

Оглавление

Введение	1
Программа курса	2
Методические указания	4
Задание 5 Задача о назначениях.....	5
Венгерский алгоритм	6
Контрольные вопросы к заданию 5	10
Варианты задач к заданию 5	11
Задание 6 Целочисленное линейное программирование	17
Метод Гомори	17
Контрольные вопросы к заданию 6	23
Варианты задач к заданию 6	25
Библиографический список.....	29
Интернет – ресурсы.....	29

Введение

Курс "Системный анализ в сервисе" введён в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Необходимость методических указаний, в которых с единых позиций излагаются основные практические этапы решения наиболее распространенных задач принятия решений, связана с недостатком литературы по рассматриваемой тематике в библиотечных фондах института и города.

Предлагаемый сборник имеет целью познакомить студентов с задачами, решение которых сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, зависящей, как правило, от большого числа переменных. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях человеческой деятельности и в первую очередь в практике планирования и организации производства.

В сборник включены материалы по разделам: задачи линейного программирования, транспортные задачи, задачи комбинаторного программирования, элементы теории игр, задача о назначениях, целочисленное линейное программирование, квадратичное программирование. К этим разделам принадлежит большое число наиболее распространенных производственных и коммерческих задач. Несмотря на очевидные упрощения, приведённые задачи являются хорошей иллюстрацией проблем, с которыми приходится сталкиваться предприятиям при принятии решений, связанных с распределением ресурсов.

В сборнике кратко изложены идеи и содержание конкретных методов, а также вычислительные аспекты, возникающие при решении задач. Приведены также примеры решения всех рассматриваемых типов задач, а также контрольные вопросы и индивидуальные задания. Поскольку численное решение сложных задач большой размерности затруднительно без использования компьютера, методы и алгоритмы решения указанных выше задач реализованы в виде программ. Исходные тексты программ с описанием их особенностей приведены в [1]. Они могут быть использованы как в учебном процессе, так и при решении практических задач, а также при проверке решений, полученных при ручном решении.

Всё это даёт основания надеяться, что сборник окажется полезным для широкого круга студентов, так или иначе связанных с решением задач оптимизации, организацией и планированием производства с использованием вычислительной техники.

Программа курса

№ раз-дела	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Основные понятия и определения	Понятие системы. Системы с активными элементами. Проблема принятия решения. Методы и модели принятия решения. Этапы построения оптимизационных моделей. Методологические основы теории принятия решений. Задачи выбора решений, отношения, функции выбора, функции полезности, критерии.
2	Задача линейного программирования	Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Симплексный алгоритм и метод решения ЗЛП. Двойственная ЗЛП. Анализ линейной модели на чувствительность. Пример.
3	Транспортная задача	Постановка классической транспортной задачи. Алгоритм решения транспортной задачи. Пример.
4	Задачи комбинаторного типа	Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Назначение и вычисление нижних граничных оценок. Процесс ветвления. Пример.
5	Элементы теории игр	Основные понятия теории игр. Конечные матричные антагонистические игры. Основная теорема матричных игр. Решение матричной игры. Пример. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Элементы теории статистических решений. Критерии, применяемые при решении задач оптимизации. Пример.
6	Задача о назначениях	Математическая постановка задачи выбора. Венгерский алгоритм решения. Пример.
7	Целочисленное линейное программирование	Постановка задачи. Метод Гомори. Принципы формирования дополнительных ограничений. Пример.
8	Динамическое программирование	Метод динамического программирования. Примеры многошаговых операций. Решение числового примера.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

- использовать базовые положения математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-2);
- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как

средством управления информацией; работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-13);

- обладать культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, систематизации, постановке целей и выбору путей их достижения, уметь логически верно, аргументированно и ясно строить свою речь (ОК-17);

- к обоснованию и разработке технологии процесса сервиса, выбору ресурсов и технических средств для его реализации (ПК-9).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные постановки и алгоритмы решения классических задач принятия решений (ОК-2, ПК-9);

- основные принципы и концепции построения моделей (ОК-2, ОК-13, ОК-17);

- методы и алгоритмы принятия решений (ОК-2, ОК-13, ПК-9).

Уметь:

- обоснованно разрабатывать и выбирать методы решения задач (ОК-2, ОК-13);

- применять ЭВМ для исследования и решения задач (ОК-13);

- анализировать полученные результаты (ОК-2, ОК-13);

- обоснованный выбор вариантов из множества допустимых (ОК-17).

Владеть:

- созданием методик решения задач с активными элементами (ОК-2);

- методами рационального поведения при принятии решений (ОК-17);

- алгоритмическими методами скалярной и векторной конечномерной оптимизации (ОК-2, ОК-13);

- вычислительными аспектами принятия решений (ОК-13);

- разработкой компьютерных алгоритмов (ОК-2, ОК-13).

Методические указания

Современные темпы научно-технического прогресса привели к существенному усложнению процессов организации производства, планирования и управления во всех сферах и отраслях. Тем, кто не сталкивался с необходимостью принимать решения по управлению на разных уровнях, трудно представить, почему возникают сложности, почему не всегда удаётся применить, казалось бы, хорошо разработанный и удобный аппарат математического моделирования. Сложность задач управления растёт быстрее числа занятых в нем людей. Для преодоления этого было предложено изменить технологию сбора и обработки информации и создать автоматизированные системы управления (АСУ). Однако только этот путь оказался недостаточным. Стало очевидным, что необходимо внедрять в сферу управления новые методы и модели, помогающие человеку формировать целостное представление об управляемом объекте. При этом необходимо также понимать и учитывать закономерности функционирования и развития сложных систем, решать коренные проблемы, изменяющие принципы управления.

Наиболее конструктивным из направлений системных исследований является системный анализ. Он ориентирует исследователей, проектировщиков, работников сферы управления не только на учёт тех или иных закономерностей функционирования и развития сложных систем, но и обязательно на разработку методики процесса принятия решения. При этом выделяются этапы, определяется их последовательность, и предлагаются всевозможные подходы и методы выполнения этапов принятия решения в конкретных условиях. Для того чтобы ориентироваться в сложных производственных ситуациях, характеризующихся переплетением экономических, социальных, демографических, экологических и технических факторов, современный инженер должен развить в себе системное мышление, умение анализировать сложные ситуации, ставить задачи, формировать варианты решений и выбирать из них лучший для конкретных условий.

При выполнении контрольной работы необходимо тщательно изучить курс лекций по «Системному анализу в сервисе», внимательно проанализировать примеры решения задач. При необходимости углубленного изучения соответствующих разделов рекомендуется воспользоваться приведёнными в библиографическом списке источниками. Контрольная работа состоит из семи задач. Ниже в соответствующих разделах приводятся варианты задач. Номера задач или выдаются преподавателем или определяются по цифрам номера зачетки. При выполнении контрольной работы необходимо записать условие каждой задачи, привести подробное математическое описание. Решение должно включать достаточное количество пояснений. В конце решения должен быть записан конкретный ответ, соответствующий условию задачи. Решение задачи желательно получить с помощью ЭВМ. Однако в этом случае в контрольной работе должны быть приведены все этапы хотя бы для двух итераций так, как это указано в примерах. При выполнении контрольной работы на ЭВМ необходимо указать, какая программа использовалась, в чём её суть, особенности и как решалась задача.

