МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

НОВОМОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ГОУ ВПО "РОССИЙСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА"

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Методические указания

Новомосковск 2009

УДК 681.3
ББК 32.97
Ч 671

Рецензенты
кандидат технических наук, доцент *А.Г. Лопатин*
(НИ (филиал) ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева)

кандидат технических наук, доцент *В.Ю. Волков*
(НИ (филиал) ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева)

Составители: Артамонова Л.А., Мочалин В.П., Тивиков А.С.
Ч 671 **Численное решение систем линейных и нелинейных уравнений.** Методические указания/ ГОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт (филиал). Новомосковск, 2009, 24 с.

В методических указаниях рассмотрены основные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ. Приведены основы теории по различным методам решения систем линейных и нелинейных уравнений, способы решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ в среде математического пакета программ MathCAD, а также контрольные вопросы и задания.

Методические указания могут быть рекомендованы для студентов всех специальностей заочной формы обучения, обучающихся по дисциплине «Вычислительная математика» и «Численные методы и программирование» и изучающих методы решения систем линейных и нелинейных уравнений. Методические указания могут быть использованы студентами дневной и вечерней формы обучения и другими категориями пользователей, изучающими методы решения систем линейных и нелинейных уравнений.

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

ББК 32.97
УДК 681.3

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

К численным методам алгебры традиционно относят численные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений [1]. При решении систем линейных и нелинейных уравнений студент и инженер имеет дело с несколькими математическими зависимостями, в которых имеется несколько неизвестных величин, требующих определения. Часто приходится обращаться к численным методам решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ. Трудности, с которыми сталкивается пользователь при отыскании решения систем линейных и нелинейных уравнений рассматриваются в данном пособии.

Методические указания состоят из двух глав, в которых рассмотрены основные теоретические положения, особенности решения систем линейных и нелинейных уравнений в математическом пакете MathCAD.

В первой главе рассмотрены основные понятия теории решения систем линейных уравнений. Приведены особенности метода простых итераций и метода итераций Зейделя [2,3] для решения систем линейных уравнений. Здесь же рассмотрены примеры реализации этих методов в MathCAD.

Во второй главе рассмотрены основные понятия теории решения систем нелинейных уравнений [4]. Приведены теоретические особенности решения методом итераций и методом Ньютона для системы нелинейных уравнений. Здесь же рассмотрены примеры программной реализации этих методов в MathCAD.

Методические указания позволят студентам и аспирантам освоить и использовать на ЭВМ методы решения систем линейных и нелинейных уравнений.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим постановку задачи решения системы линейных уравнений. Задана система из k линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k \end{cases}$$

(1a)

где $a_{i,j}$ – коэффициенты при неизвестных x_i (i-номер строки, j-номер столбца); b_i – свободные члены системы.

Требуется найти совокупность значений x_i при которых все уравнения системы (1) обращаются в тождество с точностью определения каждого неизвестного ε_{xi}.

1.1. Общая характеристика итерационных методов решения системы линейных уравнений

Вводя матричные обозначения - матрица коэффициентов А, вектор неизвестных X и вектор свободных членов b:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

систему линейных уравнений можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{AX=b} \qquad (1б)$$

При численном решении система (1) преобразуется к итерационному виду:

$$\mathbf{X=MX+N} \qquad (2)$$

и находится предел её последовательности:

$$x^{<n+1>} = Mx^{<n>} + N \qquad (3)$$

где n – номер итерации.

В дальнейшем будем рассматривать случай системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

1.2. Метод простых итераций

Пусть имеем систему из трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Выражая диагональные неизвестные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ a_{22}x_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases} \qquad (4)$$

Перейдём к матричному виду, вводя следующие обозначения:

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (где\ d_1 = \frac{b_1}{a_{11}};\ d_2 = \frac{b_2}{a_{22}};\ d_3 = \frac{b_3}{a_{33}}) \quad c_{ij} = \begin{cases} 0 & если\ i = j \\ a_{ij}/a_{ii} & в\ остальных\ случаях \end{cases}$$

или

$$c = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда систему (4) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{X=d-cx} \qquad (5)$$

или в итерационном виде:

$$x^{<n+1>} = d - cx^{<n>} \qquad (6).$$

За начальное приближение метода принимают обычно $\mathbf{x}^{<0>}=\mathbf{d}$.

Условие сходимости метода итераций (6) для системы уравнений с тремя неизвестными [2, 5]:

$$\begin{cases} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, на первом этапе систему (1) приводят к такому виду, чтобы на главной диагонали матрицы системы находились максимальные элементы и для них выполнялось условие (7).

