

Оглавление

Введение	1
Программа курса	2
Методические указания	4
Задание 1 Исследование задачи линейного программирования	5
Контрольные вопросы к заданию 1	8
Задачи к заданию 1	10
Библиографический список.....	31
Интернет – ресурсы	31

Введение

Курс "Системный анализ в сервисе" введён в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Необходимость методических указаний, в которых с единых позиций излагаются основные практические этапы решения наиболее распространенных задач принятия решений, связана с недостатком литературы по рассматриваемой тематике в библиотечных фондах института и города.

Предлагаемый сборник имеет целью познакомить студентов с задачами, решение которых сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, зависящей, как правило, от большого числа переменных. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях человеческой деятельности и в первую очередь в практике планирования и организации производства.

В сборник включены материалы по разделам: задачи линейного программирования, транспортные задачи, задачи комбинаторного программирования, элементы теории игр, задача о назначениях, целочисленное линейное программирование, квадратичное программирование. К этим разделам принадлежит большое число наиболее распространенных производственных и коммерческих задач. Несмотря на очевидные упрощения, приведённые задачи являются хорошей иллюстрацией проблем, с которыми приходится сталкиваться предприятиям при принятии решений, связанных с распределением ресурсов.

В сборнике кратко изложены идеи и содержание конкретных методов, а также вычислительные аспекты, возникающие при решении задач. Приведены также примеры решения всех рассматриваемых типов задач, а также контрольные вопросы и индивидуальные задания. Поскольку численное решение сложных задач большой размерности затруднительно без использования компьютера, методы и алгоритмы решения указанных выше задач реализованы в виде программ. Исходные тексты программ с описанием их особенностей приведены в [1]. Они могут быть использованы как в учебном процессе, так и при решении практических задач, а также при проверке решений, полученных при ручном решении.

Всё это даёт основания надеяться, что сборник окажется полезным для широкого круга студентов, так или иначе связанных с решением задач оптимизации, организацией и планированием производства с использованием вычислительной техники.

Программа курса

№ раз-дела	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Основные понятия и определения	Понятие системы. Системы с активными элементами. Проблема принятия решения. Методы и модели принятия решения. Этапы построения оптимизационных моделей. Методологические основы теории принятия решений. Задачи выбора решений, отношения, функции выбора, функции полезности, критерии.
2	Задача линейного программирования	Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Симплексный алгоритм и метод решения ЗЛП. Двойственная ЗЛП. Анализ линейной модели на чувствительность. Пример.
3	Транспортная задача	Постановка классической транспортной задачи. Алгоритм решения транспортной задачи. Пример.
4	Задачи комбинаторного типа	Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Назначение и вычисление нижних граничных оценок. Процесс ветвления. Пример.
5	Элементы теории игр	Основные понятия теории игр. Конечные матричные антагонистические игры. Основная теорема матричных игр. Решение матричной игры. Пример. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Элементы теории статистических решений. Критерии, применяемые при решении задач оптимизации. Пример.
6	Задача о назначениях	Математическая постановка задачи выбора. Венгерский алгоритм решения. Пример.
7	Целочисленное линейное программирование	Постановка задачи. Метод Гомори. Принципы формирования дополнительных ограничений. Пример.
8	Динамическое программирование	Метод динамического программирования. Примеры многошаговых операций. Решение числового примера.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

- использовать базовые положения математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-2);
- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как

средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-13);

- обладать культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, систематизации, постановке целей и выбору путей их достижения, уметь логически верно, аргументированно и ясно строить свою речь (ОК-17);

- к обоснованию и разработке технологии процесса сервиса, выбору ресурсов и технических средств для его реализации (ПК-9).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные постановки и алгоритмы решения классических задач принятия решений (ОК-2, ПК-9);

- основные принципы и концепции построения моделей (ОК-2, ОК-13, ОК-17);

- методы и алгоритмы принятия решений (ОК-2, ОК-13, ПК-9).

Уметь:

- обоснованно разрабатывать и выбирать методы решения задач (ОК-2, ОК-13);

- применять ЭВМ для исследования и решения задач (ОК-13);

- анализировать полученные результаты (ОК-2, ОК-13);

- обоснованный выбор вариантов из множества допустимых (ОК-17).

Владеть:

- созданием методик решения задач с активными элементами (ОК-2);

- методами рационального поведения при принятии решений (ОК-17);

- алгоритмическими методами скалярной и векторной конечномерной оптимизации (ОК-2, ОК-13);

- вычислительными аспектами принятия решений (ОК-13);

- разработкой компьютерных алгоритмов (ОК-2, ОК-13).

Методические указания

Современные темпы научно-технического прогресса привели к существенному усложнению процессов организации производства, планирования и управления во всех сферах и отраслях. Тем, кто не сталкивался с необходимостью принимать решения по управлению на разных уровнях, трудно представить, почему возникают сложности, почему не всегда удаётся применить, казалось бы, хорошо разработанный и удобный аппарат математического моделирования. Сложность задач управления растёт быстрее числа занятых в нем людей. Для преодоления этого было предложено изменить технологию сбора и обработки информации и создать автоматизированные системы управления (АСУ). Однако только этот путь оказался недостаточным. Стало очевидным, что необходимо внедрять в сферу управления новые методы и модели, помогающие человеку формировать целостное представление об управляемом объекте. При этом необходимо также понимать и учитывать закономерности функционирования и развития сложных систем, решать коренные проблемы, изменяющие принципы управления.

Наиболее конструктивным из направлений системных исследований является системный анализ. Он ориентирует исследователей, проектировщиков, работников сферы управления не только на учёт тех или иных закономерностей функционирования и развития сложных систем, но и обязательно на разработку методики процесса принятия решения. При этом выделяются этапы, определяется их последовательность, и предлагаются всевозможные подходы и методы выполнения этапов принятия решения в конкретных условиях. Для того чтобы ориентироваться в сложных производственных ситуациях, характеризующихся переплетением экономических, социальных, демографических, экологических и технических факторов, современный инженер должен развить в себе системное мышление, умение анализировать сложные ситуации, ставить задачи, формировать варианты решений и выбирать из них лучший для конкретных условий.

При выполнении контрольной работы необходимо тщательно изучить курс лекций по «Системному анализу в сервисе», внимательно проанализировать примеры решения задач. При необходимости углубленного изучения соответствующих разделов рекомендуется воспользоваться приведёнными в библиографическом списке источниками. Контрольная работа состоит из семи задач. Ниже в соответствующих разделах приводятся варианты задач. Номера задач или выдаются преподавателем или определяются по цифрам номера зачетки. При выполнении контрольной работы необходимо записать условие каждой задачи, привести подробное математическое описание. Решение должно включать достаточное количество пояснений. В конце решения должен быть записан конкретный ответ, соответствующий условию задачи. Решение задачи желательно получить с помощью ЭВМ. Однако в этом случае в контрольной работе должны быть приведены все этапы хотя бы для двух итераций так, как это указано в примерах. При выполнении контрольной работы на ЭВМ необходимо указать, какая программа использовалась, в чём её суть, особенности и как решалась задача.

Задание 1

Исследование задачи линейного программирования

Линейные модели редко встречаются в реальных условиях, но они являются классическими и позволяют быстро получать результаты, приближённо оценивающие решение исходной нелинейной задачи. Модель ЗЛП может быть представлена следующими соотношениями: функция цели: $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$, ограничения: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1 \dots m$; $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, где: c_j, a_j, b_i – постоянные величины.

