

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет  
им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал)

Ребенков Е.С.

# Теория электромагнитного поля

Учебное пособие

Новомосковск  
2017

**УДК 621.316**

**ББК 31.21**

**Р 851**

Рецензент:

доктор технических наук, профессор Логачева В.М.  
(НИ (филиал) ФГБОУ ВО РХТУ им. Д.И. Менделеева),  
генеральный директор «Промэнергосбыт»,  
профессор Ставцев В.А.

**Ребенков Е.С.**

Р 851 «Теория электромагнитного поля».

Учебное пособие по курсу «ТОЭ» / ФГБОУ ВО «РХТУ им.  
Менделеева» Новомосковский институт (филиал),  
Новомосковск, 2017.-71 с.

Ил.19. Табл.1. Библиогр.: 5 назв.

**УДК 621.316**

**ББК 31.21**

©Е.С. Ребенков

©ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический  
университет им. Д.И. Менделеева»,  
Новомосковский институт (филиал), 2017

## **Введение**

Учебное пособие содержит основные теоретические положения раздела «Теория электромагнитного поля» курса «ТОЭ». В пособии рассмотрены основные уравнения электростатического поля, электрического поля в проводящей среде, уравнения магнитного поля постоянного тока и переменного электромагнитного поля.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по учебному плану подготовки бакалавров направления 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» по профилю подготовки «Электроснабжение». Пособие может быть полезным при подготовке к практическим и лабораторным работам по курсу «Теоретические основы электротехники». Учебное пособие содержит многовариантные задания для контрольной работы №5 по «ТОЭ», часть 3.

## Теория электромагнитного поля.

### §1. Основные уравнения электромагнитного поля.

Электромагнитное поле – это вид материи, оказывающей на заряженные частицы силовое воздействие и определяемый во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны – электрическое поле и магнитное поле.

Электрическое поле – составляющая электромагнитного поля, которая характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле - составляющая электромагнитного поля, которая характеризуется воздействием на движущуюся частицу с силой пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

Для исследования электромагнитных полей наиболее пригодны уравнения электродинамики в интегральной и дифференциальной формах.

Уравнениями электродинамики в интегральной форме называются уравнения, полученные в физике и выражающие интеграл от соответствующего вектора по замкнутой поверхности (поток вектора через замкнутую поверхность  $S$ ) и интеграл от соответствующего вектора вдоль замкнутой кривой  $l$  (циркуляция вектора вдоль замкнутой кривой  $l$ ).

К интегральной форме приводятся законы Кирхгофа для электрических цепей постоянного тока:

$$\sum I = 0, \quad \sum U = \sum E \quad (1.1)$$

Или в векторной форме:

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0, \quad \oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (1.2)$$

и законы Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\sum \Phi = 0, \quad \sum Hl = \sum IW \quad (1.3)$$

или в векторной форме:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \quad \oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I \quad (1.4)$$

Здесь  $\vec{\delta}$  и  $\vec{E}$  - соответственно векторы плотности тока и напряженности электрического поля в определённых точках электрической цепи,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  - векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля в соответствующих точках магнитной цепи.

В интегральной форме записываются так же основные уравнения электромагнитного поля – уравнения Максвелла.

1-е уравнение Максвелла (закон полного тока):

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum i, \quad (1.5)$$

где  $\sum i$  - полный ток включает в общем случае алгебраическую сумму токов проводимости, токов обусловленных переносом зарядов и токов смещения.

2-е уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции):

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (1.6)$$

где э.д.с. наводимая в замкнутом контуре, содержит в себе в общем случае составляющую, обусловленную изменением во времени магнитной индукции и составляющую, вызванную относительным движением контура в магнитном поле.

Теорема Гаусса (постулат Максвелла) в интегральной форме устанавливает связь между потоком вектора электрического смещения  $\vec{D}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$  в электрическом поле и алгебраической суммой свободных зарядов  $Q_{\text{своб}}$  внутри

этой поверхности:

$$\int \vec{B} d\vec{S} = \sum Q_{своб} \quad (1.7)$$

Закон непрерывности линий вектора магнитной индукции имеет вид:

$$\int \vec{B} d\vec{S} = 0 . \quad (1.8)$$

Он показывает, что магнитное поле характеризуется всегда замкнутыми линиями вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Для расширения возможностей расчета эти уравнения преобразуют в дифференциальную форму.

## §2. Основные уравнения электростатического поля.

Закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \vec{1}_r \quad (2.1)$$

где  $\vec{1}_r$  - единичный вектор, направленный по линии соединяющей заряды  $q_1$  и  $q_2$ ,  $r$  - расстояние между ними,  $\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость,

$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi 9 \cdot 10^{-9}} \frac{\Phi}{м}$  - электрическая постоянная ( $\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды).

Напряженность и потенциал электрического поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r^2} \vec{1}_r, \quad \phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r} \quad (2.2)$$

Потенциал электрического поля точечного, линейного, поверхностного и объемного зарядов:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r} + \int_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a r} + \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a r} + \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a r}, \quad (2.3)$$

где  $\tau$  – линейная плотность заряда,  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Зависимость между напряженностью электрического поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi, \quad \phi = -\int \vec{E} \vec{dl} + \text{const}, \quad (2.4)$$

где  $\vec{dl}$  – элемент длины.

Градиент потенциала представляет собой вектор, численно равный производной потенциала по нормали к эквипотенциальной поверхности и направленный в сторону возрастания потенциала:

$$\text{grad } \phi = \frac{d\phi}{dn} \vec{n}_0, \quad (2.5)$$

где  $\vec{n}_0$  – орт нормали.

Одним из основных соотношений характеризующих электростатическое поле, является условие потенциальности поля:

$$\oint \vec{E} \vec{dl} = 0. \quad (2.6)$$

Это условие соответствует однозначности потенциала для электростатического поля, силовые линии которого начинаются и кончаются на поверхностях заряженных тел.

Зависимость между напряженностью электрического поля и электрическим смещением  $\vec{D}$  (электрической индукцией):

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}, \quad (2.7)$$

Где  $\vec{P}$  – вектор поляризации,  $\chi_e$  – относительная электрическая восприимчивость.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho: \quad (2.8)$$

Дивергенция (расхождение) вектора электрического смещения

$\overline{D}$  равна объемной плотности заряда  $\rho$ .

В случае однородного диэлектрика ( $\epsilon = \text{const}$ ) теорема Гаусса в дифференциальной форме может быть представлена соотношением:

$$\text{div} \overline{D} = \text{div} \epsilon_a \overline{E} = \epsilon_a \text{div} \overline{E} = \rho$$

или

$$\text{div} \overline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.9)$$

Подстановка в это уравнение  $\overline{E} = -\text{grad} \varphi$  приводит к уравнению Пуассона:

$$-\text{div grad} \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_a} \text{ или } \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.10)$$

где  $\Delta$  – лапласиан (оператор Лапласа) или  $\nabla^2$  наблаквадрат.

Общее решение уравнения Пуассона имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (2.11)$$

где  $r$  – расстояние от точки наблюдения до элемента объема  $dV$  с зарядом  $\rho dV$ .

Для пространства, свободного от зарядов ( $\rho=0$ ), уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Значение уравнений Пуассона и Лапласа для расчетов поля в однородной диэлектрической среде заключается в том, что сложное решение уравнений для векторов  $\overline{E}$  и  $\overline{D}$  заменяется более простым решением одного уравнения в частных производных для скалярной величины  $\varphi$ .

Граничные условия в электростатическом поле:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma; E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0,$$

где  $D_{1n}$  и  $D_{2n}$  – нормальные к граничной поверхности составляющие вектора электрического смещения,  $E_{1\tau}$  и  $E_{2\tau}$  – тангенциальные (касательные к граничной поверхности)



составляющие вектора напряженности электрического поля,  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела.

Граничные условия на поверхности проводника помещенного в электростатическое поле:

$$E_{\tau}=0; D=D_n=\varepsilon_a E=\sigma.$$

Энергия электрического поля:

$$W_9 = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\rho \phi dV}{2} + \oint_S \frac{\sigma \phi dS}{2} \quad (2.12)$$

Сила, действующая на заряд  $q$ :

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (2.13)$$

### §3. Электрическое поле заряженной оси отрезка.

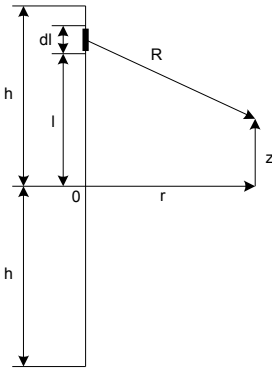


Рис.1.

Пусть в однородном диэлектрике вдоль прямолинейной оси длиной  $2h$  равномерно распределены заряды с линейной плотностью  $\tau=Q/2h$ . Надо определить потенциал поля.

Начало цилиндрической системы координат  $(r, \alpha, z)$  поместим в среднюю точку оси отрезка, а ось  $Oz$  направим вдоль отрезка  $2h$  (рис.1.).

