

## Оглавление

Введение .....	1
Программа курса .....	2
Методические указания .....	4
Задание 2 Решение транспортной задачи .....	5
Контрольные вопросы к заданию 2 .....	8
Задачи к заданию 2 .....	9
Задание 3 Решение задач комбинаторного программирования .....	14
Контрольные вопросы к заданию 3 .....	17
Варианты контрольных заданий 3 .....	17
Библиографический список.....	19
Интернет – ресурсы.....	19

## Введение

Курс "Системный анализ в сервисе" введён в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Необходимость методических указаний, в которых с единых позиций излагаются основные практические этапы решения наиболее распространенных задач принятия решений, связана с недостатком литературы по рассматриваемой тематике в библиотечных фондах института и города.

Предлагаемый сборник имеет целью познакомить студентов с задачами, решение которых сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, зависящей, как правило, от большого числа переменных. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях человеческой деятельности и в первую очередь в практике планирования и организации производства.

В сборник включены материалы по разделам: задачи линейного программирования, транспортные задачи, задачи комбинаторного программирования, элементы теории игр, задача о назначениях, целочисленное линейное программирование, квадратичное программирование. К этим разделам принадлежит большое число наиболее распространенных производственных и коммерческих задач. Несмотря на очевидные упрощения, приведённые задачи являются хорошей иллюстрацией проблем, с которыми приходится сталкиваться предприятиям при принятии решений, связанных с распределением ресурсов.

В сборнике кратко изложены идеи и содержание конкретных методов, а также вычислительные аспекты, возникающие при решении задач. Приведены также примеры решения всех рассматриваемых типов задач, а также контрольные вопросы и индивидуальные задания. Поскольку численное решение сложных задач большой размерности затруднительно без использования компьютера, методы и алгоритмы решения указанных выше задач реализованы в виде программ. Исходные тексты программ с описанием их особенностей приведены в [1]. Они могут быть использованы как в учебном процессе, так и при решении практических задач, а также при проверке решений, полученных при ручном решении.

Всё это даёт основания надеяться, что сборник окажется полезным для широкого круга студентов, так или иначе связанных с решением задач оптимизации, организацией и планированием производства с использованием вычислительной техники.

## Программа курса

№ раздела	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Основные понятия и определения	Понятие системы. Системы с активными элементами. Проблема принятия решения. Методы и модели принятия решения. Этапы построения оптимизационных моделей. Методологические основы теории принятия решений. Задачи выбора решений, отношения, функции выбора, функции полезности, критерии.
2	Задача линейного программирования	Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Симплексный алгоритм и метод решения ЗЛП. Двойственная ЗЛП. Анализ линейной модели на чувствительность. Пример.
3	Транспортная задача	Постановка классической транспортной задачи. Алгоритм решения транспортной задачи. Пример.
4	Задачи комбинаторного типа	Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Назначение и вычисление нижних граничных оценок. Процесс ветвления. Пример.
5	Элементы теории игр	Основные понятия теории игр. Конечные матричные антагонистические игры. Основная теорема матричных игр. Решение матричной игры. Пример. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Элементы теории статистических решений. Критерии, применяемые при решении задач оптимизации. Пример.
6	Задача о назначениях	Математическая постановка задачи выбора. Венгерский алгоритм решения. Пример.
7	Целочисленное линейное программирование	Постановка задачи. Метод Гомори. Принципы формирования дополнительных ограничений. Пример.
8	Динамическое программирование	Метод динамического программирования. Примеры многошаговых операций. Решение числового примера.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

- использовать базовые положения математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-2);
- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как

средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-13);

- обладать культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, систематизации, постановке целей и выбору путей их достижения, уметь логически верно, аргументированно и ясно строить свою речь (ОК-17);

- к обоснованию и разработке технологии процесса сервиса, выбору ресурсов и технических средств для его реализации (ПК-9).

В результате изучения дисциплины студент должен:

***Знать:***

- основные постановки и алгоритмы решения классических задач принятия решений (ОК-2, ПК-9);

- основные принципы и концепции построения моделей (ОК-2, ОК-13, ОК-17);

- методы и алгоритмы принятия решений (ОК-2, ОК-13, ПК-9).

***Уметь:***

- обоснованно разрабатывать и выбирать методы решения задач (ОК-2, ОК-13);

- применять ЭВМ для исследования и решения задач (ОК-13);

- анализировать полученные результаты (ОК-2, ОК-13);

- обоснованный выбор вариантов из множества допустимых (ОК-17).

***Владеть:***

- созданием методик решения задач с активными элементами (ОК-2);

- методами рационального поведения при принятии решений (ОК-17);

- алгоритмическими методами скалярной и векторной конечномерной оптимизации (ОК-2, ОК-13);

- вычислительными аспектами принятия решений (ОК-13);

- разработкой компьютерных алгоритмов (ОК-2, ОК-13).