Одним из методов решения ЗЛП является симплексный алгоритм, который позволяет решить любую задачу линейного программирования (ЛП) и является наиболее удобным и используемым. Он даёт не только численное решение, но и позволяет проанализировать чувствительность полученного решения к исходным данным.

Рассмотрим типичную задачу ЛП по распределению ресурсов. На предприятии, выпускающем неоднородную продукцию, руководитель стремится определить какими должны быть уровни производства для каждого продукта в течение определенного времени. Эти уровни определяются технологическими и другими ограничениями, заданными в виде линейных соотношений. В рамках этих соотношений необходимо достичь максимальной прибыли. Предприятие имеет возможность реализовать от 1 до 4 типов технологических процессов (ТП) и обладает правом выбора того или иного варианта. ТП 1 и 2 ориентированы на получении продукта *A*, а 3 и 4 – продукта *B*. Расходы, связанные с каждым ТП, определяются: трудозатратами (человек в неделю), количеством (ед. веса) потребляемого в течение недели материала *Y* и количеством (ящики) материала *Z*. Поскольку затраты, связанные с различными ТП неодинаковы, то их прибыльность оказывается различной даже в том случае, когда они используются для получения продукции одного и того же вида. При составлении производственного плана на неделю возможности руководителя ограничены как за счёт людских ресурсов, так и за счёт потребляемого сырья *Y* и *Z*. Числовые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Числовые данные задачи

	На ед. продукта <i>A</i>		На ед. продукта <i>B</i>		Имеется в наличии
	ТП 1	ТП 2	ТП 3	ТП 4	
Кол. человек в неделю	1	1	1	1	≤ 15
Количество <i>Y</i> , кг	7	5	3	2	≤ 120
Количество <i>Z</i> , ящ.	3	5	10	15	≤ 100
Доход с ед. продукции	4	5	9	11	max
Объемы выпуска	x_1	x_2	x_3	x_4	

Составим уравнения математической модели. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество продукции, которое должно быть выпущено с использованием соответствующего технологического процесса. Тогда получим:

функция цели: $\max 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$;

ограничения:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Рассмотрим шаги симплекс – алгоритма.

1 Выбирается m переменных, образующих допустимое базисное решение. Выбранные переменные исключаются из функции цели и из ограничений.

2 Рассматриваются коэффициенты функции цели и определяется возможно ли улучшить целевую функцию путем ввода одной из небазисных переменных в базис. Если нельзя, то найдено оптимальное решение. Если можно улучшить, то переходим к третьему шагу.

3 Определяется базисная переменная, которую необходимо вывести из базиса. Вычисляется то максимальное значение, которое может получить новая базисная переменная.

4 Новая базисная переменная исключается из функции цели, ограничения разрешаются относительно нового базиса, осуществляется переход к шагу два.

Приведём модель к стандартному виду. Обозначим функцию цели через z , ограничения преобразуем в равенства путём ввода свободных переменных. Получим:

$$z - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_6 = 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 1x_7 = 100.$$

На шаге 1 в качестве допустимого базисного решения примем свободные переменные, так как они не входят в функцию цели, а ограничения разрешены относительно их: $\{x_5 = 15, x_6 = 120, x_7 = 100, x_0 = 0\}$.

Переходим к шагу 2. Поскольку функция цели содержит отрицательные коэффициенты, то её значение можно улучшить. Видно, что введение в базис x_4 позволит максимально улучшить функцию цели.

Согласно шагу 3 определяем базисную переменную, которую необходимо вывести из базиса. Вводим x_4 в базис, а из базиса выводим x_7 , поскольку эта переменная находится в ограничении, которое определяет максимальное допустимое значение x_4 . Это определяется путём деления значений свободного столбца на положительные коэффициенты, стоящие при новой базисной переменной. Из полученных частных выбирается минимальное.

Исключив на шаге 4 x_4 из всех соотношений, получим:

$$x_0 - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 \dots + \frac{11}{15}x_7 = \frac{220}{3}$$

$$\frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \dots + 1x_5 \dots - \frac{1}{15}x_7 = \frac{25}{3}$$

$$\frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{5}x_2 + \frac{5}{3} \dots + 1x_6 \dots - \frac{2}{15}x_7 = \frac{320}{3}$$

$$\frac{3}{15}x_1 + \frac{5}{15}x_2 + \frac{10}{15}x_3 + 1x_4 \dots + \frac{1}{15}x_7 = \frac{100}{15}.$$

Новое базисное решение примет вид:

$$x_0 = \frac{220}{3}, \quad x_5 = \frac{25}{3}, \quad x_6 = \frac{320}{3}, \quad x_4 = \frac{20}{3}.$$

Переходим к шагу 2.

Все вычисления удобно представить в виде таблицы 2. Продолжая аналогично, после четвёртой итерации получим искомое оптимальное решение.

Таблица 2 - Симплекс-алгоритм

Итерация	Базис	Значения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Строки
1	x_0	0	- 4	- 5	- 9	- 11				0
	x_5	15	1	1	1	1	1			1
	x_6	120	7	5	3	2		1		2
	x_7	100	3	5	10	15			1	3
2	x_0	220/3	- 9/5	-4/3	-5/3				11/15	0
	x_5	25/3	4/5	2/3	1/3		1		-1/15	1
	x_6	320/3	33/5	13/3	5/3			1	-2/15	2
	x_4	20/3	1/5	1/3	2/3	1			1/15	3
3	x_0	1105/12		1/6	-11/12		9 / 4		7 / 12	0
	x_1	125/12	1	5/6	5/12		5 / 4		-1 / 12	1
	x_6	455/12		-7/6	-3/12		-33 / 4	1	5 / 12	2
	x_4	55/12		1/6	7/12	1	- 1 / 4		1 / 12	3
4	x_0	695 / 7		3/7		11/7	13/7		5 / 7	0
	x_1	50 / 7	1	5/7		-5/7	10/7		-1 / 7	1
	x_6	325 / 7		- 6/7		13/7	-61/ 7	1	4 / 7	2
	x_3	55 / 7		2/7	1	12/7	-3/7		1 / 7	3

Все коэффициенты функции цели положительны. Любые изменения значений переменных x_j могут только уменьшить значение функции цели.

Для ЗЛП можно сформулировать двойственную задачу, которая получается с помощью следующих преобразований исходной задачи:

1 j -столбец ограничений исходной задачи становится j -той строкой ограничений двойственной задачи.

2 Свободный столбец ограничений исходной задачи становится коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

3 Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся свободным столбцом ограничений двойственной задачи.

4 Знаки ограничений меняют значения на противоположные. Требование максимизации исходной задачи заменяется в двойственной требованием минимизации.

Если исходная и двойственная задачи имеют ограниченные допустимые решения, то существует оптимальное решение x^* исходной задачи и оптимальное решение y^* двойственной задачи. При этом выполняется соотношение:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$
 Кроме того, коэффициенты при свободных переменных не по-

следней итерации при решении исходной задачи совпадают с оптимальными значениями переменных двойственной задачи. Тогда оптимальными значениями переменных двойственной задачи для рассмотренной выше исходной являются следующие: $y_1^* = \frac{13}{7}$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = \frac{5}{7}$. Следует отметить следующее свойство:

коэффициент при x_j в строке 0 на последней симплекс-итерации при решении исходной задачи представляет собой разность между левыми и правыми частями j -го ограничения двойственной задачи, подсчитанную при оптимальных значениях последней.