На втором этапе из полученной системы линейных уравнений выражают матрицу С и вектор d для выполнения расчётов по формулам (5, 6) метода простых итераций.

Расчёт по формуле метода заканчивают при достижении заданной погрешности по каждой переменной: $|x_i^{<n+1>} - x_i^{<n>}| \leq \varepsilon_{xi}$

1.3. Метод итераций Зейделя

По методу итераций Зейделя [2, 3, 6] на первом этапе также необходимо преобразовать исходную систему линейных уравнений (1) к виду, при котором выполняется условие сходимости (7).

На втором этапе из матрицы коэффициентов А системы линейных уравнений выделяют две треугольные матрицы В и С:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Так чтобы **A=B+C.** Исходная система линейных уравнений в матричном виде **AX=b** при подстановке треугольных матриц:

$$\mathbf{BX+CX=b}$$

Умножив всё уравнение слева на обратную матрицу $\mathbf{B^{-1}}$, имеем:

$$\mathbf{B^{-1}BX+B^{-1}CX=B^{-1}b}$$

Произведение $\mathbf{B^{-1}B}$ представляет собой единичную матрицу. Таким образом, выражая вектор неизвестных **X**, имеем формулу Зейделя:

$$\mathbf{X=-B^{-1}CX+B^{-1}b}$$

или в итерационной форме формула Зейделя:

$$x^{<n+1>} = -B^{-1}Cx^{<n>} + B^{-1}b \qquad (8)$$

где n – номер итерации.

При вычислениях по методу Зейделя требуется меньшее число итераций для достижения заданной точности, чем в методе простых итераций

1.4. Решение системы линейных уравнений в MATHCAD

Пример реализации *метода простых итераций* в среде Mathcad представлен на рис.1. Здесь задана система, состоящая из трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Для применимости метода простых итераций должно выполнятся условие (7), по которому модули диагональных коэффициентов данного уравнения должны быть больше суммы модулей других коэффициентов этого уравнения. Приведём данную систему к другому виду, чтобы выполнялось условие (7). Преобразованию подлежат первое и второе уравнения, так как для третьего уравнения условие (7) выполняется.

Первое уравнение получим, сложив первое и второе уравнение исходной системы.

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Второе новое уравнение получим, вычитая из второго уравнения третье уравнение в исходной системе. В результате получим:

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 2.6x_1 - 3.7x_2 - 0.1x_3 = 5.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Таким образом, получили на диагонали выполнение условия (7): модули диагональных коэффициентов данного уравнения должны быть больше суммы модулей других коэффициентов этого уравнения:

$$\begin{cases} |9.7| \geq |2.9| + |2.8| \\ |-3.7| \geq |2.6| + |-0.1| \\ |3.5| \geq |0.8| + |1.4| \end{cases}$$

Решение системы линейных уравнений с точностью 0.001

$$6.3\cdot x_1 + 5.2\cdot x_2 - 0.6\cdot x_3 = 1.5$$

$$3.4\cdot x_1 \cdot -2.3\cdot x_2 + 3.4\cdot x_3 = 3.4 \qquad A0 := \begin{pmatrix} 6.3 & 5.2 & -0.6 \\ 3.4 & -2.3 & 3.4 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad b0 := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.4 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

$$0.8\cdot x_1 + 1.4\cdot x_2 + 3.5\cdot x_3 = -2.3$$

Преобразуем ее к виду, пригодному для применения метода итераций:
1) 1уравнение сложили со 2-м 2) из 2 вычли 3 3) оставим без изменений

$$9.7\cdot x_1 + 2.9\cdot x_2 + 2.8\cdot x_3 = 4.9$$

$$2.6\cdot x_1 - 3.7\cdot x_2 - 0.1\cdot x_3 = 5.7 \qquad A := \begin{pmatrix} 9.7 & 2.9 & 2.8 \\ 2.6 & -3.7 & -0.1 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 4.9 \\ 5.7 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

$$0.8\cdot x_1 + 1.4\cdot x_2 + 3.5\cdot x_3 = -2.3$$

Число строк и столбцов матрицы $i := 0..2$ $\quad j := 0..2$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

$$c_{i,j} := \mathrm{if}\left(i = j, 0, \frac{A_{i,j}}{A_{i,i}}\right) \qquad d_i := \frac{b_i}{A_{i,i}} \qquad x^{\langle 0\rangle} := d \qquad x^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.5052 \\ -1.5405 \\ -0.6571 \end{pmatrix}$$

$$n := 0..10$$

Итерационная формула: $x^{\langle n+1\rangle} := d - c\cdot x^{\langle n\rangle}$ Расчет погрешности:

Итерационный процесс: $\varepsilon^{\langle n\rangle} := x^{\langle n+1\rangle} - x^{\langle n\rangle}$

$$x^T = \begin{pmatrix} 0.5052 & -1.5405 & -0.6571 \\ 1.1554 & -1.1678 & -0.1564 \\ 0.8994 & -0.7244 & -0.4541 \\ 0.8528 & -0.8962 & -0.573 \\ 0.9385 & -0.9258 & -0.4936 \\ 0.9244 & -0.8677 & -0.5013 \\ 0.9093 & -0.8774 & -0.5213 \\ 0.918 & -0.8875 & -0.514 \\ 0.9189 & -0.8816 & -0.512 \\ 0.9165 & -0.881 & -0.5145 \\ 0.9171 & -0.8826 & -0.5142 \\ 0.9175 & -0.8822 & -0.5137 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{\langle 9\rangle} = \begin{pmatrix} 5.7 \times 10^{-4} \\ -1.6 \times 10^{-3} \\ 3.1 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{\langle 10\rangle} = \begin{pmatrix} 3.9 \times 10^{-4} \\ 3.9 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

выполним проверку $A0^{-1}\cdot b0 = \begin{pmatrix} 0.9172 \\ -0.8821 \\ -0.514 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} 0.9172 \\ -0.8821 \\ -0.514 \end{pmatrix}$

Рис.1. Метод простых итераций в MATHCAD.

Ответ по численному методу и проверочный ответ должны совпасть (рис. 1). Применяем формулу метода простых итераций (6) и достигая погрешности, которая меньше 0.001, прекращаем расчёт.

Проверку выполняем именно для исходной матрицы по формуле **x=A0^{-1}b0**.

МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Решение системы линейных уравнений с точностью 0.001

$$6.3\cdot x_1 + 5.2\cdot x_2 - 0.6\cdot x_3 = 1.5$$
$$3.4\cdot x_1 \cdot -2.3\cdot x_2 + 3.4\cdot x_3 = 3.4$$
$$0.8\cdot x_1 + 1.4\cdot x_2 + 3.5\cdot x_3 = -2.3$$

$$A0 := \begin{pmatrix} 6.3 & 5.2 & -0.6 \\ 3.4 & -2.3 & 3.4 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad b0 := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.4 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

Преобразуем ее к виду, пригодному для применения метода итераций:
1) 1уравнение сложили со 2-м 2) из 2 вычли 3 3) оставим без изменений

$$9.7\cdot x_1 + 2.9\cdot x_2 + 2.8\cdot x_3 = 4.9$$
$$2.6\cdot x_1 - 3.7\cdot x_2 - 0.1\cdot x_3 = 5.7$$
$$0.8\cdot x_1 + 1.4\cdot x_2 + 3.5\cdot x_3 = -2.3$$

$$A := \begin{pmatrix} 9.7 & 2.9 & 2.8 \\ 2.6 & -3.7 & -0.1 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 4.9 \\ 5.7 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

Выделим треугольные матрицы метода Зейделя

$$B := \begin{pmatrix} 9.7 & 0 & 0 \\ 2.6 & -3.7 & 0 \\ 0.8 & 1.4 & 3.5 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 2.9 & 2.8 \\ 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x^{\langle 0\rangle} := b \qquad x^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 4.9 \\ 5.7 \\ -2.3 \end{pmatrix}$$

$$n := 0 .. 4$$

Итерационная формула Зейделя: $x^{\langle n+1\rangle} := -B^{-1}\cdot C\cdot x^{\langle n\rangle} + B^{-1}\cdot b$

Расчет погрешности: $\varepsilon^{\langle n\rangle} := x^{\langle n+1\rangle} - x^{\langle n\rangle}$

Итерационный процесс:

$$x^T = \begin{pmatrix} 4.9 & 5.7 & -2.3 \\ -0.5351 & -1.8544 & 0.2069 \\ 0.9998 & -0.8436 & -0.5483 \\ 0.9156 & -0.8823 & -0.5135 \\ 0.9172 & -0.8822 & -0.5139 \\ 0.9172 & -0.8821 & -0.514 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 1.6\times 10^{-3} \\ 1.6\times 10^{-4} \\ -4.2\times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{\langle 4\rangle} = \begin{pmatrix} 7.4\times 10^{-5} \\ 6.4\times 10^{-5} \\ -4.2\times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Выполним проверку $A0^{-1}\cdot b0 = \begin{pmatrix} 0.9172 \\ -0.8821 \\ -0.514 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} 0.9172 \\ -0.8821 \\ -0.514 \end{pmatrix}$

Рис. 2. Метод Зейделя в MATHCAD.

