

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт(филиал)
Е.С. Ребенков

Переходные процессы

**Учебное пособие
по курсу
«Теоретические основы электротехники»**

Новомосковск
2013

Учебное издание

Переходные процессы

**Учебное пособие
по курсу
«Теоретические основы электротехники»**

РЕБЕНКОВ Евгений Степанович

Редактор Туманова Е.М.
Подписано в печать Формат 60×84^{1/16}
Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе
Усл. печ. л. 4,82 Уч. изд. л. 3,2
Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет
им. Д.И. Менделеева»
Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.
Адрес Университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9
Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульская обл.,
Ул. Дружбы, 8

Министерство образования и науки
Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт(филиал)

Е.С. Ребенков

Переходные процессы

**Учебное пособие
по курсу
«Теоретические основы электротехники»**

Новомосковск
2013

УДК 621.316.5
ББК 31.213
Ч 286

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор Жилин Б.В.
(НИ(филиал)ФГБОУ ВПО РХТУ им. Д.И. Менделеева),
генеральный директор ОАО «Инфотек» Прохоров С.В.

Ребенков Е.С

Ч 286 **«Переходные процессы»**. Учебное пособие по курсу «Теоретические основы электротехники». /ФГБОУ ВПО РХТУ им. Д.И.Менделеева, Новомосковский институт (филиал), Новомосковск, 2013.-86с.

Учебное пособие предназначено для студентов дневного отделения, обучающихся по плану подготовки бакалавров по направлению подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника» по профилю подготовки 04 «Электроснабжение». Приводят основные теоретические положения разделов «Расчет переходных процессов классическим методом». «Операторный метод расчета переходных процессов», «Интеграл Дюамеля» курса «Теоретические основы электротехники», а также рассмотрены примеры расчетов.

Ил.54. Табл.2.Библиогр.:4 назв.

УДК 621.316.5
ББК 31.213

©Е.С. Ребенков
©ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический
университет им. Д.И. Менделеева»,
Новомосковский институт (филиал), 2012

Введение

Учебное пособие содержит основные теоретические положения раздела «Переходные процессы» курса «Теоретические основы электротехники». В учебном пособии приведены классические методы расчета переходных процессов в электрических цепях, алгоритмы расчетов операторным методом и расчеты с применением интеграла Дюамеля.

Учебное пособие предназначено для студентов дневного отделения, обучающихся по плану подготовки бакалавров по направлению подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника» по профилю подготовки 04 «Электроснабжение».

Учебное пособие может быть полезным для выполнения расчетных заданий и при подготовке к практическим и лабораторным работам по курсу «Теоретические основы электротехники».

Переходные процессы.

Раздел 1. Расчет и анализ переходных процессов классическим методом.

§1.1. Возникновение переходных процессов в электрических цепях. Законы коммутации.

Переходные процессы возникают при различных коммутациях в цепях, содержащих индуктивности и емкости.

Коммутацией называются переключения в цепи, осуществляемые либо преднамеренно (включения или выключения источников энергии ко всей цепи или к какой либо ее части), либо при возникновении аварийных режимов (обрыва или короткого замыкания), либо переключения, лежащие в принципе действия какого либо устройства электроники (генераторы импульсов).

Коммутирующие элементы называются ключами. Они делятся на нормально разомкнутые (рис. 1а), нормально замкнутые (рис. 1б) и переключающие (рис. 1в).

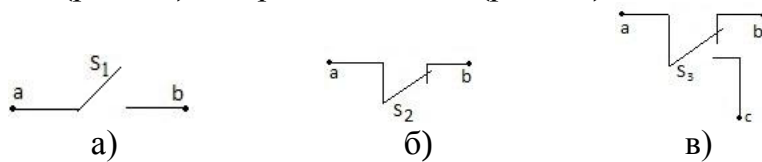


Рис. 1

Значения токов и напряжений в цепи до переключений определяют установившийся докоммутационный режим в цепи. Обычно принимается, что коммутация осуществляется в цепи в момент времени $t = 0$, а при $t > 0$ начинается переход-

ный процесс. Ток и напряжение будут в новом установившемся режиме при $t = \infty$. Практически можно считать переходный процесс законченным, когда координаты системы достигают 95% от своих значений в новом режиме. В электрических цепях это время мало и составляет доли секунд (рис. 2), $t_{\text{п.п.}}$ – время переходного процесса.

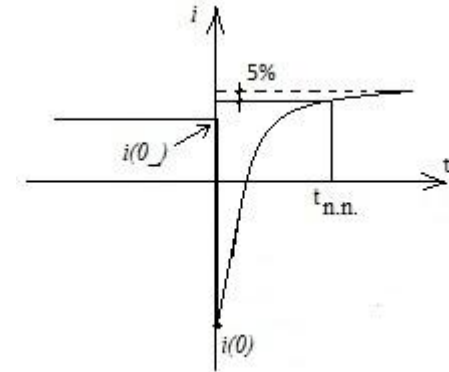


Рис. 2

Переходный процесс не может происходить мгновенно, если в электрической цепи есть индуктивность или емкость из-за инерционностей электрического поля и электростатического поля.

При расчете переходных процессов используют два закона коммутации:

1). Ток через индуктивность при коммутации не может измениться скачком. Ток будет изменяться до нового установившегося значения начиная со значения, которое он имел в последний момент перед коммутацией (рис. 3):

$$i_L(0_-) = i_L(0) \quad (1.1)$$

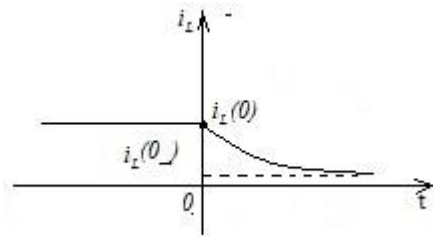


Рис. 3

2). Напряжение на емкости также не может измениться скачкообразно при коммутации (рис. 4):

$$u_C(0_-) = u_C(0) \quad (1.2)$$

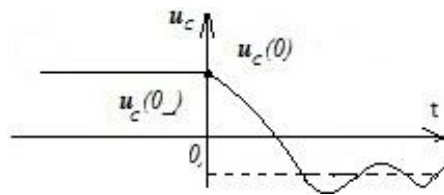


Рис. 4

§1.2. Классический метод расчета переходных процессов.

Классический метод расчета заключается в решении системы неоднородных дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для цепи после коммутации. Каждый ток и каждое напряжение в переходном процессе определяется как сумма их принужденных и свободных составляющих:

$$\begin{cases} u = u_{np} + u_{св} \\ i = i_{np} + i_{св} \end{cases} \quad (1.3)$$

процессов.....	53
§2.1. Преобразование Лапласа. Изображение некоторых электротехнических функций.....	53
§2.2 Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Операторные схемы.....	57
§2.3 Общий случай расчета переходного процесса операторным методом.....	61
§2.4 Формулы разложения.....	64
Раздел 3. Интеграл Дюамеля.....	66
§3.1. Динамическое представление токов и напряжений с помощью функций Хевисайда и Дирака.....	66
§3.2. Расчет реакции цепи на напряжение произвольной формы.....	70
Библиографический список.....	84

Принужденные составляющие – это значения токов и напряжений в новом (послекоммутационном) установившемся режиме цепи (теоретически при $t = \infty$).

Свободные составляющие – это значения токов и напряжений, определяемые решением системы однородных дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа, составленных для цепи при исключении из нее всех источников энергии в режиме после коммутации, так как свободные составляющие возникают за счет изменения энергии электромагнитного поля индуктивностей и электростатического поля емкостей. Постоянные интегрирования свободных составляющих определяются с помощью законов коммутации.

§1.3. Переходный процесс в RL – цепи с источником постоянной ЭДС.

В электрической цепи рис. 5 переходный процесс произойдет при замыкании ключа S.

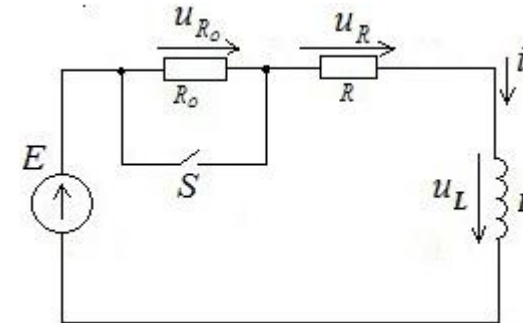


Рис. 5

Допустим, заданы схемные параметры цепи E , R_0 , R , L .

Определим как будут изменяться в переходном процессе токи и напряжения этой цепи.

Расчет проведем классическим методом по следующим этапам:

1). Рассчитаем все токи и напряжения до коммутации:

$$E = u_0 + u_R + u_L = iR_0 + iR + L \frac{di}{dt}; \quad (1.4)$$

так как $i = \text{const}$, то $\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow u_L = 0 \rightarrow i = \frac{E}{R_0 + R}$;

$$u_0 = iR_0 = \frac{ER_0}{R_0 + R}; \quad (1.5)$$

$$u_R = iR = \frac{ER}{R_0 + R}. \quad (1.6)$$

2). Рассчитаем принужденный режим в цепи (при $t = \infty$):

$$u_{0np} = 0, \quad u_{Lnp} = L \frac{di_{np}}{dt},$$

$$i_{np} = \text{const} \rightarrow L \frac{di_{np}}{dt} = 0 \rightarrow u_{Lnp} = 0,$$

$$E = u_{0np} + u_{Rnp} + u_{Lnp} \rightarrow E = i_{np}R,$$

$$i_{np} = \frac{E}{R}, \quad u_{Rnp} = i_{np}R = E. \quad (1.7)$$

3). Рассчитаем свободный режим:

В этом режиме цепь освобождена от внешних вынуждающих сил – источников энергии и цепь находится в режиме после коммутации. Свободные токи и напряжения в цепи определяются изменением энергии электромагнитного

Оглавление

Введение.....	3
Переходные процессы.....	4
Раздел 1. Расчет и анализ переходных процессов классическим методом.....	4
§1.1. Возникновение переходных процессов в электрических цепях. Законы коммутации.....	4
§1.2. Классический метод расчета переходных процессов.....	6
§1.3. Переходный процесс в RL – цепи с источником постоянной ЭДС.....	7
§1.4. Переходный процесс в RL – цепи с источником синусоидальной ЭДС.....	11
§1.5. Пример расчета переходного процесса классическим методом.....	17
§1.6. Переходный процесс в RC – цепи с источником постоянной ЭДС.....	24
§1.7. Пример расчета переходного процесса в RC - цепи.....	28
§1.8. Аперiodический переходный процесс в RLC – цепи.....	33
§1.9. Колебательный переходный процесс в RLC – цепи.....	38
§1.10. Предельно-аперiodический переходный процесс в RLC-цепи.....	42
§1.11. Расчет классическим методом переходных процессов в электрических цепях с двумя реактивными элементами.....	44
Раздел 2. Операторный метод расчета переходных	

Библиографический список

1. Теоретические основы электротехники. Т.1. Под ред. П.А. Ионкина. М.: «Высшая школа», - 1976. – 544 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. М.: «Энергия», - 1975. – 752 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: «Высшая школа», - 1986. – 750 с.
4. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т1. М.: «Энергия», - 1981. – 522 с.

поля индуктивности и электростатического поля емкости. Схема цепи в свободном режиме показана на рис. 6.

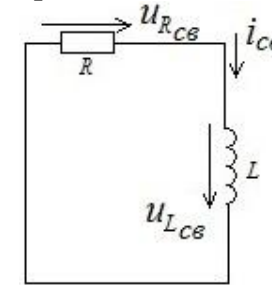


Рис. 6

$$u_{Rcs} + u_{Lnp} = 0, \quad i_{cs}R + L \frac{di_{cs}}{dt} = 0 \rightarrow i_{cs} = Ae^{pt}. \quad (1.8)$$

После алгебраизации дифференциального уравнения получим:

$$p = \frac{d}{dt} \rightarrow i_{cs}R + i_{cs}Lp = 0 \rightarrow p = -\frac{R}{L} [c^{-1}].$$

Определим постоянную интегрирования A из уравнения $i = i_{cs} + i_{np}$, записанного для первого момента времени после коммутации при $t(0)$:

$$i(0) = i_{cs}(0) + i_{np}(0), \text{ где } i_{np}(0) = \frac{E}{R}; \quad i_{cs}(0) = A,$$

$$i(0) = i(0_-) = \frac{E}{R_0 + R},$$

откуда получим:

$$A = i(0) - i_{np}(0) = \frac{E}{R_0 + R} - \frac{E}{R}.$$

Тогда свободный ток:

$$i_{cs} = Ae^{pt} = \left(\frac{E}{R_0 + R} - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1.9)$$

4). Запишем выражение для переходных токов и напряжений;

$$i = i_{np} + i_{cs} = \frac{E}{R} + \left(\frac{E}{R_0 + R} - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (1.10)$$

$$u_R = iR = E + \left(\frac{RE}{R_0 + R} - E \right) e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (1.11)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \left(-\frac{R}{L} \right) \left(\frac{E}{R_0 + R} - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = \left(E - \frac{RE}{R_0 + R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \left(E - \frac{E}{\frac{R_0}{R} + 1} \right) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.12)$$

Постоянная времени экспонент:

$$\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R} [\text{с}] \quad (1.13)$$

Переходный процесс можно считать законченным через время равное $(3-4)\tau$, за это время координаты входят в 5% коридор от своих новых установившихся значений. Графики переходных процессов показаны на рис.7.

напряжение на R_2 ($u_{\text{ВЫХ}}(t)$) тоже не может изменяться скачком.

График $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ в интервале $t_1 < t < \infty$ построен по точкам уравнения $u_{\text{ВЫХ}}(t) = 57012e^{-7t}$ В (рис.54).

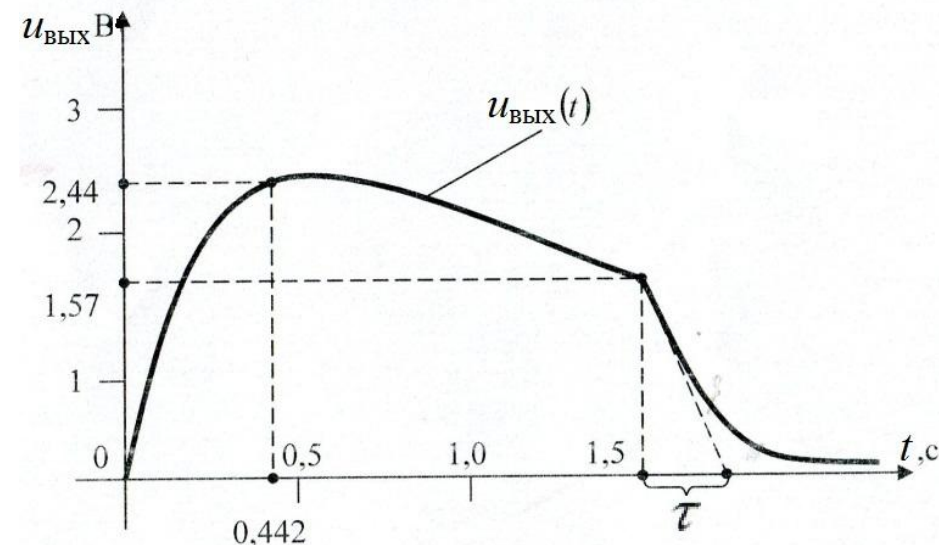


Рис. 54

Таким образом, получен график изменения выходного напряжения четырехполюсника при входном напряжении заданной формы.

$$\begin{aligned}
u_{\text{вых}2}(t) &= -5 \cdot 0,286(1 - e^{-7(t-t_1)}) + \int_{t_1}^t 0,286(1 - e^{-7(t-\tau)}) \cdot 3,33 d\tau = \\
&= -1,429 + 1,429e^{-7(t-t_1)} + \int_{t_1}^t [0,953 - 0,953e^{-7(t-\tau)}] d\tau = \\
&= -1,429 + 1,429e^{-7(t-t_1)} + 0,953\tau \Big|_{t_1}^t - \frac{0,953}{7}e^{-7(t-\tau)} \Big|_{t_1}^t = \\
&= -1,429 + 1,429e^{-7(t-t_1)} + 0,953t - 0,953t_1 - 0,136e^{-7t}e^{7t_1} + \\
&+ 0,136e^{-7(t-t_1)} = -1,429 + 0,953t - 0,953 \cdot 1,5 - 0,136e^0 + \\
&+ (1,429 + 0,136)e^{-7(t-t_1)} = -3 + 0,953t + 1,57e^{-7t} \cdot e^{7 \cdot 1,5} = \\
&= -3 + 0,953t + 57015e^{-7t}, B.
\end{aligned}$$

Выходное напряжение в интервале $t_1 < t < \infty$:

$$\begin{aligned}
u_{\text{вых}}(t) &= u_{\text{вых}1}(t) + u_{\text{вых}2}(t) = 3 - 0,953t - 3e^{-7t} - 3 + \\
&+ 0,953t + 57015e^{-7t} = 57012e^{-7t} B.
\end{aligned}$$

Значение $u_{\text{вых}}(t)$ при $t_1=1,5$:

$$u_{\text{вых}}(t_1) = 57012e^{-7 \cdot 1,5} = 1,57 B,$$

это значение равно значению функции $u_{\text{вых}}(t_1)$, т.е. при $t_1=1,5$ с кривая $u_{\text{вых}}(t)$ не имеет разрыва первого рода, что соответствует 1-му закону коммутации: ток через индуктивность не может изменяться скачкообразно. Так как через сопротивление R_2 протекает ток индуктивности, то

§1.4. Переходный процесс в RL – цепи с источником синусоидальной ЭДС.