Задание 5

Задача о назначениях

Данная задача заключается в выборе такого распределения ресурсов по некоторым действующим объектам, при котором минимизируются стоимости назначений. Предполагается, что каждый ресурс назначается ровно один раз и каждому объекту приписывается ровно один ресурс. Примеры ресурсов и объектов, а также соответствующие им критерии эффективности приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Варианты ресурсов, объектов и критериев эффекта

Пример	Ресурсы	Объекты	Критерий эффективности
1	Рабочие	Рабочие места	Время
2	Грузовые автомобили	Маршруты	Затраты
3	Станки	Участки	Объём продукции
4	Экипажи	Рейсы	Время простоя
5	Коммивояжёр	Города	Товарооборот

Матрица стоимостей C определяется следующим образом:

$C=[c_{ij}]$, где c_{ij} – затраты, связанные с назначением i -го ресурса на j -й объект. Индексы i и j принимают значения $1, 2, \dots, n$, где n – число объектов или ресурсов.

Определим x_{ij} следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й ресурс назначается на } j\text{-й объект,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи может быть записано в виде двумерного массива $X=[x_{ij}]$. Допустимое решение называется назначением. Для заданного значения n существует $n!$ допустимых решений. Допустимое решение строится путём выбора ровно одного элемента в каждой строке матрицы $X=[x_{ij}]$ и ровно одного элемента в каждом столбце этой матрицы.

Элементы c_{ij} матрицы C , соответствующие элементам $x_{ij}=1$ матрицы X , выражают затраты, соответствующие допустимому решению X .

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом. В данной задаче требуется минимизировать целевую функцию, выражающую общую стоимость назначений. Ограничения можно разбить на две группы. Ограничения первой группы необходимы для того, чтобы каждый ресурс использовался ровно один раз. Ограничения второй группы гарантируют, что каждому объекту будет приписан ровно один ресурс. Математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\text{минимизировать } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \text{ для всех } i,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ для всех } j,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для всех } i \text{ и для всех } j.$$

Очевидно, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, соответствующим единичным значениям параметров a_i и b_j . Поэтому для решения задачи о назначениях можно воспользоваться любым алгоритмом для транспортной задачи или симплекс-алгоритмом решения задачи линейного программирования. Однако, рассмотренные ниже методы являются более эффективными, поскольку используют специфику постановки данной задачи. До настоящего времени было предложено два метода решения задачи о назначениях. Это венгерский алгоритм и метод Мака. Оба метода основаны на том факте, что положение оптимального выбора не изменится, если каждому элементу некоторой строки или столбца добавить одно и то же значение или вычесть его.

Венгерский алгоритм

Рассмотрим задачу о назначениях с матрицей стоимостей $C=[c_{ij}]$. Предположим, что каждый элемент i -й строки складывается с действительным числом γ_i , а каждый элемент j -го столбца – с действительным числом δ_j . В результате такого преобразования матрицы C будет получена новая матрица стоимостей D , для которой $d_{ij}=c_{ij}+\gamma_i+\delta_j$ или $c_{ij} = d_{ij} - \gamma_i - \delta_j$. Из последнего равенства следует, что $c_{ij} x_{ij} = d_{ij} x_{ij} - \gamma_i x_{ij} - \delta_j x_{ij}$.

$$\text{Поэтому } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} - \sum_i \sum_j \gamma_i x_{ij} - \sum_j \sum_i \delta_j x_{ij} = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} - \sum_i \gamma_i - \sum_j \delta_j.$$

Отсюда следует, что при ограничениях задачи о назначениях минимизация функции $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ эквивалентна минимизации функции $\sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}$. Основанный на данном результате венгерский алгоритм работает следующим образом: из элементов каждой строки и каждого столбца матрицы стоимостей вычитаются их наименьшие элементы, после чего ведётся поиск допустимого решения, единичным элементам которого соответствуют нулевые элементы модифицированной матрицы стоимостей. Если такое допустимое решение существует, то оно является оптимальным назначением. В противном случае матрица стоимостей модифицируется ещё раз с целью получить в ней большее число нулевых элементов.

Алгоритм состоит из следующих трёх шагов.

Шаг 1. Редукция строк и столбцов. Цель данного шага состоит в получении максимально возможного числа нулевых элементов в матрице стоимостей. Для этого можно из всех элементов каждой строки вычесть минимальный элемент соответствующей строки, а из всех элементов каждого столбца вычесть минимальный элемент соответствующего столбца. Затем можно исходную мат-

рицу стоимостей заменить редуцированной матрицей стоимостей и перейти к поиску назначения.

Шаг 2. Определение назначений. Если после выполнения процедуры редукции в каждой строке и в каждом столбце матрицы стоимостей можно выбрать по одному нулевому элементу, так что соответствующее этим элементам решение будет допустимым, то данное назначение будет оптимальным. Если назначения нулевой стоимости для редуцированной матрицы не существует, то данная матрица подлежит дальнейшей модификации. Для поиска допустимого решения нулевой стоимости можно воспользоваться следующей процедурой.

а) Найти строки, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждой такой строке произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждом столбце, в котором было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Строки рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

б) Найти столбцы, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждом таком столбце произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждой строке, в которой было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Столбцы рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

в) Выполнять шаги «а» и «б» до тех пор, пока не будет вычеркнуто максимально возможное число нулевых элементов. Если построено назначение, то оно является оптимальным. Если некоторые нули остались невычеркнутыми, то можно попытаться найти полное назначение (например, методом проб и ошибок) среди нескольких оптимальных вариантов. Если нельзя найти ни одного полного назначения, то необходима дальнейшая модификация матрицы.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы. Если нулевых элементов в матрице стоимостей не достаточно для того, чтобы построить назначение нулевой стоимости, то с помощью следующей простой процедуры можно получить новые нулевые элементы. Для этого определяют в редуцированной матрице стоимостей минимальное множество строк и столбцов, содержащих все нулевые элементы матрицы, и найдём минимальный элемент вне данного множества. Если значение этого элемента вычесть из всех остальных элементов матрицы, то на месте нулей будут стоять отрицательные величины и по крайней мере один элемент, не принадлежащий выделенному множеству строк и столбцов, станет равным нулю. Однако теперь назначение нулевой стоимости может не быть оптимальным, поскольку матрица содержит отрицательные элементы. Для того чтобы матрица не содержала отрицательных элементов, прибавим абсолютную величину наименьшего отрицательного элемента ко всем элементам выделенных строк и столбцов. При этом, к элементам, расположенным на пересечении выделенных строк и столбцов, данная величина будет прибавляться дважды. Кроме того, все отрицательные элементы будут преобразованы в нулевые и положительные элементы. В результате выполнения данного шага новая редуцированная матрица будет содержать больше нулей, расположенных вне строк и столбцов, соответствующих нулевым элементам текущего неоптимального решения.

Для модификации редуцированной матрицы можно воспользоваться следующей процедурой.

а) Вычислить число нулей в каждой невычеркнутой строке и в каждом невычеркнутом столбце.

б) Вычеркнуть строку или столбец с максимальным числом нулей. В случае равенства числа нулей в нескольких строках и столбцах вычеркнуть любую из этих строк (или любой из этих столбцов).

в) Выполнять шаги «а» и «б» до тех пор, пока не будут вычеркнуты все нули.

г) Из всех невычеркнутых элементов вычесть минимальный невычеркнутый элемент и прибавить его к каждому элементу, расположенному на пересечении двух линий.