Пример реализации *метода Зейделя* в среде Mathcad представлена на рис.2. Будем рассматривать ту же систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 3.4 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Преобразованная система (см. ранее):

$$\begin{cases} 9.7x_1 + 2.9x_2 + 2.8x_3 = 4.9 \\ 2.6x_1 - 3.7x_2 - 0.1x_3 = 5.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$$

Для преобразованной матрицы применяем формулу Зейделя (8) до сходимости к корням с точностью менее 0.001. Проверку выполняем для исходной матрицы по формуле $\mathbf{x=A0^{-1}b0}$. Ответ по численному методу и проверочный ответ должны совпасть (рис. 2).

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим постановку задачи решения системы нелинейных уравнений. Задана система из n нелинейных уравнений, которая в общем случае имеет вид (9):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Необходимо найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращающие каждое уравнение системы (9) в тождество с точностью определения каждого корня ε_{xi}. Для системы, состоящей более чем из двух нелинейных уравнений процесс поиска корней усложнён [2–7]. Поэтому будем рассматривать в дальнейшем численное решение системы двух нелинейных уравнений.

2.1. Метод итераций для системы двух нелинейных уравнений

Пусть имеем систему из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

которую преобразуем к виду (11), выражая x и y:

$$\begin{cases} x = \phi(y) \\ y = \chi(x) \end{cases} \quad (11)$$

и затем строим их графики на одном рисунке (рис. 3):

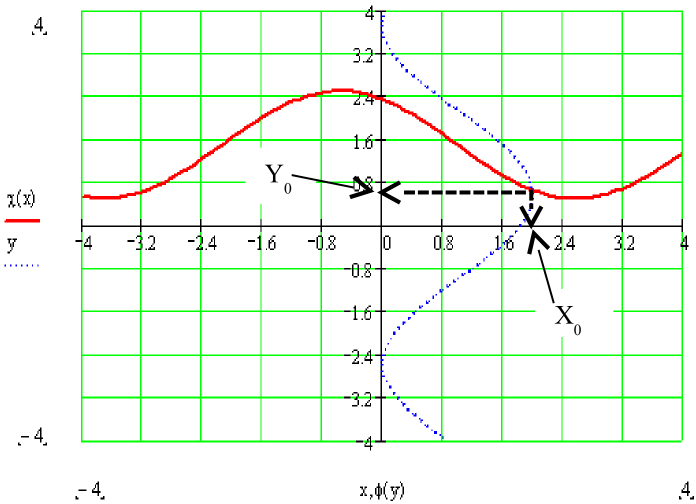


Рис. 3. Поиск начального приближения при решении системы нелинейных уравнений.

Точка пересечения есть начальное приближение (x_0, y_0).
Делаем итерации, приближаясь к ответу на n-й итерации:

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x_0, y_0) \\ y_1 = \chi(x_0, y_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \phi(x_1, y_1) \\ y_2 = \chi(x_1, y_1) \end{cases} \quad \ldots$$

$$\begin{cases} x_n = \phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = \chi(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} \qquad (12)$$

Перед началом расчётов проверяют условие сходимости метода итераций в точке начального приближения (x_0, y_0):

$$\left|\frac{\partial\phi(x_0, y_0)}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial\chi(x_0, y_0)}{\partial x_0}\right| < 1 \qquad (13а)$$

$$\left|\frac{\partial\phi(x_0, y_0)}{\partial y_0}\right| + \left|\frac{\partial\chi(x_0, y_0)}{\partial y_0}\right| < 1 \qquad (13б)$$

2.2. Метод Ньютона

По методу Ньютона итерационный процесс уточнения корня системы уравнений сводится к следующей зависимости (14):

$$x_{k+1} = x_k - \left[J(x_k)\right]^{-1} \cdot f(x_k) \qquad (14)$$

где $J(x_k)$ – матрица Якоби, которая обозначается как J и вычисляется по формуле (15). Определитель матрицы Якоби называется якобиан.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Таким образом, формула (14) с использованием обозначения (15) имеет вид, называемый формулой Ньютона для решения системы нелинейных уравнений:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} \cdot f(x_k) \qquad (16)$$

Условием применения метода является существование обратной матрицы Якоби, т.е. ненулевой якобиан.

