0,63	2,82	-2,60	3,04
3,5	-2	1,13	0,15	0,45	2,00	-0,87	3,14
5,5	0	2,05	0,10	0,37	1,64	0,41	3,69
7,5	2	2,97	0,15	0,45	2,00	0,96	4,97
9,5	4	3,88	0,29	0,63	2,82	1,06	6,70

Здесь
 $\hat{y}_x = 0,46x - 0,47$,

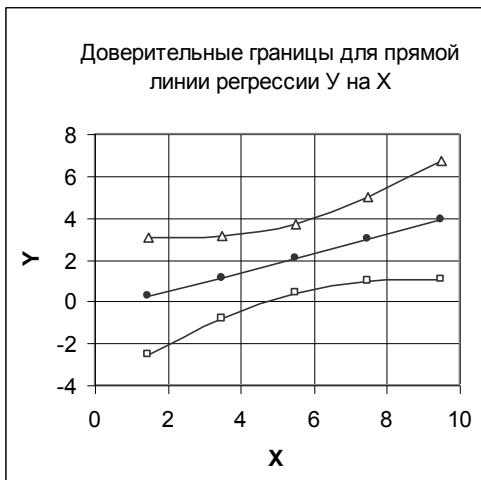
$$m_1 = \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})}{Q_x},$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})}{Q_x}},$$

$$B_x = S_{\hat{y}} \sqrt{2 \cdot F_{(\alpha, 2, n-2)}},$$

$S_{\hat{y}} = S_{y_x} \cdot m_2$, $\hat{y} + B_x$ - верхняя граница полученного уравнения, $\hat{y} - B_x$ - верхняя граница полученного уравнения.

6. Строим на плоскости Оху точки (x_i, y_i) , прямую линию $y_x = 0,46x - 0,47$ и доверительные границы $\hat{y} - B_x$ и $\hat{y} + B_x$ для неё.



5. Задачи для расчётных заданий

Задача №1. В результате эксперимента получены значения величины X, приведённые в таблице 11. Произвести отсев грубых погрешностей.

Задача №2. Используя данные и результаты задачи №1 сделать проверку гипотезы нормальности эмпирического распределения (H_0). (Применить три метода)

Замечание. Номера вариантов и значения величины X выделены **жирным курсивом**.

Таблица 11

№ варианта→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12	17	15	21	21	25	26	26	26	31
2	15	18	20	22	24	25	28	27	29	31
3	17	19	20	22	26	26	28	28	30	32
4	19	19	21	23	26	28	28	28	31	33
5	19	20	21	23	27	28	28	29	31	33
6	19	21	21	23	27	29	29	29	31	34
7	19	21	21	24	27	29	30	29	32	34
8	19	21	21	24	28	29	30	29	33	34
9	20	22	21	25	29	29	30	29	33	34
10	21	22	23	26	30	30	31	30	33	34
11	21	23	23	27	30	30	31	31	33	35
12	21	23	24	27	30	31	31	31	33	35
13	21	23	25	27	31	31	31	32	34	35
14	22	23	25	27	32	31	32	33	34	35
15	22	24	25	28	32	32	32	33	35	35
16	23	24	25	28	32	32	32	34	35	37
17	23	24	26	29	33	34	33	34	35	38
18	24	26	26	29	33	35	34	34	35	39
19	24	27	28	29	35	36	34	35	36	39
20	25	28	28	32	36	37	36	37	37	40
21	38	40	41	44	51	50	46	49	47	50

№ варианта→	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	28	33	32	32	36	34	40	36	41	41
2	31	34	34	35	37	38	40	39	42	42
3	31	35	35	35	38	38	41	40	43	42
4	31	35	35	36	40	38	42	43	44	44
5	32	36	35	37	40	39	42	43	45	44
6	33	36	37	40	40	40	43	43	46	45
7	34	36	37	40	41	40	43	43	46	46
8	35	36	38	40	41	42	43	44	46	46
9	36	36	38	41	41	42	44	44	46	46
10	36	37	38	41	42	42	44	45	47	46
11	37	37	40	41	42	42	44	45	48	47