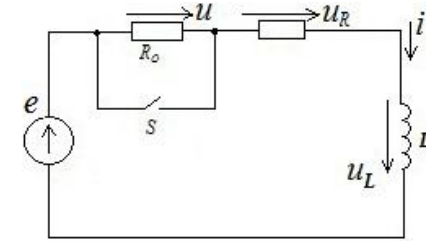


Рис. 7

Допустим, заданы параметры источника синусоидальной ЭДС $e = E_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ и значения схемных параметров R_0 , R , L (рис. 7).

В классическом методе расчета все токи и напряжения в переходном процессе определяются как суммы их принужденных и свободных составляющих:

$$\begin{cases} i = i_{np} + i_{св} \\ u_R = u_{np} + u_{св} \\ u_L = u_{Lnp} + u_{Lсв} \end{cases}$$

1). Определяем значения тока и напряжения до коммутации (при $t < 0$).

Расчет проведем комплексным методом. Так как в цепи один источник энергии, для расчета применим метод эквивалентных преобразований.

Определим эквивалентный комплекс сопротивления всей цепи относительно источника ЭДС в режиме до коммутации.

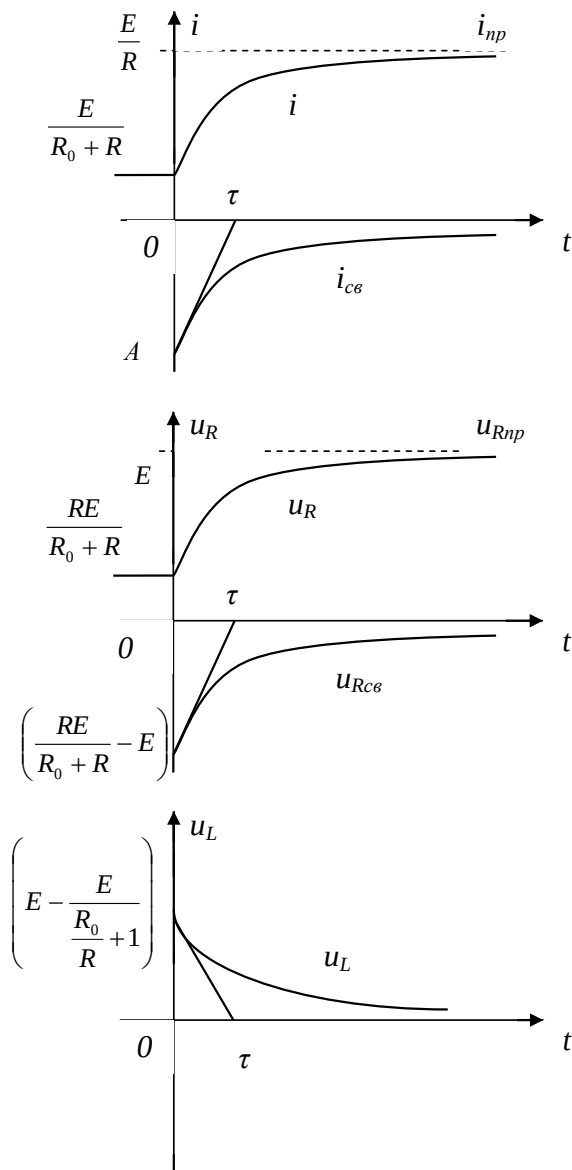


Рис. 8

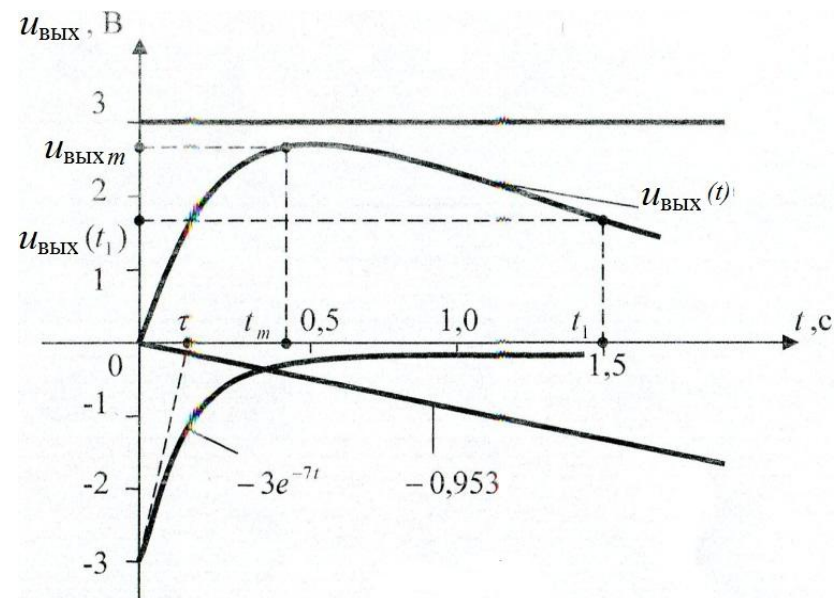


Рис. 53

$$u_{\text{ВЫХ}2}(t) = u_{\text{ВЫХ}2}(t_1)g(t - t_1) + \int_{t_1}^t g(t - \tau)u'_{\text{ВЫХ}2}(\tau)d\tau,$$

ГДЕ:

$$u_{\text{ВЫХ}2} = -U_0 + \frac{U_0}{t_0}t = -10 + \frac{10}{3} \cdot 1,5 = -5 \text{ В}$$

$$g(t - t_1) = 0,286(1 - e^{-7(t-t_1)})$$

$$g(t - \tau) = 0,286(1 - e^{-7(t-\tau)})$$

$$u'_{\text{ВЫХ}2}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(-U_0 + \frac{U_0}{t_0}\tau \right) = \frac{U_0}{t_0} = \frac{10}{3} = 0,333 \frac{\text{В}}{\text{с}}$$

Тогда:

Из условия равенства нулю производной найдем время t_m соответствующее максимальному значению $u_{\text{вххх}}(t_m)$:

$$-0,953 + 21e^{-7t_m} = 0 \rightarrow e^{-7t_m} = \frac{0,953}{21} = 0,0454 \rightarrow$$

$$\ln 0,0454 = -7t_m \rightarrow t_m = \frac{-3,09}{-7} = 0,442 \text{ с}$$

Тогда

$$u_{\text{вххх}}(t_m) = 3 - 0,953t_m - 3e^{-7t_m} =$$

$$= 3 - 0,953 \cdot 0,442 - 3e^{-7 \cdot 0,442} = 2,44 \text{ В}$$

График изменения $u_{\text{вхх}}(t)$ на интервале $0 < t < t_1$ построим по точкам, задавая значение t в уравнении:

$$u_{\text{вхх}}(t) = 3 - 0,953t - 3e^{-7t},$$

или сложив графически слагаемые этого уравнения (рис. 53).
Постоянная времени экспоненты:

$$\tau = -\frac{1}{-7} = 0,143 \text{ с.}$$

В период времени $t_1 < t < \infty$ выходное напряжение определяется как суммарная реакция от двух составляющих входного напряжения: $u_{\text{вх}} = u_{\text{вх1}} + u_{\text{вх2}}$.

Реакция на первую составляющую рассчитана:

$$u_{\text{вхх1}}(t) = 3 - 0,953t - 3e^{-7t}, \text{ В.}$$

Рассчитаем реакцию цепи на вторую составляющую входного напряжения:

$$u_{\text{вхх2}} = -U_0 + \frac{U_0}{t_0} t.$$

Эту реакцию рассчитаем также по формуле интеграла Дюамеля:

$$\underline{Z} = R_0 + R + j\omega L = Ze^{j30^\circ} \quad (1.14)$$

Значение аргумента комплексного сопротивления произвольно принято равным 30° для возможности качественно изобразить ток и напряжение на графике.

Комплексное амплитудное значение тока в цепи определяется по закону Ома:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j90^\circ}}{Ze^{j30^\circ}} = \frac{E_m}{Z} e^{j60^\circ} = I_m e^{j60^\circ}. \quad (1.15)$$

Перейдем от комплексного изображения тока к его оригиналу, то есть к функции времени:

$$i = I_m \sin(\omega t + 60^\circ),$$

где амплитудное значение тока $I_m = \frac{E_m}{Z}$. (1.16)

Определим комплексное амплитудное напряжение на сопротивлении R по закону Ома:

$$\dot{U}_{mR} = \dot{I}_m R = I_m R e^{j60^\circ} = U_{mR} e^{j60^\circ}. \quad (1.17)$$

Перейдем от комплексного значения к его оригиналу:

$$u_R = U_{mR} \sin(\omega t + 60^\circ), \quad (1.18)$$

где напряжение на резисторе

$$U_{mR} = I_m R.$$

Определяем комплексное амплитудное значение напряжения на индуктивности по закону Ома:

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m j\omega L = I_m e^{j60^\circ} \omega L e^{j90^\circ} = I_m \omega L e^{j150^\circ} = U_{mL} e^{j150^\circ}. \quad (1.19)$$

Перейдем от комплексного значения к его оригиналу:

$$u_L = U_{mL} \sin(\omega t + 150^\circ), \quad (1.20)$$

модуль напряжения на индуктивности

$$U_{mL} = I_m X_L,$$

где $X_L = \omega L$ - реактивное сопротивление индуктивности.

2). Рассчитаем принужденный режим данной цепи (значения тока и напряжений в новом установившемся режиме после завершения переходного процесса), при $t = \infty$.

Рассмотрим схему после коммутации рис. 9. Расчет принужденного режима проводим комплексным методом эквивалентных преобразований.

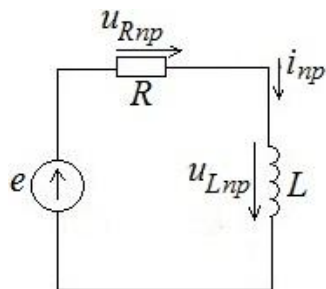


Рис. 9

Эквивалентное сопротивление после коммутации:

$$\underline{Z}_{np} = R + j\omega L = Z_{np} e^{j50^\circ}, \quad (1.21)$$

так как общее активное сопротивление в цепи уменьшается, а реактивное остаётся без изменения, аргумент комплексного сопротивления повышается, предположим до 50° .

Определяем комплексное амплитудное принужденное значение тока в цепи:

$$\dot{I}_{mnp} = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}_{np}} = \frac{E_m e^{j90^\circ}}{Z_{np} e^{j50^\circ}} = \frac{E_m}{Z_{np}} e^{j40^\circ} = I_{mnp} e^{j40^\circ}. \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} u_{\text{вх}}(t) &= U_0 \cdot 0,286(1 - e^{-7t}) + \int_0^t 0,286(1 - e^{-7(t-\tau)}) \left(-\frac{U_0}{t_0}\right) d\tau = \\ &= 0,286U_0 - 0,286U_0 e^{-7t} + \int_0^t -\frac{0,286U_0}{t_0} + \frac{0,286U_0}{t_0} e^{-7t} e^{7\tau} d\tau = \\ &= 0,286U_0 - 0,286U_0 e^{-7t} - \frac{0,286U_0}{t_0} \tau \Big|_0^t + \frac{0,286U_0}{7t_0} e^{-7t} e^{7\tau} \Big|_0^t = \\ &= 0,286U_0 - 0,286U_0 e^{-7t} - \frac{0,286U_0}{t_0} + \frac{0,286U_0}{t_0} e^{-7t} e^{7t} - \\ &\quad - \frac{0,286U_0}{t_0} e^{-7t} e^0 = 0,286 \cdot 10 - 0,286 \cdot 10 e^{-7t} - \frac{0,286 \cdot 10}{3} t + \\ &\quad + \frac{0,286 \cdot 10}{7 \cdot 3} - \frac{0,286 \cdot 10}{7 \cdot 3} e^{-7t} = 2,86 - 2,86 e^{-7t} - 0,953t + \\ &\quad + 0,136 - 0,136 e^{-7t} = 3 - 0,953t - 3e^{-7t}, B \end{aligned}$$

Значение $u_{\text{вх}}(t)$ при $t = t_1 = 1,5$ с:

$$u_{\text{вх}}(t_1) = 3 - 0,953 \cdot 1,5 - 3e^{-7 \cdot 1,5} = 1,57 \text{ B}$$

Найдем максимальное значение этого напряжения, взяв производную от $u_{\text{вх}}(t)$:

$$\frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \frac{d}{dt} (3 - 0,953t - 3e^{-7t}) = -0,953 - 3(-7)e^{-7t} = -0,953 + 21e^{-7t}.$$

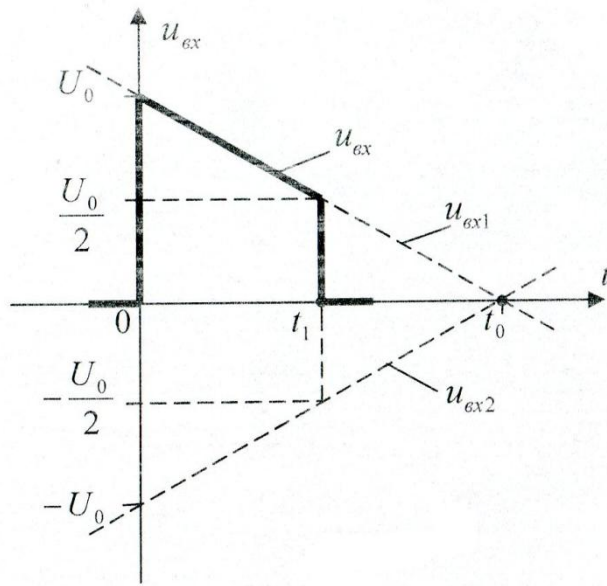


Рис. 52

интервале времени $0 < t < t_1$, вторая – это реакция цепи на сумму двух напряжений ($u_{ex1} + u_{ex2}$) на интервале $t_1 < t < \infty$.