Пример 1.

Рассмотрим работу венгерского алгоритма на примере задачи о назначениях со следующей матрицей стоимостей.

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{bmatrix}.$$

1 Редукция строк и столбцов.

а) Значения минимальных элементов строк 1,2,3 и 4 равны 2,4,11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{bmatrix}.$$

б) Значения минимальных элементов столбцов 1,2,3 и 4 равны 0,0,5 и 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

2 Поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

а) Строки 1,2 и 4 содержат по одному невычеркнутому нулю. Рассматривая эти строки в порядке возрастания их номеров, произведём вначале назначение, соответствующее элементу (1,1), и вычеркнем нулевой элемент (4,1). Затем произведём назначение, соответствующее элементу (2,2). Строка 4 не может быть использована, поскольку нулевой элемент (4,1) был вычеркнут после того, как мы произвели назначение, соответствующее элементу (1,1).

б) Столбцы 3 и 4 содержат по одному не вычеркнутому нулю. Рассматривая эти столбцы в порядке возрастания их номеров, мы можем произвести третье назначение, соответствующее элементу (3,3). В столбце 4 ни одно назначение не возможно, так как расположенные в нём нулевые элементы были вычеркнуты после того, как мы произвели назначение, соответствующее элементу (3,3). После выполнения данного шага матрица стоимостей имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ни одно назначение не может быть получено, и необходимо провести дальнейшую модификацию редуцированной матрицы стоимостей.

3 Модификация редуцированной матрицы стоимостей.

а) Число нулей в строках 1,2,3 и 4 матрицы, полученной на предыдущем шаге, равно 1,1,2 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие величины равны 2,1,1 и 1.

б) Максимальное число нулей, по два, содержат строка 3 и столбец 1. Выбираем строку 3 и вычёркиваем все её элементы.

в) Число невычеркнутых нулей в строках 1,2 и 4 равно 1,1 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие значения равны 2,1,0 и 0. Поэтому мы должны выбрать столбец 1 и вычеркнуть его. После этого останется только один невычеркнутый нуль – элемент (2,2). Поэтому можно вычеркнуть либо строку 2, либо столбец 2. Вычёркивая строку 2, получаем следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

г) Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2. Вычитая его из всех невычеркнутых элементов и складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получаем новую редуцированную матрицу стоимостей:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Выполнив вновь процедуру построения допустимого решения нулевой стоимости, получаем следующее оптимальное решение:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & [0] & 3 \\ 13 & [0] & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & [0] \\ [0] & 9 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Тогда искомое оптимальное назначение даёт значение функции цели, равное $z=9 + 4 + 11 + 4=28$.

В [1] приведён исходный текст программы для решения задачи о назначениях с использованием венгерского алгоритма.

Контрольные вопросы к заданию 5

- 1 Сформулируйте задачу о назначениях.
- 2 Приведите математическую постановку задачи о назначениях.
- 3 Охарактеризуйте основные шаги алгоритма решения задачи о назначениях венгерским методом.
- 4 Охарактеризуйте основные шаги алгоритма решения задачи о назначениях методом Мака.
- 5 В чем заключается операция редукции матрицы?
- 6 Сформулируйте задачу о назначениях как транспортную задачу.
- 7 Сформулируйте задачу о назначениях как задачу линейного программирования.
- 8 Покажите, что преобразования матрицы, используемые в венгерском алгоритме, не меняют сущности задачи оптимизации.
- 9 Поясните, как работает алгоритм определения назначений в венгерском методе. Приведите примеры.
- 10 Поясните, как работает алгоритм определения назначений в методе Мака. Приведите примеры.
- 11 В чем заключается модификация редуцированной матрицы в венгерском методе. Приведите примеры.
- 12 Покажите непротиворечивость операций, выполняемых при модификации матрицы в венгерском методе.
- 13 Можно ли отнести задачу о назначениях к задаче комбинаторного типа? Почему?
- 14 Составьте блок-схему варианта венгерского алгоритма, представленного в программе для ЭВМ.
- 15 Составьте блок-схему варианта алгоритма метода Мака, представленного в программе для ЭВМ.
- 16 Найти оптимальный вариант назначений, если матрица эффективности такова:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- 17 Найти оптимальный вариант назначений, если матрица эффективности имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Варианты задач к заданию 5

1 В определенный день компания по перевозке грузов должна забрать пять грузов в точках A, B, C, D, E и доставить их в пункты a, b, c, d, e . Расстояние между точками загрузки и пунктами назначений приведены в таблице 2. Фирма располагает пятью грузовиками двух типов X и Y в точках S, T, U, V, W ;

Таблица 2 - Расстояние между точками загрузки грузов, км

Маршруты перевозок				
$A-a$	$B-b$	$C-c$	$D-d$	$E-e$
60	30	100	50	40

Типы грузовиков: X в S, Y в T, X в U, X в V и Y в W . Грузовики типа X новее и экономичнее грузовиков типа Y , и стоимости перевозки на них ниже. Стоимости пробега одной мили (в ден. ед) для грузовиков обоих типов (включающие горючее, страховку, поддержку оборудования и т.д.) приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Стоимости пробега одной мили, ден. ед

	Пустой	Загруженный
X	20	40
Y	30	60

Расстояния от стоянки грузовиков до места назначения приведены в таблице 4.

Таблица 4 - Расстояния от стоянки грузовиков до места назначения

Точки расположения грузовиков	Расстояние, км				
	A	B	C	D	E
S	30	20	40	10	20
T	30	10	30	20	30
U	40	10	10	40	10
V	20	20	40	20	30
W	30	20	10	30	40

Определите распределение грузов по грузовикам, минимизирующее общую стоимость. Следует предположить, что все грузы имеют приблизительно одинаковый размер и для них требуется одинаковый объем работ по упаковке, размещению и т.п.

2 В радарной системе, предназначенной для автоматического слежения за воздушными объектами, произведены вычисления, определяющие относительную достоверность отметок каждого объекта, за которыми установлено наблюдение; результаты приведены в таблице 5.

Таблица 5 - Достоверность отметок каждого объекта

Отметка	Объект			
	1	2	3	4
1	0,79	0,20	0,50	0,315
2	0,63	0,40	0,20	0,50
3	0,40	0,20	0,16	0,50
4	0,50	0,20	0,125	0,25

Объясните, каким образом методы решения задачи выбора в такой системе могут быть использованы для того, чтобы связать отметки с объектами так, чтобы максимизировать произведение вероятностей. Определите оптимальный выбор для приведенных данных.

3 Компания реализует продукцию в пяти географических областях. Покупательные способности жителей этих областей оцениваются согласно таблице 6.

Таблица 6. Покупательные способности жителей областей

Область	1	2	3	4	5
Покупательная способность	80 000	60 000	50 000	40 000	20 000

Профессиональный уровень пяти продавцов различен. Предполагается, что доля предполагаемых реализуемых покупательных способностей приведена в таблице 7.

Таблица 7 - Доля предполагаемых реализуемых покупательных способностей

Продавец	A	B	C	D	E
Доля	0.7	0.6	0.5	0.45	0.4

Как следует распределить продавцов по областям, чтобы максимизировать количество проданной продукции?

