

## Оглавление

Введение .....	1
Программа курса .....	2
Методические указания .....	4
Задание 4 Элементы теории игр .....	5
Матричные игры.....	7
Элементы теории статистических решений .....	12
Контрольные вопросы к заданию 4 .....	15
Задачи к заданию 4 .....	15
Библиографический список.....	32
Интернет – ресурсы.....	32

## Введение

Курс "Системный анализ в сервисе" введён в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Необходимость методических указаний, в которых с единых позиций излагаются основные практические этапы решения наиболее распространенных задач принятия решений, связана с недостатком литературы по рассматриваемой тематике в библиотечных фондах института и города.

Предлагаемый сборник имеет целью познакомить студентов с задачами, решение которых сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, зависящей, как правило, от большого числа переменных. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях человеческой деятельности и в первую очередь в практике планирования и организации производства.

В сборник включены материалы по разделам: задачи линейного программирования, транспортные задачи, задачи комбинаторного программирования, элементы теории игр, задача о назначениях, целочисленное линейное программирование, квадратичное программирование. К этим разделам принадлежит большое число наиболее распространенных производственных и коммерческих задач. Несмотря на очевидные упрощения, приведённые задачи являются хорошей иллюстрацией проблем, с которыми приходится сталкиваться предприятиям при принятии решений, связанных с распределением ресурсов.

В сборнике кратко изложены идеи и содержание конкретных методов, а также вычислительные аспекты, возникающие при решении задач. Приведены также примеры решения всех рассматриваемых типов задач, а также контрольные вопросы и индивидуальные задания. Поскольку численное решение сложных задач большой размерности затруднительно без использования компьютера, методы и алгоритмы решения указанных выше задач реализованы в виде программ. Исходные тексты программ с описанием их особенностей приведены в [1]. Они могут быть использованы как в учебном процессе, так и при решении практических задач, а также при проверке решений, полученных при ручном решении.

Всё это даёт основания надеяться, что сборник окажется полезным для широкого круга студентов, так или иначе связанных с решением задач оптимизации, организацией и планированием производства с использованием вычислительной техники.

## Программа курса

№ раз-дела	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Основные понятия и определения	Понятие системы. Системы с активными элементами. Проблема принятия решения. Методы и модели принятия решения. Этапы построения оптимизационных моделей. Методологические основы теории принятия решений. Задачи выбора решений, отношения, функции выбора, функции полезности, критерии.
2	Задача линейного программирования	Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Симплексный алгоритм и метод решения ЗЛП. Двойственная ЗЛП. Анализ линейной модели на чувствительность. Пример.
3	Транспортная задача	Постановка классической транспортной задачи. Алгоритм решения транспортной задачи. Пример.
4	Задачи комбинаторного типа	Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Назначение и вычисление нижних граничных оценок. Процесс ветвления. Пример.
5	Элементы теории игр	Основные понятия теории игр. Конечные матричные антагонистические игры. Основная теорема матричных игр. Решение матричной игры. Пример. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Элементы теории статистических решений. Критерии, применяемые при решении задач оптимизации. Пример.
6	Задача о назначениях	Математическая постановка задачи выбора. Венгерский алгоритм решения. Пример.
7	Целочисленное линейное программирование	Постановка задачи. Метод Гомори. Принципы формирования дополнительных ограничений. Пример.
8	Динамическое программирование	Метод динамического программирования. Примеры многошаговых операций. Решение числового примера.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

- использовать базовые положения математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-2);
- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как

средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-13);

- обладать культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, систематизации, постановке целей и выбору путей их достижения, уметь логически верно, аргументированно и ясно строить свою речь (ОК-17);

- к обоснованию и разработке технологии процесса сервиса, выбору ресурсов и технических средств для его реализации (ПК-9).

В результате изучения дисциплины студент должен:

***Знать:***

- основные постановки и алгоритмы решения классических задач принятия решений (ОК-2, ПК-9);

- основные принципы и концепции построения моделей (ОК-2, ОК-13, ОК-17);

- методы и алгоритмы принятия решений (ОК-2, ОК-13, ПК-9).

***Уметь:***

- обоснованно разрабатывать и выбирать методы решения задач (ОК-2, ОК-13);

- применять ЭВМ для исследования и решения задач (ОК-13);

- анализировать полученные результаты (ОК-2, ОК-13);

- обоснованный выбор вариантов из множества допустимых (ОК-17).

***Владеть:***

- созданием методик решения задач с активными элементами (ОК-2);

- методами рационального поведения при принятии решений (ОК-17);

- алгоритмическими методами скалярной и векторной конечномерной оптимизации (ОК-2, ОК-13);

- вычислительными аспектами принятия решений (ОК-13);

- разработкой компьютерных алгоритмов (ОК-2, ОК-13).

## Методические указания

Современные темпы научно-технического прогресса привели к существенному усложнению процессов организации производства, планирования и управления во всех сферах и отраслях. Тем, кто не сталкивался с необходимостью принимать решения по управлению на разных уровнях, трудно представить, почему возникают сложности, почему не всегда удаётся применить, казалось бы, хорошо разработанный и удобный аппарат математического моделирования. Сложность задач управления растёт быстрее числа занятых в нем людей. Для преодоления этого было предложено изменить технологию сбора и обработки информации и создать автоматизированные системы управления (АСУ). Однако только этот путь оказался недостаточным. Стало очевидным, что необходимо внедрять в сферу управления новые методы и модели, помогающие человеку формировать целостное представление об управляемом объекте. При этом необходимо также понимать и учитывать закономерности функционирования и развития сложных систем, решать коренные проблемы, изменяющие принципы управления.

Наиболее конструктивным из направлений системных исследований является системный анализ. Он ориентирует исследователей, проектировщиков, работников сферы управления не только на учёт тех или иных закономерностей функционирования и развития сложных систем, но и обязательно на разработку методики процесса принятия решения. При этом выделяются этапы, определяется их последовательность, и предлагаются всевозможные подходы и методы выполнения этапов принятия решения в конкретных условиях. Для того чтобы ориентироваться в сложных производственных ситуациях, характеризующихся переплетением экономических, социальных, демографических, экологических и технических факторов, современный инженер должен развить в себе системное мышление, умение анализировать сложные ситуации, ставить задачи, формировать варианты решений и выбирать из них лучший для конкретных условий.

При выполнении контрольной работы необходимо тщательно изучить курс лекций по «Системному анализу в сервисе», внимательно проанализировать примеры решения задач. При необходимости углубленного изучения соответствующих разделов рекомендуется воспользоваться приведёнными в библиографическом списке источниками. Контрольная работа состоит из семи задач. Ниже в соответствующих разделах приводятся варианты задач. Номера задач или выдаются преподавателем или определяются по цифрам номера зачетки. При выполнении контрольной работы необходимо записать условие каждой задачи, привести подробное математическое описание. Решение должно включать достаточное количество пояснений. В конце решения должен быть записан конкретный ответ, соответствующий условию задачи. Решение задачи желательно получить с помощью ЭВМ. Однако в этом случае в контрольной работе должны быть приведены все этапы хотя бы для двух итераций так, как это указано в примерах. При выполнении контрольной работы на ЭВМ необходимо указать, какая программа использовалась, в чём её суть, особенности и как решалась задача.