Для определения выходного напряжения применим интеграл Дюамеля.

На интервале времени $0 < t < t_1$:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{ex1}}(0)g(0) + \int_0^t g(t-\tau)u'_{\text{ex1}}(\tau)d\tau, \quad \text{где}$$

$$u'_{\text{ex1}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(U_0 - \frac{U_0}{t_0}\tau \right) = -\frac{U_0}{t_0},$$

$$g(t-\tau) = 0,286(1 - e^{-7(t-\tau)}).$$

Тогда:

Перейдем от комплексного изображения тока к его оригиналу:

$$i_{np} = I_{mnp} \sin(\omega t + 40^\circ), \quad (1.23)$$

где амплитудное значение принужденного тока:

$$I_{mnp} = \frac{E_m}{Z_{np}}.$$

Определим комплексное амплитудное принужденное значение напряжения на активном сопротивлении:

$$\dot{U}_{mRp} = \dot{I}_{mnp} R = I_{mnp} \operatorname{Re}^{j40^\circ} = U_{mRp} e^{j40^\circ}. \quad (1.24)$$

Перейдем от комплексного значения к его оригиналу:

$$u_{Rp} = U_{mRp} \sin(\omega t + 40^\circ), \quad (1.25)$$

где $U_{mRp} = I_{mnp} R$.

Определим комплексное амплитудное принужденное значение напряжения на индуктивности по закону Ома:

$$\dot{U}_{mLp} = \dot{I}_{mnp} j\omega L = I_m e^{j40^\circ} \omega L e^{j90^\circ} = I_m \omega L e^{j130^\circ} = U_{mLp} e^{j130^\circ}. \quad (1.26)$$

Перейдем от комплексного значения к его оригиналу:

$$u_{Lp} = U_{mLp} \sin(\omega t + 130^\circ), \quad (1.27)$$

где $U_{mLp} = I_m X_L$, $X_L = \omega L$.

3). Рассчитаем свободный режим в заданной цепи.

Свободный режим определяет динамику переходного процесса. Токи и напряжения определяются при решении системы однородных дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа. В этом режиме в электрической цепи должны отсутствовать внешние вынуждающие источники ЭДС и тока, так как свободные составляющие возникают за

счет изменения энергии электромагнитного поля индуктивности и электростатического поля емкости. Свободный процесс будет проходить в схеме рис. 10.

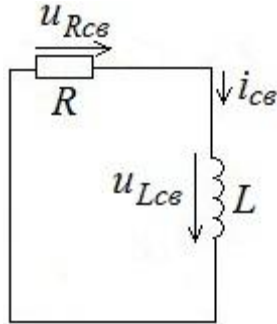


Рис. 10

По второму закону Кирхгофа составим уравнение для контура цепи:

$$u_{Rcs} + u_{Lnp} = 0, \rightarrow i_{cs} R + L \frac{di_{cs}}{dt} = 0 \rightarrow i_{cs} = Ae^{pt}, \quad (1.28)$$

Определяем p путем алгебраизации дифференциального уравнения:

$$i_{cs} R + i_{cs} L p \rightarrow p = -\frac{R}{L} [c^{-1}]. \quad (1.29)$$

Определим постоянную интегрирования A по уравнению $i = i_{np} + i_{cs}$, записанному для первого момента времени после коммутации для момента $t=0$:

$$i(0) = i_{np}(0) + i_{cs}(0),$$

где начальное значение тока через индуктивность, определяется по первому закону коммутации:

$$i(0) = i(0_-) = I_m \sin 60^\circ.$$

изображению $g(p)$ преобразуем полученное выражение $g(p)$ чтобы получить табличное соответствие вида:

$$n \frac{a}{p(p+a)} \leftrightarrow n(1 - e^{-at}).$$

Выполним преобразование:

$$g(p) = \frac{144}{p(72p + 504)} = \frac{\frac{144}{72}}{p(p + \frac{504}{72})} = \frac{2}{p(p + 7)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 7}{p(p + 7)} =$$

$$= 0,286 \frac{7}{p(p + 7)}.$$

Применяя табличное соответствие найдем оригинал переходной функции:

$$g(t) = 0,286(1 - e^{-7t}).$$

Применим полученную переходную функцию для расчета выходного напряжения четырехполюсника при заданном входном напряжении. На интервале времени от нуля до t_1 входное напряжение изменяется с начального значения $u_{ex1}(0) = U_0$ по линейному закону:

$$u_{ex1} = U_0 - \frac{U_0}{t_0} t.$$

После t_1 входное напряжение падает до нуля, что эквивалентно вступлению в действие напряжения u_{ex2} одновременно с u_{ex1} .

Их сумма равна нулю (рис. 52).

Напряжение u_{ex2} также изменяется по линейному закону:

$$u_{ex2} = -U_0 + \frac{U_0}{t_0} t.$$

Таким образом, выходное напряжение будет состоять из двух составляющих: первая – это реакция цепи на напряжение u_{ex1} на

Применяя закон Ома в операторной форме выразим операторное напряжение на выходе $U_{\text{вых}}(p)$ через операторное напряжение на входе $U_{\text{вх}}(p)$ и параметры четырехполюсника:

$$U_{\text{вых}}(p) = I_2(p)R_2 = \frac{U_3(p)}{R_2 + Lp} \cdot R_2 = I_1(p) \frac{R_3(R_2 + Lp)}{R_3 + R_2 + Lp} \cdot \frac{R_2}{R_2 + Lp} =$$

$$= \frac{U_{\text{вх}}(p)}{R_1 + \frac{R_3(R_2 + Lp)}{R_3 + R_2 + Lp}} \cdot \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_2 + Lp} =$$

$$= U_{\text{вх}}(p) \frac{R_3 + R_2 + Lp}{R_1(R_3 + R_2 + Lp) + R_3(R_2 + Lp)} \cdot \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_2 + Lp}, \text{ откуда}$$

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{R_2 R_3}{R_1(R_3 + R_2 + Lp) + R_3(R_2 + Lp)} =$$

$$= \frac{R_2 R_3}{(R_3 + R_1)Lp + R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} =$$

$$= \frac{24 \cdot 6}{(12 + 24)2p + 12 \cdot 6 + 6 \cdot 24 + 12 \cdot 24} = \frac{144}{72p + 504}.$$

Подав на вход четырехполюсника ступенчатую единичную функцию, операторное изображение которой $\sigma(p) = \frac{1}{p}$, на выходе получим переходную функцию $g(t)$ в операторной форме:

$$g(p) = K(p)\sigma(p) = \frac{144}{p(72p + 504)}.$$

Для получения оригинала $g(t)$ по его операторному

Остальные слагаемые определяются из соответствующего режима при $t=0$:

$$i_{np}(0) = I_{mnp} \sin 40^\circ; \quad i_{cs}(0) = A.$$

Таким образом:

$$A = I_m \sin 60^\circ - I_{mnp} \sin 40^\circ$$

Переходный ток:

$$i = i_{np} + i_{cs} = I_{mnp} \sin(\omega t + 40^\circ) + Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (1.30)$$

Далее определяются принужденные и свободные составляющие напряжений:

$$u_R = iR = RI_{mnp} \sin(\omega t + 40^\circ) + RAe^{-\frac{R}{L}t}, \quad (1.31)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L\omega I_{mnp} \cos(\omega t + 40^\circ) + \left(-\frac{R}{L}\right)Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.32)$$

§1.5. Пример расчета переходного процесса классическим методом.

В цепи рис. 11 при заданных схемных параметрах:

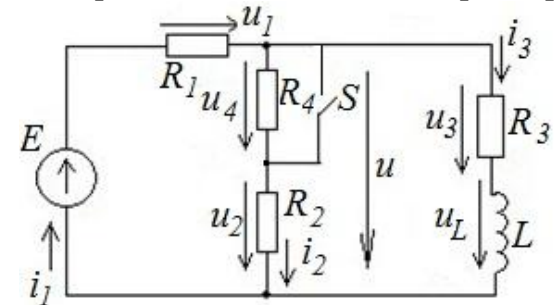


Рис. 11

$E=33$ В, $R_1=3$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=6$ Ом, $R_4=7$ Ом, $L=1,8$ Гн
определим переходные процессы токов.

Расчет проводим классическим методом по алгоритму:

1). Рассчитаем токи и напряжения в цепи до коммутации, когда ключ S разомкнут. Так как $E=\text{const}$, то токи и напряжения постоянны во времени, поэтому:

$$u_L = L \cdot \frac{di_3}{dt} = 0. \quad (1.33)$$

Расчет токов и напряжений проводим методом эквивалентных преобразований:

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{(R_4 + R_2) \cdot R_3}{R_4 + R_2 + R_3}} = 5 \text{ А}. \quad (1.34)$$

Определим напряжение между узлами цепи:

$$u = i_1 \cdot \frac{(R_4 + R_2) \cdot R_3}{R_4 + R_2 + R_3} = 18 \text{ В}. \quad (1.35)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$u_3 + u_L = u, \quad (1.36)$$

так как $u_L=0$, то $u_3=u=18$ В.

Определим токи и напряжения по закону Ома:

$$i_3 = \frac{u_3}{R_3} = 3 \text{ А},$$

$$i_2 = \frac{u}{R_4 + R_2} = 2 \text{ А}. \quad (1.37)$$

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 = 15 \text{ В}, \quad u_4 = i_2 \cdot R_4 = 14 \text{ В}, \quad u_2 = i_2 \cdot R_2 = 4 \text{ В}.$$

2). Рассчитаем установившейся режим после коммутации (при $t=\infty$), то есть принужденный режим.

Рассчитаем с помощью интеграла Дюамеля аналитическое выражение напряжения на выходе четырехполосника $u_{\text{вых}}(t)$ и построим это напряжение графически.

Решение:

В формулу интеграла Дюамеля:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(0)g(0) + \int_0^t g(t-\tau)u'_{\text{ВХ}}(\tau)d\tau$$

входит переходная функция $g(t)$. Рассчитываем ее как реакцию системы на ступенчатую единичную функцию Хевисайда $\sigma(t)$. Расчет $g(t)$ проведем операторным методом, заменяя четырехполосник передаточным звеном с коэффициентом передачи в операторной форме (рис. 50):

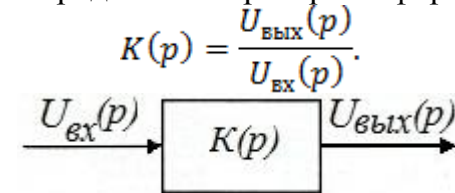


Рис. 50

Для расчета $K(p)$ представим схему четырехполосника в виде операторной схемы (рис. 51).

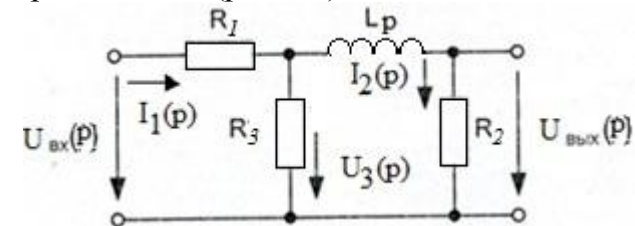


Рис. 51

Применяя табличное соответствие определяем оригинал переходной функции:

$$g(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right).$$

Пример: На вход четырехполюсника (рис. 48) подан входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, заданный графически (рис. 49).

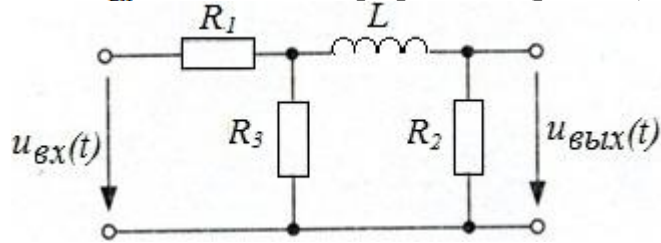


Рис. 48

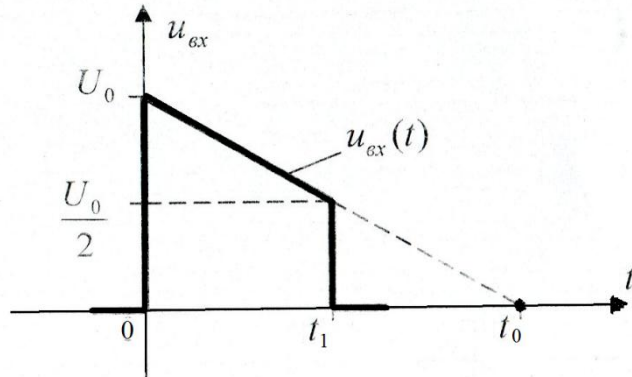


Рис. 49

Параметры четырехполюсника заданы:

$R_1=12\text{Ом}$; $R_2=6\text{Ом}$; $R_3=24\text{Ом}$; $L=2\text{Гн}$.

Параметры входного сигнала:

$U_0=10\text{В}$; $t_1=1,5\text{с}$; $t_0=3\text{с}$.

$u_{4np} = 0$, так как $R_4=0$; $u_{Lnp} = \frac{di_{3np}}{dt} = 0$, так как $i_{3np} = \text{const}$.

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 7,33\text{А}, \quad (1.38)$$

$$u_{np} = u_{2np} = u_{3np} = i_{1np} \cdot \left(\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \right) = 11\text{В}, \quad (1.39)$$

$$u_{1np} = i_{1np} \cdot R_1 = 2,2\text{В}, \quad (1.40)$$

$$i_{2np} = \frac{u_{2np}}{R_2} = 5,5\text{А}, \quad i_{3np} = \frac{u_{3np}}{R_3} = 1,83\text{А}. \quad (1.41)$$

3). Рассчитаем свободные составляющие токов. Для этого из схемы после коммутации исключаем все источники энергии. Ключ замкнут и в схеме рис. 12 не показан:

$$\begin{cases} i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0 \\ i_{1св} \cdot R_1 + i_{2св} \cdot R_2 = 0 \\ i_{1св} \cdot R_1 + i_{3св} \cdot R_3 + L \frac{di_{3св}}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

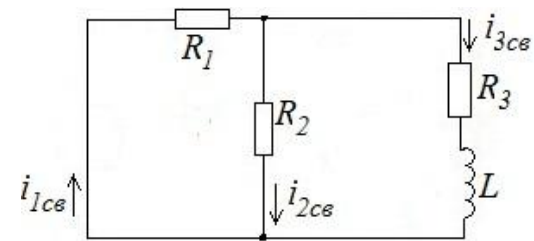


Рис. 12

Алгебраизируем систему дифференциальных уравнений заменяя $\frac{d}{dt}$ на p .

Главный определитель этой системы приравняем к нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & (R_3 + Lp) \end{vmatrix} = 0, \quad (1.43)$$

откуда получаем характеристическое уравнение этой цепи:

$$R_2(R_3 + Lp) + R_1 \cdot R_2 + R_1(R_3 + Lp) = 0.$$

Решая уравнение получим:

$$p = -\frac{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{L(R_2 + R_1)} = -4c^{-1}. \quad (1.44)$$

Так как корень характеристического уравнения один и он действительный, то общее решение для свободных составляющих токов запишется в виде:

$$\begin{aligned} i_{1св} &= A \cdot e^{pt}, \\ i_{2св} &= B \cdot e^{pt}, \\ i_{3св} &= C \cdot e^{pt}, \\ u_{LCB} &= D \cdot e^{pt}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Аналогично для остальных напряжений.