Разобьем всю длину отрезка на элементарные участки длиной  $dl$  с зарядом  $dQ = \tau dl$ . Такой точечный заряд, находящийся на расстоянии  $l$  от начала координат, обусловит в точке  $(r, z)$  потенциал:

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + (l-z)^2}}$$

Результирующий потенциал в этой же точке:

$$\phi = \int_{-h}^h \frac{\tau dl}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 \sqrt{r^2 + (l-z)^2}} = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \left[ l - z + \sqrt{r^2 + (l-z)^2} \right] \Big|_{-h}^h .$$

Окончательное решение:

$$\phi = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + (l-z)^2} + (h-z)}{\sqrt{r^2 + (l+z)^2} - (h-z)} \quad (3.1)$$

Если длина отрезка значительно превышает линейные размеры области поля примыкающей к центральной части отрезка, т.е.  $h \gg r$  и  $h \gg z$  (т.е. имеем бесконечно длинный отрезок), то полученную формулу можно привести к виду:

$$\phi = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{4 h^2}{r^2} = \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}$$

Выделив из этого уравнения постоянное слагаемое и обозначив его через  $A$  получим:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln 2h - \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln r , \\ \phi &= - \frac{\tau}{2 \pi \epsilon \epsilon_0} \ln r + A . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из этого выражения видно, что при  $h \rightarrow \infty$  и при  $A \rightarrow \infty$  потенциал  $\phi$  в бесконечности будет равен нулю.

#### **§4. Электрическое поле двух разноименно заряженных осей.**

Пусть в однородном диэлектрике находятся две параллельные бесконечно длинные оси равномерно и разноименно заряженные с линейной плотностью заряда  $\pm \tau$ . Расстояние между осями равно  $2a$  (рис. 2). Определим потенциал поля.

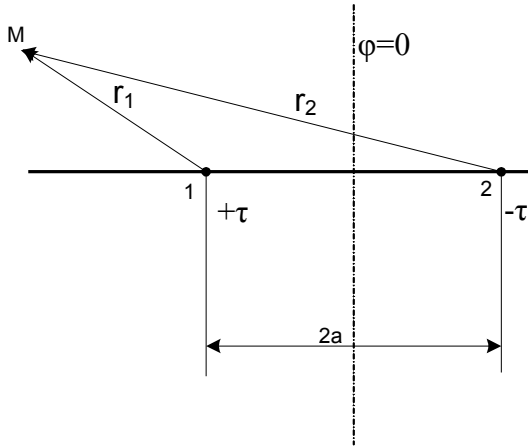


Рис.2.

Потенциал в точке М, отстоящей на расстоянии  $r_1$  от положительной оси и  $r_2$  от отрицательной оси можно получить как сумму потенциалов от отдельных осей. Согласно полученному выше выражению для потенциала заряженной оси (см. §3) можно записать:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_2 + A, \quad (4.1)$$

$$\phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + A. \quad (4.2)$$

Первое слагаемое обращается в ноль при  $r_1=r_2$ , то есть в точках плоскости перпендикулярной к отрезку  $2a$  и проходящей через его середину. Если потенциал этой плоскости принять равным нулю, то и постоянная  $A$  обратится в ноль. Тогда

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.3)$$

Потенциал будет постоянным в тех точках, где постоянно полученное выражение для  $\varphi$ .

Откуда получаем уравнение равнопотенциальных линий:

$$\frac{r_2}{r_1} = k,$$

где  $k$  – параметр семейства этих линий.

Таким образом, для каждой точки искомой линии должно быть постоянным отношение расстояний этой точки до точек 1 и 2 – следов пересечения заряженных осей с перпендикулярной им плоскостью чертежа. Но таким свойством обладают точки окружности, по отношению к которой точки 1 и 2 являются взаимно обратными (инверсными).

Две точки 1 и 2 называются симметричными или взаимнообратными по отношению к окружности радиуса  $R$ , центр  $O$  которой лежит на продолжении отрезка соединяющего эти точки, если произведение расстояний точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса (рис.3.):

$$(S-a)(S+a)=R^2,$$

откуда

$$\frac{S+a}{R} = \frac{R}{S-a}.$$

Для любой точки  $P$  окружности это равенство означает подобие большого  $PO2$  и малого  $PO1$  треугольников и может быть приравнено отношению третьих сторон  $r_2$  и  $r_1$  треугольников:

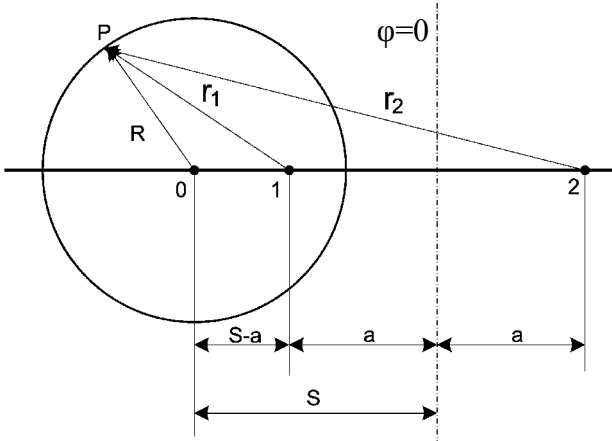


Рис.3.

$$\frac{S+a}{R} = \frac{R}{S-a} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

Это выражение показывает, что хотя  $r_2$  и  $r_1$  меняются вдоль окружности, но их отношение, равное отношению постоянных для данной окружности отрезков, тоже постоянно и равно  $k$ . Для разных значений  $k$  различны положение центра окружности (отрезок  $S-a$ ) и ее радиус  $R$ . При  $k > 1$  ( $r_2 > r_1$ ) окружность охватывает точку 1, при  $k < 1$  – точку 2.

## §5. Электрическое поле и емкость системы цилиндр-плоскость.

Имеем цилиндр радиусом  $R$  находящийся над плоской поверхностью (например, земли), потенциал которой равен нулю. Между плоскостью и цилиндром имеем напряжение  $U$ . Расстояние между осью цилиндра и плоскостью –  $h$  (рис.4.).

Положение электрических осей можно определить по уравнению (см. §4):

$$(S-a)(S+a)=R^2$$

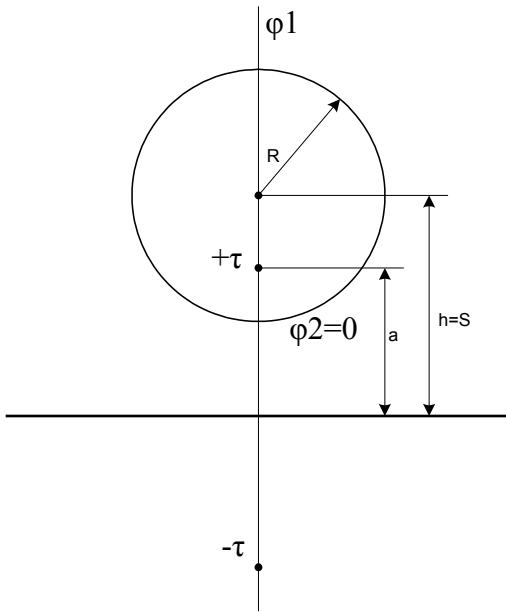


Рис.4.

Приравняем  $S=h$ , тогда потенциал цилиндра

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{S+a}{R} \quad \text{при}$$

$$\text{этом } \frac{S+a}{R} = \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{см. §4}).$$

Так как  $\varphi_2=0$ , то  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$ . Таким образом, линейная плотность заряда  $\tau$ :

$$\tau = U \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{S+a}{R}}.$$

Емкость на единицу длины:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{S+a}{R}}. \quad (5.1)$$

Если имеем тонкий провод, подвешенный высоко над землей, то  $S+a \approx 2h$  и тогда:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}. \quad (5.2)$$

## §6. Электрическое поле и емкость двухпроводной линии.

Двухпроводную линию можно представить как два цилиндра радиусом  $R$ , расстояние между осями которых  $d$  и напряжение между которыми  $U = \phi_1 - \phi_2$  (рис. 5).

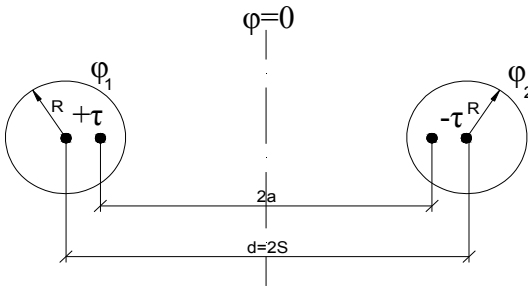


Рис.5.

Положение электрических осей можно определить из уравнений (см. §4):

$$(S-a)(S+a) = R^2, \\ 2S = d.$$

Потенциал положительно заряженного провода:

$$\phi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{S+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d - (S-a)}{R}. \quad (6.1)$$

Потенциал отрицательно заряженного провода:

$$\phi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-(S-a)} \quad (r_2 < r_1) . \quad (6.2)$$

Напряжение

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{[d-(S-a)]^2}{R^2} = \frac{\tau}{\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d-(S-a)}{R} . \quad (6.3)$$

Заряд на единицу длины

$$\tau = U \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(S-a)}{R}} . \quad (6.4)$$

Емкость на единицу длины:

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(S-a)}{R}} . \quad (6.5)$$

Для воздушных линий, где провода подвешены на столбах, обычно  $R \ll d$ , тем более  $(S-a) \ll d$  и величиной  $S-a$  можно пренебречь по сравнению с  $d$ , то есть можно принять, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. Таким образом, для тонких проводов получаем:

$$U = \pi\epsilon\epsilon_0 \ln \frac{d}{R} ,$$

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} .$$

## **§7. Электрическое поле и емкость коаксиального кабеля.**

Коаксиальным кабелем называется двухпроводная линия в виде двух разделенных изоляцией цилиндров с совпадающими осями. Заданы  $a$  и  $b$  – размеры однослойного диэлектрика,  $\epsilon$  –



его диэлектрическая проницаемость (рис.6).

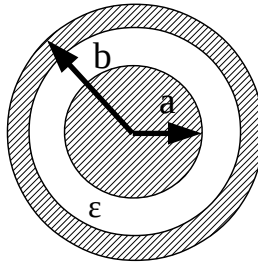


Рис.6.