## Задание 4

### Элементы теории игр

При рассмотрении моделей можно не конкретизировать природу неконтролируемых факторов, связанных с природной неопределённостью, недостаточностью изученности процесса, воздействием других активных участников операции, не принадлежащих к оперирующей стороне. При таком рассмотрении использование универсальных оценок эффективности (в среднем и гарантированной) является вполне оправданным. Однако если связать неконтролируемые факторы с действиями других активных участников операции, то могут быть сделаны разумные предположения об их принципах поведения, которые повлекут за собой другие оценки эффективности стратегии оперирующей стороны. Ситуации, в которых сталкиваются интересы нескольких участников, принято называть конфликтными.

Конфликтом называется операция, в которой участвуют несколько сторон (по крайней мере две), преследующих свои интересы и обладающих определёнными возможностями действий. Раздел теории исследования операций, занимающийся математическими моделями принятия оптимальных решений в условиях конфликта, называется теорией игр. В таких ситуациях оперирующая сторона может считать, что все остальные участники действуют наихудшим для неё образом, и принять гарантированную оценку эффективности стратегий.

Участников игры принято называть игроками. Выбор всеми игроками определённых стратегий определяет исход конфликта или ситуацию. Не все ситуации допустимы, то есть разрешаются правилами игры. В общем случае множество допустимых ситуаций является подмножеством прямого произведения пространств стратегий всех игроков.

Среди исходов игры одни являются более предпочтительными, а другие менее для участников. Часто используется численная оценка каждого исхода, называемая функцией выигрыша. Рассмотрим класс антагонистических игр, в которых участвуют два игрока, преследующих противоположные интересы. В этом случае функция выигрыша одного игрока, будет равна функции выигрыша другого с противоположным знаком.

В соответствии с формой задания различают позиционные игры и игры в нормальной форме. Большинство реальных игр – это процесс, развёрнутый во времени, когда игроки делают в определённой последовательности ходы, обладая на каждом шаге определённой информированностью о предыдущих действиях других игроков, а выигрыш определяется в конце игры. Такая игра называется позиционной. В позиционной игре стратегия игрока определяется правилами выбора на каждом шаге и представляет собой последовательность действий в зависимости от сложившейся в результате предыдущих шагов обстановки.

Если же в игре стратегия представлена как одноактный выбор, то такая игра считается заданной в нормальной форме. Реальные игры в исходной постановке редко описываются в нормальной форме. Однако можно считать с теоретической точки зрения, что каждый игрок заранее решил, как будет дей-

ствовать на каждом шаге в зависимости от конкретной обстановки. Тогда стратегию игрока можно считать элементом некоторого абстрактного множества и выбор игрока сводится к одноразовому выбору какого-либо элемента. Этот приём называется нормализацией игры.

Рассмотрим понятие смешанной стратегии. Пусть пространство стратегий некоторого игрока представлять собой множество  $X = (x_1, x_2)$ , состоящее из двух точек, то есть игрок может выбирать стратегию  $x_1$  или  $x_2$ . Стратегии  $x_1$  и  $x_2$  называют чистыми стратегиями. Пусть операция проводится  $N$  раз. Возникает вопрос: сколько раз в  $N$  повторениях необходимо взять чистую стратегию  $x_1$  и сколько  $x_2$ . Пусть  $x_1$  будет взята  $k$  раз, а  $x_2$  ( $N-k$ ) раз. Тогда частота выбора стратегии  $x_1$  есть  $q = \frac{k}{N}$ , а  $x_2$  -  $1-q = \frac{N-k}{N}$ .

В качестве критерия примем среднее значение критерия эффективности за  $N$  шагов. При этом значение критерия определяется только частотой  $q$ :

$$W_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(x_i, y) = \frac{1}{N} (kF(x_1, y) + (N-k)F(x_2, y)) = qF(x_1, y) + (1-q)F(x_2, y),$$

где  $y$  – некоторый постоянный неконтролируемый фактор.

Гарантированная оценка такой стратегии:

$$W_{cp}^z(q) = \inf_{y \in Y} [qF(x_1, y) + (1-q)F(x_2, y)].$$

Возьмём такую частоту  $q_0$ , что  $W_{cp}^z(q_0) \geq W_{cp}^z(q)$ ,  $\forall q \in [0;1]$ , тогда:

$$W_{cp}^z(q_0) \geq \max(W_{cp}^z(0), W_{cp}^z(1)).$$

Последнее соотношение показывает, что при выборе определённой смешанной стратегии оперирующая сторона может гарантировать себе выигрыш, не менее, чем при выборе лучшей из чистых стратегий  $x_1$  и  $x_2$ .

Вместо величины  $q$  введём вероятность  $p$ :  $W(p, y) = pF(x_1, y) + (1-p)F(x_2, y)$ .

Если  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то смешанной стратегией называется вектор  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,

где  $p_i$  – вероятность выбора чистой стратегии  $x_i$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Формально чистую стратегию  $x_i$  можно рассматривать как смешанную стратегию, задаваемую вектором,  $i$ -я компонента которого равна единице, а остальные нулю. Поэтому множество чистых стратегий является подмножеством множества смешанных стратегий.

### Пример 1.

Пусть имеется две чистых стратегии  $x_1, x_2$  и два значения неконтролируемого фактора  $y_1$  и  $y_2$ , а критерий имеет вид  $F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ .

Гарантированная оценка эффективности любой из чистых стратегий  $x_1$  и  $x_2$  равна 0. Если взять смешанную стратегию с  $p = (1/2, 1/2)$ , то  $W(1/2, y_j) = 1/2$ ,  $j=1, 2$  и  $W_{\Gamma}(1/2) = 1/2 > 0$ .

## Матричные игры

Матричные игры являются частным случаем антагонистической игры.

Антагонистической матричной игрой двух лиц с нулевой суммой называется совокупность

$$\{X, Y, F(x, y)\}, \quad (1)$$

где  $X$  - пространство стратегий первого игрока,  $Y$  – пространство стратегий второго игрока,  $F(x, y)$  – вещественная функция, определённая на множестве  $X \times Y$  и представляющая собой выигрыш первого игрока в ситуации  $(x, y)$ , когда первый игрок выбирает стратегию  $x \in X$ , а второй игрок –  $y \in Y$ . Выигрыш второго игрока равен  $-F(x, y)$ . При этом  $x$  и  $y$  называются чистыми стратегиями игроков.