12	37	38	41	42	43	43	45	46	48	47
13	37	38	41	43	44	43	45	46	48	47
14	38	39	41	43	44	43	45	47	48	48
15	38	40	41	44	44	44	45	47	49	48
16	38	40	42	44	45	44	46	47	49	49
17	40	40	42	44	45	44	46	48	49	49
18	41	40	43	46	45	45	46	50	50	50
19	41	40	44	46	46	46	46	50	50	51
20	41	41	47	48	46	47	48	52	51	55
21	56	50	62	65	58	60	57	67	62	68

№ варианта→	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	15	14	18	21	24	24	25	25	28	29
2	17	18	20	22	24	24	26	27	29	30
3	17	18	20	23	24	25	26	28	29	33
4	18	19	21	24	25	26	26	28	31	33
5	19	19	22	24	26	27	28	28	31	33
6	19	20	22	25	26	27	28	28	32	34
7	19	20	22	25	26	28	29	29	32	34
8	19	20	23	26	26	28	29	29	32	34
9	20	21	23	26	27	28	30	30	32	34
10	20	21	23	27	27	29	30	31	32	35
11	20	22	23	7	28	30	30	31	33	35
12	20	23	24	27	28	30	31	31	34	35
13	20	23	25	27	28	30	32	32	34	35
14	20	23	25	27	28	30	33	32	34	36
15	22	24	27	27	29	30	33	33	34	36
16	22	24	27	28	30	31	33	33	35	36
17	24	25	27	29	30	33	33	33	36	37
18	25	25	28	29	31	33	34	35	36	38
19	25	26	31	30	32	34	35	35	37	38
20	26	26	31	31	34	35	37	36	39	39
21	38	38	45	41	45	48	50	48	50	49

Задача №3. В таблице 12 приведены значения величин X и Y , полученные в результате эксперимента. На плоскости Oxy построить точки, соответствующие значениям X и Y . Подобрать наиболее

походящие три формулы зависимости X и Y по расположению точек, используя рисунки (Приложение 1 и 2). Найти эмпирическую формулу зависимости с минимальной остаточной дисперсией.

Таблица 12

№ в. (y)→ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,6	1,2	8	1	1,3	7,8	2,4	1,2	1	0,8
2	1,9	1,3	6,2	1,4	2	5,8	2,1	2	1	1,2
3	3,3	2,7	5,6	2,9	2,6	6,1	3,1	3,6	2,2	2,6
4	3,7	3,1	5,5	3,3	3,4	5,7	3,2	3,9	2,5	2,8
5	3,6	3,1	5,1	3,1	3,9	4,9	3,1	3,6	2,6	2,4
6	4,6	4,4	4,7	4	4,2	5,2	4,9	4,3	4,4	3
№ в. (y)→ x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	0,8	0,9	0,8	0,8	1,3	1,4	0,8	2,2
2	1,2	1	3,1	1,7	2,9	2	2	1,9	3,1	2
3	1,5	2,2	3,4	3,2	4	2,6	3,5	3,4	3,4	3,1
4	2,1	2,5	3,6	3,4	3,9	3	3,9	3,8	3,6	3,4
5	2,7	2,6	3,4	3	3,3	3,1	3,7	3,7	3,4	3,4
6	4	4,4	3,1	3,5	3,7	3	4,4	4,5	3,1	4,8
№ в. (y)→ x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,9	1	0,8	0,9	0,8	1,8	1,3	1,4	2	2,2
2	1,2	1	1,2	1,7	2,9	1,9	2	1,9	1,9	2
3	2,7	2,2	2,6	3,2	4	2,2	3,5	3,4	3,2	3,1
4	2,8	2,5	2,8	3,4	3,9	2,9	3,9	3,8	3,5	3,4
5	2,3	2,6	2,4	3	3,3	3,7	3,7	3,7	3,5	3,4
6	2,7	4,4	3	3,5	3,7	4,8	4,4	4,5	4,7	4,8

Задача №4. В таблице 13 приведены значения величин X и Y , полученные в результате эксперимента. Найти:

- 1) уравнение прямой линии регрессии y на x $y = ax + b$;
- 2) стандартные отклонения: S_x , S_y , S_{yx} , S_b , S_a ;
коэффициент корреляции r ;
- 3) проверить значимость: а) коэффициента корреляции r , б) коэффициента регрессии a , в) уравнение прямой линии регрессии в целом;
- 4) доверительный интервал для α и β уравнения регрессии генеральной совокупности $y_x = \alpha x + \beta$;
- 5) доверительный интервал для прямой линии регрессии $y = ax + b$;
- 6) построить на плоскости Оху точки (x_i, y_i) , прямую линию $y = ax + b$ и доверительные границы для неё.