Электрическое поле обладает осевой симметрией, поэтому на расстоянии  $r$  от оси кабеля электрическое смещение равно

$$D = D_r = \frac{\tau}{2\pi r},$$

а напряженность электрического поля

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (7.1)$$

Откуда напряжение

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}, \quad (7.2)$$

а емкость на единицу длины кабеля

$$c_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (7.3)$$

Максимальное значение напряженности поля имеем у поверхности внутреннего цилиндра ( $r=a$ ):

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 a} = \left| \tau = \frac{U 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \right| = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}}.$$

Если изменить в этой формуле  $a$ , то значение напряженности примет наименьшее значение при  $a=a_{\text{опт}}$ , которое определяется из условия:

$$\frac{d}{da} \left( a \ln \frac{b}{a} \right) = 0 ,$$

откуда

$$\ln \frac{b}{a} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = e = 2,7.$$

При этом соотношении радиусов достигается максимальная электрическая прочность кабеля.

## **§8. Основные уравнения электрического поля в проводящей среде.**

Закон Ома в интегральной форме для проводника

$$U_{12} = IR ,$$

где напряжение

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} ,$$

а ток через поверхность сечения  $S$  определяется

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S} . \quad (8.1)$$

В общем случае ток по сечению  $S$  проводника распределен неравномерно. Выделим в проводнике бесконечно малый цилиндр, в котором направление вектора плотности тока совпадает с направлением движения зарядов и осью цилиндра (рис.7).

Сопротивление выделенного цилиндрического участка:

$R = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}$ , где  $\gamma$  – удельная проводимость.

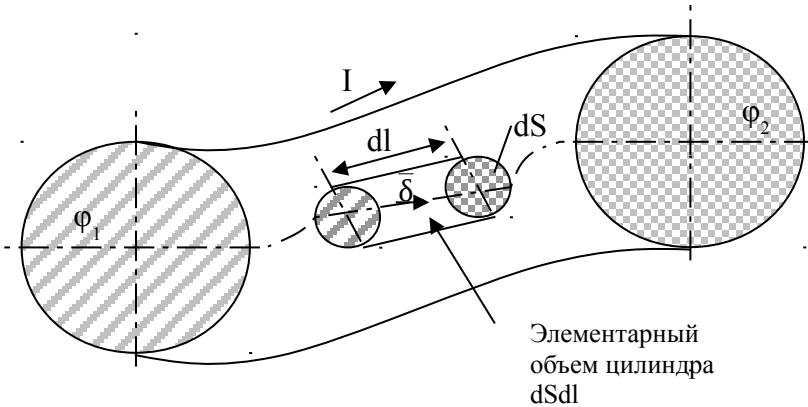


Рис.7.

Подставляя в уравнение закона Ома получим:

$$\delta dS = \frac{Edl}{\frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}}, \text{ откуда } \delta = \gamma E.$$

Вектор  $\vec{\delta}$  в изотропных телах совпадает с вектором напряженности поля  $\vec{E}$ ; поэтому  $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$  – это закон Ома в дифференциальной форме.

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме  $P = RI^2$ .

Для выделенного цилиндра:

$$dP = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS} (\delta dS)^2 = \frac{\delta^2}{\gamma} dl dS = \frac{\delta^2}{\gamma} dV.$$

Откуда энергия поглощаемая вблизи цилиндра, отнесённая к единице времени и объёма:

$$p = \frac{dP}{dV} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \underbrace{|\delta = \gamma E|}_{\text{закон Ома}} = \gamma E^2$$

это уравнение Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Выражая токи через уравнение (8.1), получим уравнение, которое показывает, что поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{\delta} \, d\vec{S} = 0 \quad (8.2)$$

это уравнение справедливо для любой сколь угодно малой поверхности  $S$  в стационарном режиме.

Разделив (8.2) на объем  $V$  заключенный внутри поверхности  $S$  и стянув поверхность так, что  $V \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} \, d\vec{S}}{V} = 0 .$$

Этому выражению соответствует дивергенция вектора  $\vec{\delta}$  :

$\text{div} \vec{\delta} = 0$  - это первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Второй закон Кирхгофа для участка электрической цепи не содержащего источника энергии  $\sum U = 0$  или в интегральной форме:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = 0 . \quad (8.3)$$

Разделив уравнение (8.3) на поверхность  $S$ , ограниченную контуром интегрирования бесконечно малого размера и перехода в пределу  $S \rightarrow 0$  получим:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \, d\vec{l}}{S} = 0$$

Выражение слева в этом уравнении называется вихрь или ротор вектора  $\vec{E}$ , точнее, проекция  $\text{rot} \vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $S \rightarrow 0$  (рис.8).

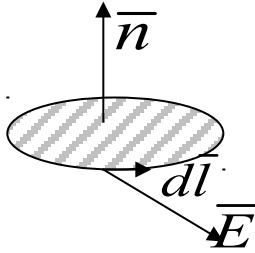


Рис.8.

Полученная дифференциальная форма второго закона Кирхгофа для участка цепи не содержащего источник энергии

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

позволяет обосновать потенциальный характер электрического поля в проводниках. Это следует из того, что согласно (8.3) напряжение между двумя точками не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положения этих точек. Поэтому в каждой точке поле может быть однозначно охарактеризовано скалярной величиной называемой потенциалом, связанным с напряженностью поля уравнением  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  (см. §2).

В источниках энергии движение зарядов происходит под действием сторонних сил ( $F_{\text{стор}}$ ). Поле сторонних сил характеризуется вектором напряженности:

$$E_{\text{стор}} = \frac{F_{\text{стор}}}{q},$$

где  $q$  – положительный заряд на который действует сила  $F_{\text{стор}}$ .

Напряженность стороннего электрического поля связанная с э.д.с. источника определяется интегралом:

$$e = \int_a^b \overline{E_{\text{стор}}} d\vec{l}, \quad (8.4)$$

где интегрирование производится по пути лежащему внутри источника энергии (рис.9).

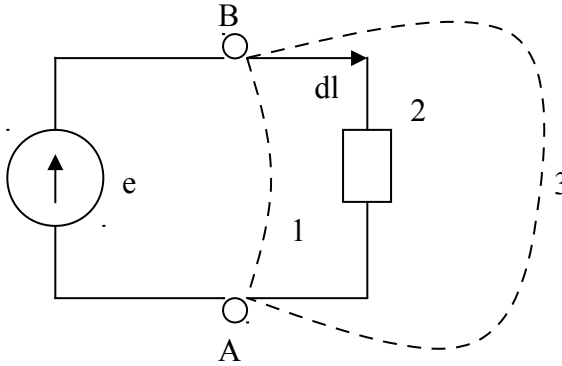


Рис.9.

В общем случае величина интеграла (8.4) зависит от пути интегрирования. Например, вне источника он будет равен нулю, т.к. здесь  $E_{стор} = 0$ .

Таким образом:

- 1) поле сторонних сил не является потенциальным;
- 2) величина интеграла (8.4) не изменится, если распространить его на любой их контуров 1, 2 или 3, включающий э.д.с. Для такого контура

$$e = \oint \overline{E_{стор}} d\vec{l}.$$

Второй закон Кирхгофа для участка цепи содержащего источник э.д.с (рис.10).

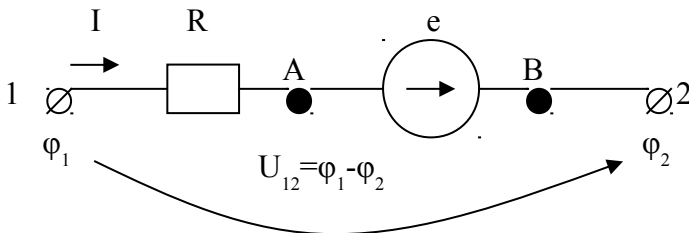


Рис.10.

в интегральной форме:  $e = IR - U_{12}$ ,

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2 + e}{R}.$$

(8.5)

Разность потенциалов образуется только потенциальным полем без учета потенциального поля источника э.д.с.:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l}.$$

Тогда  $\phi_1 - \phi_2 + e = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l} + \int_1^2 \overline{E}_{\text{стор}} d\overline{l}$ . Подставляя в (8.5)

получим

$$I = \frac{\int_1^2 (\overline{E} + \overline{E}_{\text{стор}}) d\overline{l}}{R}.$$

Если к элементарному цилиндру с током  $I$  применить уравнения (8.4) и (8.5), учитывая что этот цилиндр находится внутри источника энергии, получим второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме:

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \overline{E_{\text{стор}}}) .$$

(8.6)

При  $E_{\text{стор}} = 0$  получим закон Ома в дифференциальной форме

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} . \quad (8.7)$$

## §9. Расчет сферического заземлителя.

Сферический заземлитель радиуса  $a$  находится в среде с относительно небольшой проводимостью  $\gamma$ . Ток, подводимый к заземлителю, равен  $I$  (рис.11).

Определим сопротивление растеканию  $R_p$ . Заземлитель зарыт на глубину во много раз больше его радиуса.