2.3. Решение системы нелинейных уравнений в MATHCAD

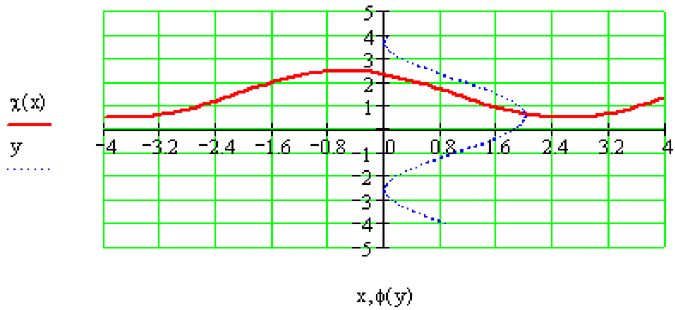
Метод простых итераций в MATHCAD представлен на рис.4. Здесь на первом этапе выделяются исходные итерационные функции и в области значений их аргументов строятся их графики на одном рисунке (рис.4). Выявляется точка пересечения графиков, которая берётся за начальную точку для метода простых итераций. Затем осуществляется проверка условия применимости метода простых итераций (13) для обоих аргументов. Сумма модулей производных по каждому из аргументов должна быть меньше 1 при начальном приближении. Если условие (13) выполняется, то применяем формулы метода простых итераций (12). Окончание расчётов при достижении итерации, при которой: $\max\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \varepsilon_{xi}$. Проверку решения осуществляем с помощью встроенных в MATHCAD функций (рис.4).

Исходные уравнения имеют вид:

$\sin(x-1)+y=1.5 \qquad y=1.5-\sin(x-1) \qquad \chi(x):=1.5-\sin(x-1)$

$x-\sin(y+1)=1 \qquad x=1+\sin(y+1) \qquad \phi(y):=1+\sin(y+1)$

Подбираем диапазон пересечения $\quad x:=-4,-3.9..4 \quad y:=-4,-3.9..4$



За нулевое приближение принимаем точку пересечения $\quad x:=2 \quad y:=0.7$

Проверка на сходимость

$\chi(x,y):=1.5-\sin(x-1) \qquad \phi(x,y):=1+\sin(y+1)$

$$\left|\frac{d}{dx}\phi(x,y)\right|+\left|\frac{d}{dx}\chi(x,y)\right|=0.54 \qquad \left|\frac{d}{dy}\phi(x,y)\right|+\left|\frac{d}{dy}\chi(x,y)\right|=0.128844$$

$x_0:=2 \qquad y_0:=0.7 \qquad i:=0..5$

Итерационные уравнения:

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ x_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.5-\sin(x_i-1) \\ 1+\sin(y_i+1) \end{pmatrix} \qquad \varepsilon x_i := |x_{i+1}-x_i| \qquad \varepsilon y_i := |y_{i+1}-y_i|$$

$x_i =$	$y_i =$	$\varepsilon x_i =$	$\varepsilon y_i =$
2	0.7	$8.3\cdot10^{-3}$	0
1.9917	0.6585	$4.5\cdot10^{-3}$	$4.5\cdot10^{-3}$
1.9962	0.6631	$4.1\cdot10^{-4}$	$2.4\cdot10^{-3}$
1.9957	0.6606	$2.2\cdot10^{-4}$	$2.2\cdot10^{-4}$
1.996	0.6608	$2\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-4}$
1.9959	0.6607	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$

Проверка с помощью встроенных функций

$TOL:=0.0001$

$x:=2 \qquad y:=0.7$

Given

$\sin(x-1)+y=1.5$

$x-\sin(y+1)=1$

$$\text{Find}(x,y)=\begin{pmatrix} 1.996 \\ 0.6607 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Реализация метода итераций в MATHCAD.

Метод Ньютона в MATHCAD представлен на рис.5. Здесь также на первом этапе выделяются исходные итерационные функции и в области значений их аргументов строятся их графики на одном рисунке (рис.5).

Выявляется точка пересечения графиков, которая берётся за начальную точку для метода Ньютона. Затем уравнения системы функции приводятся к нулю и строится матрица Якоби.

Приведённые к нулю функции и матрица Якоби подставляются в формулу Ньютона (рис.5.). Окончание расчётов - при достижении итерации, при которой: $\max\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \varepsilon_{xi}$.

Проверку решения осуществляем с помощью встроенных в MATHCAD функций (рис.5).