В антагонистических играх первый игрок стремится по возможности максимизировать функцию  $F(x, y)$ , а второй игрок – минимизировать. Границы возможностей игроков определяются значениями нижней и верхней цен игры.

Нижняя цена игры и верхняя цены игры определяются соответственно соотношениями:  $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y)$  и  $\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$ .

В эти оценки вкладывается следующий смысл: первый игрок может гарантировать себе выигрыш не менее  $\underline{v}$  независимо от действий второго игрока.

Второй игрок может гарантировать себе проигрыш не более  $\bar{v}$  независимо от действий первого игрока. В этом случае речь идёт о чистых стратегиях. Всегда выполняется соотношение:  $\underline{v} \leq \bar{v}$ , то есть выигрыш первого игрока лежит на отрезке  $[\underline{v}, \bar{v}]$ .

Конечной антагонистической матричной игрой двух лиц называется совокупность (1), где  $X$  и  $Y$  состоят из конечного числа точек, а  $F(x, y)$  – функция дискретного аргумента.

Если  $X$  содержит  $n$  точек, то выбор чистой стратегии первым игроком можно представить в виде выбора натурального числа  $i=1, 2, \dots, n$ . Аналогично, если  $Y$  содержит  $m$  точек, выбор каждой чистой стратегии вторым игроком можно представить в виде выбора  $j=1, 2, \dots, m$ . Обозначим через  $a_{ij}$  значение функции  $F$  в ситуации, соответствующей выбору  $i$ -ой чистой стратегии первым игроком и  $j$ -ой чистой стратегии вторым игроком. Тогда конечную игру можно задать матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Чистой стратегией первого игрока в такой игре является выбор строки  $i$  матрицы  $A$ , а чистой стратегией второго игрока - выбор столбца  $j$  матрицы  $A$ . Выигрыш первого игрока в ситуации  $(i, j)$  равен  $a_{ij}$ , а второго игрока, соответственно,  $-a_{ij}$ . Нижняя цена игры и верхняя цены игры определяются в этом случае соотношениями:  $\underline{v} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} F(x, y)$  и  $\bar{v} = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq i \leq n} F(x, y)$ .



Если  $\underline{v} = \bar{v}$ , то матрица имеет седловую точку  $(i_0, j_0)$ . В этом случае общее значение нижней и верхней цен игры называется ценой игры, а  $i_0, j_0$  оптимальными стратегиями игроков. Если  $\underline{v} < \bar{v}$ , то для определения решения игры вводят смешанные стратегии. Смешанной стратегией первого игрока в матричной игре (2) называется вектор  $p = (p_1 \dots p_n)$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , где  $p_i$  – вероятность выбора  $i$ -ой чистой стратегии. Смешанной стратегией второго игрока называется вектор  $q = (q_1 \dots q_m)$ ,  $q_j \geq 0$ ,  $j=1, \dots, m$ ,  $\sum_{j=1}^m q_j = 1$ , где  $q_j$  – вероятность выбора  $j$ -ой чистой стратегии.

Функция выигрыша первого игрока в смешанных стратегиях имеет вид:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j = (p, Aq).$$

**Основная теорема матричных игр (теорема фон Неймана)** формулируется следующим образом: любая матричная игра имеет цену в смешанных стратегиях, а игроки имеют оптимальные смешанные стратегии.

Нижней ценой матричной игры в смешанных стратегиях называется величина  $\max_p \min_q H(p, q)$ , а верхней ценой игры –  $\min_q \max_p H(p, q)$ .

$p$        $q$

$q$        $p$

Введём обозначения:

$H(i, q) = \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j$  – выигрыш первого игрока, при выборе им  $i$ -ой чистой стратегии,

тогда как второй игрок использует смешанную стратегию  $q$ ;

$H(p, j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i$  – выигрыш первого игрока при использовании им смешанной стратегии  $p$ , тогда как второй игрок выбирает чистую стратегию  $j$ .

### Определение

Считается, что вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  доминирует вектор  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , если  $\alpha_i \geq \beta_i$ ,  $\forall i$ , и строго доминирует, если  $\alpha_i > \beta_i$ ,  $\forall i$ .

Некоторая линейная комбинация векторов  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$  доминирует (строго доминирует) вектор  $\beta$ , если существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,

$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , такие, что вектор  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha^i$  доминирует (строго доминирует) вектор  $\beta$ .

При этом говорят, что вектор  $\beta$  доминируется (строго доминируется) вектором  $\alpha$  или линейной комбинацией векторов.

### Теорема (принцип доминирования)

Если  $i_0$  – я строка матрицы игры доминируется некоторой линейной комбинацией остальных строк, то существует такая оптимальная стратегия первого

игрока  $p^0$ , что  $p_{i0}^0 = 0$ . Если строго доминируется, то для любой оптимальной стратегии первого игрока  $p^0$  выполняется  $p_{i0}^0 = 0$ .

Аналогично и для столбцов: если  $j_0$  столбец матрицы игры доминирует (строго доминирует) некоторую линейную комбинацию остальных столбцов, то существует такая (любая) оптимальная стратегия второго игрока  $q^0$ , что  $q_{j0}^0 = 0$ .

### Пример 2.

Определить, существует ли цена игры в чистых стратегиях для игры с матрицей:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для определения нижней цены игры в чистых стратегиях нужно в каждой строке матрицы найти минимальный элемент и среди минимальных элементов выбрать наибольший. Поступая таким образом, найдём, что нижняя цена игры  $\underline{v}=0$ .

Для определения верхней цены игры в чистых стратегиях найдём в каждом столбце матрицы максимальный элемент и среди них выбираем наименьший. Для данной игры верхняя цена игры  $\bar{v}=0$ . Так как нижняя и верхняя цены игры равны, то в данной игре существует цена в чистых стратегиях, равная их общему значению. Это же означает, что матрица имеет седловую точку и у игроков существуют оптимальные чистые стратегии. У первого игрока это вторая чистая стратегия и у второго игрока – это вторая чистая стратегия. Пара  $i=2, j=2$  образует седловую точку. Так как цена игры равна нулю, то при оптимальном поведении оба игрока ничего не выигрывают и не проигрывают.

### Пример 3.

Решить игру с матрицей:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $\underline{v} \neq \bar{v}$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Поэтому решение будем искать в смешанных стратегиях.