Далее определяем постоянные интегрирования А, В, С, D. Постоянные интегрирования определим записав переходные токи и напряжения как суммы их принужденных и свободных составляющих для первого момента времени после коммутации:

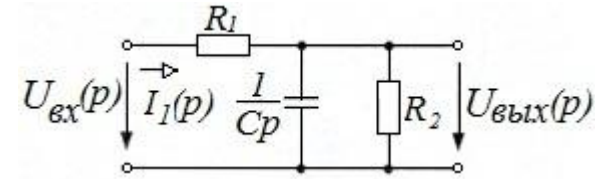


Рис. 47

По операторной схеме выразим операторное напряжение на выходе четырехполюсника через операторное напряжение на входе:

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(p) &= I_1(p) \frac{\frac{1}{Cp} R_1}{\frac{1}{Cp} + R_1} = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{R_1 + \frac{\frac{1}{Cp} R_1}{\frac{1}{Cp} + R_2}} \cdot \frac{\frac{1}{Cp} R_2}{\frac{1}{Cp} + R_2} = \\ &= U_{\text{вх}}(p) \frac{R_2}{\left(R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2 Cp}\right) (1 + R_2 Cp)} = U_{\text{вх}}(p) \frac{R_2}{R_1 + R_1 R_2 Cp + R_2}, \end{aligned}$$

откуда операторное изображение передаточной функции четырехполюсника:

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_1 R_2 Cp + R_2}.$$

Операторное изображение переходной функции:

$$\begin{aligned} g(p) &= K(p) \sigma(p) = \frac{R_2}{p(R_1 + R_1 R_2 Cp + R_2)} = \\ &= \frac{\frac{R_2}{R_1 R_2 C}}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)}. \end{aligned}$$

$$K = \frac{u_{\text{вых}}(t)}{u_{\text{вх}}(t)}.$$

Реакция системы на единичную ступенчатую функцию называется переходной функцией системы $g(t) = K\sigma(t)$, если ступенчатая функция смещена, то также будет смещена и переходная функция $g(t - \tau) = K\sigma(t)$. Тогда выходной сигнал будет выражен в виде интеграла Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t) = Ku_{\text{вх}}(t) = u_{\text{вх}}(t)g(t) + \int_0^{\infty} \frac{du_{\text{вх}}}{dt} g(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл Дюамеля позволяет рассчитать выходной сигнал динамической системы при любой форме входного сигнала.

Расчет переходной функции, входящей в интеграл Дюамеля, можно провести операторным методом:

$$g(t) \leftrightarrow g(p) = K(p)\sigma(p),$$

где $\sigma(p) = \frac{1}{p}$ – операторное изображение ступенчатой функции,

$K(p)$ – операторное изображение передаточной функции динамической системы.

Если, например, динамическая система задана в виде четырехполюсника электрической цепи с известными параметрами элементов (рис. 46), то нужно составить ее операторную схему замещения (рис. 47).

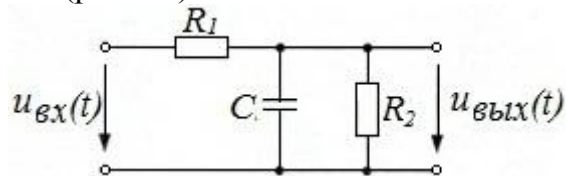


Рис. 46

$$\begin{aligned} i_1(0) &= i_{1np}(0) + i_{1св}(0) \\ i_2(0) &= i_{2np}(0) + i_{2св}(0) \\ i_3(0) &= i_{3np}(0) + i_{3св}(0) \\ u_L(0) &= u_{Lnp}(0) + u_{LCB}(0) \end{aligned} \quad (1.46)$$

В этих уравнениях свободные составляющие при $t=0$ будут равны:

$$i_{1св}(0) = A; \quad i_{2св}(0) = B; \quad i_{3св}(0) = C; \quad u_{LCB}(0) = D. \quad (1.47)$$

$$i_{1np}(0) = 7,33A; \quad i_{2np}(0) = 5,5A; \quad i_{3np}(0) = 1,83A; \quad u_{Lnp}(0) = 0.$$

Для определения левых частей уравнений (1.46), составим схему цепи рис. 13 после коммутации при наличии источников энергии.

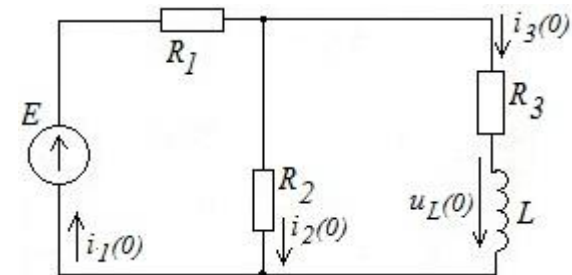


Рис. 13

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0) \cdot R_2 + i_2(0) \cdot R_2 = E \\ i_1(0) \cdot R_1 + i_3(0) \cdot R_3 + u_L(0) = E \end{cases} \quad (1.48)$$

По первому закону коммутации: ток через индуктивность не может изменяться скачком:

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 3A,$$

$i_1(0); i_2(0); u_L(0)$ - неизвестные в системе уравнений (1.48).

Решая систему получим:

$$i_1(0) = 7,8A; i_2(0) = 4,8A; u_L(0) = -8,4B.$$

Из уравнений (1.46), записанных для токов и напряжений при $t=0$ определяем постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} A &= i_1(0) - i_{1np}(0) = 7,8 - 7,33 = 0,47A; \\ B &= i_2(0) - i_{2np}(0) = 4,8 - 5,5 = -0,7A; \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} C &= i_3(0) - i_{3np}(0) = 3 - 1,83 = 1,17A; \\ D &= u_L(0) - u_{Lnp}(0) = -8,4 - 0 = -8,7A. \end{aligned}$$

Таким образом, выражения для токов и напряжения на индуктивности будут иметь вид:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{1np} + i_{1св} = 7,33 + 0,47 \cdot e^{pt} \\ i_2 &= i_{2np} + i_{2св} = 5,5 - 0,7 \cdot e^{pt} \\ i_3 &= i_{3np} + i_{3св} = 1,83 + 1,17 \cdot e^{pt} \\ u_L &= u_{Lnp} + u_{LCB} = 0 - 8,4 \cdot e^{pt} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Графически изменения токов в цепи и напряжения на индуктивности показаны на рис. 14.

Все параметры в переходном процессе будут изменяться по экспоненциальному закону с одинаковой интенсивностью, определяемой постоянной времени:

$$\tau = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{4} = 0,25 \text{ с.}$$

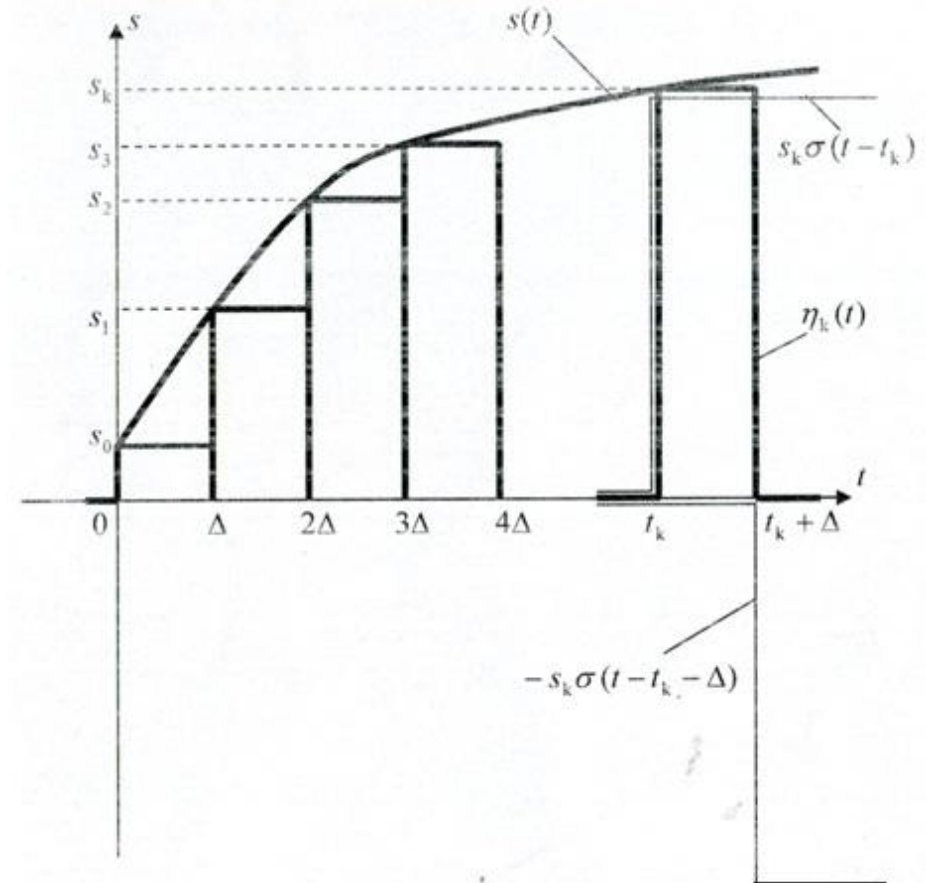


Рис. 45

где $u_{вх}(0)$ – значение входного сигнала при $t=0$;

$\sigma(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда;

$\sigma(t - \tau)$ – смещенная ступенчатая функция.

Реакция динамической системы – ее выходной сигнал $u_{вых}(t)$ – определяется передаточной функцией системы:

льными импульсами длительностью Δ , примыкающими друг к другу (рис. 45).

Тогда сигнал $s(t)$ приближенно равен сумме импульсов:

$$s(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \Delta \quad (3.5)$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, необходимо суммирование заменить интегрированием по формальной переменной τ , дифференциал которой $d\tau$ будет соответствовать величине шага дискретизации Δ .

Так как $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \{\sigma(t - t_k) - \sigma[t - (t_k + \Delta)]\} \frac{1}{\Delta} = \delta(t - \tau)$, то получаем формулу динамического представления сигнала посредством дельта-функции:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (3.6)$$

§3.2. Расчет реакции цепи на напряжение произвольной формы.

Интегральное преобразование Лапласа является основой операторного метода исследования прохождения сигналов напряжения через динамические системы. Для этого входной сигнал выражается динамическим представлением посредством ступенчатой функции Хевисайда:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{вх}}(0) \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{du_{\text{вх}}}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau,$$

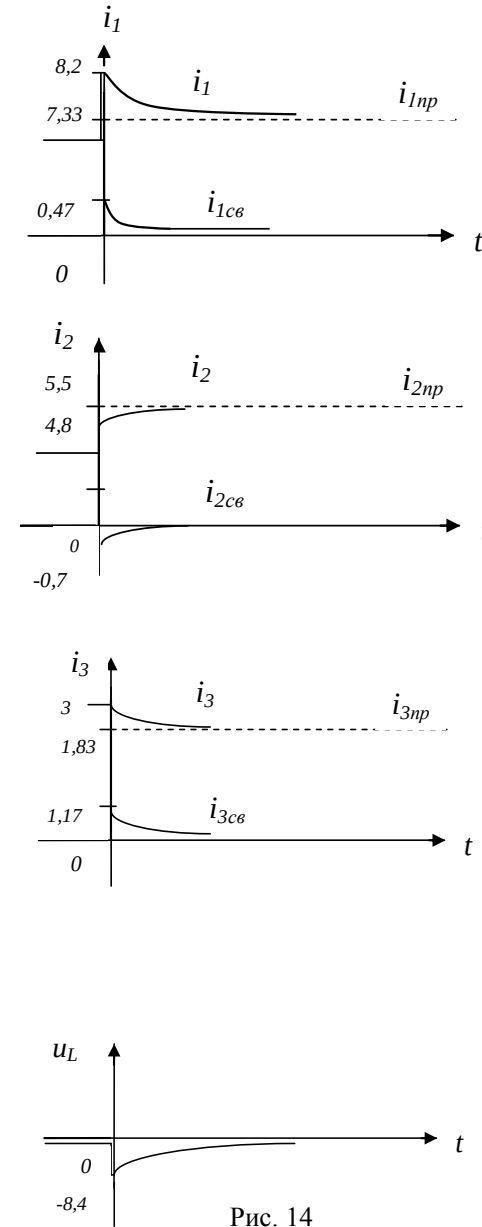


Рис. 14

§1.6. Переходный процесс в RC – цепи с источником постоянной ЭДС.

Рассмотрим переходные процессы токов и напряжений в цепи, содержащей активные сопротивления, емкость и источник постоянной ЭДС (рис.15).

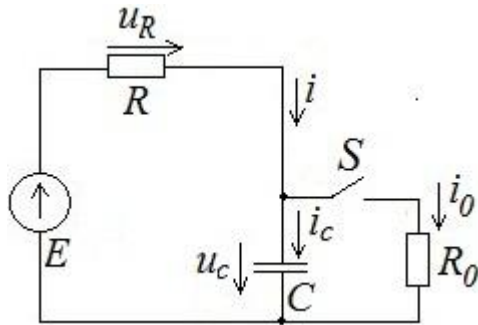


Рис. 15

Рассчитаем переходные процессы токов и напряжений классическим методом по рассмотренному ранее алгоритму.

1). Рассчитаем все токи и напряжения до коммутации:

$$E = u_R + u_C, \quad (1.51)$$

$$i_0 = 0, u_R = iR = 0,$$

$$i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0, \text{ так как } u_C = \text{const}; u_C = E.$$

2). Рассчитаем принужденный режим в цепи (при $t = \infty$):

$$i_{Cnp} = C \frac{du_C}{dt} = 0, \text{ так как } u_{Cnp} = \text{const},$$

$$E = u_{Rnp} + u_{Cnp} = i_{np}R + i_{0np}R_0, \quad (1.52)$$

$$i_{np} = i_{0np} = \frac{E}{R + R_0}, \quad (1.53)$$

$$v(t; \xi) = \frac{1}{\xi} \sigma \left(t + \frac{\xi}{2} \right) - \frac{1}{\xi} \sigma \left(t - \frac{\xi}{2} \right). \quad (3.3)$$

При любом значении параметра ξ площадь импульса $v(t; \xi)$ равна 1.

Если $\xi \rightarrow 0$, то площадь импульса остается равной 1, длительность будет равна нулю, а высота равна бесконечности. Предел такой функции называется дельта-функцией (функцией Дирака):

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t; \xi)$$

и ее график изображен на рис. 43.

Если $\delta(t)$ смещена на интервал времени t_0 , то ее график имеет вид рис. 44.

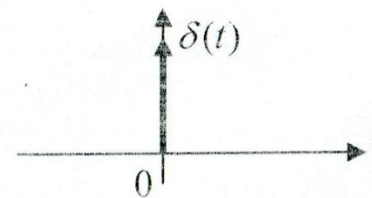


Рис. 43

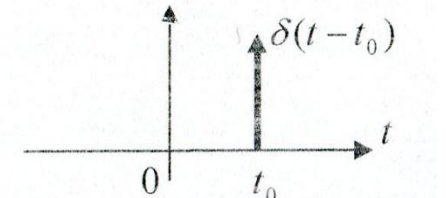


Рис. 44

Дельта-функция обладает единичным интегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Если рассматривать функцию Хевисайда как обобщенную функцию, то ее производная будет равна дельта – функции:

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t) \quad (3.4)$$

При динамическом представлении сигнала с помощью дельта – функции реальный сигнал $s(t)$ заменяется прямоуго-

Тогда для суммарной функции, состоящей из ступенчатых функций, (рис. 41) получим выражение:

$$s_{\Sigma} = s_0 \sigma(t) + (s_1 - s_0) \sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1) \sigma(t - 2\Delta) + \dots =$$

$$= s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \sigma(t - k\Delta), \quad (3.1)$$

где k – число интервалов дискретизации Δ .