По условиям симметрии ток будет равномерно растекаться во все стороны. Линии вектора плотности тока будут радиальными прямыми. На расстоянии  $r$  от центра заземлителя численное значение плотности тока:

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2} . \quad (9.1)$$

В той же точке напряженность электрического поля определяется по закону Ома:

$$\bar{E} = \frac{I}{\gamma} \delta = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \bar{I}_r . \quad (9.2)$$

Соответственно, потенциал

$$\phi = - \int \bar{E} d\bar{l} + \text{const} .$$

Напряжение между любой точкой почвы и поверхностью заземлителя определяется из выражения:



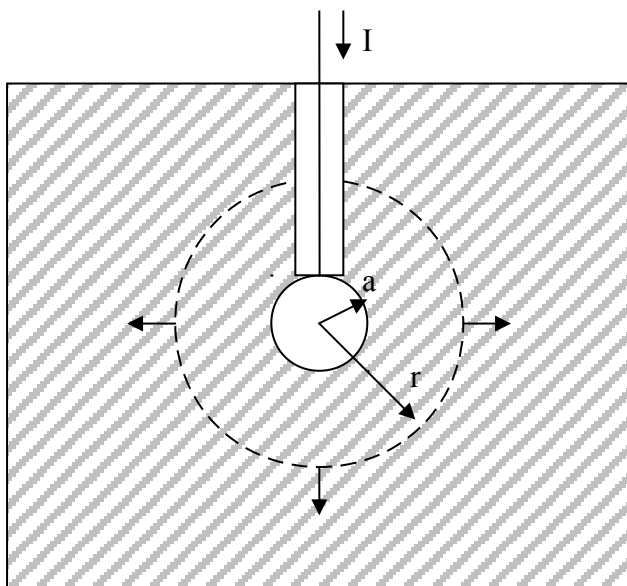


Рис.11.

$$U = \phi_a - \phi_r = \int_a^r E dr = \frac{\bar{I}}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \quad (9.3)$$

С увеличением расстояния  $r$  напряжение стремится к пределу:

$$U_p = \frac{I}{4\pi\gamma a} \quad (9.4)$$

Это предельное напряжение называется напряжением растекания. На расстоянии  $r = 100a$  с достаточной степенью точности можно считать  $U = U_p$ . Отношение  $U_p$  к току называется сопротивлением растекания:

$$R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a} \quad (9.5)$$

Рассмотрим полусферический заземлитель радиуса  $a$  погруженный в землю вровень с её поверхностью (рис.12). Для него

$$R_p = \frac{1}{2\pi\gamma a}$$

Определим напряжение шага  $U_{ш}$  - напряжение, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. Ток  $I$ , протекающий в землю через заземлитель, задан.

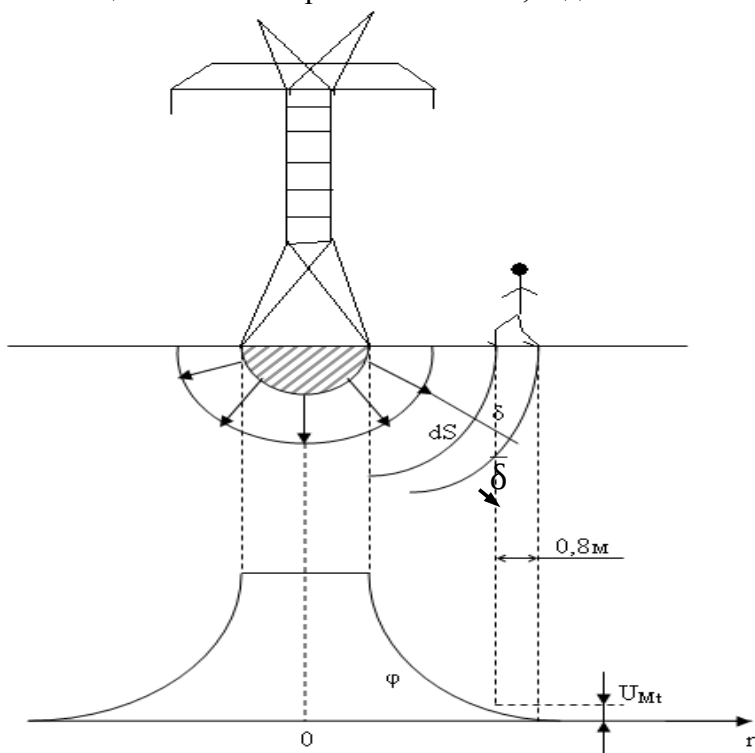


Рис.12.

$U_{ш}$

Пользуясь формулами предыдущего примера можно записать выражение напряженности электрического поля в точке, удаленной от центра заземлителя на расстояние  $r$ :

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \quad (9.6)$$

Считая длину шага равной 0,8 м, получим:

$$U_w = \int_r^{r+0,8} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right) \quad (9.7)$$

Если принять потенциал  $\phi = 0$  при  $r = \infty$ , то в остальных точках на поверхности земли, начиная от  $r=a$ , потенциал распределится по уравнению:

$$\phi = \frac{I}{2\pi\gamma r} = U_p \frac{a}{r}. \quad (9.8)$$

На рис.12 показана кривая  $\phi = f(r)$ .

## **§10. Основные уравнения магнитного поля постоянного тока.**

В основе расчета магнитного поля постоянного тока лежит следующая система уравнений в интегральной форме:

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = I \quad (10.1)$$

$$\oint \overline{B} d\overline{S} = 0 \quad (10.2)$$

$$\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H} \quad (10.3)$$

Эта система дополняется выражением удельной энергии магнитного поля:

$$\frac{dW_m}{dV} = \frac{\overline{B} \overline{H}}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (10.4)$$

Уравнения поля в дифференциальной форме, так же как и

граничные условия, получаются обычно из уравнений поля в интегральной форме путем предельного перехода к бесконечно малым величинам контура и поверхности интегрирования. Применим уравнение (10.1) к элементарному контуру, ограничивающему площадку  $\Delta S$ , через которую проходит ток  $\Delta I$  для точек, где значение  $\mu$  непрерывно:

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = \Delta I$$

После деления обеих частей этого равенства на  $\Delta S$  и перехода к пределу получим:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \overline{H} d\overline{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \overline{H} = \delta_n ,$$

или учитывая, что проекции векторов равны независимо от положения контура,

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta} \quad (10.5)$$

Это и есть закон полного тока в дифференциальной форме. Применение уравнения (10.2) к поверхности элементарной призмы объема  $\Delta V$  приводит к выражению:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \overline{B} d\overline{S}}{\Delta V} = 0 ,$$

или

$$\text{div} \overline{B} = 0 . \quad (10.6)$$

Получен закон непрерывности линий магнитной индукции в дифференциальной форме. Он свидетельствует о чисто соленоидальном характере поля вектора  $\overline{B}$ : не существует магнитных зарядов, которые служили бы началами и концами линий вектора магнитной индукции.

Для точек, лежащих на поверхности раздела двух сред с различными значениями  $\mu$  уравнения (10.1) и (10.2) приводят к граничным условиям. Граничное условие для тангенциальных

составляющих вектора  $\overline{H_1}$  и  $\overline{H_2}$  имеет вид:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0 .$$

Граничное условие для нормальных составляющих вектора  $\overline{B_1}$  и  $\overline{B_2}$  :

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 .$$

Таким образом, в магнитном поле постоянных токов непрерывны тангенциальные составляющие векторов  $\overline{H}$  и нормальные составляющие векторов  $\overline{B}$  .

## §11. Векторный потенциал магнитного поля.

Рассчитаем магнитное поле в однородной среде ( $\mu=const$ ), если задано распределение плотности тока  $\overline{\delta} = \overline{\delta}(x, y, z)$  ; то есть требуется решить систему уравнений: (10.1), (10.2) и (10.3).

Введем новую векторную функцию  $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$  , позволяющую исключить неизвестные векторы  $\overline{B}$  и  $\overline{H}$  из уравнений (10.5) и (10.6) и получить взамен их дифференциальное уравнение

$$\overline{B} = \text{rot } \overline{A} , \quad (10.7)$$

удовлетворяющее требованию  $\text{div } \overline{B} = 0$  , так как дивергенция ротора тождественно равна нулю.

После преобразований получим:

$$\overline{A} = \int \frac{\mu \mu_0 \overline{\delta}}{4 \pi R} dV , \quad (10.8)$$

где  $R$  – расстояние от элемента тока  $\overline{\delta} dV$  до точки, в которой определяется поле.

Таким образом, здесь проявляется принцип двойственности.

Определив  $\bar{A}$  из уравнения (10.8), можно найти магнитную индукцию дифференцированием  $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$  и напряженность магнитного поля  $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu\mu_0}$ .

Полученная векторная функция  $\bar{A}$ , с помощью которой решена поставленная задача, называется векторным потенциалом магнитного поля.

Из уравнения (10.4) после преобразования по теореме Остроградского получим выражение энергии магнитного поля через векторный потенциал:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \bar{H} \bar{B} dV = \frac{1}{2} \int \bar{\delta} \bar{A} dV \quad (10.9)$$

Для одиночного провода, диаметр которого  $2a$ , с током  $I$  в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\alpha$  и  $z$  с центром на оси провода векторный потенциал магнитного поля можно определить по закону полного тока из выражения (10.7):

$$B_\alpha = \text{rot}_\alpha \bar{A} = -\frac{dA_z}{dr}.$$

Для внешнего магнитного поля: ( $r \geq a$ ):

$$A_e = -\int B_e dr = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r. \quad (10.10)$$

Для внутреннего магнитного поля ( $r < a$ ):

$$A_i = -\int B_i dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2}. \quad (10.11)$$

При  $r=a$ , имеем  $A_e = A_i$ .

## §12. Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии.

В случае двух параллельных цилиндров (проводников) диаметра  $2a$  длиной  $l$  и расстоянием между ними  $d$  с прямым током  $I$  в первом проводнике и обратным током  $I$  во втором проводнике в цилиндрической системе координат с осью  $z$  в первом проводнике (рис.13) имеем:

По уравнению (10.10) результирующий векторный потенциал магнитного поля:

$$A_e = A_{e1} + A_{e2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r'_2}{r'_1}.$$

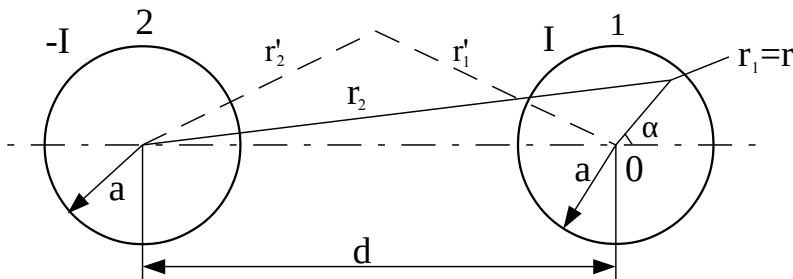


Рис.13.