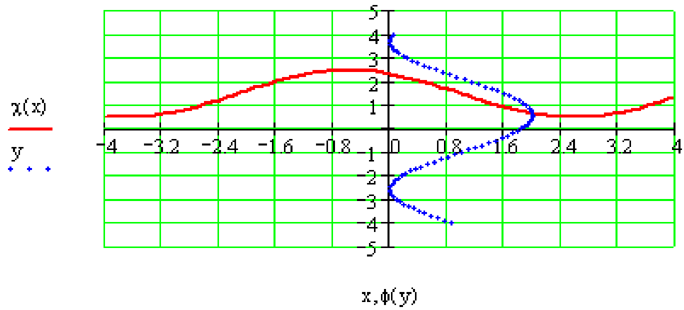
В результате сравнительного анализа решения систем нелинейных уравнений (рис.4.) методом простых итераций и (рис.5.) методом Ньютона видно, что для достижения заданной погрешности при решении системы нелинейных уравнений ($\varepsilon \le 10^{-4}$) в методе Ньютона используется меньшее количество итераций, чем в методе простых итераций.

Исходные уравнения имеют вид:

$\sin(x-1)+y=1.5 \qquad y=1.5-\sin(x-1) \qquad \chi(x):=1.5-\sin(x-1)$

$x-\sin(y+1)=1 \qquad x=1+\sin(y+1) \qquad \phi(y):=1+\sin(y+1)$

Подбираем диапазон пересечения $\quad x:=-4,-3.9..4 \quad y:=-4,-3.9..4$



За нулевое приближение принимаем точку пересечения $\quad x_0:=2 \quad y_0:=0.7$

Приводим к нулю исходные уравнения:

$\sin(x-1)+y-1.5=0 \qquad f1(x,y):=\sin(x-1)+y-1.5$

$x-\sin(y+1)-1=0 \qquad f2(x,y):=x-\sin(y+1)-1$

$$F(x,y):=\begin{pmatrix} f1(x,y) \\ f2(x,y) \end{pmatrix} \qquad J(x,y):=\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f1(x,y) & \frac{d}{dy}f1(x,y) \\ \frac{d}{dx}f2(x,y) & \frac{d}{dy}f2(x,y) \end{pmatrix}$$

$x_0:=2 \qquad y_0:=0.7$

$i:=0..2$

Итерационные уравнения:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}-J(x_i,y_i)^{-1}\cdot F(x_i,y_i) \qquad \varepsilon x_i:=\left|x_{i+1}-x_i\right| \qquad \varepsilon y_i:=\left|y_{i+1}-y_i\right|$$

$x_i =$	$y_i =$	$\varepsilon x_i =$	$\varepsilon y_i =$
2	0.7	$3.2\cdot10^{-3}$	0
1.9968	0.6603	$8.2\cdot10^{-4}$	$4.5\cdot10^{-4}$
1.996	0.6607	$1.3\cdot10^{-7}$	$3.6\cdot10^{-7}$

Проверка с помощью встроенных функций

$TOL:=0.0001$

$x:=2 \quad y:=0.7$

Given

$\sin(x-1)+y=1.5$

$x-\sin(y+1)=1$

$$\mathrm{Find}(x,y)=\begin{pmatrix} 1.996 \\ 0.6607 \end{pmatrix}$$

Рис.5. Реализация метода Ньютона в MATHCAD.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Контрольные задания на тему “Решение системы линейных уравнений”