Если $\Delta \rightarrow 0$, то дискретная переменная $k\Delta$ заменяется непрерывной переменной τ , а приращение $(s_k - s_{k-1})$ – дифференциалами $ds = \left(\frac{ds}{d\tau}\right) d\tau$, при этом имеем формулу динамического представления сигнала посредством функции Хевисайда:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

Сигнал также можно представить динамически с помощью функции Дирака (дельта-функции). Дельта-функция может быть получена как сумма двух ступенчатых функций (рис. 42):

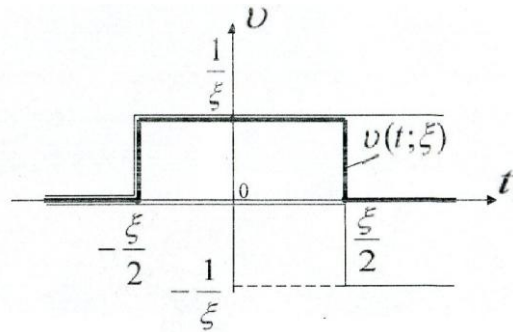


Рис. 42

$$u_{Rnp} = i_{np} R = \frac{RE}{R+R_0}, \quad (1.54)$$

$$u_{Cnp} = i_{0np} R_0 = \frac{R_0 E}{R+R_0}. \quad (1.55)$$

3). Определим свободные составляющие токов и напряжений в переходном процессе. Для этого в цепи в послекоммутационном режиме исключим источники энергии (рис. 16).

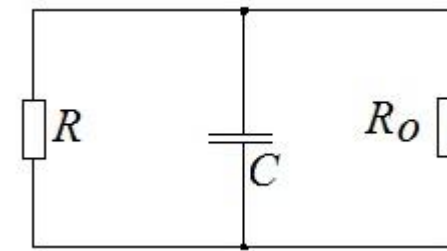


Рис. 16

Заменяем эквивалентной схемой (рис. 17).

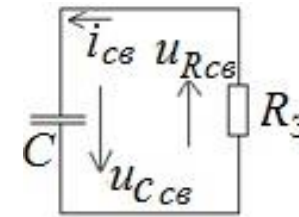


Рис. 17

$$R_3 = \frac{RR_0}{R+R_0}, \quad (1.56)$$

$$u_{RcB} + u_{CcB} = 0, \quad (1.57)$$

$$u_{RCB} = i_{CB} R_3, \quad (1.58)$$

$$i_{CB} = C \frac{du_{CB}}{dt}, \quad (1.59)$$

$$u_{CCB} + R_3 C \frac{du_{CCB}}{dt} = 0 \rightarrow u_{CCB} = A e^{pt}. \quad (1.60)$$

После алгебраизации дифференциального уравнения получим:

$$u_{CCB} + R_3 u_{CCB} C p \rightarrow p = -\frac{1}{R_3 C} [c^{-1}] \quad (1.61)$$

Определим постоянную интегрирования А из уравнения:

$$u_C = u_{Cnp} + u_{CCB}, \quad (1.62)$$

$$\text{при } t = 0 \quad u_C(0) = u_{Cnp}(0) + u_{CCB}(0), \quad (1.63)$$

где по первому закону коммутации:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E, \quad (1.64)$$

$$u_{Cnp}(0) = \frac{R_0 E}{R + R_0}, \quad (1.65)$$

$$u_{CCB}(0) = A,$$

тогда:

$$A = E - \frac{R_0 E}{R + R_0}, \quad (1.66)$$

откуда получим:

$$u_{CCB} = \left(E - \frac{R_0 E}{R + R_0} \right) e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad (1.67)$$

$$u_C = u_{Cnp} + u_{CCB} = \frac{R_0 E}{R + R_0} + \left(E - \frac{R_0 E}{R + R_0} \right) e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad (1.68)$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \left(-\frac{1}{R_3 C} \right) \left(E - \frac{R_0 E}{R + R_0} \right) e^{-\frac{1}{R_3 C}t}, \quad (1.69)$$

откуда:

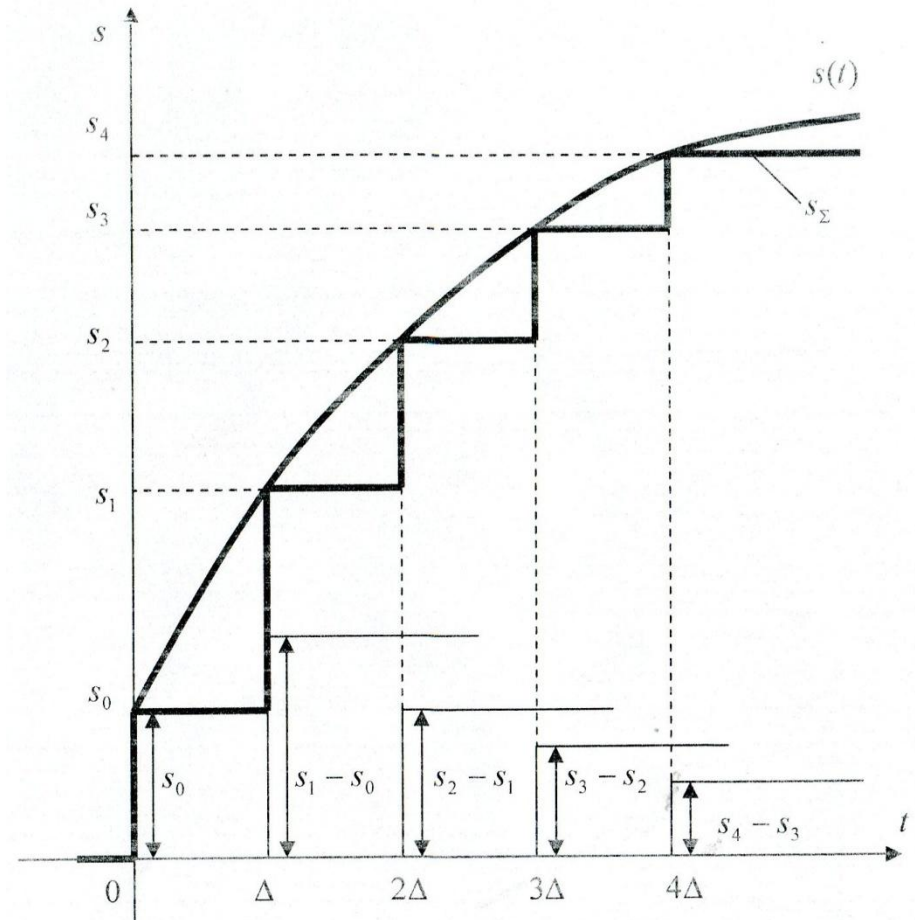


Рис. 41

Если функция включения смещена на t_0 и имеет амплитуду А, то смещенная ступенчатая функция записывается:

$$A\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t > 0 \end{cases}$$

и её график изображен на рис.40.

Раздел 3. Интеграл Дюамеля.

§3.1. Динамическое представление токов и напряжений с помощью функций Хевисайда и Дирака.

При динамическом представлении, например, токового сигнала с помощью ступенчатых функций Хевисайда (функций включения) (рис.39) реальный сигнал $s(t)$ заменяется суммой ступенчатых функций высотой s_0 , (s_1-s_0) , (s_2-s_1) , (s_3-s_2) , ... возникающих через интервал времени, который называется шагом дискретизации Δ (рис. 41).

Суммарный сигнал s_Σ при уменьшении шага дискретизации до нуля будет соответствовать исходному сигналу $s(t)$.

Каждая ступенчатая функция получена из «единичной» ступенчатой функции (функций включения):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

и её график изображен на (рис.39).

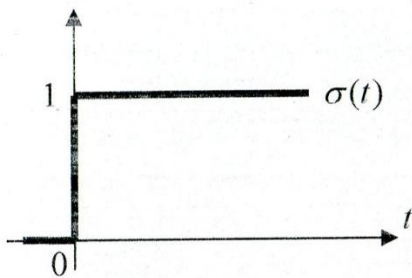


Рис.39

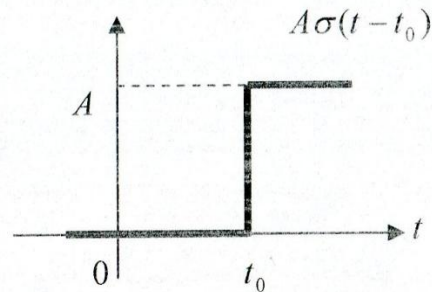


Рис.40

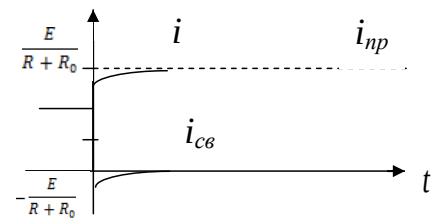
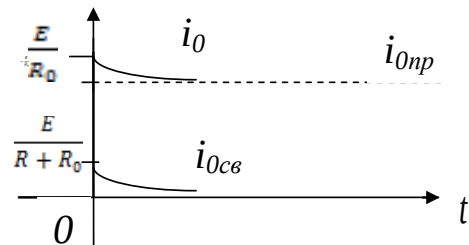
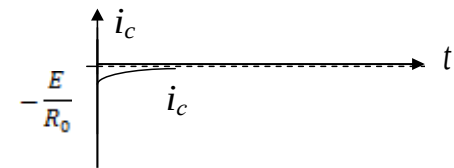
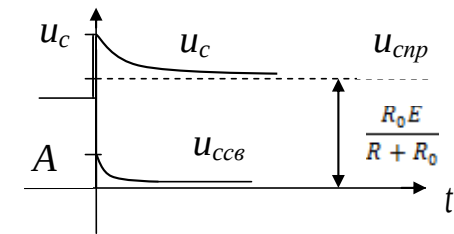


Рис. 18

$$i_C = -\frac{E}{R_0} e^{-\frac{1}{R_3 C} t}, \quad (1.70)$$

$$i_0 = \frac{u_C}{R_0} = \frac{E}{R+R_0} + \left(\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R+R_0} \right) e^{-\frac{1}{R_3 C} t}, \quad (1.71)$$

$$i = i_C + i_0 = -\frac{E}{R_0} e^{-\frac{1}{R_3 C} t} + \frac{E}{R+R_0} + \left(\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R+R_0} \right) e^{-\frac{1}{R_3 C} t} = \\ = \frac{E}{R+R_0} - \frac{E}{R+R_0} e^{-\frac{1}{R_3 C} t}.$$

Графически все эти параметры построены на рис. 18.

§1.7. Пример расчета переходного процесса в RC - цепи.

В цепи рис. 19 заданы параметры элементов:

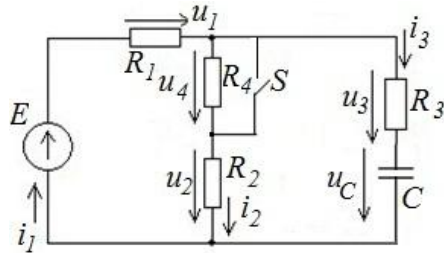


Рис. 19

$E=33\text{В}$; $R_1=30\Omega$; $R_2=20\Omega$; $R_3=60\Omega$; $R_4=70\Omega$; $C=830\mu\text{Ф}$.
Определим переходные процессы классическим методом:
1). Рассчитаем все токи и напряжения до коммутации:

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 0, \text{ так как } u_C = \text{const};$$

Оригиналы операторных изображений зависят от вида корней характеристического уравнения.

Если корни получились различные и действительные числа, то соответствующие оригиналы запишутся в виде:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.25)$$

В этом случае оригинал будет равен сумме экспонент, он будет иметь вид аperiodической кривой.

Если среди корней характеристического уравнения имеется один нулевой корень, то оригинал определяется:

$$x(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.24)$$

Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных сопряженных корней:

$$p_1 = \alpha + j\beta, p_2 = \alpha - j\beta, \quad (2.25)$$

то оригинал имеет вид:

$$x(t) = 2Re \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] + \sum_{k=3}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.26)$$

Если кроме пары комплексно-сопряженных корней имеется еще и нулевой корень, то:

$$x(t) = 2Re \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] + \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=4}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.27)$$

Если один из корней характеристического уравнения это мнимое число, то есть $p_1 = j\omega$, то оригинал:

$$x(t) = Im \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] + \sum_{k=2}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} i_{1cB}^{(0)} &= i_1(0) - i_{1np}(0), \\ u_{CcB}^{(0)} &= u_C(0) - u_{Cnp}(0), \end{aligned}$$

где первое слагаемое определяется по законам коммутации, а второе слагаемое по результатам расчета установившегося режима после коммутации (принужденного режима). Тогда операторная схема будет иметь вид рис. 38.

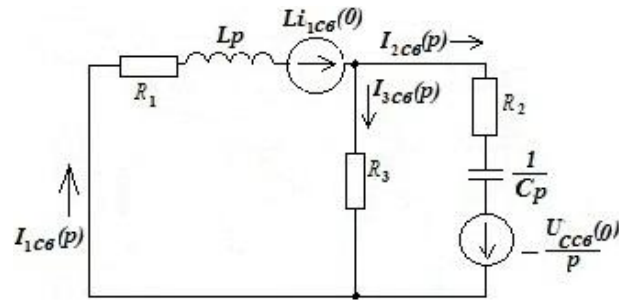


Рис. 38

Определив по операторной схеме свободные операторные токи и напряжения, найдем их оригиналы.

§2.4 Формулы разложения.

Формулы разложения предназначены для определения оригиналов функций по их операторному изображению полученному в виде рациональной дроби, то есть отношению двух полиномов вида:

$$X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_n p^n} \quad (2.24)$$

Из $F_2(p) = 0$ получаем корни характеристического уравнения $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$.

$$u_3 = i_3 R_3 = 0, \quad (1.72)$$

$$i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_4 + R_2} = 2,75 \text{ A}, \quad (1.73)$$

$$u_1 = i_1 R_1 = 8,25 \text{ B},$$

$$u_2 = i_2 R_2 = 5,5 \text{ B},$$

$$u_4 = i_2 R_4 = 19,25 \text{ B},$$

$$u_C - u_2 - u_4 + u_3 = 0 \rightarrow u_C = u_2 + u_4 = 24,75 \text{ B}. \quad (1.74)$$

2). Рассчитаем принужденный режим в цепи (при $t = \infty$):

$$u_{4np} = 0; i_{3np} = C \frac{du_{Cnp}}{dt} = 0, \text{ так как } u_{Cnp} = \text{const},$$

$$u_{3np} = i_3 R_3 = 0,$$

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 6,6 \text{ A}, \quad (1.75)$$

$$u_{1np} = i_{1np} R_1 = 19,8 \text{ B},$$

$$u_{2np} = i_{2np} R_2 = 13,2 \text{ B},$$

$$-u_{2np} - u_{4np} + u_{3np} + u_{Cnp} = 0, \quad (1.76)$$

$$u_{Cnp} = u_{2np} = 13,2 \text{ B}.$$

3). Определяем свободные составляющие токов и напряжений в переходном процессе. Для этого составляем характеристическое уравнение данной цепи и определяем его корни. Для этого составим схему после коммутации исключив из нее источники энергии (рис. 20).