## Методические указания

Современные темпы научно-технического прогресса привели к существенному усложнению процессов организации производства, планирования и управления во всех сферах и отраслях. Тем, кто не сталкивался с необходимостью принимать решения по управлению на разных уровнях, трудно представить, почему возникают сложности, почему не всегда удаётся применить, казалось бы, хорошо разработанный и удобный аппарат математического моделирования. Сложность задач управления растёт быстрее числа занятых в нем людей. Для преодоления этого было предложено изменить технологию сбора и обработки информации и создать автоматизированные системы управления (АСУ). Однако только этот путь оказался недостаточным. Стало очевидным, что необходимо внедрять в сферу управления новые методы и модели, помогающие человеку формировать целостное представление об управляемом объекте. При этом необходимо также понимать и учитывать закономерности функционирования и развития сложных систем, решать коренные проблемы, изменяющие принципы управления.

Наиболее конструктивным из направлений системных исследований является системный анализ. Он ориентирует исследователей, проектировщиков, работников сферы управления не только на учёт тех или иных закономерностей функционирования и развития сложных систем, но и обязательно на разработку методики процесса принятия решения. При этом выделяются этапы, определяется их последовательность, и предлагаются всевозможные подходы и методы выполнения этапов принятия решения в конкретных условиях. Для того чтобы ориентироваться в сложных производственных ситуациях, характеризующихся переплетением экономических, социальных, демографических, экологических и технических факторов, современный инженер должен развить в себе системное мышление, умение анализировать сложные ситуации, ставить задачи, формировать варианты решений и выбирать из них лучший для конкретных условий.

При выполнении контрольной работы необходимо тщательно изучить курс лекций по «Системному анализу в сервисе», внимательно проанализировать примеры решения задач. При необходимости углубленного изучения соответствующих разделов рекомендуется воспользоваться приведёнными в библиографическом списке источниками. Контрольная работа состоит из семи задач. Ниже в соответствующих разделах приводятся варианты задач. Номера задач или выдаются преподавателем или определяются по цифрам номера зачетки. При выполнении контрольной работы необходимо записать условие каждой задачи, привести подробное математическое описание. Решение должно включать достаточное количество пояснений. В конце решения должен быть записан конкретный ответ, соответствующий условию задачи. Решение задачи желательно получить с помощью ЭВМ. Однако в этом случае в контрольной работе должны быть приведены все этапы хотя бы для двух итераций так, как это указано в примерах. При выполнении контрольной работы на ЭВМ необходимо указать, какая программа использовалась, в чём её суть, особенности и как решалась задача.

## Задание 2

### Решение транспортной задачи

Транспортная задача (ТЗ) получила широкое распространение в теоретических разработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Особенно важное значение ТЗ имеет в деле рационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта. ТЗ относится к задачам на сетях и является частным случаем ЗЛП. Она обладает рядом свойств, используя которые можно значительно упростить и ускорить решение задач, поскольку размерность ТЗ может достигать нескольких тысяч.

Рассмотрим классическую транспортную задачу. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у  $m$  поставщиков  $A_i$  в количестве  $S_i$  единиц, нужно доставить  $n$  потребителям  $B_j$  в количестве  $D_j$  единиц, соответственно. Известна стоимость  $c_{ij}$  перевозки единицы груза от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю. Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость. Обозначим через  $x_{ij}$  количество единиц груза, запланированных к перевозке от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю. Тогда условие задачи можно записать в виде таблицы, которую называют *матрицей планирования*.

Составим математическую модель задачи. Так как от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю запланировано к перевозке  $x_{ij}$  единиц груза, то стоимость перевозки составит  $c_{ij}x_{ij}$ . Стоимость всего плана выразится двойной суммой

$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$ . Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

все грузы должны быть вывезены и все потребности должны быть удовлетворены. В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям. Такая модель называется *закрытой*. Если суммы произведенной и потребляемой продукции не равны, то нужно ввести фиктивного производителя или потребителя, для которого затраты на перевозки положить равными нулю. Итак, нужно найти

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq D_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$c_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0, \quad \forall_j \forall_i.$$

При решении ТЗ используется двойственная задача, которая формулируется следующим образом. Найти  $\max(\sum_{i=1}^m S_i V_i + \sum_{j=1}^n D_j W_j)$  при ограничениях  $v_i + w_j \leq c_{ij}, \forall_{ji}$ . При этом переменные  $V_i$  и  $W_j$  не ограничены в знаке.

Алгоритм решения ТЗ следующий:

- 1 Определяется исходное допустимое базисное решение, которое состоит из  $n + m - 1$  переменных.
- 2 Проверяется, можно ли улучшить текущее решение задачи. Если да, то осуществляется переход к третьему шагу. Если нет, то получено оптимальное решение.
- 3 Определяется, какую небазисную переменную необходимо ввести в базис. Необходимо пересчитать план перевозок и перейти к шагу 2.