4 Группе, исследующей рынок, требуются данные из пяти различных городов. Группа располагает $2\frac{1}{2}$ днями и намеревается провести по полдня в каждом городе. Хозяйства, предназначенные для опроса, выбраны заранее. Пользуясь имеющимся опытом, группа оценивает вероятности успешных контактов в каждом городе в течение полудня согласно таблице 8. Как следует группе распределить время по пяти городам, чтобы максимизировать ожидаемое количество успешных опросов?

Таблица 8 - Вероятности успешных контактов в городах

Время	Г о р о д				
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
Среда до полудня	0,67	0,62	0,52	0,40	0,63
Среда после полудня	0,90	0,70	0,65	0,87	0,83
Четверг до полудня	0,57	0,25	0,60	0,60	0,53
Четверг после полудня	0,40	0,52	0,45	0,43	0,50
Пятница до полудня	0,63	0,60	0,40	0,36	0,67
Количество назначенных опросов	30	40	40	30	30

5 Ежедневно авиалиния, которая принадлежит некоторой компании, осуществляет перелеты между городами *X* и *Y* согласно таблице 9.

Таблица 9 - Расписание движения самолетов

№ по- лета	Отправление из города <i>X</i>	Прибытие в город <i>Y</i>	№ полета	Отправление из города <i>Y</i>	Прибытие в город <i>X</i>
1	9.00	11.00	11	8.00	10.00
2	10.00	12.00	12	9.00	11.00
3	15.00	17.00	13	14.00	16.00
4	19.00	21.00	14	20.00	22.00
5	20.00	22.00	15	21.00	23.00

Компания хочет организовать полеты «туда» и «обратно» так, чтобы минимизировать время простоя при условии, что каждому самолету требуется, по крайней мере, 1 час для заправки. Используйте технику решения задачи выбора.

6 Авиалиния связывает три города *A, B, C*. Полеты происходят днем, семь дней в неделю, согласно таблице 10.

Стоимость стоянки самолетов во всех трех аэропортах пропорциональна времени стоянки. Как следует распределить самолеты по линиям для минимизации стоимости? Следует учесть, что самолет не может подняться менее чем

через час после приземления, так как требуется время на технический контроль и заправку.

Таблица 10 - Расписание движения самолетов

Вылет		Прибытие	
Город	Время	Город	Время
<i>A</i>	8.00	<i>B</i>	12.00
<i>A</i>	9.00	<i>C</i>	12.00
<i>A</i>	10.00	<i>B</i>	14.00
<i>A</i>	14.00	<i>B</i>	18.00
<i>A</i>	18.00	<i>B</i>	22.00
<i>A</i>	20.00	<i>C</i>	23.00
<i>B</i>	7.00	<i>A</i>	11.00
<i>B</i>	9.00	<i>A</i>	13.00
<i>B</i>	13.00	<i>A</i>	17.00
<i>B</i>	18.00	<i>A</i>	22.00
<i>C</i>	9.00	<i>A</i>	12.00
<i>C</i>	15.00	<i>A</i>	18.00

7 Пусть для монтажа четырех объектов требуется четыре крана. Известно, какое время необходимо каждому крану A_i для монтажа объекта B_j . Нужно так распределить краны по объектам, чтобы суммарное время на монтаж этих объектов было минимально. Исходные данные представлены в таблице 11.

Таблица 11 - Время монтажа объектов

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	5	8
A_2	2	4	4	5
A_3	4	7	2	8
A_4	9	7	3	8

8 На предприятии пять станков различных типов, каждый из которых может выполнять пять различных операций по обработке деталей. Производительность каждого станка при выполнении каждой операции приведена в таблице 12.

Необходимо определить, какую операцию, и за каким станком следует закрепить, чтобы производительность была максимальной, при условии, что за каждым станком может быть закреплена только одна операция.

Таблица 12 - Производительность станков

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
A_1	5	3	4	6	7
A_2	6	2	6	4	5
A_3	4	3	5	2	6
A_4	3	4	3	5	2
A_5	5	6	3	2	5

9 Имеется семь наборов задач, каждый из которых содержит по семь вариантов. Время в часах, требуемое на выполнение вариантов, приведено в таблице 13. Необходимо составить два задания, которые будут выполняться за минимальное и максимальное время соответственно, выбрав по одной задачи из каждого варианта.

Таблица 13 - Время, требуемое на выполнение вариантов, ч

Задания	Варианты						
	1	2	3	4	5	6	7
1	11	15	20	16	13	26	11
2	12	13	22	14	16	29	13
3	14	16	24	22	21	32	16
4	16	13	22	20	23	34	17
5	13	15	18	14	26	29	18
6	12	11	16	17	15	24	10
7	14	12	20	19	17	15	31

10 Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции. Компания владеет пятью предприятиями и на трех из них должны производиться новые виды продукции - по одному на одно предприятие. Издержки производства единицы продукции приведены в таблице 14. Издержки сбыта единицы продукции приведены в таблице 15. Плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и плановая стоимость единицы продукции каждого вида приведена в таблице 14.

Таблица 14 - Издержки производства единицы продукции, ед.

Вид Продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	23	38	15	35
2	8	29	6	35	35
3	5	8	3	4	7

Таблица 15 - Издержки сбыта единицы продукции, ед.

Вид Продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	50	20	10	13
2	7	90	8	35	60
3	5	5	4	15	6

Таблица 16 - Плановые объем производства и стоимость единицы продукции

Вид продукции	Плановый объем производства	Плановая стоимость,ед.
1	35000	55
2	160000	50
3	54000	30

Максимизируйте суммарную годовую прибыль компании.

11 Компания разрабатывает план выпуска четырех новых видов продукции. Компания владеет пятью предприятиями и на четырех из них должны производиться новые виды продукции - по одному на одно предприятие. Издержки производства единицы продукции приведены в таблице 17. Издержки сбыта единицы продукции приведены в таблице 18. Плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и плановая стоимость единицы продукции каждого вида приведена в таблице 19.

Таблица 17 - Издержки производства единицы продукции, ед.

Вид Продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	23	38	15	35
2	8	29	6	35	35
3	5	8	3	4	7
4	11	21	14	19	10

Таблица 18 - Издержки сбыта единицы продукции, ед.

Вид Продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	50	20	10	13
2	7	90	8	35	60
3	5	5	4	15	6
4	9	12	6	10	8

Таблица 19 - Плановые объем производства и стоимость единицы продукции

Вид продукции	Плановый объем производства	Плановая стоимость,ед.
1	35000	55
2	160000	50
3	54000	30
4	45000	45

Максимизируйте суммарную годовую прибыль компании.

Задание 6 Целочисленное линейное программирование

Задачи оптимизации, сформулированные в терминах линейного программирования и содержащие требование «все или некоторые x_j – целые числа», также играют важную роль. Указанное требование придаёт задаче ряд специфических особенностей, приводящих к изменению геометрических представлений и методов решения. На первый взгляд кажется естественной попытка сначала отбросить условие целочисленности x_j , решить задачу линейного программирования в стандартной постановке, а затем округлить оптимальные x_j до ближайших целых значений. Такой подход допустим с практической точки зрения в тех случаях, когда:

- значения переменных x_j , образующие оптимальное решение стандартной задачи, достаточно велики, и погрешностями округления можно пренебречь
- исследование, проводимое на основе решения целочисленной задачи, является предварительным и приближённым, так что погрешности округления укладываются в допустимые пределы точности решения.