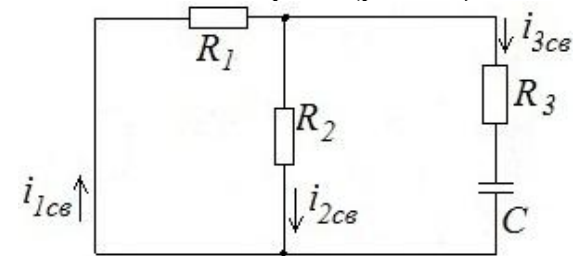


Рис. 20

По законам Кирхгофа составим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_{1cB} - i_{2cB} - i_{3cB} = 0 \\ i_{1cB}R_1 + i_{2cB}R_2 = 0 \\ -i_{2cB}R_2 + i_{3cB}R_3 + \frac{1}{C} \int i_{3cB} dt = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

Алгебраизируем уравнение и получим характеристическое уравнение, приравняв к нулю главный определитель системы:

$$\begin{cases} i_{1cB} - i_{2cB} - i_{3cB} = 0 \\ i_{1cB}R_1 + i_{2cB}R_2 = 0 \\ -i_{2cB}R_2 + i_{3cB}R_3 + \frac{1}{Cp} i_{3cB} = 0 \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} =$$

$$= R_2 \left(R_3 + \frac{1}{Cp} \right) + R_1 R_2 + R_1 \left(R_3 + \frac{1}{Cp} \right) =$$

$$= R_2 R_3 + \frac{R_2}{Cp} + R_1 R_2 + R_1 R_3 + \frac{R_1}{Cp} = 0 \quad (1.79)$$

Домножим на Cp :

$$CpR_2R_3 + R_2 + CpR_1R_2 + CpR_1R_3 + R_1 = 0, \quad (1.80)$$

$$p = -\frac{R_2 + R_1}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)C} = -163,3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.81)$$

$$\tau = -\frac{1}{p} = 0,006 \text{ с}.$$

Запишем общие выражения для всех токов и напряжений в соответствии с видом корней характеристического уравнения:

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_mp^m}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n}, \quad (2.23)$$

a_i и b_i — зависят от схемных параметров цепи.

Приравняв $F_2(p) = 0$, получим характеристическое уравнение, решая его определяем корни, которые называются полюсами.

Характеристическое уравнение будет одинаково для всех режимных параметров цепи. Если приравнять к нулю числитель, получим корни, называемые нулями.

Для устойчивой системы выполняется условие $n > m$, и все коэффициенты в полиномах a_i и b_i должны быть больше нуля.

После определения токов и напряжений в операторной форме в простом случае выражения получаются в табличной форме и по справочным данным определяются их оригиналы.

В сложных случаях для определения оригиналов токов и напряжений применяется теорема разложения.

2 случай: $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$. В этом случае операторное изображение ЭДС получается сложным и поэтому вычисления будут достаточно громоздкими. Тогда удобно пользоваться комбинированным приемом расчета, а именно, вести расчет классическим методом определяя искомые токи как сумму принужденных и свободных составляющих, причем принужденные составляющие определяются комплексным методом, а свободные составляющие определяются операторным методом. Операторная схема при этом не содержит внешних источников, а начальные значения свободного тока в индуктивности и свободного напряжения на емкости определяются как разности:

Определим начальное условие для тока через индуктивность и напряжение через емкость используя законы коммутации. Для этого рассчитаем ток через индуктивность:

$$i_1(0_-) = i_1(0) = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_0}. \quad (2.21)$$

Так как в установившемся режиме до коммутации все токи и напряжения в цепи были постоянными во времени, то падение напряжения на индуктивности и ток через емкость равны нулю.

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_{R_3} = i_1 R_3 = \frac{R_3 E}{R_1 + R_3 + R_0}. \quad (2.22)$$

После этого составляем операторную схему данной цепи. Эта схема составляется для послекоммутационного режима, в ней все схемные параметры заменяются на их операторные изображения. В операторной схеме будут действовать операторные токи и напряжения (рис. 37), например, какой – либо операторный ток можно получить в виде отношения двух полиномов:

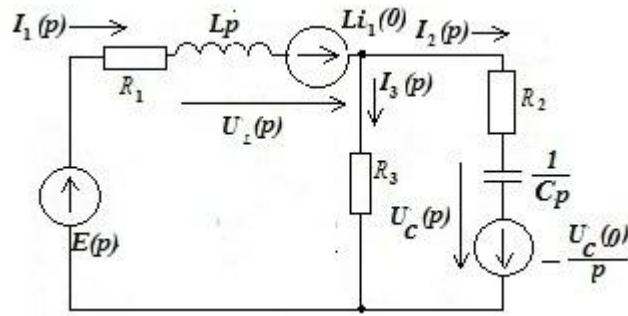


Рис. 37

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{1np} + i_{1cB} = i_{1np} + Ae^{pt} \\ i_2 &= i_{2np} + i_{2cB} = i_{2np} + Be^{pt} \\ i_3 &= i_{3np} + i_{3cB} = i_{3np} + Ce^{pt} \\ u_C &= u_{cnp} + u_{ccB} = u_{cnp} + De^{pt} \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

Определяем постоянные интегрирования, для этого запишем эти уравнения при $t=0$:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= i_{1np}(0) + A, \\ i_2(0) &= i_{2np}(0) + B, \\ i_3(0) &= i_{3np}(0) + C, \\ u_C(0) &= u_{cnp}(0) + D. \end{aligned} \quad (1.83)$$

В этих уравнениях к

$$\begin{aligned} i_{1np}(0) &= 6,6 \text{ A}, \\ i_{2np}(0) &= 6,6 \text{ A}, \\ i_{3np}(0) &= 0 \text{ A}, \\ u_{cnp}(0) &= 13,7 \text{ A}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Для определения токов и напряжений при $t=0$ составим схему цепи после коммутации (рис. 21).

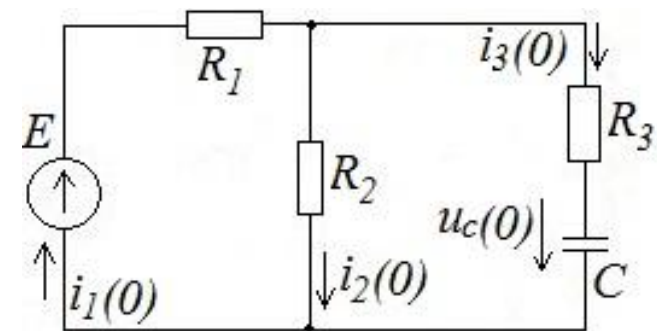


Рис. 21

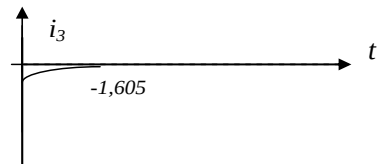
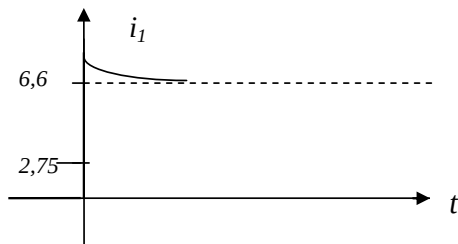
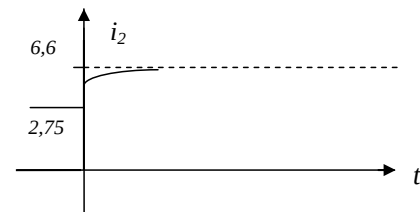
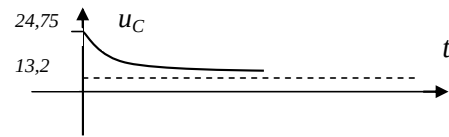


Рис. 22

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}, \quad (2.18)$$

$$Z(p) = 0, \\ CpR + CLp^2 + 1 = 0, \quad (2.19)$$

$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$ – характеристическое уравнение, его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (2.20)$$

§2.3 Общий случай расчета переходного процесса операторным методом.

В цепи рис.36 рассчитаем переходный процесс для двух видов ЭДС.

1 случай: Источник ЭДС – постоянный:

$$e(t) = E = \text{const}$$

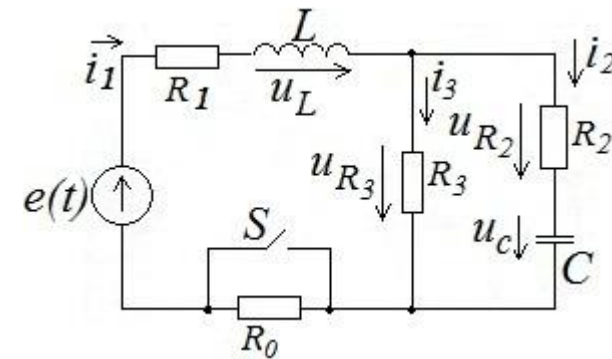


Рис. 36

$$U_L = -Li(0) + I(p)Lp, \quad (2.16)$$

$$U_C = \frac{1}{Cp}I(p) + \frac{U_C(0)}{p}. \quad (2.17)$$

По операторному изображению находим оригиналы искоемых функций.

Таким образом, при расчете переходного процесса операторным методом рассчитываются операторные токи и напряжения в схеме после коммутации и их оригиналы, то есть переходные токи и напряжения. А расчет операторных токов и напряжений в образовавшейся операторной схеме, где действуют операторные изображения источников энергии и операторные изображения пассивных элементов (резисторов, индуктивностей, емкостей) производится любым известным методом расчета.

Примечание 1. Операторные сопротивления цепи можно просто определить из комплексных сопротивлений, заменив $j\omega \rightarrow p$ (см. таблицу 3).

Таблица 3

Название	Комплексное сопротивление	Операторное сопротивление
Резистор	$Z_R = R$	$Z_R(p) = R$
Индуктивность	$Z_L = j\omega L$	$Z_L(p) = Lp^*$
Ёмкость	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$Z_C = \frac{1}{Cp}^{**}$

*-если до коммутации через индуктивность не протекал ток, то есть $i_L(0)=0$.

**-если $U_C(0_-) = 0$.

Примечание 2. Корни характеристического уравнения легко найти приравняв к нулю входное операторное сопротивление цепи.

По законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ E = R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) \\ E = R_1 i_1(0) + R_3 i_3(0) + u_c(0) \end{cases} \quad (1.85)$$

По второму закону коммутации: $u_c(0) = u_c(0_-) = 24,75 \text{ В}$.

Решая систему уравнений получим:

$$i_1(0) = 5,96 \text{ А}; i_2(0) = 7,56 \text{ А}; i_3(0) = -1,605 \text{ А}.$$

Определяем А, В, С, D:

$$A = -0,64 \text{ А}; B = 0,96 \text{ А}; C = -1,605 \text{ А}; D = 11,55 \text{ В}.$$

Аналитические выражения переходных токов и напряжений будут иметь вид:

$$i_1 = 6,6 - 0,64e^{pt} \quad (\text{до коммутации } i_1 = 2,75 \text{ А})$$

$$i_2 = 6,6 + 0,96e^{pt} \quad (\text{до коммутации } i_2 = 2,75 \text{ А})$$

$$i_3 = 0 - 1,605e^{pt} \quad (\text{до коммутации } i_3 = 0 \text{ А})$$

$$u_c = 13,2 + 11,55e^{pt} \quad (\text{до коммутации } u_c = 24,75 \text{ В})$$

Графически все эти параметры построены на рис. 22.

§1.8. Аперiodический переходный процесс в RLC – цепи.

Переходный процесс цепи содержащей активное сопротивление, индуктивность и емкость может иметь колебательный и неколебательный характер в зависимости от схемных параметров цепи.

Рассмотрим схему на рис. 23.

При заданных значениях источника постоянной ЭДС, R, L, C определим переходные процессы токов и напряжений классическим методом.

1). Определим параметры до коммутации ($t < 0$):

$$u_c = E, \quad i = 0, \quad u_R = 0, \quad u_L = 0. \quad (1.86)$$

2). Определим принужденные значения токов и нап-

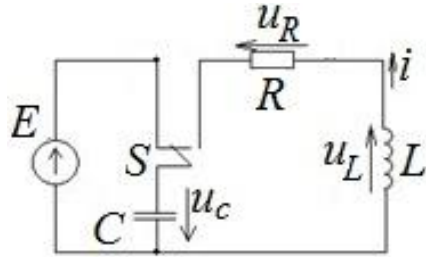


Рис. 23

ряжений, которые будут в новом установившемся режиме после коммутации (при $t = \infty$):

$$u_{cnp} = 0, \quad i_{np} = 0, \quad u_{Rnp} = 0, \quad u_{Lnp} = 0. \quad (1.87)$$

3). Определим свободные составляющие токов и напряжений. Для этого рассмотрим цепь после коммутации, и исключив ЭДС из схемы цепи (рис. 24).

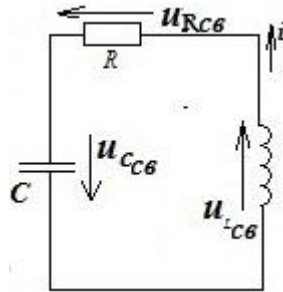


Рис. 24

По второму закону Кирхгофа:

$$u_{Rсв} + u_{Lсв} + u_{Cсв} = 0, \quad (1.88)$$

откуда

$$i_{св} R + L \frac{di_{св}}{dt} + u_{Cсв} = 0, \quad (1.89)$$

ЭДС совпадают с направлением операторного тока через них, таким образом, схема будет иметь вид рис.35.

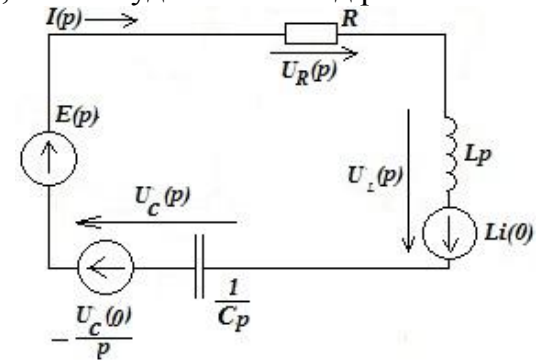


Рис. 35

Для операторной схемы справедливы законы Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum E(p) = \sum U(p), \quad (2.11)$$

$$\sum I(p) = 0. \quad (2.12)$$

Закон Ома в операторном виде:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (2.13)$$

После составления уравнений в операторной форме для операторной схемы, определяем операторные изображения искомых величин.

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)}, \quad (2.14)$$

$$U_R = I(p) \cdot Z_R(p), \quad (2.15)$$

откуда

$$E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} = I(p) \left[R + Lp + \frac{1}{Cp} \right], \quad (2.8)$$

где

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}, \quad (2.9)$$

это общее операторное сопротивление цепи, где

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = Lp, \quad Z_C = \frac{1}{Cp} \quad (2.10)$$

Величина $Li(0)$ и $\frac{u_C(0)}{p}$ – операторное изображение внутренних ЭДС цепи с ненулевыми начальными условиями, которые характеризуют энергию изменения электромагнитного поля индуктивности и энергию изменения электростатического поля емкости.

Для схемы с нулевыми начальными условиями эти слагаемые обнуляются.

Для полученного уравнения по второму закону Кирхгофа в операторной форме можно составить операторную схему данной цепи. Индуктивность реальной схемы заменяем операторным сопротивлением Lp и её внутренней ЭДС $Li(0)$, учитывающую энергию накопленную в индуктивности до коммутации. Активное сопротивление в схеме заменяем операторным сопротивлением R , не отличающимся по величине от активного сопротивления R , емкость заменяем операторным сопротивлением $\frac{1}{Cp}$ и его внутреннее ЭДС $-\frac{u_C(0)}{p}$ учитывающую энергию накопленную в конденсаторе до коммутации. Положительное направление внутренних

с учетом

$$i_{C\Phi} = C \frac{du_{C\Phi}}{dt}, \quad (1.90)$$

получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$RC \cdot \frac{du_{C\Phi}}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 u_{C\Phi}}{dt^2} + u_{C\Phi} = 0, \quad (1.91)$$

алгебраизируем уравнение и получим

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (1.92)$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}, \quad (1.93)$$

обозначим

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

тогда

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.94)$$

В зависимости от соотношений между δ и ω_0 под корнем будет положительное число ($\delta > \omega_0$) или отрицательное число ($\delta < \omega_0$). Рассмотрим подробно эти варианты.

а). Если $\delta > \omega_0$, корни p_1 и p_2 будут действительные и не равные между собой $p_1 \neq p_2$, тогда

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow R > \frac{2\sqrt{L} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \quad (1.95)$$

где ρ - характеристическое сопротивление контура.