Рассмотрим конкретный пример решения ТЗ. Пусть матрица планирования определяется таблицей 1, в которой занесено исходное допустимое решение. Для его построения могут быть использованы различные методы, например, северо-западного базисного угла или продукцию будем перевозить с того завода к такому потребителю, где стоимость перевозки минимальна. Значение функции цели при этом равно:

$$2*6+0*7+5*7+8*4+15*3+9*2=12+5+32+45+18=112.$$

Таблица 1 - Матрица планирования

	1		2		3		4		S
1	2		3		11		7		6
	6								
2	1		0		6		1		1
			1						
3	5		8		15		9		10
	1		4		3		2		
D	7		5		3		2		

Коэффициенты при переменных в функции цели являются разностью между левыми и правыми частями решения соответствующих ограничений двойственной задачи. Таким образом, задача заключается в том, чтобы решить  $n + m - 1$  уравнений двойственной задачи, соответствующих текущему базису, т.е.  $v_i + w_j = c_{ij}$  для каждой базисной переменной  $x_{ij}$ , а затем определить значения  $v_i + w_j - c_{ij}$  для небазисных переменных  $x_{ij}$ . Если это значение положительно, то небазисная переменная  $x_{ij}$  является кандидатом на введение в базис, в противном случае найдено оптимальное решение.

Уравнения двойственной задачи для базисных переменных имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 + \dots \dots W_1 \dots \dots = 2 \\ \dots V_2 + \dots \dots W_2 \dots \dots = 0 \\ \dots \dots V_3 + W_1 \dots \dots = 5 \\ \dots \dots V_3 + \dots W_2 \dots \dots = 8 \\ \dots \dots V_3 \dots \dots W_3 \dots = 15 \\ \dots \dots V_3 \dots \dots W_4 = 9 \end{array} \right.$$

Положив  $V_3 = 0$ , получим:  $V_3 = 0$ ,  $W_4 = 9$ ,  $W_3 = 15$ ,  $W_2 = 8$ ,  $W_1 = 5$ ,  $V_2 = -8$ ,  $V_1 = -3$ .

Результаты вычислений заносим в таблицу 2, из которой видно, что в базис нужно ввести переменную  $x_{12}$ , а её значение равно 4.

Таблица 2 - Результаты вычислений

	1		2		3		4		$S_i$	$V_i$
1	2		3	2	11	1	7	-1	6	- 3
	(6)- w		w							
2	1	-4	0		6	1	1	0	1	- 8
			(1)							
3	5		8		15		9		10	0
	(1)+w		(4)- w		(3)		(2)			
$D_j$	7		5		3		2			
$W_j$	5		8		15		9			

Поступая аналогично, заполняем таблицы 3,4 и 5.

Таблица 3 - Результаты вычислений

	1		2		3		4		$S_i$	$V_i$
1	2		3		11	1	7	-1	6	- 3
	(2)- w		(4)+w							
2	1	-2	0		6	3	1	2	1	- 6
			(1)- w		w					
3	5		8	-2	15		9		10	0
	(5)+w				(3)- w		(2)			
$D_j$	7		5		3		2			
$W_j$	5		6		15		9			



Таблица 4 - Результаты вычислений

	1		2		3		4		$S_i$	$V_i$
1	2		3		11	1	7	-1	6	- 3
	(1)- w		(5)		w					
2	1	-5	0	-3	6		1	-1	1	- 9
					(1)					
3	5		8	-2	15		9		10	0
	(6)+w				(2)- w		(2)			
$D_j$	7		5		3		2			
$W_j$	5		6		15		9			

Таблица 5 - Результаты вычислений

	1		2		3		4		$S_i$	$V_i$
1	2	-1	3		11		7	-2	6	- 4
			(5)		(1)					
2	1	-5	0	-2	6		1	-1	1	- 9
					(1)					
3	5		8	-1	15		9		10	0
	(7)				(1)		(2)			
$D_j$	7		5		3		2			
$W_j$	5		7		15		9			

Из таблицы 5 видно, что оптимальное значение функции цели, равное 100, а значения базисных переменных равны:  $x_{12}=5, x_{13}=1, x_{23}=1, x_{31}=7, x_{33}=1, x_{34}=2$ .

В [1] приводится исходный текст программы для решения транспортной задачи.

### Контрольные вопросы к заданию 2

1 Перечислите и поясните основные этапы построения оптимизационных моделей.

2 Сформулируйте постановку ТЗ.

3 Перечислите и поясните основные шаги решения ТЗ.

4 Как определяется размерность базисного решения?

5 Как можно использовать программу, предназначенную для решения задачи минимизации, при решении задачи максимизации?

6 Признак окончания работы алгоритма решения ТЗ.

7 Как происходит переход к следующей итерации при решении ТЗ?