Таблица 13

$B \rightarrow$ X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,6	1,8	4,9	6	3,6	7,8	4,6	5,5	3	5,8
2	0,8	-0,6	1,7	0,3	2,7	1,8	5,2	0,7	6	8,5
3	2,3	1,8	-0,5	3,3	1,2	5	7,2	9,4	12,9	10
4	0,3	2,5	1,7	3,4	6,7	6,6	6,5	6,7	10,4	6,1
5	0,9	3,4	2,1	2,5	4,7	5,8	8,6	10,7	11,9	11,5
6	3,5	5,2	4,2	6,6	6,1	7,9	15,2	15,3	15	11,6
7	5,7	0,7	4,6	6,6	11	10,3	6,9	17,2	9,1	13,8
8	1,8	4	9,5	9,4	8,2	15	16	10,6	15,4	10,5
9	6,2	6,6	7,1	6	8,3	10,6	13,9	13,6	16,9	14,1
10	4,9	8	12,5	10,8	10	15,5	16,5	17,8	15,4	22,4

$B \rightarrow$ X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3,5	4,5	3,9	2,3	4,5	4,6	4,3	6,2	0,6	1,5
2	-0,2	1,3	1,2	5	3,9	4,9	5,1	0,2	8,3	1
3	2,8	1,8	2,8	6	4	7,3	6,1	8,1	7,3	1,9
4	4,1	5,5	5	6,7	6,6	7,5	3,3	6,3	9	1,7
5	4,5	5,3	8,2	5,4	5,4	7,8	13,8	6	15,2	0,1
6	7,6	3,4	5,9	7,9	11,5	8,2	11,9	15,7	12,3	4,5
7	8,1	10,3	7,3	10,1	13,8	10,8	13,1	13,1	14,8	4
8	8,9	8,1	11,4	5,1	6,8	15,5	13,4	11,1	17,1	5,2

9	5,4	12,1	9,7	8,2	15	8,8	21,5	16	12,5	8,2
10	6,5	7	5,7	10,9	13,3	16,2	13,8	17,2	16,5	6,1

B→ X	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	3,5	4,5	3,9	2,3	4,5	4,6	4,3	6,2	0,6	1,5
2	-0,2	1,3	1,2	5	3,9	4,9	5,1	0,2	8,3	1
3	2,8	1,8	2,8	6	4	7,3	6,1	8,1	7,3	1,9
4	4,1	5,5	5	6,7	6,6	7,5	3,3	6,3	9	1,7
5	4,5	5,3	8,2	5,4	5,4	7,8	13,8	6	15,2	0,1
6	7,6	3,4	5,9	7,9	11,5	8,2	11,9	15,7	12,3	4,5
7	8,1	10,3	7,3	10,1	13,8	10,8	13,1	13,1	14,8	4
8	8,9	8,1	11,4	5,1	6,8	15,5	13,4	11,1	17,1	5,2
9	5,4	12,1	9,7	8,2	15	8,8	21,5	16	12,5	8,2
10	6,5	7	5,7	10,9	13,3	16,2	13,8	17,2	16,5	6,1