Поскольку эти случаи не отражают реальных ситуаций, возникающих на практике, и, следовательно, необходимо разработать алгоритмы точного решения задач целочисленного программирования, поскольку существует целый класс задач, где необходимо получение точного результата. Рассмотрим метод анализа и решения целочисленных задач, который известен под названием метода Гомори.

Метод Гомори

Краткая характеристика метода Гомори сводится к тому, что этот метод

- позволяет решать, как частично, так и полностью целочисленные задачи линейного программирования

- применим и в тех случаях, когда требование целочисленности распространяется на величину $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

- позволяет получить решение за конечное число шагов.

Рассмотрим следующую задачу:

найти x_1, x_2, \dots, x_n , доставляющие минимум функции $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ и удовлетворяющие условиям $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, z$ и некоторые из переменных x_j – целые числа.

Поскольку требование целочисленности распространяется не на все переменные x_j , то следует выделить из всей совокупности номера j ($j=1, 2, \dots, n$), которыми отмечены x_j , принимающие только целочисленные значения. Тем самым всё множество номеров j делится на два подмножества I и J такие, что принадлежность отдельно взятого j к I означает наличие требования целочисленности для соответствующего x_j .

Первым шагом реализации метода Гомори является отбрасывание условия « z – целое число, x_j – целые числа для $j \in I$ » и решение полученной таким образом стандартной задачи линейного программирования. Пусть в результате этого найдена каноническая система (1), определяющая оптимальное базисное решение.

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n-m} \cdot x_{n-m} + x_{n-m+1} = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n-m} \cdot x_{n-m} + x_{n-m+2} = B_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{m,n-m} \cdot x_{n-m} + x_n = B_m \\ z = z_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-m}x_{n-m} \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = B_1 \\ x_{n-m+2} = B_2 \\ x_n = B_m \\ x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-m} = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

В силу оптимальности (2) справедливы утверждения:

$$B_i \geq 0, c_j \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n-m).$$

Введём новые переменные ω_s так, что $\omega_s = x_s, s = 1, \dots, n-m$. С их помощью представим базисные переменные $x_j, j=n-m+1, \dots, n$ из (1) в виде

$$x_{n-m+i} = B_i - \sum_{s=1}^{n-m} A_{is} \omega_s, i=1, 2, \dots, m,$$

а целевую функцию z как $z = z_0 + \sum_{s=1}^{n-m} c_s \omega_s$.

Для упорядочения формы записи полученных выражений обозначим коэффициенты при ω_s в выражениях для $x_j, j=1, \dots, n$ через α_{sj} , коэффициенты в выражении z через α_{s0} , свободные члены через α_{0j} , а разность $n-m$ как M .

В этих обозначениях результат первого шага решения может быть представлен так:

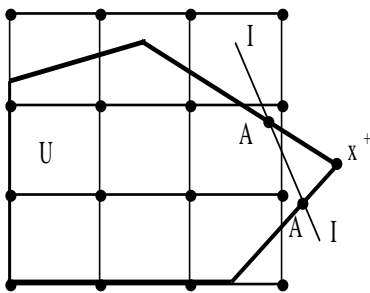
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{01} + a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2 + \dots + a_{M1}\omega_M \\ x_2 = a_{02} + a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \dots + a_{M2}\omega_M \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = a_{0n} + a_{1n}\omega_1 + a_{2n}\omega_2 + \dots + a_{Mn}\omega_M \\ z = z_0 + a_{10}\omega_1 + a_{20}\omega_2 + \dots + a_{M0}\omega_M \end{array} \right. \quad (3)$$

Если (3) содержит целые значения z и $x_j (j \in I)$, то решение (3) удовлетворяет исходным условиям рассматриваемой целочисленной задачи. Если это не так и в выражениях (3) для z и (или) $x_j (j \in I)$ появятся дробные свободные члены, то необходимо продолжить поиск оптимального решения.

Пусть либо z_0 , либо α_{0j} ($j \in I$) из (3) оказались дробными числами, то решение (3) соответствует крайней точке x^+ , которая не может быть принята в качестве оптимальной. В то же время из рисунка ясно, что должны существовать в области U точки, которые удовлетворяют условию целочисленности. Поэтому видоизменим область U , чтобы точка x^+ была отброшена. Для этого введём дополнительное линейное ограничение, которому не удовлетворяли бы координаты x^+ , и которое не затрагивало бы ни одной целочисленной точки. Дополнительное ограничение $\sum_{j=1}^n a_{m+1,j} x_j = b_{m+1}$ определяет гиперплоскость $I - I$, отсекающую x^+ . Новые крайние точки A тоже могут быть дробными. Формированием такой отсекающей гиперплоскости завершается второй шаг реализации алгоритма Гомори.

Третий шаг предусматривает возвращение к задаче с отброшенным условием целочисленности x_j ($j \in I$), но с расширенной системой ограничений

$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i$, в которую включено теперь дополнительное ограничение, полученное на втором шаге. Снова решается задача линейного программирования в стандартной постановке, в результате чего определяется новая точка x^+ . Если найденная таким образом точка x^+ будет опять дробной, формируется новое дополнительное ограничение. Чередувание подобных операций продолжается до тех пор, пока очередная точка x^+ не удовлетворит всем условиям исходной целочисленной задачи.



Из приведённого описания метода Гомори видно, что его отличительной особенностью являются периодические изменения конфигурации первоначальной области U с целью её сужения. Равенства, входящие в (3), используются непосредственно для формирования ограничений, отсекающих x^+ .

При использовании метода Гомори включение дополнительного ограничения приводит к нарушению оптимальности решения задачи линейного программирования, поскольку целевая функция имеет вид оптимальной, а базис недопустим, так как он содержит отрицательную переменную. Для того чтобы сохранить результаты проделанной работы используют процедуру, которая носит название двойственного симплекс-метода.

При использовании двойственного симплекс-метода не требуется положительность всех базисных переменных, но для задачи минимизации необходимо, чтобы все коэффициенты целевой функции были неположительные. Сохраняя это свойство, ограничения с помощью двойственного симплекс-метода преобразуются до тех пор, пока не будет получен положительный базис. В этот момент достигается минимум, поскольку коэффициенты целевой функции сохраняются неположительными.

Рассмотрим формальные шаги метода при решении задачи минимизации.

1 Найти отрицательную базисную переменную. Если её нет, то оптимальное решение найдено. Если их несколько, то взять из них наименьшую (большую по модулю). Пусть эта переменная – базисная в r – м ограничении. Её нужно исключить из базиса.

2 В r – ой строке найти отрицательный коэффициент a'_{rj} . Если его нет, то, очевидно, не существует допустимого решения задачи. Для отрицательных коэффициентов в этой строке найти $\min_j \left| \frac{c'_j}{a'_{rj}} \right|$. Если этот минимум найден в s – м столбце, то переменная s должна быть включена в базис.

3 Провести обычные симплекс-преобразования, выбрав в качестве ведущего элемент a'_{rs} .

Следовательно, двойственный симплекс-метод отличается от обычного симплекс-метода только выбором переменной для исключения и включения в базис.

Введём следующие понятия и обозначения:

$[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее a (например, при $a=1.15$ $[a]=1$; при $a=-2.7$ $[a]=-3$);

$f_a = a - [a]$ – положительная дробная часть числа a ;

$$\bar{f}_a = \begin{cases} 1 - f_a & \text{при } f_a > 0 \\ 0 & \text{при } f_a = 0 \end{cases}.$$

Формирование дополнительных ограничений основывается на следующей теореме.