№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	2,7	3,3	1,3	2,1	16	1	3,8	4,1	-2,3	4,8
	2	3,5	-1,7	2,8	1,7		2	-2,1	3,9	-5,8	3,3
	3	4,1	5,8	-1,7	0,8		3	1,8	1,1	-2,1	5,8
2	1	1,7	2,8	1,9	0,7	17	1	1,7	-2,2	3	1,8
	2	2,1	3,4	1,8	1,1		2	2,1	1,9	-2,3	2,8
	3	4,2	-1,7	1,3	2,8		3	4,2	3,9	-3,1	5,1
3	1	3,1	2,8	-1,9	0,2	18	1	2,8	3,8	-3,2	4,5
	2	1,9	3,1	2,1	2,1		2	2,5	-2,8	3,3	7,1
	3	7,5	3,8	4,8	5,6		3	6,5	-7,1	4,8	6,3
4	1	9,1	5,6	7,8	9,8	19	1	3,3	7,3	4,2	5,8
	2	3,8	5,1	2,8	6,7		2	2,7	2,3	-2,9	6,1
	3	4,1	5,7	1,2	5,8		3	4,1	4,8	-5	7
5	1	3,3	2,1	2,8	0,8	20	1	3,2	-11,5	3,8	2,8
	2	4,1	3,7	4,8	5,7		2	0,8	1,3	-6,4	-6,5
	3	2,7	1,8	1,1	3,2		3	2,4	7,2	-1,2	4,5
6	1	7,6	5,8	4,7	10,1	21	1	3,7	3,1	4	5
	2	3,8	4,1	2,7	9,7		2	4,1	4,5	-4,8	4,9
	3	2,9	2,1	3,8	7,8		3	-2,1	-3,7	1,8	2,7
7	1	3,2	-2,5	3,7	6,5	22	1	4,1	5,2	-5,8	7
	2	0,5	0,34	1,7	-0,24		2	3,8	-3,1	4	5,3
	3	1,6	2,3	-1,5	4,3		3	7,8	5,3	-6,3	5,8
8	1	5,4	-2,3	3,4	-3,5	23	1	3,7	-2,3	4,5	2,4
	2	4,2	1,7	-2,3	2,7		2	2,5	4,7	-7,8	3,5
	3	3,4	2,4	7,4	1,9		3	1,6	5,3	1,3	-2,4
9	1	3,6	1,8	-4,7	3,8	24	1	6,3	5,2	-0,6	1,5
	2	2,7	-3,6	1,9	0,4		2	3,4	-2,3	3,4	2,7
	3	1,5	4,5	3,3	-1,6		3	0,8	1,4	3,5	-2,3
10	1	5,6	2,7	-1,7	1,9	25	1	1,5	2,3	-3,7	4,5

	2	3,4	-3,6	-6,7	-2,4		2	2,8	3,4	5,8	-3,2
	3	0,8	1,3	3,7	1,2		3	1,2	7,3	-2,3	5,6
11	1	2,7	0,9	-1,5	3,5	26	1	0,9	2,7	-3,8	2,4
	2	4,5	-2,8	6,7	2,6		2	2,5	5,8	-0,5	3,5
	3	5,1	3,7	-1,4	-0,14		3	4,5	-2,1	3,2	-1,2
12	1	4,5	-3,5	7,4	2,5	27	1	2.4	2.5	-2.9	4.5
	2	3,1	-0,6	-2,3	-1,5		2	0.8	3.5	-1.4	3.2
	3	0,8	7,4	-0,5	6,4		3	1.5	-2.3	8.6	-5.5
13	1	3,8	6,7	-1,2	5,2	28	1	5.4	-2.4	3.8	5.5
	2	6,4	1,3	-2,7	3,8		2	2.5	6.8	-1.1	4.3
	3	2,4	-4,5	3,5	-0,6		3	2.7	-0.8	-1.5	-3.5
14	1	5,4	-6,2	-0,5	0,52	29	1	2.4	3.7	-8.3	2.3
	2	3,4	2,3	0,8	-0,8		2	1.8	4.3	1.2	-1.2
	3	2,4	-1,1	3,8	1,8		3	3.4	-2.3	5.2	3.5
15	1	7,8	5,3	-4,8	1,8	30	1	3.2	-11.5	3.8	2.8
	2	3,3	-1,1	-1,8	2,3		2	0.8	1.3	-6.4	-6.5
	3	4,5	3,3	2,8	3,4		3	2.4	7.2	-1.2	4.5

4. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Контрольные задания на тему «Решение системы нелинейных уравнений»

Задана система нелинейных уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1,2,\ldots,n$, где f_i - некоторые нелинейные функции от аргументов x_i. Требуется найти такую совокупность значений x_i, которая удовлетворяет всем уравнениям системы с заданной точностью ε_i. Решить заданную систему нелинейных уравнений, выполнив вычисления:

-с использованием встроенных функций системы Mathcad.

-с записью в протоколе работы формул и результатов всей последовательности расчетов методами итераций и Ньютона с погрешностью ε=0.0001.

Индивидуальные задания на тему «Решение систем нелинейных уравнений»

1	$\sin(x+1) - y = 1{,}2$ $2x + \cos y = 2$	2.	$\cos(x-1) + y = 0{,}5$ $x - \cos y = 3$
3.	$\sin x + 2y = 2$ $\cos(y-1) + x = 0{,}7$	4.	$\cos x + y = 1{,}5$ $2x - \sin(y-0{,}5) = 1$
5.	$\sin(x+0{,}5) - y = 1$ $\cos(y-2) + x = 0$	6.	$\cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8$ $\sin y - 2x = 1{,}6$
7.	$\sin(x-1) = 1{,}3 - y$ $x - \sin(y+1) = 0{,}8$	8.	$2y - \cos(x+1) = 0$ $x + \sin y = -0{,}4$
9.	$\cos(x+0{,}5) - y = 2$ $\sin y - 2x = 1$	10.	$\sin(x+2) - y = 1{,}5$ $x + \cos(y-2) = 0{,}5$
11.	$\sin(y+1) - x = 1{,}2$ $2y + \cos x = 2$	12.	$\cos(y-1) + x = 0{,}5$ $y - \cos x = 3$