- 8 Как строится исходное базисное решение при решении ТЗ?
- 9 Почему для решения ТЗ используется специальный алгоритм?
- 10 Запишите модель ТЗ в виде постановки ЗЛП.
- 11 Сформулируйте двойственную ТЗ.
- 12 Как определяются значения переменных двойственной задачи?
- 13 Как определяются коэффициенты целевой функции ТЗ?
- 14 Как определяется значение новой базисной переменной при решении ТЗ.
- 15 Может ли ТЗ иметь целочисленное решение?
- 16 Напишите вид целевой функции рассматриваемой задачи после второй итерации.
- 17 Как используется понятие двойственной задачи при решении ТЗ?

## Задачи к заданию 2

**1** Сталеплавильная компания располагает тремя заводами  $M1$ ,  $M2$ ,  $M3$ , способными произвести за некоторый промежуток времени 50, 30 и 20 тысяч тонн стали, соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырём потребителям  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  и  $C4$ , потребности которых составляют соответственно 12, 15, 25 и 36 тысяч тонн стали. Стоимости производства и транспортировки 1 тысячи тонн стали с различных заводов различным потребителям приведены в таблице 6. Определите минимальные стоимости, объёмы производства на каждом заводе и планы перевозок.

Таблица 6 - Стоимость производства и транспортировки

	Завод		
Потребитель	$M1$	$M2$	$M3$
$C1$	15	19	14
$C2$	19	18	16
$C3$	19	18	20
$C4$	15	19	18

**2** Компания контролирует три фабрики  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ , способные произвести 50, 25 и 25 тысяч изделий ежемесячно. Она заключила договоры с четырьмя заказчиками  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$ , которым требуется ежемесячно 15, 20, 20 и 30 тысяч изделий. Стоимости производства и транспортировки 1 тысячи изделий заказчикам с фабрик приведены в таблице 7.

Таблица 7 - Стоимость производства и транспортировки

	Заказчик			
Фабрика	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$
$F1$	13	17	17	14
$F2$	18	16	16	18
$F3$	12	14	19	17

Определите минимизирующие общую стоимость объёмы производства и распределение для каждой фабрики.

**3** Четыре сталелитейных завода I, II, III и IV производят еженедельно соответственно 950, 300, 1350 и 450 тонн стали определённого сорта. Стальные болванки должны быть переданы потребителям *A, B, C, D, E* еженедельные запросы которых составляют, соответственно, 250, 1000, 700, 650 и 450 тонн стали. Стоимость транспортировки от заводов к потребителям в тоннах приведена в таблице 8.

Таблица 8 - Стоимость транспортировки

Завод	Потребитель				
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
1	12	16	21	19	32
2	4	4	9	5	24
3	3	8	14	10	26
4	24	33	36	34	49

Какой нужно составить план распределения стальных болванок, чтобы минимизировать общую стоимость?

**4** Компания владеет тремя заводами *A, B* и *C*. Соответствующие стоимости производства равны 26, 23 и 22 на единицу, объём производства 6000, 3000 и 3000 единиц. Компания обязалась поставлять соответственно 1500, 2500, 2700 и 3300 единиц в города *W, X, Y, Z*. При заданных стоимостях перевозок составьте оптимальные планы производства и распределения, пользуясь данными таблицы 9.

Таблица 9 - Стоимости перевозок

Город	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>W</i>	1	9	6
<i>X</i>	4	2	1
<i>Y</i>	1	2	7
<i>Z</i>	9	8	3

**5** Предприятие поставляет с четырёх складов шести заводам детали для сборки изделий. Стоимости перевозок 1 тысячи деталей представлены в таблице 10.

Таблица 10 - Стоимости перевозок

Склад	Завод 1	Завод 2	Завод 3	Завод 4	Завод 5	Завод 6
<i>C1</i>	2	9	3	10	8	7
<i>C2</i>	3	5	6	3	5	2
<i>C3</i>	1	8	2	4	3	5
<i>C4</i>	4	8	7	6	6	6

Склады  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  и  $C4$  имеют следующее количество деталей, соответственно: 9000, 16000, 14000, 11000. Потребности заводов в деталях равны, соответственно: 6000, 4000, 10000, 13000, 7000, 10000 штук. Сформулируйте задачу нахождения оптимальных планов перевозок как транспортную и найдите её решение.

**6** Компания владеет двумя фабриками  $F1$  и  $F2$ , производящими электронное оборудование. Фабрики в течение некоторого периода выпускают 16 и 12 тысяч изделий, соответственно, при нормальных темпах производства. При сверхурочной работе эти показатели могут быть повышены, соответственно, до 20 и 14 тысяч изделий. Дополнительная стоимость производства 1000 изделий в сверхурочное время на  $F1$  и  $F2$  составляет 8 единиц. Компания снабжает трёх потребителей  $C1$ ,  $C2$  и  $C3$ , потребности которых в течение одного и того же периода составляют, соответственно, 10, 13 и 7 тысяч изделий. Стоимости перевозок 1000 изделий потребителю с фабрик приведены в таблице 11. Сформулируйте задачу нахождения оптимальных планов производства и распределения как транспортную и найдите её решение.