Не всегда свободные переменные образуют исходное допустимое решение. В этом случае вводят дополнительные переменные, которые и включают в базис. Из дополнительных переменных составляется вспомогательная функция цели. Решается задача минимизации, в которой за функцию цели берется вспомогательная, а основная функция цели включается в ограничения. Итерации проводят до тех пор, пока вспомогательная функция не примет значение 0 при нулевых значениях дополнительных переменных. При этом, ограничения и основная функция цели разрешаются относительно базисных переменных. Далее переходят к решению основной задачи, отбросив дополнительные переменные и вспомогательную функцию цели.

В [1] приводится исходный текст программы для решения ЗЛП симплекс-алгоритмом.

Контрольные вопросы к заданию 1

- 1 Перечислите и поясните основные этапы построения оптимизационных моделей.
- 2 Сформулируйте постановку задачи линейного программирования.
- 3 Дайте характеристику симплекс-алгоритма.

- 4 Перечислите и поясните основные шаги симплекс-алгоритма.
- 5 Подготовка задачи для решения симплекс-алгоритмом.
- 6 Какие решения называются допустимыми?
- 7 Среди каких решений находится решение ЗЛП.
- 8 Что означает термин «исходное допустимое базисное решение»?
- 9 Свободные переменные и их назначение.
- 10 Можно ли программу, предназначенную для решения задачи минимизации, использовать при решении задачи максимизации?
- 11 Как осуществляется переход к следующей итерации при решении ЗЛП?
- 12 Графическое решение задачи линейного программирования.
- 13 Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
- 14 Сформулируйте двойственную задачу для исходной своего варианта.
- 15 Сформулируйте основные теоремы двойственности.
- 16 Как находится решение двойственной задачи?
- 17 В чем заключается анализ ЗЛП на чувствительность?
- 18 Приведите виды областей допустимых решений ЗЛП.
- 19 Как определяется размерность базисного решения?
- 20 Как построить допустимое базисное решение в общем случае?
- 21 Приведите оценку числа итераций при решении ЗЛП.
- 22 Максимизируйте функцию $z=x_1+2x_2$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_1-x_2 &\leq 3, \\ x_2 &\geq 0, & x_1+4x_2 &\geq 4, \\ -x_1+3 &\geq 0, & x_1+x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\leq 10. \end{aligned}$$
- 23 Минимизируйте функцию $z=-2x_1-x_2$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_1+x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\geq 0, & x_1-x_2 &\leq 2, \\ x_1+2x_2 &\leq 11, & 2x_1-4x_2 &\leq 3. \end{aligned}$$
- 24 Минимизируйте функцию $z=-3x_1-x_2$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_1-x_2 &\leq 1, \\ x_2 &\geq 0, & 2x_1+x_2 &\leq 3, \\ x_1+x_2 &\geq 1, & \alpha x_1+\beta x_2 &\leq 6, \end{aligned}$$
 в случаях: 1. $\alpha=\beta=1$; 2. $\alpha=2, \beta=2/3$; 3. $\alpha=6, \beta=-6$.
- 25 Максимизируйте функцию $3x_1+6x_2+2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_1+3x_2+2x_3 &\leq 1, \\ x_2 &\geq 0, & 3x_1+4x_2+x_3 &\leq 2, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$
- 26 Минимизируйте функцию $-3x_1-4x_2=z$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 5, \\ x_2 &\geq 0, & x_1+x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 10, & -x_1+4x_2 &\leq 20, \end{aligned}$$
- 27 Минимизируйте функцию $-x_1-2x_2-3x_3=z$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &\geq 6, & x_1+x_2+x_3 &= 4, \\ x_1+5x_2+6x_3 &\geq 9, & -x_1+x_3 &\leq 2. \end{aligned}$$

28 Минимизируйте функцию $z=x_1+2x_2-x_3+x_4$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+5x_3+x_4 &= 12 & x_1 &\geq 0, \\ x_1-x_2-x_4 &\geq 6, & x_2 &\geq 0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3 &\leq 7, & x_3 &\geq 0, \\ x_4 &\text{—любое.} \end{aligned}$$

29 Минимизируйте функцию $z=8x_1+2x_2+5x_3$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3 &\leq 7, & x_1 &\geq 0, \\ 3x_2+11x_3 &\geq 5, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

30 Приведите задачу к стандартной форме и найдите исходные допустимые базисные решения:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= -3x_1-4x_2 \\ x_1+x_2 &\leq 20, \\ -x_1+4x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\geq 10, \\ x_2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Задачи к заданию 1

1 На рынок поставляется живая рыба из трех ферм по цене 12, 10 и 8 ед. за один килограмм соответственно. Для своевременной доставки без снижения качества необходимо, чтобы на погрузку 12 тонн рыбы затрачивалось не более 20 минут. На погрузку одной тонны рыбы на фермах затрачивается 1, 6 и 5 минут соответственно. Из каких ферм и в каком количестве надо доставлять рыбу, чтобы ее стоимость была минимальной, если фермы могут продать 10, 8 и 6 тонн рыбы соответственно.

2 На швейной фабрике для изготовления трех видов изделий (A,B,C) используется ткань четырех артикулов. Нормы расхода тканей на пошив одного изделия, имеющиеся запасы тканей на одну неделю работы и стоимость тканей приводятся в следующей таблице 3.

Таблица 3 - Нормы расхода тканей, запасы и стоимость тканей

Артикул ткани	Нормы расхода тканей м/изделие			Запасы, м	Стоимость ден.ед./м
	A	B	C		
I	1.0		1.5	310	12
II		1.0	1.6	350	11
III	1.3	1.2	1.7	620	8
IV	1.4	1.1	1.0	740	6

Трудоёмкость работ в человеко-часах приведена в таблице 4.

Максимизировать прибыль (доход – (стоимость тканей + стоимость трудовых затрат)), если стоимость 1 чел.-часа равна 2 денежным единицам.

Таблица 4 - Трудоёмкость работ

Операция	Человеко-часы/изд.			
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	В неделю не более
Раскрой	1,5	2,0	3,0	860
Пошив	3,5	4,0	4,6	980
Доход, ден.ед./изд.	55	92	185	

3 Фирма занимается составлением диеты из продуктов, указанных в таблице 5.

Таблица 5 - Список продуктов

	Количество единиц на 1 кг (1 л)				
	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	0	3
Углеводы	12	2	0	4	2
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	2	8	6	5	3

Диета должна содержать, по крайней мере, 20 единиц белков, 40 единиц витаминов, не более 30 единиц углеводов и 10 единиц жиров. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах.

4 Автозавод выпускает две модели машин *A* и *B*. Модель *A* приносит прибыль 10000 руб., модель *B* - 7000 руб. На заводе работает 1000 неквалифицированных рабочих и 800 специалистов по 40 часов в неделю. Для изготовления модели *A* требуется 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда, соответственно для модели *B* - 40 и 20 часов. Затраты на изготовление *A* - 1500 руб., *B* - 800. Суммарные затраты не должны превосходить 1000000 руб. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, не могут забрать с завода более 510 машин в неделю. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль за неделю.