Если x_j ($j \in I$) – переменная, на которую распространяется требование целочисленности, $\omega_s \geq 0$, $s = 1, \dots, M$ – параметры, связанные с x_j соотношением $x_j = \alpha_{0j} + \alpha_{1j}\omega_1 + \alpha_{2j}\omega_2 + \dots + \alpha_{Mj}\omega_M$ и если $\alpha_{sj} \geq 0$, $s = 1, \dots, M$, то линейное

неравенство выполняется для всех ω_s , дающих целочисленные значения x_j , и

$$1 \leq f\alpha_{0j} + \alpha_{1j}\omega_1 + \alpha_{2j}\omega_2 + \dots + \alpha_{Mj}\omega_M \quad (4)$$

не выполняется для оптимального решения (2), получаемого из (3) при $\omega_s = 0$, $s = 1, \dots, M$.

Вследствие неотрицательности величин α_{sj} и ω_s , $s = 1, \dots, M$ значение x_j не может быть меньше α_{0j} , то есть $\min x_j \geq \alpha_{0j}$. Отсюда следует: $x_j \geq [\alpha_{0j}] + 1$, поскольку x_j есть целое число. Вычитая это неравенство из выражения x_j , приведённого в условии теоремы, получаем соотношение (4), что и доказывает первую часть утверждения теоремы. Доказательство второй части теоремы очевидно: $f\alpha_{0j} \leq 1$ всегда по определению.

Полученный результат легко преобразуется в дополнительное ограничение, используемое в методе Гомори. Для неотрицательной и целочисленной переменной \bar{x}_j можно записать условие $x_j \geq [\alpha_{0j}] + 1$ в виде равенства $x_j - \bar{x}_j = [\alpha_{0j}] + 1$ и, вычитая это равенство из выражения x_j , получаем:

$$\bar{x}_j = -\bar{f}_{\alpha_{0j}} + \alpha_{1j}\omega_1 + \alpha_{2j}\omega_2 + \dots + \alpha_{Mj}\omega_M. \quad (5)$$

Выбрав \bar{x}_j в качестве новой переменной и дополнив систему (3) уравнением (5), получаем, что при обращении всех ω_s в нуль появится базисное решение

$$x_j = \alpha_{0j} = 0, j=1, 2, \dots, n-m, \quad x_j = \alpha_{0j} - B_i, j=n-m+i, i=1, 2, \dots, m, \quad \bar{x}_j = -\bar{f}_{\alpha_{0j}},$$

в котором переменная \bar{x}_j отрицательна, поскольку всегда $\bar{f}_{\alpha_{0j}} \geq 0$. Такое решение недопустимо, поскольку все переменные, включая \bar{x}_j , должны быть неотрицательны. Поэтому условие (5) не удовлетворяется в точке x^+ , хотя во всех других точках, для которых рассматриваемая координата \bar{x}_j принимает целочисленные значения, оно выполнено. Это следует из равенства $\bar{x}_j = x_j - [\alpha_{0j}] - 1$, дающего целые неотрицательные значения \bar{x}_j при любом $x_j \geq [\alpha_{0j}] + 1$.

Таким образом, уравнение (5) может быть использовано для расширения системы (3) с целью отсекающей точки x^+ . Недостатком, ограничивающим область применения теоремы 1, является введённое требование неотрицательности коэффициентов α_{sj} , $s=1, 2, \dots, M$; $j \in I$. В литературе приводятся и другие теоремы и соотношения, которые могут быть использованы для отсекающей точки.

Пример.

Найти x_1, x_2, x_3, x_4 , доставляющие минимум функции $Z = -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{4}{3}x_5$ при условиях, что x_1, x_2, x_3, x_4 - целые неотрицательные числа, Z - целое число и

$$2x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{13}{3}; \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = \frac{9}{4}.$$

Отбросив требование целочисленности $x_j, j=1,2,3,4$, видим, что оптимальное решение стандартной задачи линейного программирования можно указать сразу: $x_1=0, x_2=\frac{13}{3}, x_3=0, x_4=\frac{9}{4}, z=-\frac{7}{12}$. Следовательно, полагая $x_1=\omega_1$ и $x_3=\omega_3$, получаем из исходных значений:

$$x_1=\omega_1, x_2=\frac{13}{3}-2\omega_1-\frac{4}{3}\omega_3, x_3=\omega_3, x_4=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\omega_1-\frac{3}{4}\omega_3, z=-\frac{7}{12}+\frac{1}{4}\omega_1+\frac{3}{4}\omega_3. \quad (6)$$

Свободные члены выражений x_2, x_4 и z в (12) являются дробными. Поэтому необходимо вводить в (6) дополнительное ограничение. Для формирования такого ограничения удобно выбрать выражение z , в котором все коэффициенты при $\omega_s, s=1,3$ положительны. Согласно рекомендациям теоремы новая переменная x_5 должна определяться равенством: $x_5 = -\overline{f_{a_{0j}}} + \alpha_{1j}\omega_1 + \alpha_{2j}\omega_2 + \dots + \alpha_{M,j}\omega_M$, то есть $x_5 = -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_3$. Таким образом, расширенная система условий приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 \\ x_2 = \frac{13}{3} - 2\omega_1 - \frac{4}{3}\omega_3 \\ x_3 = \omega_3 \\ x_4 = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{4}\omega_3 \\ x_5 = -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_3 \\ Z = -\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_3 \end{cases} \quad (7)$$

Решив, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{45}{21} - \frac{4}{7}\omega_2 - \frac{4}{7}\omega_5 \\ x_2 = \omega_2 \\ x_3 = \frac{1}{28} + \frac{3}{28}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_5 \\ x_4 = \frac{129}{112} + \frac{23}{112}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_5 \\ x_5 = \omega_5 \\ z = \omega_5 \end{cases} \quad (8)$$

При этом базисное решение имеет вид: $x_1 = \frac{45}{21}; x_3 = \frac{1}{28}; x_4 = \frac{129}{112}; z=0$.

Поскольку (8) имеет дробные свободные члены, то нужно вводить дополнительное ограничение. Выберем выражение для x_3 , так как в нём при ω_2 и ω_5 положительные коэффициенты. Тогда: $x_6 = -\frac{27}{28} + \frac{3}{28}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_5$. Решив, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 \\ x_2 = 3 - 2\omega_1 - \frac{4}{3}\omega_6 \\ x_3 = 1 + \omega_6 \\ x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{3}{4}\omega_6 \\ x_5 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_6 \\ x_6 = \omega_6 \\ Z = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_6 \end{cases}$$

Поскольку полученные результаты нецелочисленны, то точка должна быть отброшена. Для построения дополнительного ограничения воспользуемся выражением для x_5 : $x_7 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{4}{3}\omega_6$.

В результате решения получим:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{16}{3}\omega_1 - 4\omega_7 \\ x_2 = 1 + \frac{28}{3}\omega_6 - 8\omega_7 \\ x_3 = 1 + \omega_6 \\ x_4 = 1 + \frac{23}{12}\omega_6 - 2\omega_7 \\ x_5 = 1 + \omega_7 \\ x_6 = \omega_6 \\ x_7 = \omega_7 \\ z = 1 + \omega_7 \end{cases}$$

Полученное решение является оптимальным для исходной целочисленной задачи: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, z = 1$.