Приложение 1

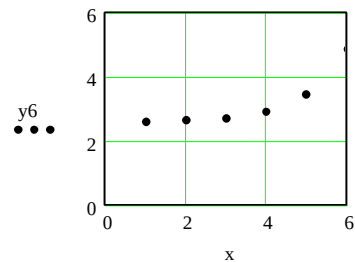
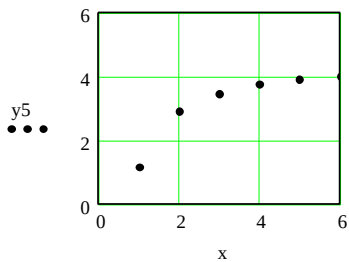
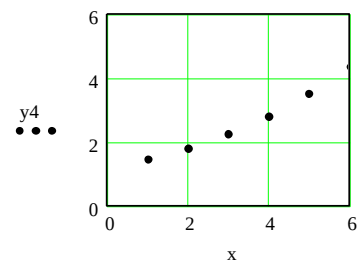
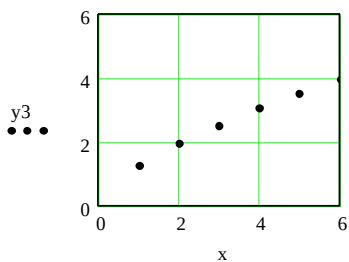
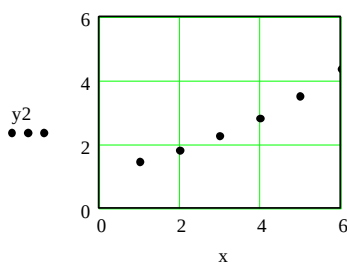
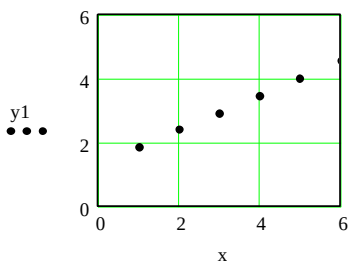
Функции и линеаризующие преобразования

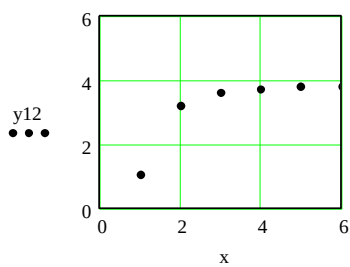
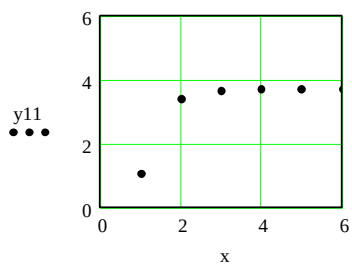
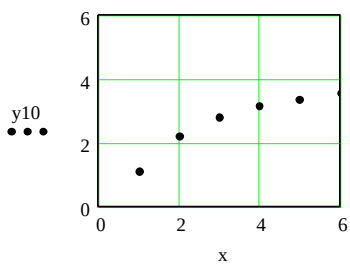
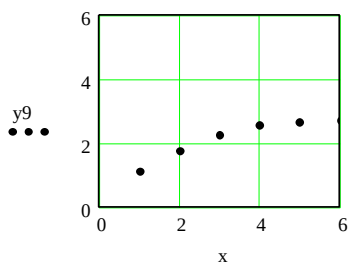
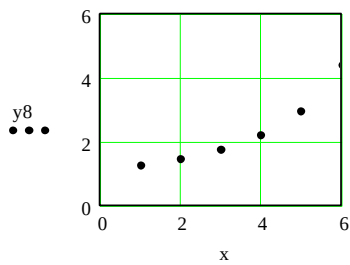
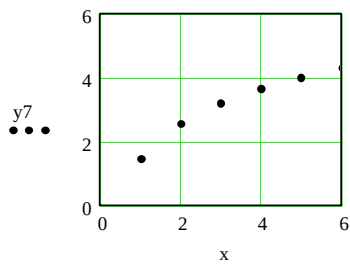
№ п/п	Функция	Преобразование	Замена переменных			
			x-U	y-V	a-P	b-Q
1	$y = a_1 + b_1 x$	-	x	y	a_1	b_1
2	$y = a_2 b_2^x$	$\ln y = \ln a_2 + x \ln b_2$	x	$\ln y$	$\ln a_2$	$\ln b_2$
3	$y = a_3 x^{b_3}$	$\ln y = \ln a_3 + b_3 \ln x$	$\ln x$	$\ln y$	$\ln a_3$	b_3
4	$y = e^{a_4 + b_4 x}$	$\ln y = a_4 + b_4 x$	x	$\ln y$	a_4	b_4
5	$y = a_5 + \frac{b_5}{x}$	-	$\frac{1}{x}$	y	a_5	b_5
6	$y = a_6 + b_6 e^x$	-	e^x	y	a_6	b_6
7	$y = a_7 + b_7 \ln x$	-	$\ln x$	y	a_7	b_7
8	$y = \frac{1}{a_8 + b_8 x}$	$\frac{1}{y} = a_8 + b_8 x$	x	$\frac{1}{y}$	a_8	b_8
9	$y = \frac{1}{a_9 + b_9 e^{-x}}$	$\frac{1}{y} = a_9 + b_9 e^{-x}$	e^{-x}	$\frac{1}{y}$	a_9	b_9
10	$y = a_{10} e^{\frac{b_{10}}{x}}$	$\ln y = \ln a_{10} + \frac{b_{10}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln y$	$\ln a_{10}$	b_{10}
11	$y = a_{11} + b_{11} x^{-3}$	-	x^{-3}	y	a_{11}	b_{11}
12	$y = a_{12} + b_{12} x^{-2}$	-	x^{-2}	y	a_{12}	b_{12}
13	$y = a_{13} + b_{13} \sqrt[3]{x}$	-	$\sqrt[3]{x}$	y	a_{13}	b_{13}
14	$y = a_{14} + b_{14} \sqrt[2]{x}$	-	$\sqrt[2]{x}$	y	a_{14}	b_{14}
15	$y = a_{15} + b_{15} x^2$	-	x^2	y	a_{15}	b_{15}
16	$y = a_{16} + b_{16} x^3$	-	x^3	y	a_{16}	b_{16}