В данной матрице первая строка доминирует вторую, то значит, у первого игрока существует оптимальная смешанная стратегия, которая содержит вторую чистую стратегию с нулевой вероятностью. Вычеркнем вторую строку матрицы игры. В оставшейся матрице третий и четвёртый столбцы доминируют первый, поэтому у второго игрока существует оптимальная смешанная стратегия, у которой третья и четвёртая компоненты равны нулю. Вычеркнем третий и четвёртый столбцы. Получилась матрица:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать игру с такой матрицей, то видно, что в ней нижняя цена в чистых стратегиях равна 1, а верхняя равна 2. Для нахождения решения в смешанных стратегиях используем необходимые условия оптимальности. Пусть  $v$  – цена матричной игры. Если  $H(p^0, j) \geq v$ , то  $p^0$  – оптимальная стратегия первого игрока. Если  $H(i, q^0) \leq v$ ,  $q^0$  – оптимальная стратегия второго игрока.

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 - \alpha \geq V \\ \alpha + 2 - 2\alpha \geq V \\ 2\beta + 1 - \beta \leq V \\ \beta + 2 - 2\beta \leq V \end{cases}.$$

## Сведение матричной игры к задаче линейного программирования.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - для первого игрока и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  - для второго игрока.

Таким образом, можно рассматривать задачу отыскания оптимальной стратегии первого игрока, для которой имеют место следующие ограничения:

Цена игры  $V$  неизвестна, однако можно считать, что  $V > 0$ . Это условие, выполняется всегда, если элементы матрицы неотрицательны, а этого можно



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для определения оптимальной стратегии второго игрока задача формулируется так:

функция цели  $\max W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1 \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1. \\ 2u_1 + 5u_2 + 1u_3 + 3u_4 \leq 1 \end{cases}$$

Оптимальный план задачи имеет вид:  $u = (\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14})$ ,  $\max W = \frac{2}{7}$ ,  $V = 3.5$ .

Учитывая соотношения между  $u_j$  и  $y_j$ , получаем оптимальную стратегию второго игрока:  $y = (\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ . Оптимальный план задачи для первого игрока получим, используя значения свободных переменных на последней симплекс-итерации. Таким образом,  $t = (\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0)$ , следовательно,  $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ .

### Элементы теории статистических решений

В рассмотренных задачах теории игр предполагалось, что в них принимают участие два участника, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако во многих задачах, приводящих к игровым, неопределённость вызвана отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие. Эти условия зависят не от сознательной деятельности другого игрока, а от объективной действительности, которую принято называть природой. Такие игры называются играми с природой.

Человек (игрок  $A$ ) в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя, например, минимаксную стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш. Второй игрок  $B$  (природа) действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как её состояния. В некоторых задачах для состояний природы может быть задано распределение вероятностей, в других – оно неизвестно. Условия игры, как и в рассмотренных выше задачах, задаются в виде матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элемент  $a_{ij}$  равен выигрышу игрока  $A$ , если он использует стратегию  $i$ , а состояние природы  $p_j$ .

В ряде случаев при решении игры рассматривают матрицу рисков  $R$ . Элементы матрицы  $r_{ij}$  представляют собой разность между выигрышем, который получил бы игрок  $A$ , если бы знал состояние  $p_j$ , и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию  $i$ , то есть  $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ , где  $\beta_j = \max_i a_{ij}$ .

Рассмотрим ряд критериев, используемых при решении игр с природой. При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша (минимум математического ожидания риска). Если вероятности состояния природы  $p_j$  равны  $q_j$  ( $j=1, \dots, n$ ),  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ , то выбор  $i$ -ой стратегии обеспечивает математическое ожидание выигрыша, равное  $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$ . Принимается

решение об использовании стратегии, для которой имеет место  $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$ . В ряде случаев, когда вероятности состояния природы неизвестны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными. Используют также и другие методы оценки вероятности для отдельных состояний природы. Однако во всех случаях нельзя утверждать, что принятое решение является оптимальным. Оптимальным оно является только относительно принятого распределения вероятностей состояний природы. Если вопрос распределения вероятностей состояний природы не решён, то используются следующие критерии.

Максиминный критерий Вальда совпадает с критерием выбора стратегии, позволяющим получить нижнюю цену игры двух лиц с нулевой суммой. Согласно этому критерию выбирается стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыши, не меньше, чем  $\max_i \min_j a_{ij}$ .

Критерий минимального риска Севиджа рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, то есть  $\min_i \max_j r_{ij}$ .

Как критерий Вальда, так и критерий Севиджа основаны на самой пессимистической оценке обстановки. В отличие от них критерий Гурвица учитывает как пессимистический, так и оптимистический подходы к ситуации. Принимается решение о выборе стратегии, при которой имеет место соотношение  $\max_i \{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_j a_{ij} \}$ , где  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Значение  $\lambda$  выбирают на основании субъективных соображений. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к единице значение  $\lambda$ .

#### Пример 5.

Возможно строительство четырёх типов электростанций:  $A_1$  – (тепловых),  $A_2$  – (приплотинных),  $A_3$  – бесшлюзовых и  $A_4$  – шлюзовых. Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива

и его перевозки и т.д. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определённое сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Состояние природы обозначим через  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Согласно критерию Вальда  $\max_i \min_j a_{ij} = \max (2, 2, 3, 1) = 3$ , следует предусмотреть строительство бесшлюзовой электростанции  $A_3$ .

Воспользуемся критерием Севиджа. Построим матрицу рисков:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Элементы первого столбца матрицы получены так:  $\max_i a_{i1} = a_{31} = 8$ , поэтому:

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_{31} - a_{11} = 3 \\ r_{21} &= a_{31} - a_{21} = 6 \\ r_{31} &= a_{31} - a_{31} = 0 \\ r_{41} &= a_{31} - a_{41} = 7 \end{aligned}$$

Согласно критерию Севиджа определяем  $\min_i \max_j r_{ij} = \min (8, 6, 5, 7) = 5$ . В соответствии с этим критерием также предполагается решение  $A_3$ .

Воспользуемся критерием Гурвица. Положим  $\lambda = 0.5$ . Тогда:

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right\} = \max \{5; 7; 6.5; 4.5\} = 7, \text{ то есть следует принять}$$

решение о строительстве приплотинных электростанций  $A_2$ .

Если положить известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятными ( $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.25$ ), то для принятия решения следует найти математическое ожидание выигрыша:

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 4 \frac{3}{4} \\ m_2 &= 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = 5 \frac{1}{4} \\ m_3 &= 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} = 6 \frac{1}{2} \\ m_4 &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = 3 \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Так как максимальное значение имеет  $m_3$ , то следует выбрать решение  $A_3$ .