В [1, стр.68] приведён исходный текст программы на языке Бейсик для решения задачи целочисленного программирования.

Контрольные вопросы к заданию 6

- 1 Перечислите и поясните основные этапы построения оптимизационных моделей.
- 2 Сформулируйте постановку задачи целочисленного программирования.
- 3 Дайте характеристику метода отсечений Гомори.
- 4 Основные шаги метода отсечений Гомори.
- 5 Среди каких решений находится решение задачи линейного программирования.
- 6 Что означает термин «исходное допустимое базисное решение».

- 7 Свободные переменные. Их назначение.
- 8 Как можно использовать программу, предназначенную для решения задачи минимизации, при решении задачи максимизации.
- 9 Графическое решение задачи целочисленного программирования.
- 10 Приведите виды областей допустимых решений задач линейного программирования.
- 11 Приведите примеры задач, относящихся к задачам целочисленного программирования.
- 12 Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными.
- 13 Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения.
- 14 Сформулируйте задачу оптимального раскроя материалов и составьте ее математическую модель.
- 15 Можно ли получить оптимальное решение задачи целочисленного программирования, округляя решение, полученное обычным симплексным методом.
- 16 Максимизируйте функцию $z=7x_1+5x_2$ при ограничениях:
 $6x_1+9x_2\leq 54$, $7x_1+6x_2\leq 42$, $0\leq x_1\leq 4$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 17 Максимизируйте функцию $z=3x_1+3x_2$ при ограничениях:
 $11x_1+4x_2\leq 44$, $3x_1+5x_2\leq 30$, x_1 и x_2 —целые.
- 18 Максимизируйте функцию $z=4x_1+x_2$ при ограничениях:
 $-0.4286x_1+x_2\leq 1$, $x_1-x_2\leq 0.333$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 19 Максимизируйте функцию $z=-x_1+x_2$ при ограничениях:
 $x_1+x_2\leq 6$, $-2.5x_1+x_2\leq 0$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 20 Максимизируйте функцию $z=x_1+x_2$ при ограничениях:
 $-x_1+x_2\leq 1$, $3x_1+x_2\leq 4$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 21 Минимизируйте функцию $z=-x_1+x_2+x_3$ при ограничениях:
 $3.2x_2+6.4x_3\leq 6$, $3x_1+3x_2+2x_3\geq 4$, $0\leq x_1\leq 3$, $x_2\geq 0$, $x_3\geq 0$, x_1 , x_2 —целые.
- 22 Максимизируйте функцию $z=x_1+x_2$ при ограничениях:
 $2x_1\leq 3$, $2x_1\leq 3$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 23 Максимизируйте функцию $z=3x_1-x_2$ при ограничениях:
 $3x_1-2x_2\leq 3$, $-5x_1-4x_2\leq -10$, $2x_1+x_2\leq 5$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 24 Минимизируйте функцию $z=3x_1+8x_2$ при ограничениях:
 $4x_1+5x_2\geq 2$, $3x_1+7x_2\geq 2$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, x_1 , x_2 —целые.
- 25 Максимизируйте функцию $z=-x_1-4x_2-x_3-3x_4$ при ограничениях:
 $-x_1+2x_2+2x_3+x_4\leq -1$, $x_1-3x_2-2x_3-2x_4\leq -1$, $x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 26 Максимизируйте функцию $z=4x_1+5x_2+x_3$ при ограничениях:
 $3x_1+2x_2\leq 10$, $x_1+4x_2\leq 11$, $3x_1+3x_2+x_3\leq 13$, $x_1, x_2, x_3\geq 0$, x_1, x_2 и x_3 —целые.
27. Максимизируйте функцию $z=3x_1-x_2$ при ограничениях:
 $3x_1-2x_2\leq 3$, $-5x_1-4x_2\leq -10$, $2x_1+x_2\leq 5$, x_1 и $x_2\geq 0$, x_1 и x_2 —целые.
- 28 Максимизируйте функцию $z=-10x_1-14x_2-21x_3$ при ограничениях:
 $2x_1+2x_2+7x_3\geq 14$, $8x_1+11x_2+9x_3\geq 12$, $9x_1+6x_2+3x_3\geq 10$,
 x_1, x_2 и $x_3\geq 0$, x_1, x_2 и x_3 —целые.

- 29 Минимизируйте функцию $z=5x_1+2x_2+2x_3$ при ограничениях:
 $x_1+3x_2+2x_3 \geq 5$, $4x_1-x_2+x_3 \geq 7$, $2x_1+x_2-x_3 \geq 4$, x_1, x_2 и $x_3 \geq 0$, x_1, x_2 и x_3 – целые.
- 30 Максимизируйте функцию $z=8x_1+5x_2+x_3$ при ограничениях:
 $3x_1+2x_2+x_3 \leq 13$, x_1, x_2 и $x_3 \geq 0$, x_1, x_2 и x_3 – целые.
- 31 Максимизируйте функцию $z=2x_1+7x_2+3x_3+x_4$ при ограничениях:
 $6x_1+3x_2+2x_3+x_4 \leq 20$, x_1, x_2, x_3 и $x_4 \geq 0$, x_1, x_2, x_3 и x_4 – целые.
- 32 Максимизируйте функцию $z=3x_1-2x_2$ при ограничениях:
 $3x_1-2x_2 \leq 3$, $-5x_1-4x_2 \leq -10$, $2x_1+x_2 \leq 10$, x_1 и $x_2 \geq 0$, x_1 и x_2 – целые.
- 33 Минимизируйте функцию $z=x_1-x_2-3x_3$ при ограничениях:
 $2x_1-x_2+x_3 \leq 1$, $-4x_1+2x_2-x_3 \leq 2$, $3x_1+x_3 \leq 5$, x_1, x_2 и $x_3 \geq 0$, x_1, x_2 и x_3 – целые.

Варианты задач к заданию 6

1 В небольшом населенном пункте A имеется школа, которую посещает некоторое число учеников. При этом местожительства 72 учеников находится вне пункта A , что приводит к необходимости организовать их доставку к школе на автобусах. Имеются две основные автобусные остановки B и C (B находится между A и C). Число учеников, нуждающихся в доставке к школе на автобусе, равняется 42 на остановке C , 6 - между C и B , 20 - на остановке B и 4 - между B и A . Транспортное агентство располагает автобусами на 35 и 50 мест. Установленные цены проездных билетов для каждого из отрезков пути и в зависимости от типа автобуса приведены в таблице 20.

Таблица 20 - Цены проездных билетов

Отрезки пути	Тип автобуса	
	35-местный	50-местный
BA	39	50.5
CA	54	68
CB	45	57.5

Цены не пропорциональны расстоянию, что обусловлено постоянными затратами транспортного агентства, которые превышают переменные затраты. Необходимо определить, какого типа автобусы следует использовать на каждом участке пути, так чтобы суммарные издержки были минимальными.

2 Для изготовления комплектов из трех брусев имеются две партии бревен. Первая партия содержит 99 бревен длиной 6.6 м каждое, вторая – 60 бревен по 4.8 м каждое. Комплект состоит из двух брусев длиной 2.2 м и одного длиной 1.3 м. Как распилить бревна, чтобы получить максимальное число комплектов?