По уравнениям (10.10) и (10.11) результирующий векторный потенциал при  $a > r_1 = r$  и геометрически выражая  $r_2$ :

$$r_2 = \sqrt{d^2 + 2dr \cos \alpha + r^2}$$

после преобразований имеем:

$$A_i = A_{i1} + A_{e2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d}{a} - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( 1 + 2 \frac{r}{d} \cos \alpha + \frac{r^2}{d^2} \right). \quad (10.12)$$

Подставляя уравнение (10.12) в (10.9) с учетом  $\delta = \frac{I}{\pi a^2}$  и

$dV = IdS$  получим энергию магнитного поля двухпроводной линии для точек расположенных внутри сечения  $S$  первого провода:

$$W_m = \frac{I^2 \mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

Откуда из известного выражения  $W_m = \frac{1}{2} L I^2$  можно определить полную индуктивность линии:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left( \ln \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

### **§13. Магнитное поле и индуктивность коаксиального кабеля.**

Коаксиальный кабель представляет собой два проводящих цилиндра с совпадающими осями, выполняющих роль прямого и обратного проводов. Провода разделены изоляцией (рис.14).

Если считать ток  $I$  внутреннего цилиндра – жилы кабеля – положительным, тогда ток оболочки кабеля будет по величине таким же, но отрицательным. Объем кабеля имеет три области:



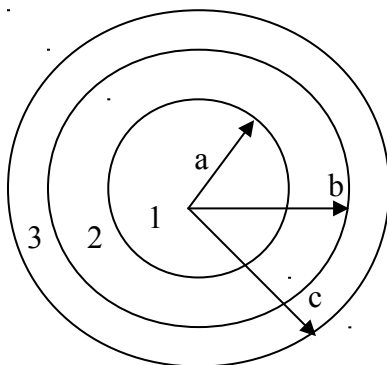


Рис.14.

первая область - это жила кабеля с плотностью тока

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi a^2};$$

вторая область, занимаемая изоляцией; третья область, занимаемая оболочкой кабеля с плотностью тока

$$\delta_3 = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (13.1)$$

Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности с центром, расположенным на оси кабеля. В области 1 магнитная линия радиуса  $r \leq a$  охватывает часть тока:

$$\delta_1 \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2. \quad (13.2)$$

По закону полного тока напряженность магнитного поля в этой области

$$H_I = \frac{1}{2\pi r} \left( \frac{I}{a^2} r^2 \right) = \frac{I}{2\pi a^2} r. \quad (13.3)$$

Во второй области магнитная линия радиуса  $a \leq r \leq b$

охватывает весь ток  $I$ , поэтому

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad (13.4)$$

В третьей области магнитная линия радиуса  $b \leq r \leq c$  охватывает ток

$$I + \delta_3 \pi (r^2 - b^2) = I - I \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad (13.5)$$

значит,

$$H_3 = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)}. \quad (13.6)$$

Магнитное поле вне кабеля равно нулю. Его энергия:

$$W_m = \int \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} dV, \quad (13.7)$$

запасенная на участке кабеля длиной  $l$ , равна сумме энергий отдельных областей. Элемент объема  $dV$  целесообразно для всех областей выразить как:

$$dV = 2\pi r dr,$$

тогда

$$W_m = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2} L I^2,$$

причем энергией  $W_2$  внешнего магнитного поля определяется так называемая внешняя индуктивность кабеля:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_e I^2, \quad (13.8)$$

откуда

$$L_e = \frac{2W_2}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (13.9)$$

а энергией  $W_1 + W_3$  внутреннего магнитного поля определяется

внутренняя индуктивность

$$L_i = \frac{2(W_1 + W_3)}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \frac{c^4 \ln \frac{c}{b}}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \quad (13.10)$$

Полная индуктивность

$$L = L_e + L_i.$$

Внешняя индуктивность кабеля не будет изменяться и при питании кабеля переменным током любой частоты. Внутренняя индуктивность из-за поверхностного эффекта с увеличением частоты уменьшается до нуля при сверхвысокой частоте, так как ток становится поверхностным.

В этом случае магнитная задача становится аналогична электростатической, при этом внешняя индуктивность  $L_{eo}$  и емкость  $C_o$  на единицу длины системы соответствуют формуле

$$L_{eo} C_o = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

## §14. Теорема Умова-Пойнтинга.

Рассмотрим процесс передачи энергии через коаксиальный кабель (рис.15).

Передаваемая мощность при постоянных токе  $I$  и напряжении  $U$ :

$$P=UI$$

Если  $r_2 - r_1 \ll r_1$ , тогда приближенно можно считать, что значения напряженности  $E$  и  $H$  во всех точках диэлектрика одинаковы и

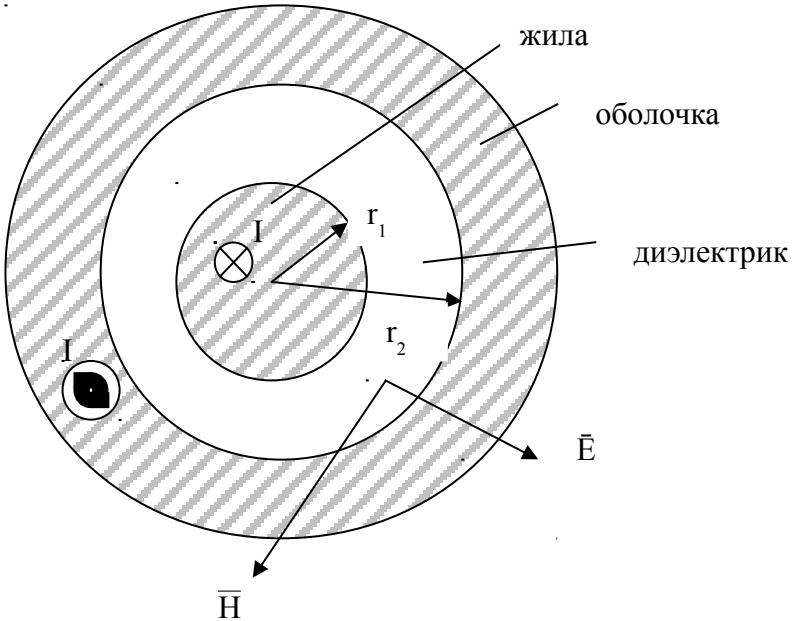


Рис.15.

равны

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}; \quad H = \frac{I}{\pi(r_2 + r_1)},$$

откуда

$$P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где  $S$  – площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение  $EH = \frac{P}{S}$  характеризует мощность, передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика. Так как вектор  $\vec{E}$  направлен по радиусу, вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение  $EH$  можно рассматривать как векторное.

Вектор  $\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]$  называется вектором Пойнтинга. Из выражения  $\vec{P} = \frac{P}{S}$  следует, что вектор Пойнтинга равен энергии электромагнитного поля в единицу времени (мощности), передаваемой через единицу площади сечения изоляции кабеля от генератора к приемнику. Это можно доказать в общем виде для любого электромагнитного поля.

Пусть в произвольном объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$  электромагнитное поле изменяется во времени. Часть объема  $V$  занимают сторонние источники и проводящие тела с постоянной проводимостью  $\gamma$ ; в остальной части объема – непроводящая однородная среда с  $\gamma=0$ ,  $\varepsilon=const$  и  $\mu=const$ .

Энергия электромагнитного поля в объеме  $V$ :

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV, \quad (14.1)$$

где  $\vec{D}$  – вектор электрического смещения (электрической индукции), а изменение энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV \quad (14.2)$$

Подставляя в это уравнение первое и второе уравнения Максвелла и, преобразуя по теореме Остроградского и вводя вектор Пойнтинга, получим уравнение, называемое теоремой Умова-Пойнтинга, которое выражает закон сохранения энергии.

Мощность сторонних источников в объеме  $V$  определяется как сумма составляющих:

$$P_{\text{отр}} = P + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint \bar{\Pi} d\bar{S}, \quad (14.3)$$

где  $P$  – тепловые потери в проводящей среде,  $\oint \bar{\Pi} d\bar{S}$  – часть мощности, переносимой через поверхность  $S$ . Эта мощность может быть направлена и внутрь объема. Так, например, если процесс стационарный ( $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ ) и в объеме  $V$  нет сторонних источников ( $P_{\text{отр}} = 0$ ), то

$$P + \oint \bar{\Pi} d\bar{S} = 0. \quad (14.4)$$

Так как  $P > 0$ ,  $\oint \bar{\Pi} d\bar{S} < 0$ , то есть выделение тепла в объеме  $V$  в этом случае происходит за счет энергии, входящей через поверхность  $S$  внутрь объема  $V$ .

## §15. Уравнение Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме.

Для синусоидально изменяющихся во времени электромагнитных полей вводится символическая запись уравнений поля, переходя от действительных векторов поля к их комплексным изображениям.