5 Для выполнения двух различных работ наняли рабочих четырех квалификационных групп. Причем каждая работа должна последовательно выполняться рабочими каждой группы. При выполнении 1-й работы 1-й квалифика-

ционной группой рабочих выработка равна 52 чел.-час/час, 2-й - 26 чел.-час/час, 3-й - 16 чел.-час/час, 4-й - 40 чел.-час/час. При выполнении 2-й работы 1-й квалификационной группой рабочих выработка равна 22 чел.-час/час, 2-й - 49 чел.-час/час, 3-й - 50 чел.-час/час, 4-й - 49 чел.-час/час. Общий фонд времени, в течение которого 1-я группа рабочих может быть занята выполнением работ, не превышает 1188 чел.час, 2-я группа - 1658 чел.час, 3-я группа - 1650 чел.час, 4-я группа - 1780 чел.час. Объем первой работы не превышает 14 часов, а второй - 32,5 часа. Составить такой план выполнения работ (в чел.-часах), при котором объем выполненных работ в ден. ед. был бы максимальным, если стоимость первой работы составляет 85 тысяч ден. ед., а 2-й - 100 тысяч.

6 Рацион кормления коров на молочной ферме весной может состоять из четырех продуктов: два типа сена (клеверное и луговое), концентраты и силос. Эти продукты содержат различные питательные вещества: белок, кальций, витамины, фосфор, сырные единицы, кормовые единицы. Суточное потребление этих веществ должно быть не менее установленных норм, за исключением потребления витаминов, которое должно быть строго дозировано в количестве 87 мг в сутки. В таблице 6 приводятся необходимые сведения на 1 корову.

Ферма содержит 900 единиц скота. Сколько кг исходных продуктов должна закупить ферма, чтобы обеспечить самый дешевый рацион кормления. Расчеты провести на период 1 сутки.

Таблица 6 - Данные к задаче 6

Продукты	Содержание питательных веществ мг в 1 кг продукта						Цена 1 кг
	Белок	Кальций	Витамины	Фосфор	Сырн. ед.	Корм. ед.	
Клеверное сено	10	10	1,2	7	180	170	2,1
Луговое сено	8	10	1,5	9	260	130	1,7
Концентраты	18	3	2,1	6	20	650	6
Силос	120	6	1,1	8	290	120	1,3
Норма потр.	6500	210	87	214	2460	9220	

7 Университет принимает не более 4000 студентов своей страны. С одной из стран имеется соглашение о приёме не более 300 студентов. Из других стран разрешается приём любого количества иностранных студентов. Университет получает 2800 руб. на каждого студента своей страны и берёт плату в 3000 руб. за каждого иностранного студента в год. Персонал университета составляет 440 человек преподавателей. Для обучения 12 студентов своей страны или 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо, чтобы одновременно смогли разместиться 40% студентов своей страны и 80% иностранных студентов в аудиториях на 2800 мест (остальные в лабораториях). Максимизировать доход.

8 Компания производит столы типа: A , B , C . Производство B и C суммарно ограничено 170 столами в неделю, выпуск A должен быть не менее 80 единиц. Трудоёмкость работ в человеко-часах приведена в таблице 7.

Таблица 7 - Трудоёмкость работ

Операция	Человеко-часы			
	A	B	C	В неделю не более
Изготовление	2	3	2	360
Сборка	1	2	3	240
Полировка	1	1	2	180
Доход, руб.	18	22	19	

Максимизировать доход.

9 Предприятие выпускает три вида продукции (A , B , C) и использует пять типов основного оборудования (I , II , III , IV , V). Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице 8. В этой таблице указаны общий фонд рабочего времени оборудования и прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Максимизировать доход, если каждое оборудование I , II , III обрабатывает последовательно изделия на трех первых стадиях, а на четвертой стадии подключается оборудование IV или V , которое взаимозаменяемо.

Таблица 8 - Затраты времени на изготовление единицы продукции

Тип оборудования	Затраты времени			Общий фонд времени
	A	B	C	
I	1		1	340
II	1	1	1	510
III	2	3		780
IV	4	2	3	520
V	3	2	4	560
Цена	26	16	19	

10 Фабрика выпускает кожаные куртки, пальто и шубы. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка: дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Численность их ограничена и соответственно по участкам равна 8, 9, 10 человек. Время обработки изделий на каждом участке, их полная себестоимость и оптовая цена приведены в таблице 9.

Таблица 9 - Время обработки изделий, их полная себестоимость и оптовая цена

Участки	Нормы времени, чел.-часы/изд.		
	Куртки	Пальто	Шубы
Дубильный	0,5	0,6	0,5
Раскройный	0,4	0,7	0,6
Пошивочный	0,6	0,9	0,8
Себестоимость 1 изд.	325	990	940
Цена 1 изд.	790	1530	1980

Максимизировать прибыль, если на фабрике пятидневка по 8 часов рабочего времени ежедневно.

11 Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырёх средств: телевидение, радио, газеты, афиши. Эти средства приводят к увеличению прибыли на 10, 3, 7 и 4 ден.ед. в расчёте на 1 ден.ед., затраченную на рекламу. Общие затраты на рекламу 500000 ден.ед., не более 40 % из них - на телевидение и не более 20 % - на газеты. На радио следует тратить не менее половины затрат на телевидение. На афиши - не более половины затрат на газеты. Распределить максимально эффективно средства на рекламу.

12 Небольшая фирма производит 4 типа подшипников: А, В, С, D. Исходные данные приводятся в следующей таблице 10.

Таблица 10 - Исходные данные к задаче 12

	Время обработки, час/изделие			Доход от продажи 1 подшипника руб.
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный станок	
А	0,1	0,2	0,1	10,0
В	0,2	0,3	0,4	12,5
С	0,3	0,1	0,2	20,0
D	0,4	0,2	0,1	27,5
Время работы, час	160	140	150	

На сборке работают 9 человек. Средняя норма времени на сборку одного подшипника - 40 мин. Восьмичасовой рабочий день. Максимизировать доход, если рынок сбыта ограничен 900 подшипниками в неделю.

13 Ткацкая фабрика должна работать 24 часа в сутки согласно следующей таблице 11.

Таблица 11 - Время работы ткацкой фабрики

Время суток, час	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-2
Минимально необходимое в смену количество ткачей	4	8	10	7	9	4

Каждый ткач должен работать подряд 8 часов в сутки. Найти минимально необходимое удовлетворяющее перечисленным выше требованиям суммарное количество ткачей, которое должно работать на фабрике.

14 Чаеразвесочная фабрика выпускает чай трех сортов, смешивая три ингредиента (A , B , C): цейлонский, индийский и краснодарский чай. В таблице 12 приведены нормы расхода ингредиентов и цена 1 т чая каждого сорта.

С поставщиками сырья имеются договоренности. Поставки цейлонского чая – не более 950 т в неделю, индийского – не более 750 т, краснодарского – 1000. Максимизировать прибыль, если стоимость 1 т цейлонского чая – 200, индийского – 185, краснодарского – 110 ден.ед..

Таблица 12 - Нормы расхода ингредиентов и цена

Сорт чая	Нормы расхода ингредиентов, т/т						Цена
	A		B		C		
	мин	макс	мин	макс	мин	макс	
I	0,5			0,3			520
II		0,3	0,2				460
III		0,2			0,5		400

15 Имеются три технологических процесса для выделения из руды двух целевых веществ A и B . Из каждой тонны руды при применении процессов I, II, III получается соответственно 0,4 и 0,6; 0,6 и 0,4; 0,2 и 0,3 кг вещества A и B . Затраты составляют 5000 ден.ед. для процесса I, 6000 - для процесса II, 4000 - для процесса III. Определить оптимальное распределение 12 т руды по процессам I, II, III, минимизирующее затраты, если необходимо получить не менее 4кг вещества A и не менее 5 кг вещества B .