В этом случае решение для (1.91) будет иметь вид:

$$u_{C\Phi} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}, \quad (1.96)$$

тогда

$$i_{cB} = C \frac{du_{cCB}}{dt} = C(A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}). \quad (1.97)$$

Определяем постоянные интегрирования A_1 и A_2 . Для этого общие выражения тока и напряжения на емкости

$$\begin{cases} u_c = u_{cnp} + u_{cCB} \\ i = i_{np} + i_{cB} \end{cases} \quad (1.98)$$

запишем их для первого момента времени после коммутации:

$$\begin{cases} u_c(0) = u_{cnp}(0) + u_{cCB}(0) \\ i(0) = i_{np}(0) + i_{cB}(0) \end{cases} \quad (1.99)$$

По второму закону коммутации:

$$u_c(0) = u_c(0_-) = E, \quad (1.100)$$

По первому закону коммутации:

$$i(0) = i(0_-) = 0 \quad (1.101)$$

$$u_{cnp}(0) = 0, \quad i_{np}(0) = 0$$

Уравнения (1.96) и (1.97) при $t=0$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{cCB}(0) &= A_1 + A_2 \\ i_{cB}(0) &= Cp_1 A_1 + Cp_2 A_2 \end{aligned} \quad (1.102)$$

С учетом (1.99)

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = E \\ A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} = 0 \end{cases} \quad (1.103)$$

Решаем систему, получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{p_2 \cdot E}{p_2 - p_1}, \\ A_2 &= -\frac{p_1 \cdot E}{p_2 - p_1}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Таким образом, выражения токов и напряжений после коммутации:

§2.2 Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Операторные схемы.

Рассмотрим переходный процесс в RLC цепи рис.34.

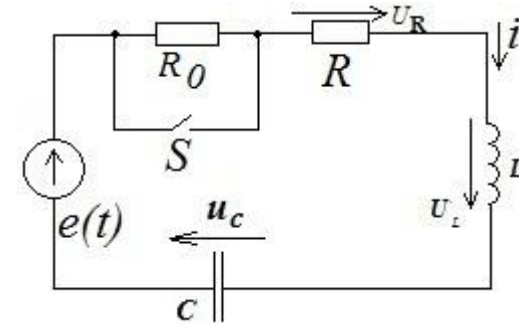


Рис. 34

Допустим в данной цепи значения R_0 , R , L , C постоянные величины. А все токи и напряжения функции времени. Допустим в момент коммутации известны $i(0)$ и $u_c(0)$. Для послекоммутационного режима по второму закону Кирхгофа:

$$e = u_R + u_L + u_c,$$

или

$$e = iR + L \frac{di}{dt} + u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Запишем полученные выражения в операторной форме:

$$E(p) = I(p)R + L[pI(p) - i(0)] + \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(p)}{p}, \quad (2.7)$$

Таблица 2

Оригинал функции	Операторное изображение
A	$\frac{A}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$e^{j\omega t}$	$\frac{1}{p-j\omega}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$\frac{pF(p) - f(0)}{p}$
$f''(t)$	$\frac{p[pF(p) - f(0)] - f'(0)}{p}$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$

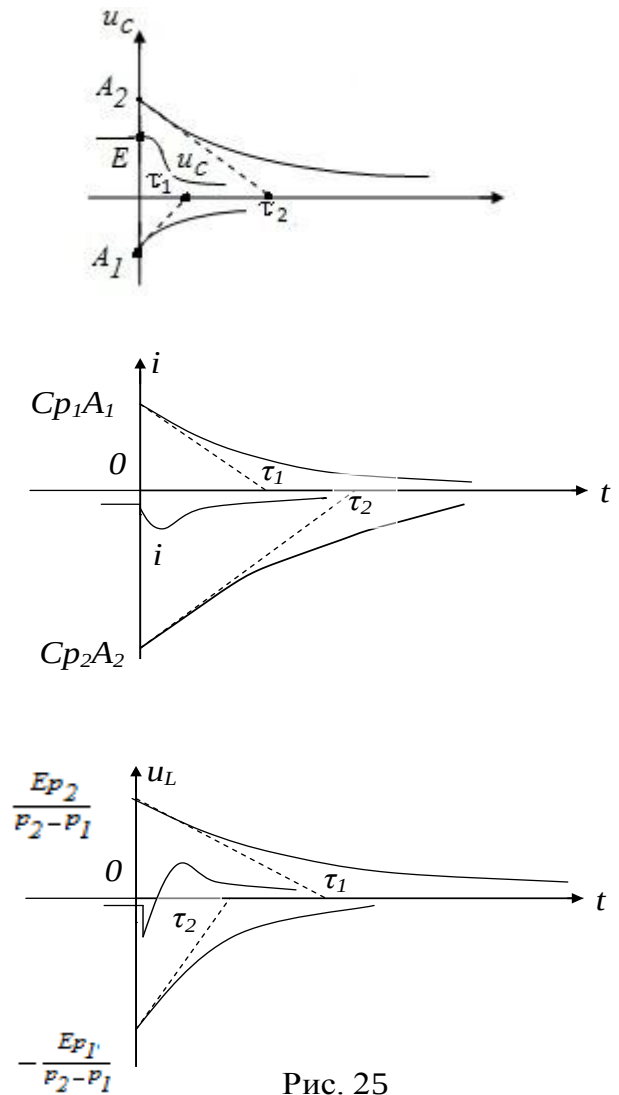


Рис. 25

$$u_c = \frac{p_2 \cdot E}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_1 t} - \frac{p_1 \cdot E}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t}. \quad (1.105)$$

Выражение для тока:

$$i = \frac{E}{L(p_2 - p_1)} \cdot e^{p_1 t} - \frac{E}{L(p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2 t} \quad (1.106)$$

(тоже выражение получится, если определить ток по уравнению $i = \frac{du_c}{dt}$).

Определим напряжение на индуктивности и резисторе:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{Ep_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_1 t} - \frac{Ep_2}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \quad (1.107)$$

$$u_R = i \cdot R = \frac{RE}{L(p_2 - p_1)} \cdot e^{p_1 t} - \frac{RE}{L(p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2 t} \quad (1.108)$$

По этим уравнениям токи и напряжения будут изменяться после коммутации (рис.25).

§1.9. Колебательный переходный процесс в RLC – цепи.

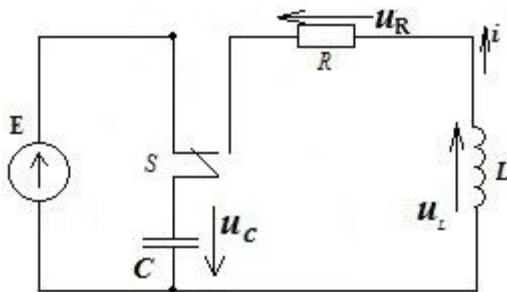


Рис. 26

Таблица 1

Оригинал функции	Операторное изображение
$f(t)$	$F(p)$
$F(p)$	$L\{f(t)\}$
$f(t)$	$L^{-1}\{F(t)\}$
$i(t)$	$I(p)$
$u(t)$	$U(p)$
$e(t)$	$E(p)$

Найдем изображения некоторых типовых функций наиболее часто встречающихся в электротехнике:

$$1) f(t) = A = const,$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = A \left(-\frac{1}{p} \right) e^{-pt} = 0 - \left(-\frac{A}{p} \right) = \frac{A}{p}. \quad (2.3)$$

$$2) f(t) = e^{at},$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-a)} dt = -\frac{1}{p-a}, \quad (2.4)$$

$$e^{-t(p-a)} = \frac{1}{p-a}. \quad (2.5)$$

$$3) f(t) = 1 - e^{-at},$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)}. \quad (2.6)$$

Другие соотношения приведены в таблице 2.

переходных процессов сводится к двум противоположным действиям:

1) замена заданных функций времени операторными изображениями и, применяя законы Кирхгофа в операторной форме, определяются операторные выражения искомых величин;

2) интерпретация результата, то есть переход от операторного изображения искомых величин с помощью обратного преобразования Лапласа к оригиналам искомых величин, то есть к функциям времени.

В основе операторного метода лежит преобразование Лапласа, где p – оператор Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.1)$$

Преобразование Лапласа имеет следующие свойства:

1). Изображение суммы оригиналов равно сумме изображений этих функций.

2). Умножение оригинала на постоянный коэффициент соответствует умножению на этот же коэффициент и изображения.

Определение оригинала функции по его операторному изображению производится по обратному преобразованию Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j}^{\delta+j} F(p) e^{pt} dp. \quad (2.2)$$

Обозначение оригиналов и изображений приведено в таблице 1.

При заданных значениях L , R , C в цепи рис.26 определим переходные процессы классическим методом.

1). До коммутации ($t < 0$): $u_c = E, i = 0, u_R = 0, u_L = 0$.

2). Установившийся режим после завершения переходного процесса при $t = \infty$. Это принужденный режим: $u_{cnp} = 0, i_{np} = 0, u_{Lnp} = 0, u_{Rnp} = 0$.

3). Свободный процесс в цепи рис.27 обусловлен изменением энергии электростатического поля конденсатора и энергии электромагнитного поля индуктивности.

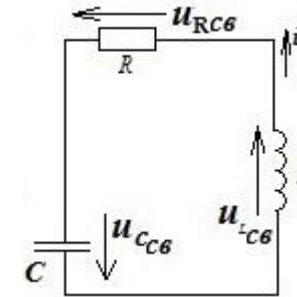


рис. 27

Определим ток и напряжение в этом режиме по второму закону Кирхгофа:

$$u_{CCB} + u_{LCB} + u_{RCB} = 0. \quad (1.109)$$

Аналогично с рассмотренным ранее:

$$\frac{d^2 u_{CCB}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_{CCB}}{dt} + \frac{1}{LC} = 0, \quad (1.110)$$

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0, \quad (1.111)$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)^2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (1.112)$$

Рассмотрим случай, когда под корнем отрицательное число, тогда

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1) \cdot (\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm j\omega_{св}, \quad (1.113)$$

$$\text{где } \omega_{св}^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (1.114)$$

Таким образом, из характеристического уравнения получены два комплексных сопряженных корня:

$$p_1 = -\delta - j\omega_{св} \quad (1.115)$$

$$p_2 = -\delta + j\omega_{св} \quad (1.116)$$

Это определяет вид решения однородного дифференциального уравнения:

$$u_{св} = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + v), \quad (1.117)$$

откуда

$$\begin{aligned} i_{св} &= C \cdot \frac{du_{св}}{dt} = \\ &= C \cdot A \cdot [-\delta \sin(\omega_{св} \cdot t + v) + \omega_{св} \cdot \cos(\omega_{св} \cdot t + v)] \cdot e^{-\delta t} \end{aligned}$$

Для определения постоянного интегрирования A и начальной фазы v рекомендуется рассмотреть выражения для напряжения на емкости и тока на индуктивности, чтобы была возможность использовать закон коммутации.

Эти два уравнения необходимы для расчета двух постоянных величин A и v . Для их определения запишем:

$$\begin{cases} u_c = u_{снр} + u_{св} \\ i = i_{св} + i_{нр} \end{cases} \quad (1.118)$$

при $t=0$:

$$\begin{cases} u_c(0) = u_{снр}(0) + u_{св}(0) \\ i(0) = i_{св}(0) + i_{нр}(0) \end{cases} \quad (1.119)$$

Определим постоянные интегрирования D_1 и D_2 решая совместно третье уравнение системы (1.155) и третье уравнение системы (1.152):

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = -0.86 \\ -1.21 \cdot 10^4 D_1 - 5.79 \cdot 10^4 D_2 = 0 \\ D_1 = -1.09 \text{ A}, \quad D_2 = 0.227 \text{ A}. \end{cases}$$

Получим ток i_3 :

$$i_3 = i_{3нр} + i_{3св} = 2.86 - 1.09e^{-1.21 \cdot 10^4 t} + 0.227e^{-5.79 \cdot 10^4 t}, \text{ A}$$

Аналогично определяются B_1 и B_2 ; N_1 и N_2 ; M_1 и M_2 , и записываются выражения i_2, u_L, u_C .

Раздел 2. Операторный метод расчета переходных процессов.

§2.1. Преобразование Лапласа. Изображения некоторых электротехнических функций.

Операционное исчисление позволяет интегрально - дифференциальные уравнения привести к алгебраическим, при этом анализ переходного процесса сводится к решению алгебраических уравнений, где отыскивают не функции действительного переменного, каковым является время t , а функции комплексного переменного (изображения), переход к которым осуществляется с помощью преобразования Лапласа.

Основанный на этом преобразовании операторный метод расчета переходных процессов приводит к простым операторным схемам, которые описываются законами Ома и Кирхгофа в операторной форме. Расчет операторным методом

$$\frac{dE}{dt} = \frac{i_2}{C} + \frac{di_1}{dt} R_1 \rightarrow i_1^l(0) = -\frac{i_2(0)}{CR_1} = -\frac{6}{10^{-5} \cdot 10} = -6 \cdot 10^4 \frac{A}{c}.$$

Продифференцируем уравнение (1.156) при $t=0$:

$$i_2^l(0) = i_1^l(0) - i_3^l(0) = -6 \cdot 10^4 \frac{A}{c}.$$

Продифференцируем уравнение $E = u_C + i_1 R_1$;

$$\frac{dE}{dt} = \frac{du_C}{dt} + \frac{di_1}{dt} R_1 \quad (\text{при } t = 0),$$

откуда:

$$u_C^l(0) = -i_1^l(0) R_1 = 6 \cdot 10^5 \frac{B}{c}$$

Продифференцируем уравнение $E = i_3 R_3 + u_L + i_1 R_1$;

откуда:

$$u_L^l(0) = -i_3^l(0) R_3 - i_1^l(0) R_1 = 60 \cdot 10^4 \frac{B}{c}$$

Решая совместно систему уравнений (1.155) и (1.152) находим постоянные интегрирования.

Определим постоянные интегрирования решая первое уравнение системы (1.155) и первое уравнение системы (1.152):

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 5,14 \\ -1,21 \cdot 10^4 A_1 - 5,79 \cdot 10^4 A_2 = -6 \cdot 10^4 \end{cases}$$

откуда:

$$A_1 = 5,19, \quad A_2 = -0,05$$

Таким образом, выражения для тока i_1 :

$$i_1 = i_{1np} + i_{1св} = 2,86 + 5,19e^{-1,21 \cdot 10^4 t} - 0,05e^{-5,79 \cdot 10^4 t}, A$$

В уравнения входят параметры:

$$u_c(0) = u_c(0_-) = E, \quad u_{снр}(0) = 0,$$

$$u_{ссв}(0) = A \cdot \sin v,$$

$$i(0) = i(0_-) = 0, \quad i_{np}(0) = 0,$$

$$i_{ссв}(0) = C \cdot A \cdot (-\delta \sin v + \omega_{св} \cdot \cos v).$$

$$\begin{cases} E = 0 + A \sin v \\ 0 = 0 + C \cdot A \cdot [-\delta \sin v + \omega_{св} \cdot \cos v]. \end{cases}$$

Из треугольника, связывающего параметры $\omega_{св}$, ω_0 , δ получим соотношение:

$$\frac{E}{A} = \frac{\omega_{св}}{\omega_0}, \quad A = \frac{E \omega_0}{\omega_{св}} = \frac{E}{\omega_{св} \cdot \sqrt{LC}}, \quad (1.120)$$

$$\begin{aligned} \omega_{св} \cdot \cos v &= \delta \cdot \sin v \rightarrow \frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tg} v = \frac{\omega_{св}}{\delta} \rightarrow \\ &\rightarrow v = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{св}}{\delta}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

В общем виде ток и напряжения:

$$u_c = \frac{E}{\omega_{св} \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + v), \quad (1.122)$$

$$i = C \cdot \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\omega_{св} L} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + \pi), \quad (1.123)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{E}{\omega_{св} \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t - v). \quad (1.124)$$

Графически ток и напряжение показаны на рис. 28.