Мгновенное значение синусоидально изменяющегося вектора в декартовой системе координат:

$$\vec{H} = iH_{xm} \sin(\omega t + \Psi_x) + jH_{ym} \sin(\omega t + \Psi_y) + kH_{zm} \sin(\omega t + \Psi_z).$$

Комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$ :

$$\vec{\dot{H}}_m = i\dot{H}_{mx} + j\dot{H}_{ym} + k\dot{H}_{zm}, \text{ где}$$

$$\dot{H}_{mx} = H_{mx} e^{j\Psi_x}, \quad \dot{H}_{my} = H_{my} e^{j\Psi_y}, \quad \dot{H}_{mz} = H_{mz} e^{j\Psi_z}.$$

Если  $\Psi_x = \Psi_y = \Psi_z$  составляющие вектора  $\vec{H}$  совпадают по фазе, то направление его с течением времени не изменится. В

общем случае  $\Psi_x \neq \Psi_y \neq \Psi_z$  конец вектора  $\vec{H}$  описывает некоторую кривую.

Подстановка в основные уравнения поля комплексных выражений векторов и переход к действующим значениям даёт законы Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}} + j\omega\epsilon\epsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad (15.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\mu_0 \dot{\vec{H}}, \quad (15.2)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0; \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \frac{\dot{\rho}}{\epsilon\epsilon_0}, \quad \dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}.$$

В электромагнитном поле, где напряжению соответствует вектор  $\vec{E}$ , а току – вектор  $\vec{H}$  можно ввести понятие комплексного вектора Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*].$$

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме для стационарного режима принимает вид:

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = P + j\omega(W_{Mm} - W_{Элм}) = P + jQ = RI^2 + j\omega L_i I^2, \quad (15.3)$$

где  $(W_{Mm} - W_{Элм})$  – разность максимальных значений энергий, запасенных в магнитном и электрическом полях в объеме  $V$  (в проводнике  $W_{Элм} \ll W_{Mm}$ ), здесь обозначено:

$P$  – активная мощность, поглощаемая внутри объема  $V$ ,

$R$  и  $L_i$  – активное и внутреннее индуктивное сопротивление проводника.

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме позволяет доказать теорему единственности:

Если для одного из векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  известны комплексные амплитуды тангенциальных составляющих на граничной поверхности  $S$ , то решение, удовлетворяющее в любой точке объема  $V$  уравнениям Максвелла и граничным условиям (на поверхности  $S$ ), является единственным.

## §16. Распространение электромагнитных волн

На большом расстоянии от источника сферическую волну можно считать плоской волной, для которой в каждой точке плоскости, перпендикулярной направлению распространения, напряженности поля имеют одинаковые значения.

Если в однородной изотропной непроводящей среде ( $\varepsilon=const$ ,  $\mu=const$ ,  $\gamma=0$ ) нет свободных зарядов и поле создается в источнике синусоидальным током, то напряженности поля изменяются во времени синусоидально.

Уравнения Максвелла в комплексной форме, выраженные в декартовой системе координат  $x, y, z$  при распространении электромагнитных волн по оси  $z$ , позволяют сделать вывод, что в плоской волне, так же как и в сферической, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны друг другу. Мгновенные значения напряженностей определяются как суммы падающей и отраженных волн:

$$E_x = E_{nad} + E_{omp} = \sqrt{2} [A_1 \sin \omega(t - \frac{z}{v}) + A_2 \sin \omega(t + \frac{z}{v})], \quad (16.1)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  - скорость волны,  $A_1$  и  $A_2$  - постоянные интегрирования определяемые граничными условиями.

$$H_y = H_{nad} + H_{omp} = \frac{1}{\rho} (E_{nad} - E_{omp}), \quad (16.2)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon v}$  - волновое сопротивление среды.

Откуда следует, что как в падающей, так и в отраженной волнах плотности энергии электрического и магнитного полей равны друг другу:



$$\frac{\varepsilon E_{nad}^2}{2} = \frac{\mu H_{nad}^2}{2} ; \quad \frac{\varepsilon E_{omp}^2}{2} = \frac{\mu H_{omp}^2}{2} \quad (16.3)$$

Если среда однородна и отраженной волны нет, то уравнения (16.1) и (16.2) будут иметь вид:

$$E_x = E_0 \sqrt{2} \sin \omega(t - \frac{z}{v}), \quad H_y = \frac{E_0}{\rho} \sqrt{2} \sin \omega(t - \frac{z}{v}),$$

где  $E_0$  – действующее значение напряженности электрического поля в начале координат.

Вектор Пойнтинга имеет лишь составляющую по оси  $Z$ :

$$P_z = P = E_x H_y = \frac{2E_0^2}{\rho} \sin^2 \omega(t - \frac{z}{v}) = \frac{E_0^2}{\rho} [1 + \cos 2\omega(t - \frac{z}{v})] > 0$$

со средним значением:

$$P_{cp} = \frac{E_0^2}{\rho}.$$

Плотность энергии падающей волны:

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \varepsilon E^2 = \mu H^2.$$

Тогда вектор Пойнтинга:

$$P = EH = \rho H^2 = \frac{\rho}{\mu} W_0 = v W_0 ;$$

или в векторной форме:

$$\vec{P} = \vec{v} W_0 ,$$

Откуда видно, что энергия электромагнитной волны движется по оси  $z$  со скоростью  $v$ .

Графически распределение  $E, H$ , и  $P$  для падающей волны в некоторый момент времени имеет вид, показанный на рис.16.

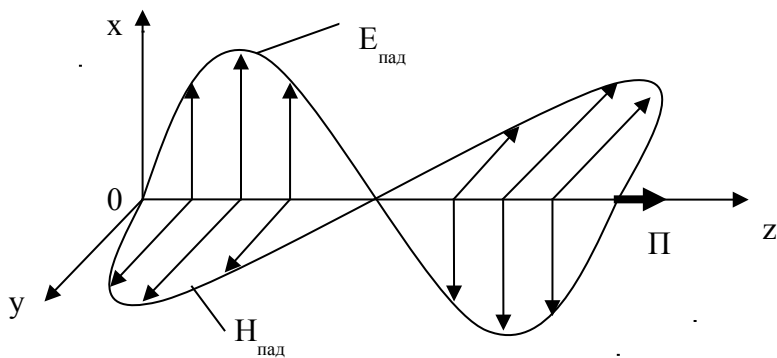


Рис.16.

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется в диэлектрической среде, падает нормально на плоскую поверхность проводящей среды (рис.17).

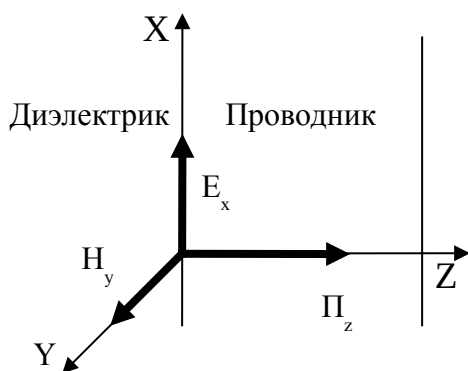


Рис.17.

На границе имеют место преломление и отражение волны. Далее рассматривается только преломленные волны в проводящей среде. Пусть поле изменяется во времени синусоидально и заданы действующие значения  $H_0$  и фаза  $\Psi_0$  напряженности магнитного поля у поверхности проводящей среды (при  $z=0$ ). Применяя уравнение Максвелла (15.1) и (15.2) и вводя коэффициент затухания:

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}},$$

получим мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей в проводящей среде:

$$H_y = \sqrt{2} H_0 e^{-kz} \sin(\omega t + \Psi_0 - kz),$$

$$E_x = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_0 e^{-kz} \sin\left(\omega t + \Psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz\right).$$

Откуда видно, что в отличие от диэлектрической среды в проводящей среде напряженности поля убывают по мере проникновения в глубь среды по экспоненциальному закону. Начальные фазы напряженностей изменяются пропорционально  $z$ , а напряженность электрического поля в любой точке проводящей среды опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол  $\pi/4$ .

На расстоянии в одну длину волны фаза волны изменяется на  $2\pi$ . Следовательно:

$$\lambda k = \lambda \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = 2\pi,$$

откуда  $\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f \mu \gamma}},$

а скорость распространения  $v = \lambda f = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu \gamma}}.$

Таким образом, в отличие от диэлектрической среды, где

скорость распространения определяется только свойствами среды, в проводящей среде эта скорость зависит не только от удельной проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты.

Вектор плотности тока изменяется так же, как вектор напряженности электрического поля, так как  $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ .

Волновое сопротивление проводящей среды имеет комплексный характер:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \xi e^{j\frac{\pi}{4}}, \text{ где } \xi = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} - \text{модуль волнового сопротивления.}$$

Вектор Пойнтинга имеет одну составляющую:

$$\Pi_z = E_x H_y = 2\xi H_0^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \Psi_0 - kz) \sin(\omega t + \Psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz),$$

а ее среднее значение за период:

$$\Pi_{cp} = \xi H_0^2 e^{-2kz} \cos \frac{\pi}{4}.$$

В среде с большой удельной проводимостью (например, в металлах) длина волны оказывается очень малой. Малым оказывается и волновое сопротивление. Это означает, что энергия электромагнитной волны в основном сосредоточена в магнитном поле, так как:

$$\frac{W_{0H}}{W_{0E}} = \frac{\mu H^2}{\varepsilon E^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\xi^2}$$

Например, для меди на частоте  $f=10^{10}$  Гц,  $\xi=3,74 \cdot 10^{-2}$  Ом отношение  $\frac{W_{0H}}{W_{0E}}=10^6$ , то есть, энергия электрического поля

исчезающе мала по сравнению с энергией магнитного поля.

На расстоянии одной длины волны напряженность поля уменьшается в  $e^{2\pi}=540$  раз. Энергия же уменьшается в 540 раз уже на расстоянии полуволны. Поэтому на практике считают, что волна проникает в толщу проводящей среды меньше, чем на

$\lambda/2$ .