16 Предприятие выпускает 6 типов продукции из четырех видов сырья. Запасы сырья ограничены величинами: 1-16, 2-10, 4-24, сырье 3-32 единиц. Расход каждого вида сырья в единицах на единицу выпускаемой продукции A, B, C, D, E, F приведён в следующей таблице 13:

Таблица 13 - Расход каждого вида сырья

	A	B	C	D	E	F
1	4			1		
2		2			1	
3			1	2	6	
4	4	3				1

Затраты в руб. на единицу каждого типа продукции: $A - 0,4$; $B - 0,5$; $C - 0,2$; $D - 0,8$; $E - 0,6$; $F - 0,3$. Обеспечить минимум затрат при выпуске продукции, если рынок сбыта A, B, E ограничен, так что их суммарный выпуск составляет не более 75% от $C+D$.

17 На ткацкой фабрике для изготовления трех видов ткани (A, B, C) используются ткацкие станки двух видов, пряжа и красители. В таблице 14 приведены производительность станков (часов на 1 м ткани), нормы расхода пряжи и красителей (кг на 1 м), цена на продукцию. Кроме того, приводятся ограничения по общему фонду рабочего времени станков, расходу пряжи, красителей и допустимые ограничения по выпуску тканей.

Таблица 14 - Производительность станков, нормы расхода пряжи и красителей

Ресурсы	Нормы затрат			Ограничения по ресурсам
	A	B	C	
1 станок	0.02		0.04	300
2 станок	0.05	0.03		350
Пряжа	1	2	1,5	15000
Красители	0,12	0,25	0,2	550
Минимальный выпуск ткани	1000	2000	3000	
Максимальный выпуск ткани	2000	8000	6000	
Цена	10	16	9	

Максимизировать доход.

18 Средства очистки оцениваются по трем показателям: a - очищающие свойства, b - дезинфицирующие свойства, c - раздражающее воздействие на кожу. Кроме того, в состав входят стабилизирующие вещества - z . Эти показатели оцениваются по линейной шкале от 0 до 100. Продукт есть смесь четырех веществ 1, 2, 3, 4, в котором необходимо обеспечить a - не менее 60 единиц, b - не менее 50 единиц, c - не более 10. Свойства веществ приведены в таблице 15.

Разработать состав средства очистки.

Таблица 15 - Свойства веществ

Вещество	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающие свойства	Стабилизирующие свойства
1	85	30	60	2
2	65	75	50	4
3	45	40	10	7
4	20	10	5	40

19 Фирма производит 3 типа мебели A, B, C . Затраты труда в человеко-часах на единицу продукции приведены в таблице 16.

Таблица 16 - Затраты труда на единицу продукции

Участок	Человеко-часы		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	3	1	2

Прибыль от продажи *A* - 9, *B* - 11, *C* - 15 руб. Максимизировать прибыль за неделю, если на лесопилке работает 9, в сборочном цехе – 13, в отделочном цехе – 6 человек. Рабочий день – 8 часов, пятидневка.

20 Нефтеперерабатывающий завод может использовать три различные (*A*, *B*, *C*) технологии для производства бензина, керосина и солярового масла. В таблице 17 приводятся данные, которые определяют выпуск продукции, отходы, издержки производства, загрузку оборудования в расчете на 1 т нефти.

Таблица 17 - Выпуск продукции, отходы, издержки производства, загрузка оборудования

Продукция, отходы, издержки, загрузка	Выход продукции, т/т			Цена Ден.ед./т
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Бензин	0,6	0,3	0,2	1000
Керосин	0,1	0,3	0,5	500
Соляровое масло		0,3	0,1	200
Отходы, ден.ед./т	0,3	0,1	0,2	
Издержки, ден.ед./т	21	39	35	
Загрузка оборудования, час/т	0,2	0,08	0,12	

Ресурс оборудования составляет 75 час в сутки. Все отходы должны пройти очистные сооружения, производительность которых составляет 135 т в сутки. Поставки нефти не ограничены. Спрос на бензин – не менее 117 т в сутки, керосин – не менее 54 т и соляровое масло – не более 86 т в сутки. Максимизировать прибыль.

21 Машиностроительное предприятие для изготовления трех видов продукции (*A*, *B*, *C*) использует токарное, фрезерное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия. Сборка изделий требует выполнения сборочно-наладочных работ (час на изделие). Эту работу могут выполнять не более 290 работников. Нормы затрат всех видов ресурсов (часов на изделие), фонд рабочего времени по оборудованию (час), доход от реализации изделий приведены в таблице 18.

Максимизировать недельный доход, если на предприятии пятидневка, рабочее время - 7 часов ежедневно.

Таблица 18 - Нормы затрат всех видов ресурсов (часов на изделие), фонд рабочего времени по оборудованию (час), доход от реализации изделий

Ресурсы, Оборудование	Нормы затрат, расход			Объем ресурсов
	А	В	С	
Токарное	5,5	2,7	1,4	64180
Фрезерное	4	1	1	24000
Сверлильное	6,2	2,6	2,2	17200
Расточное	3	1		17000
Шлифовальное	2		4	9000
Комплектующие	3	5	4	21900
Сборочные работы	1,5	4,5	3,5	
Доход	312	476	409	

22 Компания производит станки типа D_1 , D_2 , D_3 . Имеется обязательство - обеспечить занятость не менее 300 рабочих. Исходные данные на единицу продукции приводятся в таблице 19.

Таблица 19 - Исходные данные на единицу продукции

	Расход комплектующих			
	D_1	D_2	D_3	В неделю (не более)
Комплектующие				
F_1	3	2	10	670
F_2	4	3	10	880
F_3	2	3	8	705
Занятость (час) рабочих на 1 продукции	1,5	1	5	
Доход, руб.	10	12	35	

Максимизировать доход, если предприятие работает по 7 часов 5 дней в неделю.

23 Для выращивания четырех культур применяются удобрения. Какую площадь необходимо занять под культуры в каждой зоне, чтобы обеспечить максимальный суммарный прирост урожайности? Нормы внесения удобрений (ц/га), прирост урожайности, запасы удобрений и посевная площадь приводятся в следующей таблице 20.

Для того, чтобы прирост урожайности был таким, как указано в таблице, первую культуру нужно сеять в зонах I и II, вторую – III, третью – II, III, четвертую – в любой зоне.

Таблица 20 - Нормы внесения удобрений (ц/га), прирост урожайности, запасы удобрений и посевная площадь

Зоны	Посевная площадь, га	Фосфорные	Азотные	Калийные	Прирост урожайности, ц/га
I	100000	1,25	1,5	1	12
II	150000	1	1	1	14
III	200000	1	0,5	0,2	10
Запасы удобрений, ц		400000	300000	180000	

24 Для обогрева помещений используются четыре типа агрегатов, каждый из которых может работать на смеси из пяти сортов топлива. Запасы топлива ограничены в количествах 170, 300, 70, 80, 500 т. Потребности в топливе каждого из агрегатов составляют 140, 160, 130, 180 т в месяц. Теплотворная способность каждого сорта топлива при использовании его в смеси равна соответственно 8, 6, 7, 11, 8 кал на кг. Определить, какое количество агрегатов каждого вида используется для обогрева помещений при условии, что выделяется максимальное количество теплоты. Состав смесей, используемых при работе агрегатов, приводится в таблице 21.