13.	$\sin y + 2x = 2$ $\cos(x - 1) + y = 0{,}7$	14.	$\cos y + x = 1{,}5$ $2y - \cos(x - 0{,}5) = 1$
15.	$\sin(y + 0{,}5) - x = 1$ $\cos(x - 2) + y = 0$	16.	$\cos(y + 0{,}5) + x = 0{,}8$ $\sin x - 2y = 1{,}6$
17.	$\sin(y - 1) + x = 1{,}3$ $y - \sin(x + 1) = 0{,}8$	18.	$2x - \cos(y + 1) = 0$ $y + \sin x = -0{,}4$
19.	$\cos(y + 0{,}5) - x = 2$ $\sin x - 2y = 1$	20.	$\sin(y + 2) - x = 1{,}5$ $y + \cos(x - 2) = 0{,}5$
21.	$\sin(x + 1) - y = 1$ $2x + \cos y = 2$	22.	$\cos(x - 1) + y = 0{,}8$ $x - \cos y = 2$
23.	$\sin x + 2y = 1{,}6$ $\cos(y - 1) + x = 1$	24.	$\cos x + y = 1{,}2$ $2x - \sin(y - 0{,}5) = 2$
25.	$\sin(x + 0{,}5) - y = 1{,}2$ $\cos(y - 2) + x = 0$	26.	$\cos(x + 0{,}5) + y = 1$ $\sin y - 2x = 2$
27.	$\sin(x - 1) + y = 1{,}5$ $x - \sin(y + 1) = 1$	28.	$\sin(y + 1) - x = 1$ $2y + \cos x = 2$
29.	$\cos(y - 1) + x = 0{,}8$ $y - \cos x = 2$	30.	$\cos(x - 1) + y = 1$ $\sin y + 2x = 1{,}6$

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
на тему "Решение системы линейных уравнений "

1. Решение системы линейных уравнений методом простых итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
2. Решение системы линейных уравнений методом Зейделя. Расчетные формулы, алгоритм.
3. Условие сходимости метода простых итераций (пример приведения к виду, для которого метод итераций сходится).
4. Условие сходимости метода Зейделя (пример приведения к виду, для которого метод итераций сходится).
5. Что такое треугольная матрица.
6. Как проверить правильность решения системы линейных уравнений с использованием встроенных функций.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
на тему "Решение системы нелинейных уравнений"

1. Решение системы нелинейных уравнений методом итераций. Расчетные формулы, алгоритм.
2. Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона. Расчетные формулы, алгоритм.
3. Условие применимости метода Ньютона.
4. Какие сложности вызывает решение системы из трёх нелинейных уравнений.
5. Какие встроенные функции применяются для решения системы нелинейных уравнений.
6. Матрица Якоби. Что такое Якобиан.

6. **УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ**

Библиографический список

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970., 664 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. -: Наука, 1975. 443с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. Пособие.-М.: Наука, 1987.-320с.
4. Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.-М.: Высш.шк., 1979.-420с.
5. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.2. /Емельянов В.И., Лёвшин В.Г., Артамонова Л.А.-Новомосковск: НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева. 1986.-100 с.
6. Курс лекций по вычислительной математике. Ч.I. Филатов В.П., Тюрин А.П., Мочалин В.П. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1980. 110с.
7. Филатов В.П., Тюрин А.П. Методические указания и контрольные задания по курсу «Вычислительная математика». Учеб. Пособие. НФ МХТИ им. Д.И. Менделеева, Новомосковск, 1982. 118с.

Учебное издание

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания

Составители:
Артамонова Лидия Анатольевна
Мочалин Владимир Петрович
Тивиков Алексей Сергеевич

Редактор Туманова Е.М.
Компьютерная вёрстка Тивиков А.С.

Подписано в печать ___________. Формат 60x84 1/16.
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. 1,80. Уч.-изд. л. 0,98.
Тираж 100 экз. Заказ №____/_____

ГОУ ВПО «Российский химико-технологический университет им. Д.И Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр
Адрес университета: 125047 Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301650 Новомосковск, Тульская обл. ул. Дружбы, 8