Вводится условная величина – эквивалентная глубина проникновения:

$$\sigma = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}.$$

Это расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз, так как  $e^{-k\sigma} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Таким образом, все соотношения для бесконечно протяженной проводящей среды, практически пригодны для проводника конечных размеров, если его протяженность в направлении распространения волны не меньше половины длины волны.

## §17. Поверхностный эффект.

Так как переменное электромагнитное поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды, то поле по сечению провода распределено не равномерно. В установившемся режиме ток и магнитный поток имеют максимальные значения у поверхности провода – в этом заключается поверхностный эффект (скин-эффект). Поверхностный эффект в основном является вредным, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току. Однако этот эффект используется, например, в установках индукционного поверхностного нагрева и закалки металлов.

Допустим, что по прямому цилиндрическому проводу радиусом  $r_0$  из однородного не ферромагнитного провода ( $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ) протекает синусоидальный ток с действующим значением  $I$  и частотой  $\omega$ . Используя уравнения Максвелла (15.1) и (15.2) получено выражение для определения плотности тока на расстоянии  $r$  от оси провода:

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 b_0 e^{j\beta_0} \quad (17.1)$$

На рис.18 даны зависимости  $b_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$  и  $\beta_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$ .

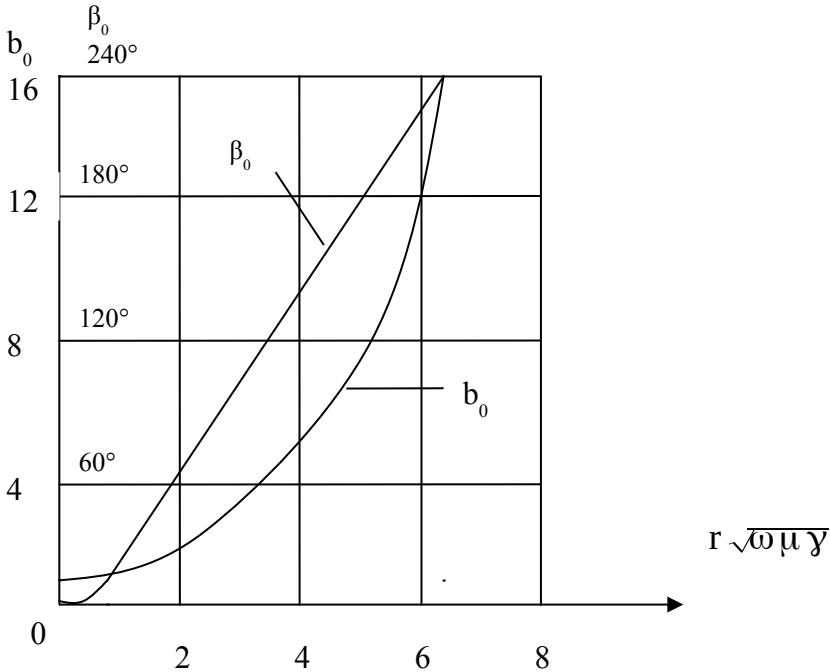


Рис.18.

Первая из них для  $b_0 = \frac{\delta}{\delta_0}$  определяет отношение действующих значений плотности токов в данной точке и на оси провода, вторая – фазный сдвиг между указанными плотностями тока. Из этих кривых видно, что плотность тока на оси провода может быть очень малой по сравнению с плотностью тока у поверхности провода, но в ноль никогда не обращается. Сдвиг по фазе между этими плотностями может быть любым, в том числе и  $180^\circ$ , то

есть в проводе могут существовать зоны, в которых направление токов противоположно.

Плотность тока связана с током в проводе выражением:

$$\dot{\delta} = \dot{I} \frac{\sqrt{\omega \mu \gamma}}{2 \pi r_0} \cdot \frac{b_0}{b_{1r0}} e^{j(\beta_0 - \beta_{1r0} - \frac{\pi}{4})} \quad (17.2)$$

где  $b_{1r0}$  и  $\beta_{1r0}$  - значение модуля и аргумента функции Бесселя первого порядка у поверхности провода. По этому выражению, задавая ток, размер и материал провода возможно определить плотность тока по модулю и фазе в любой точке сечения провода.

Комплексное полное внутреннее сопротивление провода:

$$Z = R + j\omega L_i,$$

где  $R$  – активное сопротивление провода, а  $L_i$  – внутренняя индуктивность провода.

Напряжение на отрезке провода длиной  $l$  можно выразить через напряженность поля на поверхности провода:

$$\begin{aligned} Z \dot{I} &= (R + j\omega L_i) \dot{I} = \dot{E}_{ro} l = \frac{\dot{\delta}_{ro}}{\gamma} l = \\ &= \dot{I} \frac{l}{\gamma} \frac{\sqrt{\omega \mu \gamma}}{2 \pi r_0} \frac{b_{0ro}}{b_{1ro}} e^{j(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (17.3)$$

После сокращения на  $\dot{I}$ :

$$\begin{aligned} R + j\omega L_i &= \frac{l}{\pi r_0^2 \gamma} \cdot \frac{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} e^{j(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4})} = \\ &= R_0 \frac{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \frac{b_{0ro}}{b_{1ro}} e^{j(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4})}, \end{aligned}$$

где  $R_o = \frac{1}{\pi r_o^2 \gamma}$  - сопротивление постоянному току. Отсюда,

приравнивая вещественные и мнимые части получаем:

$$\frac{R}{R_o} = \frac{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \cos(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) \quad (17.4)$$

и

$$\frac{\omega L_i}{R_o} = \frac{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \sin(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) . \quad (17.5)$$

При постоянном токе внутренняя индуктивность одного провода:

$$L_{oi} = \frac{\mu l}{8 \pi} ,$$

поэтому

$$\frac{L_i}{L_{oi}} = \omega \frac{L_i}{R_o} \cdot \frac{R_o}{\omega L_{oi}} = \frac{4}{r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}} \cdot \frac{b_{oro}}{b_{1ro}} \sin(\beta_{oro} - \beta_{1ro} - \frac{\pi}{4}) . \quad (17.6)$$

На рис.19 представлены зависимости  $\frac{R}{R_o}$  и  $\frac{L_i}{L_{oi}}$  от параметра  $r_o \sqrt{\omega \mu \gamma}$ .

Таким образом, для данного провода с ростом частоты активное сопротивление  $R$  и внутреннее индуктивное сопротивление  $\omega L_i$  увеличивается, а внутренняя индуктивность уменьшается.

При этом неравномерность распределения тока по сечению не влияет на величину внешней индуктивности  $L_e$ , так как из закона полного тока магнитное поле вне проводника определяется всем током провода.



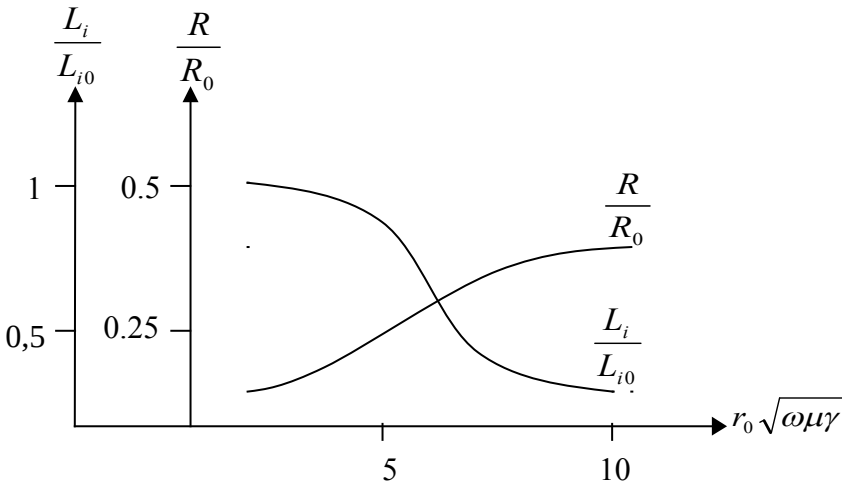


Рис.19.

Для уменьшения влияния поверхностного эффекта на величину активного сопротивления при высокой частоте используется провод, свитый и большого числа тонких, изолированных друг от друга жил. Жилы скручены между собой так, что каждая из них последовательно занимает все положения в проводе. При этом каждая из жил сцепляется практически с одинаковым магнитным потоком, и, несмотря на большое общее сечение провода, увеличение сопротивления из-за поверхностного эффекта будет незначительно.