3 В обработку поступили две партии досок длиной 2.1 м и 1.6 м каждая. Требуется изготовить комплекты из трех деталей. Комплект состоит из одной детали длиной 0.9 м, двух деталей длиной по 1.2 м и одной детали длиной 0.7 м.

Число досок в первой партии 94, во второй – 142. Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее число комплектов ?

4 Бригада по раскрою материала для производства обуви получила кожу: чепрак и ворот. Чепрак имеет размер 3100 см^2 , ворот – 4200 см^2 . Необходимо раскроить детали вида A, B, C . На производство A идет чепрак, причем остатки не менее 20%. Деталь C изготавливается из ворота, остатки не менее 55%. Деталь B может изготавливаться из всех видов кожи, в том числе и из остатков от изготовления A и C , остатки не менее 10%. Размер A – 100 см^2 , B – 60 см^2 , C – 140 см^2 . Необходимо соблюсти комплектность: на 4 детали A 8 деталей B и 2 детали C . Оптимизировать раскрой материала, если стоимость отдельных деталей соответственно 12, 10 и 5 ед.

5 Бригада по раскрою материала для производства обуви получила кожу: 30 штук чепрака и 20 штук ворота. Чепрак имеет размер 3360 см^2 , ворот – 4500 см^2 . Необходимо раскроить детали вида A, B, C . На производство A идет чепрак, причем остатки не менее 35.7%. Деталь C изготавливается из ворота, остатки не менее 40%. Деталь B может изготавливаться из всех видов кожи, в том числе и из остатков от изготовления A и C , остатки не менее 10%. Размер A – 90 см^2 , B – 60 см^2 , C – 150 см^2 . Необходимо соблюсти комплектность: на 4 детали A 6 деталей B и 2 детали C . Оптимизировать раскрой материала, если стоимость отдельных деталей соответственно 16, 17 и 20 ед.

6 На обработку поступила партия из 150 досок длиной 7.5 м каждая для изготовления комплектов из четырех деталей. Комплект состоит из одной детали длины 3 м, двух деталей размером по 2 м и одной детали размером 1.5 м. Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее число комплектов?

7 Имеется пять предприятий, на которых по собственной технологии производятся детали для комплектных изделий. Каждое изделие состоит из деталей трех типов, причем число деталей каждого типа в изделии соответственно равно: 2,1,3. Производительность одной линии в единицу времени по каждому типу изделий на предприятиях приведена в таблице 21.

Таблица 21 - Производительность одной линии в единицу времени на предприятиях

Номер предприятия	Тип детали		
	A	B	C
1	2	2	1
2	2	0	0
3	1	1	1
4	1	1	1

Расход каждого из пяти ресурсов на одной линии на предприятиях приводится в следующей таблице 22.

Таблица 22 - Расход ресурсов на одной линии на предприятиях

Номер предприятия	Вид ресурсов				
	1	2	3	4	5
1	2.0	2.1	1.4	1.2	1.4
2	2.5	1.1	0.8	0.3	0.7
3	1.8	1.3	1.7	1.1	1.4
4	1.9	1.6	1.1	1.2	1.2

Запасы каждого из пяти ресурсов имеют следующие значения соответственно: 20,30,40,25,35.

8 На предприятии имеется три вида оборудования соответственно в количестве 2,3,4 единиц. На каждом виде оборудования можно изготавливать три вида деталей, которые входят в комплект соответственно в количестве 2,1,2 единиц. Производительность вида оборудования при изготовлении каждого типа деталей приведена в таблице 23.

Таблица 23 - Производительность оборудования

Вид оборудования	Тип детали		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	3	4	2
2	4	2	1
3	2	2	2

Необходимо составить план использования оборудования, который обеспечит выпуск комплектной продукции.

9 Имеется достаточно большое количество бревен длиной 3 м. Бревна следует распиливать на заготовки двух видов: длиной 1.2 м и длиной 0.9 м, причем заготовок каждого вида должно быть получено не менее 50 шт. и 81 шт. соответственно. Каждое бревно может быть распилено на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число бревен, распиливаемых каждым способом, с тем, чтобы необходимое количество заготовок каждого вида было получено из наименьшего количества бревен.

10 Ежегодно фирма «Энергетика», выпускающая тяжелое энергетическое оборудование, рассматривает восемь независимых вариантов капиталовложений в различные виды основных фондов. Для осуществления варианта j требуется выделить $K_j = j$, $j=1,2,\dots,8$ ед. Общий объем готовых капиталовложений $M=10$ строго фиксирован. Ожидаемый доход от капиталовложений по j -му варианту составляет R_j , равный соответственно 16, 28, 45, 48, 65, 66, 79, 80 ед. Фирма стремится максимизировать общий доход по всем капиталовложениям.

Руководители фирмы пришли к выводу, что вследствие ограниченных возможностей организационного управления общее число проектов, реализуемых в рамках любого года, не должно превышать $N=4$. Каждый вариант уникален, и нужно решить – принимать его на данный год или отвергнуть.

11 Речное пароходство осуществляет обслуживание пассажиров по трем различным маршрутам, по каждому из которых за сезон переезжает соответственно следующее число человек: 15000, 13000, 18000. Перевозку пассажиров по маршруту можно осуществлять тремя различными типами судов. В таблице 24 приведены характеристики для каждого типа судов.

Таблица 24 - Характеристики типа судов

Тип судов	Число мест	Количество персонала	Расход горючего
<i>A</i>	20	3	2
<i>B</i>	180	8	6
<i>C</i>	90	4	3

Прибыль за сезон от использования транспортных средств приведена в следующей таблице 25.

Таблица 25 - Прибыль за сезон от использования транспортных средств

Тип судов	Номер маршрута		
	1	2	3
<i>A</i>	10	14	9
<i>B</i>	15	12	3
<i>C</i>	12	9	8

Необходимо выбрать парк судов для каждого маршрута, при котором максимизируется прибыль пароходства при соблюдении ограничений: общий расход горючего за сезон не может превосходить 1900 ед., общая численность обслуживающего персонала не более 3000 человек. На каждом из маршрутов может использоваться не более 100 судов одного типа.

Библиографический список

- 1 Теория принятия решений: Сб. описаний лаб. работ / РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2012. -83с.
- 2 Системный анализ. Методические указания. Часть 1/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2010. -29с.
- 3 Теория принятия решений. Учебно-методическое пособие. Часть 3/ РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский ин-т; Сост: В.В. Силин, Н.В. Маслова. Новомосковск, 2011. -53с.
- 4 Габасов Р., Кирилова Ф.М. Методы оптимизации / Учебное пособие. -Минск, «Четыре четверти». -472 с.: ил.

Интернет – ресурсы

- 1 http://www.staff.ulsu.ru/semoushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/3-numethopres/2-reading/bunday-lp.pdf
- 2 <http://edu-lib.net/matematika-2/dlya-studentov/vagner-g-osnovyi-issledovaniya-operatsiy-tom-1-onlayn>
- 3 <http://www.twirpx.com/file/469957/>
- 4 http://techsciencebooks.ru/issledovanie_operatsiy_v__a__gorelik_i__a__ushakov/
- 5 http://mirknig.com/knigi/nauka_ucheba/1181578575-metody=optimizacii.html
- 6 <http://www.libex.ru/detail/book542848.html>
- 7 <http://www.twirpx.com/file/989308/>
- 8 <http://www.twirpx.com/file/1638982/>