### Контрольные вопросы к заданию 4

- 1 Что называют конфликтом в теории игр?
- 2 Что собой представляет функция выигрыша?
- 3 Какие игры относятся к классу антагонистических?
- 4 Какие игры различают в соответствии с формой их задания?
- 5 Какие различают стратегии игроков? Приведите примеры.
- 6 Дайте определение конечной антагонистической матричной игры.
- 7 Что означают понятия: нижняя цена игры, верхняя цена игры, цена игры. Приведите примеры.
- 8 Что собой представляет смешанная стратегия игрока?
- 9 Сформулируйте основную теорему матричных игр.
- 10 Запишите функцию, определяющую выигрыш игрока в смешанных стратегиях.
- 11 Приведите пример матричной игры и найдите для неё нижнюю и верхнюю цены игры.
- 12 Что означает выражение: вектор  $\alpha$  доминирует вектор  $\beta$ ?
- 13 Сформулируйте принцип доминирования.
- 14 Что означает понятие решение матричной игры?
- 15 Сведите матричную игру для первого игрока к задаче линейного программирования.
- 16 Сведите матричную игру для второго игрока к задаче линейного программирования.
- 17 Как получить решение матричной игры из решения соответствующей задачи линейного программирования?
- 18 Какие игры называются игрой с природой?
- 19 Как определяются элементы матрицы риска?
- 20 Сформулируйте и охарактеризуйте критерии, которые используются при решении игр с природой.

### Задачи к заданию 4

**1 Игра «Встреча».** Играют двое. Каждый из игроков имеет по одинаковой колоде карт. В колоде по три различные карты. Каждый из игроков выкладывает свои карты в ряд напротив ряда другого игрока. Если хотя бы одна одинаковая пара карт окажется друг против друга, то выигрывает первый игрок 1 единицу. Если такой пары нет, то выигрывает второй игрок 1 единицу. Решите игру.

**2 Игра «Выбор числа».** Каждый из двух игроков может выбрать число от 1 до 6. Если сумма выбранных игроками чисел нечетная, то выигрывает первый игрок сумму, равную разности большего и меньшего из выбранных игроками чисел. Если сумма выбранных игроками чисел четная, а сами выбранные числа различны, то выигрывает второй игрок сумму, равную разности большего и



меньшего из выбранных игроками чисел. Если выбранные игроками числа равны, то первый игрок выигрывает сумму, равную удвоенному числу, выбранному им, если это число нечетно, и проигрывает сумму, равную удвоенному числу, выбранному им, если это число четно. Решите игру.

**3** Два игрока играют в игру. Первый игрок выбирает из двух наборов трех целых чисел от 1,2,3 два любых числа. Второй игрок задумывает одно из чисел 1,2,3. Если одно из чисел первого игрока совпадает с задуманным числом, то первый игрок выигрывает 1 единицу. Если совпадает два числа, выбранных первым игроком (выбраны одинаковые числа), то первый игрок выигрывает 3 единицы. Если первый игрок выбрал числа, не совпадающие с задуманным числом второго игрока, то второй игрок выигрывает 2 единицы. Решите игру.

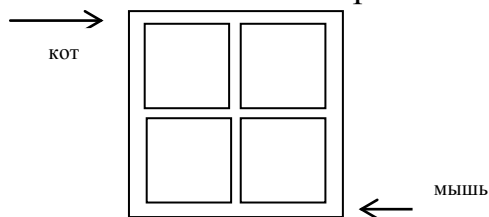
**4** Как только двум посетителям бара любителям пива приносят заказ, они решают, кто будет платить на этот раз. Каждый пишет какое-либо положительное целое число, больше нуля. Числа сравниваются, и заказ в этот раз оплачивает тот, чье число больше, не менее чем на 2. Если же числа различаются только на единицу, то тот, чье число меньше, платит и в этот раз и в следующий. Если числа оказались одинаковыми, они переигрывают. Игроки могут выбирать числа от 1 до 5. Решите игру.

**5** Каждый из игроков имеет по 4 карты: две красные и две синие. У каждого из игроков на одной красной карте написано число 1, на другой - число 2. На синих картах написаны аналогичные числа. Игроки предъявляют друг другу по одной карте. Если совпадают цвета и числа, то выигрывает первый игрок сумму, равную сумме чисел, написанных на картах. Если совпадают цвета карт, но числа не совпадают, то первый игрок выигрывает сумму, равную числу, написанному на карте второго игрока. Если цвета карт соперников не совпадают, то выигрывает второй игрок следующие суммы: если числа совпадают, то сумму чисел, написанных на предъявленных картах; если числа не совпадают, то сумму, равную числу, написанному на карте соперника. Решите игру.

**6** Чет-нечет. Первый игрок зажимает в кулак от одной до пяти монет достоинством в 1 единицу каждая. Второй игрок должен угадать: «чет» или «нечет». Если он угадал, то первый игрок проиграл зажатую в кулаке сумму. В противном случае второй игрок должен заплатить ту сумму, которая оказалась в руке первого игрока. Решите игру.

**7** Коты должны ловить мышей, а мыши прятаться от котов - так уж заведено на белом свете. И, разумеется, каждая из сторон не желает быть в проигрыше. Предположим, что в какой-то момент кот и мышь попадают одновременно в лабиринт (см. рисунок). Лабиринт разбит на ряд участков. Кот и мышь передвигаются с одинаковой скоростью. Они могут перемешаться прямо и заворачивать за угол, но возвращаться по только что пройденному пути им запрещено. Если, пройдя три участка, мышь не встретила с котом, то

она выиграла. В противном случае она проиграла. Кот и мышь не располагают информацией о движении друг друга. Как должны вести себя кот и мышь, чтобы оказаться в выигрыше. Решите игру.



**8** Из чисел 1,2,3,4,5 случайно выбирается какое-нибудь одно, и двум игрокам предлагается указать верхнюю границу для выбранного числа. Если угадал лишь один из игроков, то он получает единицу от противника. Если угадали оба, то единицу от противника получает тот, чья верхняя граница строго меньше. Во всех остальных случаях никто из игроков не получает ничего. Игрокам известно, что выбранное число – одно из чисел 1,2,3,4,5 и что выбор производится случайно. Решите игру.

**9** Первый из двух одинаково метких игроков вооружен бесшумным ружьем, а другой - обычным. Игроки одновременно делают пять шагов по направлению к мишени. Вероятность поражения цели на  $s$ -ом шаге равна  $s/5$ . Каждый из игроков имеет по одной пуле в ружье, и только игрок один может услышать, выстрелил второй игрок или нет. Тот, кто первым поразит цель, получает 25 единиц от своего противника. Если никто из игроков не поразил цель или оба поразили ее одновременно, выигрыши обоих игроков равны нулю. Найти оптимальные стратегии игроков. При решении задачи принять следующее: если игрок 1 решает стрелять на  $i$ -ом шаге, а игрок 2 - на  $j$ -ом, то ожидаемый выигрыш игрока 1 равен:

$$\begin{cases} \frac{i}{5} - (1 - \frac{i}{5}) \cdot \frac{j}{5}, & \text{если } i < j \\ 0, & \text{если } i = j \\ 1 - \frac{2j}{5}, & \text{если } i > j \end{cases}$$

**10** Из трех карт, занумерованных числами 1, 2 и 3, случайно выбираются две, и каждому из двух игроков сдается по карте. После этого каждый из них может сказать "вист" или "пас", причем они должны это сделать одновременно. Каждый игрок знает свою карту, но не знает карты противника. Если оба спасовали, то их карты сравниваются, и игрок, номер карты которого больше, получает единицу от своего противника. Если оба вистуют, то также их карты сравниваются, и игрок с большей картой получает 2 единицы от своего противника. Если один из игроков пасует, а другой вистует, то пасующий имеет возможность прекратить игру и заплатить единицу своему противнику. В противном случае он должен сказать "вист", и в этом случае выигрыш определяется так же, как и в случае, когда они оба вистуют одновременно. Решите игру.