Таблица 11 - Стоимости перевозок

	Потребитель		
Фабрика	$C1$	$C2$	$C3$
$F1$	5	4	6
$F2$	6	3	2

**7** Некоторый продукт производится на двух заводах и распределяется между двумя пользователями. Их потребности на ближайшие два месяца и стоимость транспортировки продукта с заводов потребителям приведены в таблице 12.

Таблица 12 - Потребности и стоимость транспортировки продукта

	Потребность			Пользователь	
Пользователь	Август	Сентябрь	Завод	1	2
1	420	550	1	10	13
2	350	480	2	12	6

Стоимость производства единицы продукции и объём производства по плану за два месяца приведены в таблице 13.

Таблица 13 - Стоимость производства единицы продукции и объём производства

	Стоимость производства		Объём	
Завод	Август	Сентябрь	Август	Сентябрь
1	3.0	3.6	500	600
2	3.2	2.9	300	500

При этом продукт производится в течение месяца, хранить его можно лишь в течение месяца, а затем отправлять пользователю. Стоимость хранения единицы продукции составляет 0.5 на заводе 1 и 0.6 на заводе 2. Требуется оптимальные планы производства и распределения. Сформулируйте задачу как транспортную и найдите оптимальное решение.

**8** Четыре шахты поставляют каменный уголь пяти газоперерабатывающим заводам. Расходы на транспортировку угля, задаваемые матрицей стоимостей, включают плату за погрузочно-разгрузочные работы и приведены в таблице 14. Потребности заводов равны, соответственно: 400, 700, 400, 500 и 700 тонн. Шахты могут поставить, соответственно: 500, 900, 700 и 600 тонн. Построить схему транспортировки угля, имеющую минимальную стоимость.

Таблица 14 - Расходы на транспортировку угля

Шахта	Завод 1	Завод 2	Завод 3	Завод 4	Завод 5
1	10	9	8	9	7
2	5	8	11	7	9
3	8	7	9	6	6
4	7	6	5	6	8

**9** Предприятия, производящие водные лыжи, имеют оптовые базы, с которых лыжи распределяются по пяти различным магазинам. Найти имеющую минимальную стоимость схему транспортировки лыж при условии, что базы располагают 100, 200, 300 и 400 парами лыж, а магазинам требуются 200, 250, 300, 100 и 150 пар, соответственно. Затраты на транспортировку задаются таблице 15.

Таблица 15 - Затраты на транспортировку

	Магазины				
Оптовые базы	A	B	C	D	E
1	5	7	6	15	9
2	6	5	8	5	6
3	4	9	7	2	3
4	7	6	8	7	4

**10** Пусть имеется четыре домостроительных комбината  $A_i$ ,  $i=1, \dots, 4$  и пусть строится четыре микрорайона  $B_j$ ,  $j=1, \dots, 4$ . Известны производственные мощности домостроительных комбинатов и потребность в комплектах изделий каждого микрорайона. Ресурсы отправителей и ресурсы потребителей известны и приведены в таблице 16. Известны также приведенные затраты, связанные с доставкой одного комплекта изделий из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Требуется так распределить продукцию домостроительных

комбинатов по микрорайонам, чтобы суммарные приведенные затраты по доставке всех грузов от отправителей к потребителям были минимальными.

Таблица 16 - Ресурсы отправителей и ресурсы потребителей

$A_i$	$B_j$				$S_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
A1	70	38	24	92	14
A2	58	18	56	72	20
A3	19	10	100	30	26
A4	3	36	121	8	41
$D_j$	30	22	15	34	

**11** Фирма предложила владельцем трёх авиалиний перевозить бригады специалистов в различные части света. Стоимость перевозок в фунтах стерлингов приведена в таблице 17.

Таблица 17 - Стоимость перевозок

Авиалиния	Сидней	Калькутта	Бейрут	Даллас	Сан-Паулу
I	24	16	8	10	14
II	21	15	7	12	16
III	23	14	7	14	12

Администрация фирмы решила, что индивидуальные контракты на перевозку будут заключаться с владельцами авиалиний I, II и III в отношении 2:3:2, и уведомила об этом управляющего транспортными перевозками, а также известила его о том, что из 70 намеченных на следующий год перевозок 10 - в Сидней, 15 - в Калькутту, 20 - в Бейрут, 10 - в Даллас и 15 в Сан-Паулу. Как следует распределить индивидуальные контракты на перевозки для минимизации общей стоимости при условии удовлетворения запросов администрации фирмы. Какова минимальная стоимость перевозок, удовлетворяющих приведённым выше ограничениям?