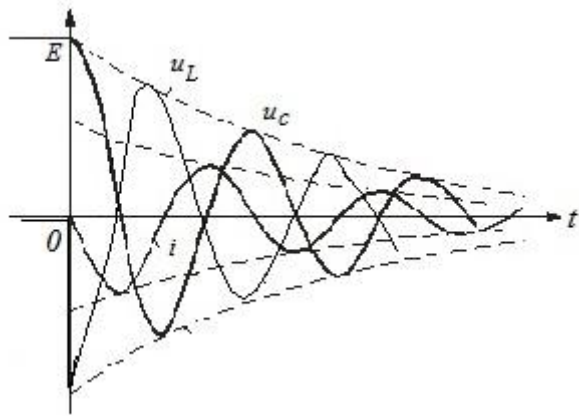


Рис. 28

§1.10. Предельно-апериодический переходный процесс в RLC-цепи.

Предельно-апериодический переходный процесс в RLC-цепи (рис.29) наступит при равенстве активного сопротивления в контуре его критическому значению.

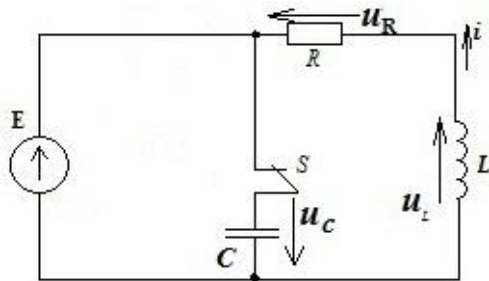


Рис. 29

В системе (1.154) производные принужденных значений определим из нового установившегося режима:

$$i_{1np}^l(0) = 0; i_{2np}^l(0) = 0; i_{3np}^l(0) = 0; u_{Lnp}^l(0) = 0; u_{Cnp}^l = 0.$$

Значения производных параметров определяются из схемы электрической цепи рис. 33.

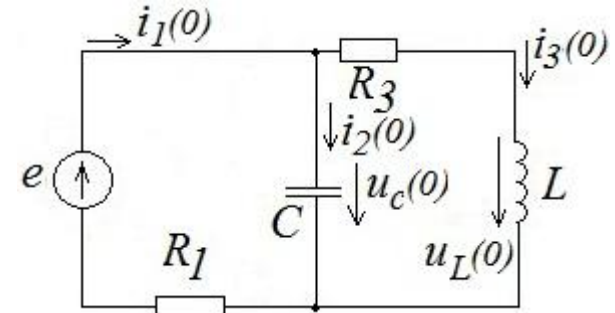


Рис. 33

Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ E = u_C + i_1 R_1, \\ E = i_3 R_3 + u_L + i_1 R_1. \end{cases} \quad (1.156)$$

или

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ E = \frac{1}{C} \int i_2 dt + i_1 R_1, \end{cases} \quad (1.157)$$

$$E = i_3 R_3 + L \frac{di_2}{dt} + i_1 R_1. \quad (1.158)$$

Из уравнения (1.158) при $t=0$:

$$i_3^l(0) = \frac{E - i_3(0)R_3 - i_1(0)R_1}{L} = \frac{200 - 2 \cdot 60 - 8 \cdot 10}{10^{-3}} = 0$$

Продифференцируем уравнение (1.157) при $t=0$:

Чтобы определить первое и второе слагаемое в левой части нужна еще одна система уравнений, для этого продифференцируем систему уравнений (1.147) и получим:

$$\begin{cases} i_1^I = i_{1np}^I + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} \\ i_2^I = i_{2np}^I + p_1 B_1 e^{p_1 t} + p_2 B_2 e^{p_2 t} \\ i_3^I = i_{3np}^I + p_1 D_1 e^{p_1 t} + p_2 D_2 e^{p_2 t} \\ u_L^I = u_{Lnp}^I + p_1 N_1 e^{p_1 t} + p_2 N_2 e^{p_2 t} \\ u_C^I = u_{Cnp}^I + p_1 M_1 e^{p_1 t} + p_2 M_2 e^{p_2 t} \end{cases} \quad (1.153)$$

При $t=0$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1^I(0) = i_{1np}^I(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2 \\ i_2^I(0) = i_{2np}^I(0) + p_1 B_1 + p_2 B_2 \\ i_3^I(0) = i_{3np}^I(0) + p_1 D_1 + p_2 D_2 \\ u_L^I(0) = u_{Lnp}^I(0) + p_1 N_1 + p_2 N_2 \\ u_C^I(0) = u_{Cnp}^I(0) + p_1 M_1 + p_2 M_2 \end{cases} \quad (1.154)$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} p_1 A_1 + p_2 A_2 = -6 \cdot 10^4 \frac{A}{c} \\ p_1 B_1 + p_2 B_2 = -6 \cdot 10^4 \frac{A}{c} \\ p_1 D_1 + p_2 D_2 = 0 \\ p_1 N_1 + p_2 N_2 = 60 \cdot 10^4 \frac{B}{c} \\ p_1 M_1 + p_2 M_2 = 60 \cdot 10^4 \frac{B}{c} \end{cases} \quad (1.155)$$

Определим ток и напряжение классическим методом при заданных параметрах и условии, когда

$$R = R_{kp}$$

1). Рассчитаем цепь до коммутации:

$$u_c = E, i = 0, u_R = 0, u_L = 0.$$

2). Рассмотрим установившейся режим после завершения переходного процесса при $t = \infty$. Это принужденный режим:

$$u_{cnp} = 0, i_{np} = 0, u_{Lnp} = 0, u_{Rnp} = 0.$$

3). Рассчитаем свободные составляющие:

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0, \quad (1.125)$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.126)$$

$$\text{Если } \omega_0^2 = \delta^2, \text{ тогда } p = p_1 = p_2 = -\delta = -\frac{R}{2L}.$$

$$\text{Откуда следует: } R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho. \quad (1.127)$$

Решением однородного дифференциального уравнения будет выражение:

$$u_{ccB} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 t \cdot e^{p_1 t}, \quad (1.128)$$

тогда

$$i_{cB} = C \cdot \frac{du_{ccB}}{dt} = C \cdot [pA_1 \cdot e^{p_1 t} + (A_2 + pA_2 t) \cdot e^{p_1 t}] \quad (1.129)$$

Определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 из решения системы уравнений записанных для $t=0$:

$$\begin{cases} u_c(0) = u_{cnp}(0) + u_{ccB}(0), \\ i(0) = i_{cB}(0) + i_{np}(0), \end{cases} \quad (1.130)$$

где

$$u_c(0) = u_c(0_-) = E, \quad u_{cnp}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} u_{ccB}(0) &= A_1, \\ i(0) = i(0_-) &= 0, \quad i_{np}(0) = 0, \\ i_{cB}(0) &= (pA_1 + A_2) \cdot C. \end{aligned}$$

Подставляем в исходные уравнения и получим:

$$\begin{cases} E = 0 + A_1 \rightarrow A_1 = E, \\ 0 = 0 + C \cdot (pA_1 + A_2) \rightarrow A_2 = -pE. \end{cases} \quad (1.131)$$

Таким образом, общие выражения для напряжений и тока:

$$u_c = u_{cnp} + u_{ccB} = Ee^{pt} - pEte^{pt}, \quad (1.132)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{E}{L} te^{pt}, \quad (1.133)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -Ee^{pt} + pEte^{pt}. \quad (1.134)$$

Переходные процессы будут иметь предельно – аperiodический характер.

§1.11. Расчет классическим методом переходных процессов в электрических цепях с двумя реактивными элементами.

Задана схема электрической цепи рис.30 с параметрами:

$$R_1 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 60 \text{ Ом};$$

$$L = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$E = 200 \text{ В};$$

$$C = 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Определим переходные процессы для токов и напряжений i_1, i_2, i_3, u_c, u_L .

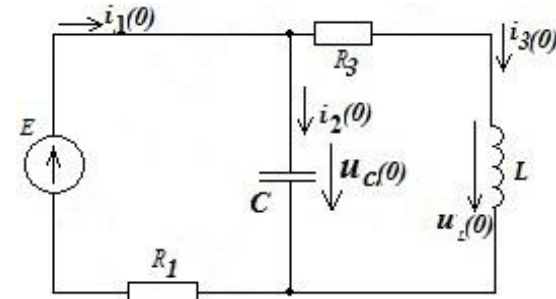


Рис. 32

По второму закону коммутации напряжение на емкости не может изменяться скачком:

$$u_c(0) = u_c(0_-) = 120 \text{ В}. \quad (1.149)$$

По первому закону коммутации, ток через индуктивность не может изменяться скачком:

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 2 \text{ А}. \quad (1.150)$$

Тогда получим систему по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0, \\ E = i_1(0)R_1 + u_c(0), \\ E = i_3(0)R_3 + u_L(0) + i_1(0)R_1. \end{cases} \quad (1.151)$$

В этой системе из трех уравнений будут три неизвестных, значение которых определяем:

$$i_1(0) = 8 \text{ А}, \quad i_2(0) = 6 \text{ А}, \quad u_L(0) = 0.$$

Из системы уравнений (1.148) имеем:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 5,14 \text{ А} \\ B_1 + B_2 = 6 \text{ А} \\ D_1 + D_2 = -0,86 \text{ А} \\ N_1 + N_2 = 0 \\ M_1 + M_2 = -51,4 \text{ В} \end{cases} \quad (1.152)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}, \\ p_2 &= -5.79 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}. \end{aligned}$$

Полученные действительные и различные корни характеристического уравнения позволяют записать общие выражения свободных составляющих как сумму двух экспонент, и тогда переходные токи и напряжения будут иметь вид:

$$\begin{cases} i_1 = i_{1np} + i_{1св} = i_{1np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ i_2 = i_{2np} + i_{2св} = i_{2np} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \\ i_3 = i_{3np} + i_{3св} = i_{3np} + D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t} \\ u_L = u_{Lnp} + u_{Lсв} = u_{Lnp} + N_1 e^{p_1 t} + N_2 e^{p_2 t} \\ u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв} = u_{Cnp} + M_1 e^{p_1 t} + M_2 e^{p_2 t} \end{cases} \quad (1.147)$$

Определяем постоянные интегрирования, записав выражения токов и напряжений для первого момента времени после коммутации (при $t=0$).

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1np}(0) + A_1 + A_2 \\ i_2(0) = i_{2np}(0) + B_1 + B_2 \\ i_3(0) = i_{3np}(0) + D_1 + D_2 \\ u_L(0) = u_{Lnp}(0) + N_1 + N_2 \\ u_C(0) = u_{Cnp}(0) + M_1 + M_2 \end{cases} \quad (1.148)$$

Определим принужденные значения при $t=0$ из выражений пункта 2).

$$i_{2np}(0) = 0, \quad u_{Cnp}(0) = 171,4 \text{ В}, \quad u_{Lnp}(0) = 0.$$

Определим значения искомых токов и напряжений при $t=0$, для этого составим схему после коммутации, но с источником ЭДС (рис.32).

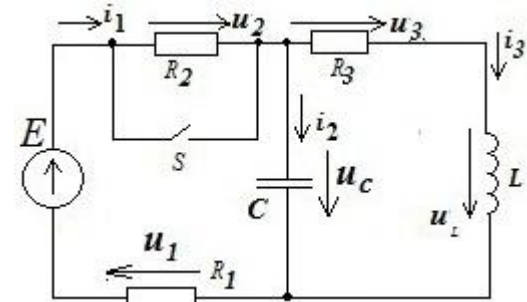


Рис. 30

1). Рассчитаем токи и напряжения в цепи до коммутации:

$$u_C = \text{const}, \quad i_2 = C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0,$$

так как $i_3 = \text{const}$, то

$$u_L = L \cdot \frac{di_3}{dt} = 0. \quad (1.135)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$E = u_2 + u_3 + u_L + u_1 \rightarrow E = i_1 R_2 + i_3 R_3 + 0 + i_1 R_1.$$

Так как $i_2 = 0$, то

$$i_1 = i_3 = \frac{E}{R_2 + R_3 + R_1} = 2 \text{ А}. \quad (1.136)$$

Определим u_C из уравнения:

$$E = i_1 R_2 + u_C + i_1 R_1 \rightarrow u_C = E - i_1 (R_2 + R_1) = 120 \text{ В}.$$

2). Рассчитаем принужденный режим в цепи (при $t=\infty$):

$$\begin{aligned} u_{2np} &= 0, \quad i_{2np} = C \frac{du_{Cnp}}{dt} = 0, \\ u_{Cnp} &= \text{const}, \quad i_{3np} = \text{const}, \\ u_{Lnp} &= L \cdot \frac{di_{3np}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.137)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$E = u_{2np} + u_{3np} + u_{Lnp} + u_{1np},$$

откуда

$$E = i_{3np}R_3 + i_{1np}R_1. \quad (1.138)$$

Так как $i_{2np} = 0$, то

$$i_{3np} = i_{1np} = \frac{E}{R_3 + R_1} = 2,86 \text{ A}. \quad (1.139)$$

Определим u_{Cnp} :

$$E = u_{2np} + u_{Cnp} + u_{1np} \rightarrow E = u_{Cnp} + i_{1np}R_1 \rightarrow \\ \rightarrow u_{Cnp} = E - i_{1np}R_1 = 171,4 \text{ В}. \quad (1.140)$$

3). Рассчитаем свободные составляющие токов и напряжений.

Для этого рассмотрим схему электрической цепи после коммутации и при исключении из схемы внешних вынужденных сил, то есть источников энергии (рис.31).

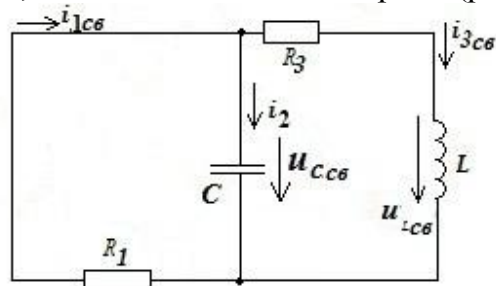


Рис. 31

Для определения характера свободных составляющих токов и напряжений составим характеристическое уравнение данной цепи, которое получим из системы интегрально дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для свободного процесса:

$$\begin{cases} i_{1cs} - i_{2cs} - i_{3cs} = 0 \\ i_{1cs}R_1 + \frac{1}{C} \int i_{2cs} dt = 0 \\ i_{1cs}R_1 + i_{3cs}R_3 + L \frac{di_{3cs}}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1.141)$$

Характеристический полином определяется как главный определитель матрицы, составленный для полученной системы. Алгебраизируя систему уравнений получим:

$$\begin{cases} i_{1cs} - i_{2cs} - i_{3cs} = 0 \\ i_{1cs}R_1 + \frac{1}{Cp} i_{2cs} = 0 \\ i_{1cs}R_1 + i_{3cs}R_3 + Lp i_{3cs} = 0 \end{cases} \quad (1.142)$$

откуда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & \frac{1}{Cp} & 0 \\ R_1 & 0 & (R_3 + Lp) \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{Cp} (R_3 + Lp) + \frac{1}{Cp} R_1 + R_1 (R_3 + Lp). \quad (1.143)$$

Приравняем к нулю характеристический полином и получим характеристическое уравнение, из которого определим его корни:

$$R_3 + Lp + R_1 + R_1R_3Cp + CLp^2 = 0, \quad (1.144)$$

$$p^2 + p \left(\frac{L + R_1R_3C}{LC} \right) + \frac{R_3 + R_1}{LC} = 0, \quad (1.145)$$

$$p^2 + 7 \cdot 10^4 p + 7 \cdot 10^8 = 0, \quad (1.146)$$