**11** Два игрока I и II играют в следующую игру. Судья сдает по одной карте каждому из игроков, случайно выбирая эти карты из трех карт, занумерованных числами 1, 2 и 3. Каждый игрок знает номер лишь своей карты. Игра начинается с игрока I. Ему разрешается сказать "пас" или "вист". Если оба игрока пасуют, или оба вистуют, или игрок I вистует, а игрок II пасует, то игра заканчивается. Если же игрок I пасует, а игрок II вистует, то игроку I предоставляется второй раз спасовать либо повысить ставку. Карта, имеющая больший номер, считается более ценной, чем карта с меньшим номером. Игроки получают выигрыши следующим образом: если оба вистуют, то игрок с более ценной картой получает две единицы от своего противника; если оба пасуют, то игрок с более ценной картой получает одну единицу от своего противника; если игрок I вистует, а игрок II пасует, то игрок I получает от игрока II одну единицу; если игрок I пасует, а игрок II вистует и затем игрок I снова пасует, то игрок II получает от игрока I одну единицу; наконец, если игрок I пасует, а игрок II вистует и затем игрок I тоже вистует, то игрок с более ценной картой получает от своего противника две единицы. Решите игру.

## Игры с природой

### Задача 1

Предприятие может выпускать три вида продукции ( $A_1, A_2, A_3$ ), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний ( $B_1, B_2, B_3, B_4$ ). Дана матрица  $A$ . Её элементы характеризуют прибыль, которую может получить предприятие в разных ситуациях. Определить оптимальные пропорции для выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным. Определить состояния оптимального спроса. При решении использовать методы линейного программирования.

### Варианты задачи 1

1.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 3 & 9 & 0 & 8 \\ A_2 & 9 & 10 & 0 & 2 \\ A_3 & 7 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 9 & 21 & 8 \\ A_2 & 9 & 13 & 11 & 12 \\ A_3 & 7 & 11 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 9 & 6 & 8 \\ A_2 & 9 & 10 & 11 & 2 \\ A_3 & 7 & 26 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 3 & 9 & 16 & 8 \\ A_2 & 9 & 12 & 11 & 12 \\ A_3 & 17 & 6 & 8 & 24 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 9 & 26 & 8 \\ A_2 & 9 & 10 & 12 & 12 \\ A_3 & 17 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

6.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 19 & 26 & 18 \\ A_2 & 19 & 20 & 11 & 12 \\ A_3 & 17 & 16 & 28 & 15 \end{bmatrix}$$

7.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 29 & 26 & 26 \\ A_2 & 29 & 20 & 31 & 22 \\ A_3 & 27 & 26 & 28 & 14 \end{bmatrix}$$

8.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 38 & 26 & 38 \\ A_2 & 19 & 22 & 31 & 22 \\ A_3 & 27 & 26 & 28 & 24 \end{bmatrix}$$

9.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 19 & 26 & 28 \\ A_2 & 29 & 30 & 11 & 12 \\ A_3 & 17 & 17 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

10.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 43 & 29 & 26 & 26 \\ A_2 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ A_3 & 27 & 46 & 28 & 34 \end{bmatrix}$$

11.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 9 & 18 & 8 \\ A_2 & 9 & 10 & 10 & 22 \\ A_3 & 11 & 16 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

12.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 3 & 19 & 16 & 18 \\ A_2 & 19 & 12 & 11 & 12 \\ A_3 & 17 & 18 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

13.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 19 & 13 & 8 \\ A_2 & 19 & 10 & 25 & 32 \\ A_3 & 17 & 16 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

14.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 19 & 13 & 28 \\ A_2 & 19 & 10 & 15 & 15 \\ A_3 & 17 & 6 & 21 & 21 \end{bmatrix}$$

15.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 43 & 9 & 13 & 8 \\ A_2 & 9 & 30 & 30 & 2 \\ A_3 & 7 & 6 & 11 & 34 \end{bmatrix}$$

16.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 9 & 33 & 18 \\ A_2 & 9 & 31 & 15 & 2 \\ A_3 & 24 & 6 & 11 & 24 \end{bmatrix}$$

17.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 29 & 13 & 8 \\ A_2 & 15 & 10 & 25 & 2 \\ A_3 & 17 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

18.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 23 & 13 & 13 & 28 \\ A_2 & 9 & 25 & 25 & 2 \\ A_3 & 27 & 16 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

19.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 3 & 9 & 23 & 9 \\ A_2 & 9 & 18 & 15 & 22 \\ A_3 & 17 & 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

20.

$$A = \begin{bmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & 13 & 9 & 13 & 18 \\ A_2 & 10 & 10 & 15 & 2 \\ A_3 & 17 & 16 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

### Задача 2

Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ). Их реализация и прибыль магазина зависит от вида товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь четыре состояния ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ) и не прогнозируется. Определить оптимальные пропорции в закупке товара из условия максимизации средней гарантированной прибыли при заданной матри-

це прибыли А. Определить состояния оптимального спроса. При решении использовать методы линейного программирования.

Варианты задачи 2

21.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 15 \\ T_2 & 16 & 12 & 14 & 22 \\ T_3 & 13 & 18 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

22.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 26 & 13 & 11 & 25 \\ T_2 & 16 & 24 & 24 & 12 \\ T_3 & 13 & 17 & 15 & 28 \end{bmatrix}$$

23.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 23 & 16 & 11 & 22 \\ T_2 & 13 & 12 & 24 & 5 \\ T_3 & 14 & 14 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

24.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 23 & 17 & 21 & 16 \\ T_2 & 20 & 12 & 15 & 32 \\ T_3 & 10 & 24 & 24 & 19 \end{bmatrix}$$

25.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 31 & 25 & 19 & 24 \\ T_2 & 28 & 23 & 23 & 40 \\ T_3 & 18 & 26 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

26.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 15 & 15 & 5 & 12 \\ T_2 & 14 & 10 & 11 & 20 \\ T_3 & 11 & 11 & 23 & 10 \end{bmatrix}$$

27.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 25 \\ T_2 & 10 & 32 & 16 & 11 \\ T_3 & 13 & 18 & 35 & 20 \end{bmatrix}$$