### Задание 3

#### Решение задач комбинаторного программирования

Рассмотренные задачи ЛП и ТЗ отличаются тем, что для них известен алгоритм, сложность которого ограничена сверху некоторым полиномом от размерности задачи. Наряду с полиномиально разрешимыми задачами имеется обширный спектр задач, для которых не удалось предложить эффективных алгоритмов решения. Внешне эти задачи ничем не отличаются от полиномиально разрешимых, но сложность любого из предложенных для их решения алгоритмов оказывается не меньше некоторой экспоненты от размерности задачи. К таким задачам относится задача коммивояжера, которая формулируется следующим образом. Имеется  $n$  городов, которые связаны дорогами известной длины. Коммивояжер выезжает из произвольного города и должен посетить остальные  $n-1$  городов, побывав в каждом из них только один раз, и вернуться в исходный город. Путь, который должен проделать коммивояжер, должен быть наименьшим.

Эта задача комбинаторного типа не может быть непосредственно сформулирована и решена как задача линейного программирования. Ряд задач, представляющих собой разновидность задачи коммивояжера, был поставлен и решен с целью исследовать маршруты движения людей или перевозки товаров. Другие важные применения задачи коммивояжера связаны с определением нагрузки учителей, составлением расписания выполнения работ на различных сборочных линиях, а также с нахождением последовательности выполнения операций на универсальном станке.

Существует ряд методов решения комбинаторных задач, как точных, так и приближенных. Одним из точных является метод ветвей и границ. Применим его к решению задачи коммивояжера. Рассматривается матрица  $D_n$ , элемент  $d_{ij}$  которой определяет расстояние между городами  $i$  и  $j$ . Любой допустимый маршрут может быть определен как перечисление упорядоченных элементов матрицы, так, например, для маршрута  $T$  имеем:  $T = \{(i_1, i_2) \cdot (i_2, i_3) \dots (i_n, i_1)\}$ . Для каждого маршрута  $T$  можно найти его длину:  $Z(T) = \sum_{(i,j) \in T} d_{ij}$ . Наиболее важными

моментами метода являются:

- 1 Редукция матрицы.
- 2 Разбиение множества допустимых маршрутов на подмножества.
- 3 Вычисление нижней граничной оценки.

Работу алгоритма рассмотрим на конкретном примере для  $n=6$ :

	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	27	43	16	30	26
2	7	$\infty$	16	1	30	30
3	20	12	$\infty$	35	5	0
4	21	16	25	$\infty$	18	18
5	12	46	27	48	$\infty$	5
6	23	5	5	9	5	$\infty$

Проведём редукцию матрицы сначала по строкам, а затем по столбцам:

	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	11	27	0	14	10
2	1	$\infty$	15	0	29	29
3	15	13	$\infty$	35	5	0
4	0	0	9	$\infty$	2	2
5	2	41	22	43	$\infty$	0
6	13	0	0	4	0	$\infty$

Сумма констант, участвующих в редукции, равна 48. Эта величина является нижней граничной оценкой длин всех маршрутов. Для осуществления операции ветвления рассчитывается вторичный штраф для каждого нулевого элемента редуцированной матрицы, который определяет, какое дополнительное расстояние должен пройти коммивояжер, если не выбирается рассматриваемый нулевой элемент:

$$\varphi_{1,4} = 10 + 0 = 10$$

$$\varphi_{2,4} = 1 + 0 = 1$$

$$\varphi_{3,6} = 5 + 0 = 5$$

$$\varphi_{6,2} = 0 + 0 = 0$$

$$\varphi_{6,5} = 0 + 2 = 2$$

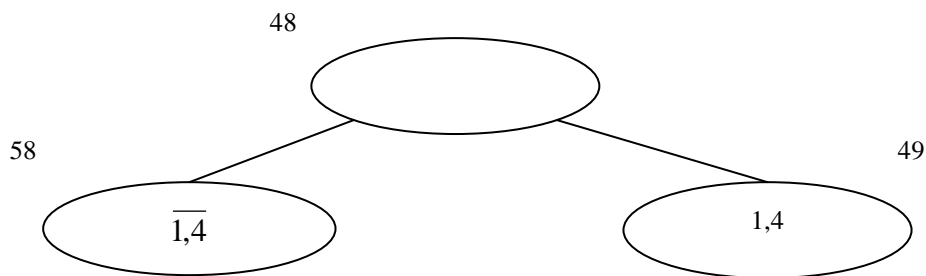
$$\varphi_{4,1} = 0 + 1 = 1$$

$$\varphi_{4,2} = 0 + 0 = 0$$

$$\varphi_{5,6} = 2 + 0 = 0$$

$$\varphi_{6,3} = 0 + 9 = 9$$

Максимальный вторичный штраф  $\varphi_{1,4} = 10$ . Поэтому звено 1,4 используется для осуществления операции ветвления:



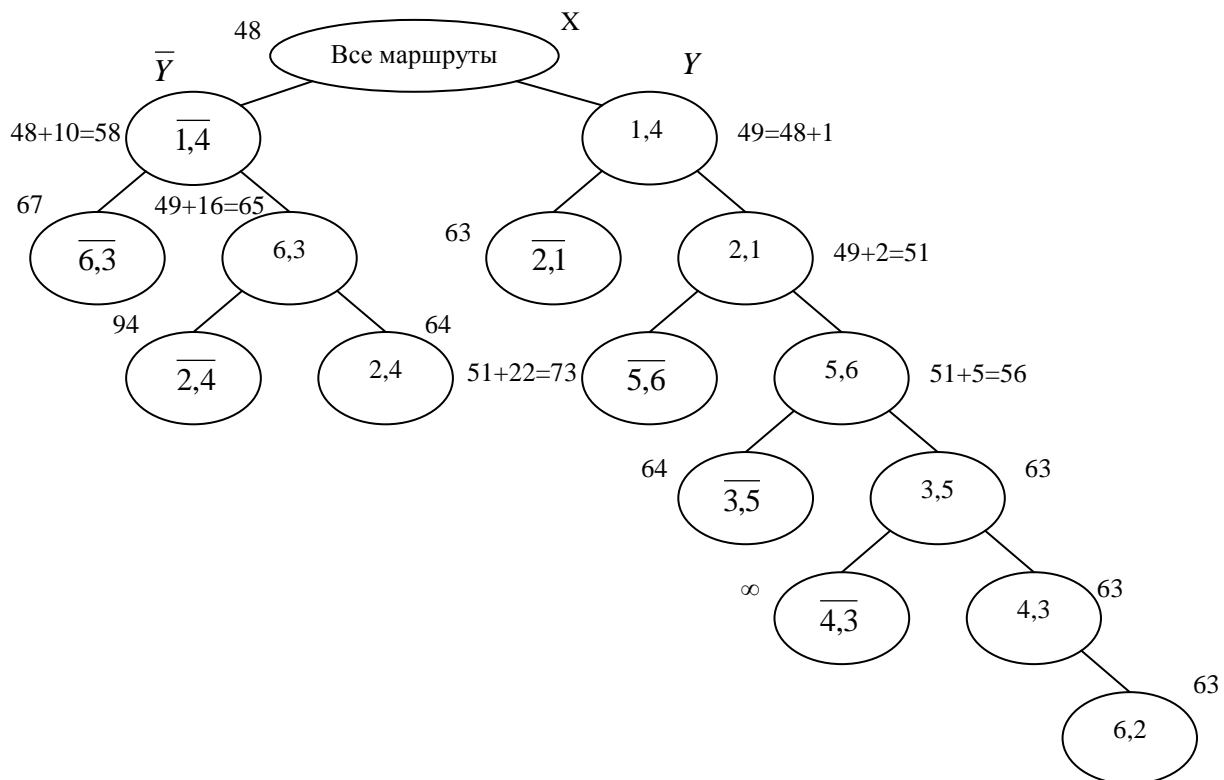
Запрет использовать звено 1,4 увеличивает нижнюю граничную оценку левого подмножества на  $\varphi_{1,4}$ , она становится равной  $48+10=58$ . Для определения



нижней граничной оценки правого подмножества вычеркиваем строку 1 и столбец 4. Кроме того, необходимо запретить звено 4,1:

	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	11	27	0	14	10
2	1	$\infty$	15	0	29	29
3	15	13	$\infty$	35	5	0
4	$\infty$	0	9	$\infty$	2	2
5	2	41	22	43	$\infty$	0
6	13	0	0	4	0	$\infty$

Проведём редукцию матрицы. Тогда искомая нижняя граничная оценка правого подмножества равна 49. Выбирая на каждом шаге для ветвления подмножество с наименьшей нижней граничной оценкой, получаем следующее дерево:



Как видно из рисунка, получен маршрут 1, 4, 3, 5, 6, 2, 1, имеющий наименьшую длину, равную 63.

### Контрольные вопросы к заданию 3

- 1 Сформулируйте задачу коммивояжёра.
- 2 Охарактеризуйте метод ветвей и границ.
- 3 Операция редукции. Возможности её проведения.
- 4 Основные понятия и определения метода ветвей и границ.
- 5 Алгоритм ветвления в задаче о коммивояжере.
- 6 Дайте понятие нижней граничной оценки.
- 7 Поясните алгоритм вычисления нижних граничных оценок в задаче о коммивояжере.
- 8 Понятие вторичного штрафа при решении задачи о коммивояжере.
- 9 Укажите критерий окончания процесса поиска методом ветвей и границ оптимального решения.
- 10 Сформулируйте задачу оптимизации.
- 11 Поясните понятия критерия и ограничений.
- 12 Что такое промежуточное решение в задаче коммивояжера?
- 13 Какие маршруты являются допустимыми в задаче коммивояжера?
- 14 Приведите приближенные методы решения задачи о коммивояжере.
- 15 Поясните, какие допустимые маршруты принадлежат множествам, возникающим в процессе ветвления.
- 16 Сколько оптимальных маршрутов может иметь решение задачи коммивояжера?