Таблица 21 - Состав смесей, используемых при работе агрегатов

Агрегат	Состав топлива, %				
	1	2	3	4	5
1	17	40	5	5	33
2	16	24	7	8	45
3	12	30	11	9	38
4	9	20	16	13	42

25 Компания импортирует красные вина трех марок (таблица 22).

Таблица 22 - Марки красных вин

Марка красного вина	Цена 1 бутылки, ед.	Количество импортируемых бутылок в год
Французское бургундское	1,08	100000
Французское бордо	0,96	130000
Испанское красное	0,50	150000

Красные вина смешиваются для получения столовых вин трёх марок (таблица 23).

Таблица 23 - Состав столовых вин

Марка столового вина	Содержание красного вина, %		Макс. количество продаваемых бутылок в год	Цена 1 бутылки, ед.
	Не менее	Не более		
Божеле	30 (бургундское)	50 (испанское красное)	200000	1,96
Нюн-Сент- Жорж	30 (бургундское)	30 (испанское красное)	Не ограничено	2,46
Сент-Эмильон	60 (бордо)	30 (испанское красное)	180000	2,08

Максимизировать доход.

26 Для производства трех видов продукции (*A*, *B*, *C*) предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья, нормо-часы на изготовление одного изделия, общий фонд рабочего времени каждого из групп оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, цена одного изделия и ограничения на выпуск продукции приводятся в таблице 24.

Таблица 24 -. Нормы затрат сырья, общий фонд рабочего времени каждого из групп оборудования, объёмы имеющегося сырья, цена одного изделия и ограничения на выпуск продукции

Ресурсы, Оборудование	Нормы времени, нормы затрат			Объем ресурсов
	A	B	C	
Оборудование 1	18	4	7	1005
Оборудование 2	4	1	2	280
Сырье 1	12	20	18	2110
Сырье 2	35	25	30	5800
Минимальный выпуск изделий	10	22	14	
Максимальный выпуск изделий	25	35	34	
Цена	32	26	40	

Максимизировать доход.

27 Нефтеперерабатывающий завод производит в месяц 1500000 л алкилата, 1150000 л крекинг-бензина и 1300000 л изопентона. Затраты на производство этих продуктов соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,8 ден.ед. за л. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1, 3:1:2, 2:2:3 получается соответственно бензин сортов А, В, С. Рыночная стоимость 1000 л бензина сорта А равна 1500 ден.ед., В – 1800, С – 2000. Максимизировать прибыль.

28 Прядильная фабрика для производства четырех видов пряжи (*A*, *B*, *C*, *D*) использует четыре типа сырья (чистая шерсть, капрон, акрил, хлопок) и три типа станков. На первом станке производится пряжа *A*, на втором – *B*, третьем – *C*. После небольших настроек эти станки могут использоваться для изготовления пряжи *D*. В таблице 25 указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может использоваться в течение месяца и прибыль от реализации тонны пряжи каждого типа.

Таблица 25 - Нормы расхода сырья, его общее количество и прибыль от реализации тонны пряжи

Тип сырья	Нормы расхода т/т				Количество сырья
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
Шерсть	0,5	0,2	0,3		980
Капрон	0,1	0,3	0,2	0,1	600
Акрил	0,1	0,4	0,2	0,6	1220
Хлопок	0,3	0,1	0,3	0,3	960
Доход	1320	840	970	1240	

Нормы времени по изготовлению пряжи и фонд рабочего времени станков приводятся в таблице 26.

Таблица 26 - Нормы времени по изготовлению пряжи и фонд рабочего времени

Тип сырья	Нормы времени час/т				Фонд рабочего времени
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
Станок 1	2,5			1,8	200
Станок 2		2,1		1,6	180
Станок 3			1,8	1,7	200

Максимизировать доход.

29 При производстве трех видов кабеля (*A*, *B*, *C*) выполняются пять групп операций. Нормы затрат по времени на 1 км кабеля каждого вида, общий фонд рабочего времени по каждой группе операций, прибыль от реализации кабеля приводятся в таблице 27.

Всего занято 260 человек, из них операции волочения и скручивания могут выполнять 80 работников, наложение изоляции, освинцовывания – 90, остальные работники могут выполнять любые операции. Максимизировать доход, если на предприятии пятидневка по 8 часов ежедневно.

Таблица 27 - Нормы затрат, общий фонд рабочего времени, прибыль от реализации кабеля

Технологическая операция	Затраты времени, час/км		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
Волочение	1.2	1.8	2.1
Наложение изоляции	5.0	0.4	0.5
Скручивание	0.4	5.6	5.8
Освинцовывание	3.0		
Испытание и контроль	2.5	1.2	1.5
Доход	125	95	104

30 Мебельная фабрика для производства столов и двух видов шкафов использует древесину двух видов. Необходимые ресурсы, нормы затрат на одно изделие данного вида, доход от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице 28.

Таблица 28 - Нормы затрат, доход от реализации одного изделия и количество имеющихся ресурсов

Ресурсы	Нормы затрат на 1 изделие			Запасы, кубометры
	Стол	Шкаф 1	Шкаф 2	
Древесина 1	0,2	0,1	0,3	300
Древесина 2	0,1	0,2	0,2	400
Трудоемкость, чел-час	1,2	1,8	2,1	
Доход	85	125	145	

Максимизировать доход за 1 месяц, если на фабрике работают 10 человек по восемь часов в день. В 1 месяце 25 рабочих дней.

31 Фирма производит три модели книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем максимальной обработки. Для каждого изделия модели *A* требуется 3 м^2 досок, для изделия *B* – 4 м^2 , *C* – 5 м^2 . Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м^2 досок в неделю. Для каждого изделия модели *A* требуется 12 мин машинного времени, для *B* – 30 мин., для *C* – 36 мин. В неделю можно использовать не более 160 часов машинного времени. Изделие *A* приносит 140 ден.ед., изделие *B* – 250 ден.ед., изделие *C* – 300 ден.ед. дохода. Полки *B* и *C* имеют ограниченный спрос – не более 350 в неделю. Максимизировать доход.

32 Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из пяти продуктов: клеверное и луговое сено, свекла кормовая, концентраты и силос. Эти продукты содержат различные питательные вещества: белок, кальций, витамины, фосфор, сырные единицы, кормовые единицы. Суточное потребление

этих веществ определяется установленными нормами. Потребления витаминов должно быть строго дозировано в количестве 87 мг в сутки, фосфор и кальций – не более нормы, остальные компоненты – не менее нормы. В таблице 29 приводятся все необходимые сведения на 1 корову.

Таблица 29 - Сведения к задаче 32

Продукты	Содержание питательных веществ мг в 1 кг продукта						Цена 1 кг
	Белок	Кальций	Вита- мины	Фосфор	Сырн. ед.	Корм. ед.	
Клеверное сено	10	10	1,2	7	180	170	2,1
Луговое сено	8	10	1,5	9	260	130	1,7
Концентраты	18	3	2,1	6	20	650	6
Кормовая свекла	18	22	2,6	3,5	80	430	4,8
Силос	120	6	1,1	8	290	120	1,3
Нормы потр.	6500	210	87	214	2460	9220	

Ферма содержит 1000 единиц скота. Сколько кг исходных продуктов должна закупить ферма, чтобы обеспечить самый дешевый рацион кормления, учитывая, что клеверное и луговое сено заготовлено в количествах 2,1 и 3 т (возможно, этого не хватит, поэтому нужно докупить). Расчёты провести на период 1 сутки.