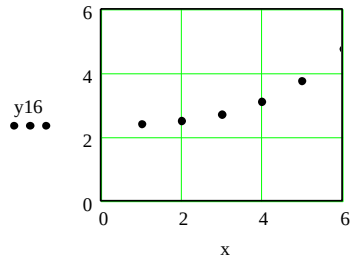
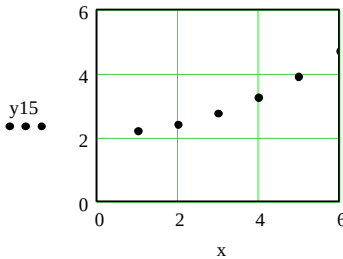
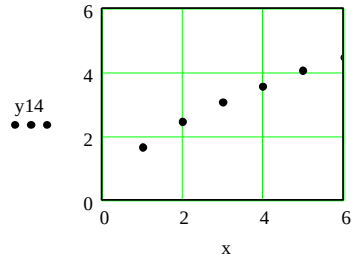
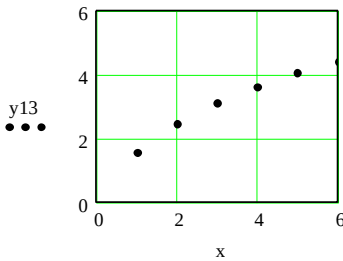
Приложение 2

Расположение точек на плоскости Oxy , соответствующих значениям функций из приложения 1.

Замечание. Номер функции соответствуют цифре при переменной y







Библиографический список

1. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. Пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1988. 239с.: ил.
2. Закс Л. Статистическое оценивание. – М. «Статистика», 1976.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 479с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Предварительная обработка экспериментальных данных.....	3
1.1. Вычисление выборочных характеристик эмпирических распределений	4
1.2. Отсев грубых погрешностей	4
1.3. Проверка гипотезы нормальности распределения	6
2. Статистические методы построения и преобразования парных зависимостей по экспериментальным данным	8
3. Статистическое оценивание парной корреляции и регрессии	9
4. Решение задач по обработке опытных данных	11
4.1. Решение задач предварительной обработки опытных данных	11
5. Задачи для расчётных заданий	22
Приложение 1	28
Приложение 2	29
Библиографический список.....	31

ГОУ ВПО «Российский химико–технологический университет им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.

Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9

Адрес института: 301650 Новомосковск, Тульская обл. ул. Дружбы, 8