28.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 20 & 25 \\ T_2 & 10 & 22 & 16 & 11 \\ T_3 & 23 & 18 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

29.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 25 \\ T_2 & 10 & 12 & 26 & 11 \\ T_3 & 13 & 28 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

30.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 15 & 25 \\ T_2 & 10 & 17 & 16 & 11 \\ T_3 & 23 & 18 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

31.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 25 \\ T_2 & 12 & 12 & 16 & 11 \\ T_3 & 18 & 18 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

32.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 20 & 25 \\ T_2 & 10 & 12 & 16 & 31 \\ T_3 & 23 & 18 & 25 & 14 \end{bmatrix}$$

33.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 25 \\ T_2 & 11 & 12 & 16 & 11 \\ T_3 & 13 & 18 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

34.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 25 & 10 & 25 \\ T_2 & 19 & 12 & 16 & 11 \\ T_3 & 13 & 18 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

35.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 7 & 25 \\ T_2 & 12 & 12 & 16 & 8 \\ T_3 & 18 & 18 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

36.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 30 & 15 & 26 & 25 \\ T_2 & 10 & 32 & 16 & 11 \\ T_3 & 13 & 18 & 35 & 30 \end{bmatrix}$$

37.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 10 & 35 & 10 & 25 \\ T_2 & 30 & 12 & 16 & 16 \\ T_3 & 13 & 18 & 35 & 35 \end{bmatrix}$$

38.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 25 & 25 & 10 & 21 \\ T_2 & 10 & 22 & 26 & 11 \\ T_3 & 9 & 11 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

39.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 20 & 15 & 10 & 29 \\ T_2 & 22 & 22 & 16 & 11 \\ T_3 & 18 & 18 & 35 & 10 \end{bmatrix}$$

40.

$$A = \begin{bmatrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ T_1 & 33 & 15 & 33 & 25 \\ T_2 & 10 & 34 & 16 & 11 \\ T_3 & 13 & 18 & 15 & 35 \end{bmatrix}$$

## Принятие решений в условиях риска

### Задача 1

Возможно строительство пяти типов электростанций:  $A_1$ -(тепловых на газе),  $A_2$  - (тепловых на твердом топливе),  $A_3$ -(приплотинных),  $A_4$ -бесшлюзовых и  $A_5$ -шлюзовых. Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.д. Предположим, что выделено несколько различных состояний, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций задана в таблице 1. Отрицательная эффективность определяет, например, что строительство  $A_3$  выгоднее, чем строительство  $A_2$  (отсутствие прямой пропорциональности связано с учётом различного воздействия на эффективность природных факторов) и т.д. Принять решение о строительстве электростанции, применяя критерии: максиминный, Лапласа, Гурвица, Сэвиджа.

Варианты задачи 1

1.

Таблица 1

	Не строить	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	-121	62	245	245	245	245
$A_2$	-168	14	198	380	380	380
$A_3$	-216	-33	150	332	515	515
$A_4$	-264	-68	130	301	493	615
$A_5$	-286	-81	101	284	468	680



2.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-141	62	245	245	245	245
A <sub>2</sub>	-178	-24	198	438	380	380
A <sub>3</sub>	-226	-53	150	372	515	515
A <sub>4</sub>	-284	-98	130	301	493	615
A <sub>5</sub>	-316	-101	-20	264	408	690

3.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-131	62	245	235	245	245
A <sub>2</sub>	-178	-24	198	438	390	380
A <sub>3</sub>	-232	-55	150	372	515	515
A <sub>4</sub>	-284	-98	110	301	493	625
A <sub>5</sub>	-346	-120	-20	264	408	690

4.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-131	82	255	235	225	215
A <sub>2</sub>	-188	-24	198	438	390	380
A <sub>3</sub>	-232	-55	145	372	525	515
A <sub>4</sub>	-294	-98	110	301	493	635
A <sub>5</sub>	-346	-120	-20	264	408	690

5.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-141	82	255	235	225	215
A <sub>2</sub>	-198	-24	200	438	390	380
A <sub>3</sub>	-232	-55	145	372	525	515
A <sub>4</sub>	-300	-100	110	301	500	635
A <sub>5</sub>	-346	-120	-20	264	408	700

6.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-141	82	265	235	225	215
A <sub>2</sub>	-219	-24	200	438	390	438
A <sub>3</sub>	-252	-75	145	372	585	515
A <sub>4</sub>	-320	-110	110	301	500	635
A <sub>5</sub>	-356	-140	-20	264	408	700

7.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-151	92	285	235	225	215
A <sub>2</sub>	-219	-24	200	438	390	438
A <sub>3</sub>	-272	-85	145	572	685	515
A <sub>4</sub>	-320	-130	110	301	500	635
A <sub>5</sub>	-366	-170	-40	264	408	720

8.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-141	72	285	235	225	215
A <sub>2</sub>	-189	-54	200	438	390	438
A <sub>3</sub>	-242	-85	145	582	685	515
A <sub>4</sub>	-300	-110	110	301	500	645
A <sub>5</sub>	-346	-160	-40	264	408	720

9.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-131	72	295	235	225	215
A <sub>2</sub>	-179	-54	200	448	390	438
A <sub>3</sub>	-232	-85	145	582	695	515
A <sub>4</sub>	-300	-110	110	301	500	655
A <sub>5</sub>	-356	-160	-40	264	408	720

10.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-231	72	395	335	325	315
A <sub>2</sub>	-279	-54	200	448	390	438
A <sub>3</sub>	-332	-85	145	582	695	515
A <sub>4</sub>	-400	-110	110	351	520	655
A <sub>5</sub>	-456	-190	-40	264	408	770

11.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-231	100	385	305	225	315
A <sub>2</sub>	-279	-54	200	448	390	438
A <sub>3</sub>	-332	-85	145	582	695	515
A <sub>4</sub>	-400	-110	110	351	540	655
A <sub>5</sub>	-456	-190	-40	264	408	770

12.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-201	100	285	305	225	315
A <sub>2</sub>	-259	-54	200	468	390	438
A <sub>3</sub>	-302	-85	145	582	769	515
A <sub>4</sub>	-400	-110	110	351	540	655
A <sub>5</sub>	-456	-190	-40	264	408	780

13.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-182	100	285	293	225	315
A <sub>2</sub>	-259	-54	220	468	400	458
A <sub>3</sub>	-332	-85	165	582	769	525
A <sub>4</sub>	-410	-110	120	351	560	655
A <sub>5</sub>	-466	-190	-40	264	448	780

14.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-182	100	385	250	205	315
A <sub>2</sub>	-259	-54	320	468	400	458
A <sub>3</sub>	-332	-85	265	582	769	525
A <sub>4</sub>	-410	-110	220	351	560	655
A <sub>5</sub>	-466	-190	100	224	448	780

15.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-162	100	385	250	205	315
A <sub>2</sub>	-259	-54	320	408	460	458
A <sub>3</sub>	-352	-85	245	582	749	505
A <sub>4</sub>	-410	-110	200	351	560	655
A <sub>5</sub>	-466	-190	80	224	448	780

16.