33 Нефтяная компания закупает необработанную нефть из нескольких источников W , X , Y и Z и занимается её очисткой, вырабатывая различные виды A , B и C смазочных масел, готовых к продаже. Каждое масло включает в себя фракции всех четырех сортов нефти. Имеются ограничения на состав масел, а также ограничения на количество реализуемых на рынке смазочных масел. Цены (в условных единицах) 1 галлона сырья и смазочных масел приведены в таблице 31. Предполагая, что необходимая нефть доступна в неограниченном количестве, максимизировать прибыль.

Таблица 30 - Ограничения на состав и на количество реализуемых на рынке смазочных масел

Масло	Состав, %	Возможное количество для продажи, галлоны
A	Не менее 10 (W) Не больше 25 (Z)	90000
B	Не меньше 15 (W)	100000
C	Не меньше 20 (X) Не больше 50 (Y)	120000

Таблица 31 - Цены (в условных единицах) 1 галлона сырья и смазочных масел

Сырье				Масло		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

34 Механический цех должен выполнить заказ по изготовлению 4000 изделий типа *A*, 3000 изделий *B* и 2500 изделий *C*. Имеется оборудование трех видов, которое может быть использовано для изготовления соответственно *A*, *B*, *C*. После небольшой настройки оборудование может использоваться для производства любых заданных изделий без потери их качества. Задан запас производственной мощности оборудования – соответственно 300, 500, 260 часов в неделю. Производительность (числитель) каждого оборудования (изделий за час) и себестоимость (знаменатель) каждого изделия приводятся в таблице 32. Цена реализации соответственно равна 310, 296, 320 денежных единиц.

Таблица 32 - Производительность оборудования и себестоимость изделий

Изделия	Производительность оборудования и себестоимость изделий		
	I	II	III
<i>A</i>	40/50	25/38	70/62
<i>B</i>	33/27	26/32	48/41
<i>C</i>	42/60	34/52	50/72

Максимизировать прибыль при условии выполнения заказа.

35 Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы трех типов: *A*, *B* и *C*. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы – не более 240 человеко-часов и количеством поставляемых листов – не более 1000 m^2 . Доход от продажи *A* – 400 ден.ед., от продажи *B* – 700 ден.ед., *C* – 800 ден.ед. Максимизировать доход, если на изготовление единицы *A* требуется 0.5 человеко-часов и 3 m^2 стального листа, *B* – 1.5 человеко-часа и 4 m^2 стального листа, *C* – 1.5 человеко-часа и 4,5 m^2 стального листа. Спрос на радиаторы *C* ограничен 250 штук в неделю.

36 На звероферме выращиваются черно-бурые лисицы, норки и выдры. Для их питания используются четыре вида кормов. В таблице 33 приводятся нормы расхода кормов, их себестоимость, их ресурс в расчёте на день, а также доход от продажи 1 шкурки.

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль была максимальна.

Таблица 33 - Нормы расхода кормов, их себестоимость, их ресурс в расчёте на день и доход от продажи 1 шкурки

Вид Корма	Нормы расхода, кг на особь			Ресурс, кг	Себестоимость
	Лиса	Норка	Выдра		
I	1	2	3	650	8
II	3	1		760	9
III	2	2	2	1000	11
IV	1	3	2	570	6
Доход	76	95	108		

37 Была предложена следующая простая модель сельскохозяйственного производства на Нарвских островах для внешнего рынка. Имеется три основные культуры, растущие в этом климате, и выращиваться они могут на одном из двух типов пахотных земель: $14 \cdot 10^5$ акров земли типа 1 и $12 \cdot 10^5$ акров земли типа 2. Разные типы культур по-разному растут на разных землях. В таблице 34 приводятся величины урожайности каждой культуры на каждом типе земли (ц/акр).

Таблица 34 - Урожайность культур на каждом типе земли

Культуры	Типы земель	
	1	2
I	6	7
II	8	5
III	4	5

Все культуры требуют дополнительного ирригационного орошения. Имеющаяся ирригационная система обеспечивает $56 \cdot 10^5$ м³ воды в год. В таблице 35 приводятся нормы орошения (м³/акр).

Таблица 35 - Нормы орошения

Культура	Расход воды	
1	2	3
2	3	3
3	3	2

Население, занятое в сельском хозяйстве, составляет $7 \cdot 10^5$ человек. Чтобы получить урожай культур 1, 2, 3 с каждых 10 акров земли, для выполнения различных работ по выращиванию культур в течение 1 года требуется соответственно 2, 1, 3 человека. Максимизировать доход, если рыночные цены культур соответственно равны 15, 16 и 9 денежных единиц за 1 ц.

38 В некоторой местности в двух пунктах *A* и *B* имеется потребность в дополнительном транспорте. В пункте *A* требуется 5 дополнительных автобу-

сов, а в пункте B – 7. Известно, что 3, 4 и 5 автобусов могут быть получены соответственно из гаражей G_1 , G_2 , G_3 . Как следует распределить эти автобусы между пунктами A и B , чтобы минимизировать их суммарный пробег? Расстояния от гаражей до пунктов A и B приведены в таблице 36.

Таблица 36 - Расстояния от гаражей до пунктов A и B

Гараж	Расстояние до пунктов	
	A	B
G_1	3	4
G_2	1	3
G_3	4	2

39 Свиноферма имеет возможность покупать три различных видов зерна и приготавливать различные виды смесей. Различные зерновые культуры содержат разное количество питательных компонентов.

Таблица 37 - Количество питательных компонентов

	Единица веса			Минимальные суммарные потребности
	Зерно 1	Зерно 2	Зерно 3	
Ингредиент A	2	3	7	1250
Ингредиент B	1	1	0	250
Ингредиент C	5	3	0	900
Ингредиент D	0.6	0.25	1	232.5
Затраты в расчёте на единицу веса, ед.	41	35	96	

Установлено, что комбикорм для свиней должен удовлетворять минимальным требованиям с точки зрения питательности. Необходимо определить, какая из всех возможных смесей является самой дешёвой. Ферма содержит 1000 единиц поголовья, средний вес каждой единицы – 110 кг. Определить план закупки кормов.

40 Фирмой выпускаются радиоприёмники трёх различных моделей: модель A , модель B и модель C . Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 11, 15 и 25 единиц, соответственно. Каждая модель характеризуется определённым временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и упаковки. В расчёте на 10 приёмников модели A требуется 3 ч для изготовления соответствующих деталей, 4 ч на сборку и 0.5 ч на упаковку. Соответствующие показатели в расчёте на 10 приёмников модели B равняются 3.5, 5 и 1.5 ч, а на 10 приёмников модели C – 5, 8 и 3 ч. В течение недели фирма может израсходовать на производство радиодеталей 150 ч, на сборку 200 ч, на упаковку 60 ч.

Определить максимальный доход, который может получить фирма за неделю.