### Варианты контрольных заданий 3

Необходимо решить задачу коммивояжёра для матрицы размерности  $n=6$ . Привести оптимальный маршрут и его длину. Для проверки правильности решения можно воспользоваться программой к лабораторной работе 3 [1].

#### Вариант 1

49 17 55 7 55 83  
46 21 63 48 11 9  
15 29 58 86 94 42  
57 47 10 91 9 31  
54 25 30 17 88 30  
59 33 83 41 38 71

#### Вариант 2

19 58 69 46 58 32  
96 92 41 0 41 40  
83 41 34 0 82 8  
42 24 85 90 51 10  
6 87 50 88 28 38  
87 35 25 74 78 89

#### Вариант 3

98 83 35 66 30 10  
86 74 11 84 38 34  
66 50 18 27 30 13  
92 19 60 64 78 19  
49 2 99 61 79 32  
27 15 17 64 97 71

#### Вариант 4

85 39 44 80 7 57  
71 29 88 98 22 13  
96 94 14 82 56 64  
16 70 98 40 85 11  
94 55 0 2 65 8  
0 47 16 56 3 62

#### Вариант 5

47 49 52 25 10 55  
33 68 80 7 24 5  
35 56 27 73 47 98  
1 43 50 64 3 80  
83 95 39 30 65 53  
76 40 95 63 6 66

#### Вариант 6

98 17 92 30 30 97  
6 26 76 91 40 37  
52 61 48 47 31 95  
10 91 27 72 91 24  
81 49 2 83 2 1  
7 60 54 70 33 85

### Вариант 7

82 87 57 15 97 50  
73 24 56 56 1 17  
56 15 21 65 8 99  
70 33 80 48 18 77  
38 79 38 79 15 88  
54 99 87 2 84 7

### Вариант 8

80 69 80 75 56 84  
20 72 50 9 94 76  
60 73 42 93 14 20  
86 88 61 18 95 95  
24 39 46 91 23 81  
39 2 82 7 69 51

### Вариант 9

4 52 69 3 6 92  
87 50 97 34 83 69  
75 83 32 98 80 14  
19 81 27 80 30 92  
16 30 55 35 27 16  
46 90 36 77 97 96

### Вариант 10

85 64 83 94 92 61  
76 27 22 17 44 73  
91 34 93 39 70 26  
85 84 47 33 2 4  
43 38 13 50 76 46  
28 38 90 87 27 28

### Вариант 11

69 75 21 68 16 27  
68 27 77 55 82 39  
38 83 55 66 48 15  
7 76 94 70 66 34  
63 24 28 81 88 11  
26 60 36 35 26 21

### Вариант 12

25 72 14 58 44 60  
24 47 19 44 77 14  
74 8 63 11 47 3  
27 65 31 15 79 41  
18 76 48 42 92 78  
80 16 85 6 21 9

### Вариант 13

10 6 9 33 37 31  
17 24 67 47 48 41  
7 82 82 45 26 94  
40 70 89 15 58 78  
86 12 45 15 0 34  
54 8 52 60 32 27

### Вариант 14

84 56 2 8 49 13  
17 95 14 46 10 25  
17 50 79 48 81 84  
42 52 55 52 36 13  
77 58 40 98 34 91  
70 63 59 83 53 58

### Вариант 15

69 94 34 63 44 21  
20 9 27 38 13 60  
74 62 90 32 53 55  
70 70 65 34 35 5  
35 15 42 36 27 6  
88 51 59 80 80 74

### **Библиографический список**

- 1 Теория принятия решений: Сб. описаний лаб. работ / РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2012. -83с.
- 2 Системный анализ. Методические указания. Часть 1/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2010. -29с.
- 3 Теория принятия решений. Учебно-методическое пособие. Часть 3/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2011. -53с.
- 4 Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы оптимизации / Учебное пособие. -Минск, «Четыре четверти». -472 с.: ил.

### **Интернет – ресурсы**

- 1 [http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/\\_index/\\_pilocus/\\_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf](http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf)
- 2 <http://edu-lib.net/matematika-2/dlya-studentov/vagner-g-osnovyi-issledovaniya-operatsiy-tom-1-onlayn>
- 3 <http://www.twirpx.com/file/469957/>
- 4 [http://techsciencebooks.ru/issledovanie\\_operatsiy\\_v\\_\\_a\\_\\_gorelik\\_i\\_\\_a\\_\\_ushakov/](http://techsciencebooks.ru/issledovanie_operatsiy_v__a__gorelik_i__a__ushakov/)
- 5 [http://mirknig.com/knigi/nauka\\_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html](http://mirknig.com/knigi/nauka_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html)
- 6 <http://www.libex.ru/detail/book542848.html>
- 7 <http://www.twirpx.com/file/989308/>
- 8 <http://www.twirpx.com/file/1638982/>