Таблица 1

	Не строить	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	-162	100	385	250	205	315
A <sub>2</sub>	-269	-24	300	458	460	458
A <sub>3</sub>	-352	-75	245	582	749	505
A <sub>4</sub>	-410	-110	200	351	560	600
A <sub>5</sub>	-496	-190	-80	224	408	760

17.

Таблица 1

	Не строить	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	-111	82	245	215	225	275
$A_2$	-188	-34	198	438	390	380
$A_3$	-262	-75	170	372	515	515
$A_4$	-294	-98	110	301	493	625
$A_5$	-386	-140	-20	264	408	790

18.

Таблица 1

	Не строить	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	-131	62	245	275	245	215
$A_2$	-188	-24	188	438	490	380
$A_3$	-232	-55	150	372	515	515
$A_4$	-284	-98	90	301	493	645
$A_5$	-326	-100	-20	264	408	690

19.

Таблица 1

	Не строить	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	-141	42	245	225	215	265
$A_2$	-188	-14	198	438	390	380
$A_3$	-212	-55	140	382	515	515
$A_4$	-284	-98	105	321	493	625
$A_5$	-356	-120	-20	264	388	700

20.

Таблица 1

	Не строить	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	-131	52	255	225	205	295
$A_2$	-198	-24	198	438	390	380
$A_3$	-232	-55	150	372	515	535
$A_4$	-294	-98	110	321	443	625
$A_5$	-366	-110	-20	264	408	690

## Задача 2

Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество комнат в гостинице. Для этого составляется смета расходов по строительству гостиницы с различным количеством комнат, а также рассчитывается ожидаемый доход в зависимости от количества комнат, которые будут сняты. В зависимости от принятого решения – количества комнат в гостинице  $x = (20, 30, 40, 50)$  и количества снятых комнат  $r = (0, 10, 20, 30, 40, 50)$ , которое зависит от множества

случайных факторов, не известных фирме, получают следующую таблицу значений ежегодной прибыли (таблица 1).

## Варианты задачи 2

21.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

22.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-141	62	245	245	245	245
30	-226	-53	150	372	515	515
40	-284	-98	130	301	493	615
50	-316	-101	-20	264	408	690

23.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-131	82	255	235	225	215
30	-188	-24	198	438	390	380
40	-294	-98	110	301	493	635
50	-346	-120	-20	264	408	690

24.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-198	-24	200	438	390	380
30	-232	-55	145	372	525	515
40	-300	-100	110	301	500	635
50	-346	-120	-20	264	408	700

25.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-141	82	265	235	225	215
30	-219	-24	200	438	390	438
40	-252	-75	145	372	585	515
50	-320	-110	110	301	500	635

26.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-151	92	285	235	225	215
30	-219	-24	200	438	390	438
40	-272	-85	145	572	685	515
50	-366	-170	-40	264	408	720

27.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-141	72	285	235	225	215
30	-189	-54	200	438	390	438
40	-300	-110	110	301	500	645
50	-346	-160	-40	264	408	720

28.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-131	72	295	235	225	215
30	-232	-85	145	582	695	515
40	-300	-110	110	301	500	655
50	-356	-160	-40	264	408	720

29.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-279	-54	200	448	390	438
30	-332	-85	145	582	695	515
40	-400	-110	110	351	520	655
50	-456	-190	-40	264	408	770

30.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-231	100	385	305	225	315
30	-279	-54	200	448	390	438
40	-332	-85	145	582	695	515
50	-456	-190	-40	264	408	770

31.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-201	100	285	305	225	315
30	-259	-54	200	468	390	438
40	-302	-85	145	582	769	515
50	-400	-110	110	351	540	655

32.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-182	100	285	293	225	315
30	-259	-54	220	468	400	458
40	-332	-85	165	582	769	525
50	-466	-190	-40	264	448	780

33.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-182	100	385	250	205	315
30	-259	-54	320	468	400	458
40	-332	-85	265	582	769	525
50	-466	-190	100	224	448	780

34.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-162	100	385	250	205	315
30	-352	-85	245	582	749	505
40	-410	-110	200	351	560	655
50	-466	-190	80	224	448	780

35.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-162	100	385	250	205	315
30	-269	-24	300	458	460	458
40	-352	-75	245	582	749	505
50	-496	-190	-80	224	408	760

36.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-131	62	245	235	245	245
30	-232	-55	150	372	515	515
40	-284	-98	110	301	493	625
50	-346	-120	-20	264	408	690

37.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-111	82	245	215	225	275
30	-188	-34	198	438	390	380
40	-262	-75	170	372	515	515
50	-294	-98	110	301	493	625

38.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-131	62	245	275	245	215
30	-188	-24	188	438	490	380
40	-284	-98	90	301	493	645
50	-326	-100	-20	264	408	690

39.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-141	42	245	225	215	265
30	-188	-14	198	438	390	380
40	-212	-55	140	382	515	515
50	-356	-120	-20	264	388	700

40.

Таблица 1

	0	10	20	30	40	50
20	-131	52	255	225	205	295
30	-198	-24	198	438	390	380
40	-232	-55	150	372	515	535
50	-366	-110	-20	264	408	690



### **Библиографический список**

- 1 Теория принятия решений: Сб. описаний лаб. работ / РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2012. -83с.
- 2 Системный анализ. Методические указания. Часть 1/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2010. -29с.
- 3 Теория принятия решений. Учебно-методическое пособие. Часть 3/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2011. -53с.
- 4 Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы оптимизации / Учебное пособие. -Минск, «Четыре четверти». -472 с.: ил.

### **Интернет – ресурсы**

- 1 [http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/\\_index/\\_pilocus/\\_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf](http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf)
- 2 <http://edu-lib.net/matematika-2/dlya-studentov/vagner-g-osnovyi-issledovaniya-operatsiy-tom-1-onlayn>
- 3 <http://www.twirpx.com/file/469957/>
- 4 [http://techsciencebooks.ru/issledovanie\\_operatsiy\\_v\\_\\_a\\_\\_gorelik\\_i\\_\\_a\\_\\_ushakov/](http://techsciencebooks.ru/issledovanie_operatsiy_v__a__gorelik_i__a__ushakov/)
- 5 [http://mirknig.com/knigi/nauka\\_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html](http://mirknig.com/knigi/nauka_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html)
- 6 <http://www.libex.ru/detail/book542848.html>
- 7 <http://www.twirpx.com/file/989308/>
- 8 <http://www.twirpx.com/file/1638982/>