41 Фирма в районе лесного массива имеет лесопильный завод и фабрику, на которой изготавливают 2 сорта фанеры. Чтобы получить 2.5 м^2 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2.5 м^3 еловых и 7.5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых, 10 м^3 пихтовых лесоматериалов для 1 сорта и 7 м^3 еловых и 8 м^3 пихтовых лесоматериалов для 2 сорта. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов. Доход с 1 м^2 пиломатериалов составляет 16 ед., а со 100 м^2 фанеры 1 сорта – 60 ед, 2 сорта – 40 ед.. Какой максимальный доход может получить фирма при использовании имеющихся лесных ресурсов, если выпуск 2 сорта фанеры не превосходит 75% от выпуска 1 сорта?

42 Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделил 34 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 кв. м. Фермер может заказать оборудование двух типов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден. ед., требующие производственную площадь 3 кв. м и обеспечивающие производительность за смену 2 т зерна, и более мощные типа В стоимостью 4 ден. ед., занимающие площадь 5 кв. м и обеспечивающие производительность за смену 3 т зерна. Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер из-за энергетических ограничений может приобрести не более 8 машин типа В.

43 На ферме выращивается на 4 полях пшеница, кукуруза и рожь. В таблице 38 указаны площадь каждого поля и урожайность культур.

В соответствии с рыночными условиями пшеницы необходимо произвести не более 12000 ц, ржи – не менее 9000 ц. Требуется определить такое сочетание посевов, чтобы валовый доход от реализации урожая был бы максимальным.

Таблица 38 - Площадь полей и урожайность культур

Поле	Площадь, га	Урожайность, ц/га		
		Пшеница	Кукуруза	Рожь
1	400	20	35	16
2	300	35	50	12
3	100	25	40	10
4	200	30	45	18
Цена 1 ц		7	5	9

44 На заводе производятся изделия четырех наименований, причем изделие одного наименования может быть изготовлено по трем различным технологиям. Производство каждого изделия сопряжено с расходами четырех различных видов ресурсов, нормы которых приведены в таблице 39.

Таблица 39 - Нормы расходов ресурсов

Наименование изделия	Вид технологии	В и д р е с у р с о в			
		1	2	3	4
1	1	0.9	1.1	1.15	1.2
	2	0.8	0.9	1.4	1.5
	3	0.9	1.3	0.75	1.6
2	1	2.0	2.2	1.9	3.0
	2	2.1	3.4	1.4	1.8
	3	2.1	3.1	1.95	2.3
3	1	1.85	4.0	3.6	0.8
	2	1.7	3.8	4.5	1.2
	3	1.9	4.1	4.2	2.0
4	1	1.25	4.2	3.9	2.8
	2	2.1	3.5	3.2	2.9
	3	2.2	2.9	3.1	3.0

Ресурсы каждого вида ограничены значениями: 30,50,90,80. Стоимость одного изделия в соответствии с технологией изготовления приведена в таблице 40.

Таблица 40 - Стоимость одного изделия в соответствии с технологией

	1	2	3
1	1.1	1.3	1.5
2	1.5	1.6	1.2
3	1.6	1.4	1.7
4	1.4	1.6	1.2

Как организовать производство изделий, чтобы общая стоимость продукции была максимальна?

45 Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами *A* и *B*. Машина *A* спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина *B* - для литровых, но каждое из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведёнными в таблице 41 сведениями о работе машин.

Таблица 41 - Сведения о работе машин

Машина	Количество бутылок, производимых в 1 мин.	
	Пол-литровые бутылки	Литровые бутылки
A	50	20
B	30	40

Каждая из машин работает ежедневно по 6 ч при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 ед., а от литровой 10 ед. Недельная продукция не может превосходить 50 000 л; рынок принимает не более 44 000 пол-литровых бутылок и 30 000 литровых. Производитель хочет максимизировать свою прибыль при имеющихся средствах. Сформулируйте задачу в виде задачи линейного программирования и найдите оптимальное решение.

46 Небольшая фирма производит четыре типа подшипников A,B,C и D, каждый из которых должен быть обработан на трёх станках, а именно на токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице 42.

Таблица 42 - Время выполнения стадий производственного процесса

Тип подшипника	Время обработки, ч			Прибыль от продажи одного подшипника, ед.
	Токарный	Шлифовальный	Сверлильный	
A	0.01	0.02	0.04	80
B	0.02	0.01	0.01	125
C	0.03	0.01	0.02	200
D	0.04	0.02	0.01	275
Полное время работы в неделю, ч	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих её прибыль. Сформулируйте задачу линейного программирования и получите решение с использованием симплекс-алгоритма.

47 Фирма, специализирующаяся на производстве замороженных пищевых полуфабрикатов, выпускает три различных продукта: 1- картофельные дольки, 2- картофельные кубики, 3- картофельные «хлопья», каждый из которых получается путем определенной обработки картофеля и подлежит соответствующей упаковке. Фирма может купить картофель у двух поставщиков. При этом объемы продуктов, которые можно получить из одной тонны картофеля, зависят от поставщика согласно таблицы 43.

Таблица 43 - Выход продукции

Продукт	Поставщик 1, т	Поставщик 2, т
1	0.2	0.3
2	0.2	0.1
3	0.3	0.3

При этом каждого продукта должно быть выпущено, соответственно, не более 1.8 т; 1.2 т; 2.4 т. Какое количество картофеля следует купить у каждого

из поставщиков, если относительная прибыль при покупке картофеля у поставщика 1 равна 5 ед. и у поставщика 2 равна 4 ед.

48 Фирма производит два продукта A и B , рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III. Время обработки в часах для изделий A и B приведено в табл. 44.

Таблица 44 - Время обработки одного изделия

	I	II	III
A	0.5	0.4	0.2
B	0.25	0.3	0.4

Время работы машин I, II, III, соответственно, 40, 36 и 36 часов в неделю. Прибыль от изделий A и B составляет, соответственно, 5 и 3 единиц. Фирме нужно определить нормы выпуска изделий A и B , максимизирующие прибыль. Сформулируйте эту задачу как задачу линейного программирования и решите её.

49 Фирма в районе лесного массива имеет лесопильный завод и фабрику, на которой изготавливают фанеру. Чтобы получить 2.5 м^2 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2.5 м^2 еловых и 7.5 м^2 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^2 еловых и 10 м^2 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^2 еловых и 180 м^2 пихтовых лесоматериалов. Доход с 1 м^2 пиломатериалов составляет 16 ед., а со 100 м^2 фанеры - 60 ед. Какой максимальный доход может получить фирма при использовании ресурсов лесоматериалов?

Библиографический список

- 1 Теория принятия решений: Сб. описаний лаб. работ / РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2012. -83с.
- 2 Системный анализ. Методические указания. Часть 1/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2010. -29с.
- 3 Теория принятия решений. Учебно-методическое пособие. Часть 3/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2011. -53с.
- 4 Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы оптимизации / Учебное пособие. -Минск, «Четыре четверти». -472 с.: ил.

Интернет – ресурсы

- 1 http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf
- 2 <http://edu-lib.net/matematika-2/dlya-studentov/vagner-g-osnovyi-issledovaniya-operatsiy-tom-1-onlayn>
- 3 <http://www.twirpx.com/file/469957/>
- 4 http://techsciencebooks.ru/issledovanie_operatsiy_v_a_gorelik_i_a_ushakov/
- 5 http://mirknig.com/knigi/nauka_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html
- 6 <http://www.libex.ru/detail/book542848.html>
- 7 <http://www.twirpx.com/file/989308/>
- 8 <http://www.twirpx.com/file/1638982/>