## Контрольная работа №5 по ТОЭ, часть 3. Расчёт электромагнитных полей.

В контрольной работе №5 по ТОЭ выполняются две задачи, выбираемые по своему варианту или по указанию преподавателя, в соответствии с приведённой таблицей:

Таблица

№ вари- анта	№ первой задачи	№ второй задачи	№ вари- анта	№ первой задачи	№ второй задачи
1	2	3	1	2	3
00	1-1-98	2-1-57	13	3-1-42	5-1-23
01	4-1-40	3-1-20	14	3-1-54	5-1-20
02	2-1-85	4-1-32	15	4-1-54	5-1-37
03	5-1-41	3-1-34	16	4-1-12	2-1-48
04	4-1-22	3-1-35	17	4-1-48	5-1-19
05	4-1-62	3-1-50	18	4-1-28	1-1-44
06	3-1-29	5-1-28	19	1-1-16	2-1-63
07	2-1-52	3-1-41	20	3-1-50	2-1-36
08	1-1-22	2-1-77	21	5-1-56	1-1-31
09	2-1-71	1-1-40	22	3-1-18	4-1-27
10	4-1-18	1-1-76	23	1-1-32	5-1-29
11	1-1-10	2-1-61	24	3-1-61	2-1-53
12	1-1-53	5-1-36	25	2-1-47	1-1-48

<b>№ вари- анта</b>	<b>№ первой задачи</b>	<b>№ второй задачи</b>	<b>№ вари- анта</b>	<b>№ первой задачи</b>	<b>№ второй задачи</b>
1	2	3	1	2	3
26	4-1-40	3-1-20	45	1-1-10	2-1-61
27	5-1-41	3-1-34	46	2-1-71	1-1-40
28	4-1-62	3-1-50	47	2-1-52	3-1-41
29	1-1-16	2-1-63	48	3-1-29	5-1-28
30	1-1-22	2-1-77	49	4-1-22	3-1-35
31	4-1-18	1-1-76	50	2-1-85	4-1-32
32	1-1-53	5-1-36	51	1-1-98	2-1-57
33	3-1-54	5-1-20	52	1-1-16	2-1-63
34	4-1-12	2-1-48	53	3-1-18	4-1-27
35	4-1-28	1-1-44	54	2-1-47	1-1-48
36	3-1-50	2-1-36	55	3-1-50	2-1-36
37	3-1-18	4-1-27	56	4-1-12	2-1-48
38	3-1-61	2-1-53	57	3-1-54	5-1-20
39	2-1-47	1-1-48	58	4-1-62	3-1-50
40	1-1-32	5-1-29	59	5-1-41	3-1-34
41	5-1-56	1-1-31	60	4-1-40	3-1-20
42	4-1-48	5-1-19	61	3-1-61	2-1-53
43	4-1-54	5-1-37	62	5-1-56	1-1-31
44	3-1-42	5-1-23	63	4-1-48	5-1-19

<b>№ вари- анта</b>	<b>№ первой задачи</b>	<b>№ второй задачи</b>	<b>№ вари- анта</b>	<b>№ первой задачи</b>	<b>№ второй задачи</b>
1	2	3	1	2	3
64	4-1-54	5-1-37	82	5-1-56	1-1-31
6	1-1-53	5-1-36	83	1-1-32	5-1-29
66	2-1-71	1-1-40	84	3-1-54	5-1-20
67	2-1-52	3-1-41	85	1-1-10	2-1-61
68	3-1-29	5-1-28	86	2-1-52	3-1-41
69	4-1-22	3-1-35	87	5-1-41	3-1-34
70	2-1-85	4-1-32	88	1-1-98	2-1-57
71	1-1-98	2-1-57	89	3-1-42	5-1-23
72	3-1-42	5-1-23	90	3-1-61	2-1-53
73	1-1-10	2-1-61	91	2-1-47	1-1-48
74	3-1-50	2-1-36	92	4-1-28	1-1-44
75	3-1-18	4-1-27	93	2-1-71	1-1-40
76	1-1-32	5-1-29	94	3-1-29	5-1-28
77	4-1-62	3-1-50	95	2-1-85	4-1-32
78	4-1-40	3-1-20	96	1-1-22	2-1-77
79	4-1-22	3-1-35	97	4-1-48	5-1-19
80	4-1-54	5-1-37	98	4-1-18	1-1-76
81	1-1-16	2-1-63	99	4-1-28	1-1-44

### Задача 4-1-40.

В воздушной окружающей среде находится линия электропередачи, состоящая из двух параллельных проводников. Расстояние между осями проводов  $2h$ , радиус цилиндрического сечения проводов  $R$ , напряжение между проводами  $U$ , координаты точки  $a$  в пространстве над проводами  $[a_1, a_2]$  указаны в таблице. Координата  $a_1$  - расстояние от левого провода, координата  $a_2$  - расстояние от правого провода. Определить напряжённость и потенциал электростатического поля в точке  $a$  в пространстве над проводами.

Исходные данные:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	40	72	35	2	250

### Задача 4-1-27.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	27	53	31	2,7	660

### Задача 4-1-28.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	27	42	21	1,1	127

**Задача 4-1-48.**

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	48	86,4	42	2,4	300

**Задача 4-1-12.**

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	12	22	8	1,8	120

**Задача 4-1-54.**

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	54	89	47	1,2	280

**Задача 4-1-18.**

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	18	28	17	1,5	190

### Задача 4-1-62.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	62	110	75	2,4	780

### Задача 4-1-22.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	22	36	20	1,6	160

### Задача 4-1-32.

Записать задание задачи 4-1-40 с исходными данными:

№ варианта	$h$ , см	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$R$ , мм	$U$ , В
	32	78	28	1,8	420

### Задача 3-1-61.

Заземлитель сферического вида, радиусом  $R$  находится в среде с удельной проводимостью  $\gamma$ . К заземлителю подведён ток  $I$ . Определить напряжение растекания и сопротивление растеканию  $R_p$  заземлителя, если он зарыт в грунт на глубину во много раз больше его радиуса. Начертить схему расположения заземлителя. Значения  $R$ ,  $\gamma$ ,  $I$  приводятся в таблице.

Исходные данные:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	61	$3,2 \cdot 10^{-2}$	120

### Задача 3-1-18.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	18	$1,4 \cdot 10^{-2}$	50

### Задача 3-1-54.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:



№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	54	$1,8 \cdot 10^{-2}$	180

**Задача 3-1-42.**

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	42	$1,9 \cdot 10^{-2}$	85

**Задача 3-1-41.**

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	41	$2,2 \cdot 10^{-2}$	35

**Задача 3-1-29.**

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	29	$2,9 \cdot 10^{-2}$	60

**Задача 3-1-50.**

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	50	$2,1 \cdot 10^{-2}$	100

### Задача 3-1-35.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	34	$1,8 \cdot 10^{-2}$	220

### Задача 3-1-34.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	34	$2,8 \cdot 10^{-2}$	56

### Задача 3-1-20.

Записать задание задачи 3-1-61 с исходными данными:

№ варианта	$R$ , см	$\gamma$ , $\frac{\text{см}}{\text{м}}$	$I$ , А
	20	$10^{-2}$	120

### Задача 1-1-48.

В двухпроводной воздушной линии электропередачи протекает постоянный ток  $I$ . Диаметр проводов линии  $R$ , расстояние между осями линии  $2h$ ,  $a_1$  и  $a_2$  - расстояние соответственно от левого провода и правого провода до точки  $m$  заданы в таблице. Определить для точки  $m$  скалярный магнитный потенциал, вектор магнитной индукции, вектор напряженности магнитного поля и векторный потенциал.

Исходный данные:

№ варианта	$I, A$	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	40	1,7	72	32	60

### Задача 1-1-32.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	$I, A$	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	32	1,5	54	24	40

### Задача 1-1-31.

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	$I, A$	$R, мм$	$2h, см$	$a_1, см$	$a_2, см$
	31	2,1	80	35	60

**Задача 1-1-16.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	16	2,3	26	11,7	20

**Задача 1-1-44.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	44	1,8	67	28	47

**Задача 1-1-53.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	53	1,85	72	31	56

**Задача 1-1-10.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	100	2,1	61	25	46

**Задача 1-1-76.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	76	2,4	68	30	51

**Задача 1-1-40.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	40	1,7	72	32	60

**Задача 1-1-22.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	22	2,3	48	21	41

**Задача 1-1-98.**

Записать задание задачи 1-1-48 с исходными данными:

№ варианта	I, А	R, мм	2h, см	$a_1$ , см	$a_2$ , см
	98	2,9	84	40	71

### Задача 2-1-47.

В неограниченном пространстве распространяется плоская линейно поляризованная гармоническая электромагнитная волна. Абсолютная магнитная проницаемость среды  $\mu_a = \mu_0$ , абсолютная диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_a = \epsilon_0$ , удельная проводимость среды равна нулю. Амплитуда  $E_m$  и частота  $\omega$  напряжённости электрического поля заданы в таблице. Определить величину и направление вектора напряжённости магнитного поля, вектора Пойтинга, вектора плотности тока смещения. Составить уравнение волны и определить её параметры.

Исходные данные:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $\text{с}^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^{12}}$

### Задача 2-1-53.

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $\text{с}^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	0,053	$2,1 \cdot 10^8$	$12,566 \cdot 10^{-7}$	$8,842 \cdot 10^{-12}$

**Задача 2-1-36.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^{-9}}$

**Задача 2-1-63.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$63 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^8$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

**Задача 2-1-48.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

**Задача 2-1-61.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$6,1 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}$

**Задача 2-1-71.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$4,71 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

**Задача 2-1-77.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$8,842 \cdot 10^{-1}$

**Задача 2-1-52.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$



**Задача 2-1-85.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$85 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^8$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$	$8,842 \cdot 10^{-1}$

**Задача 2-1-57.**

Записать задание задачи 2-1-47 с исходными данными:

№ варианта	$E_m$ , В/м	$\omega$ , $c^{-1}$	$\mu_0$ , Гн/м	$\epsilon_0$ , Ф/м
	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^8$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$

**Задача 5-1-29.**

Плоская электромагнитная волна передаётся по ленточной линии, состоящей из двух медных параллельных плоских полос, разделённых диэлектриком толщиной  $b$  и шириной  $m$ .

Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon$  , относительная магнитная проницаемость диэлектрика  $\mu$  . Амплитудное значение напряжённости электрического поля  $E_m$  , его частота  $f$ . Все параметры заданы в таблице.

Определить потери мощности в медных полосах на один метр длины ленточной линии передачи. Потери мощности в

диэлектрике считать равными нулю. Удельная проводимость

меди  $\gamma_m = 5,6 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$  .

Исходные данные:

№ вариант а	$\epsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	2,98	1	2	7	3700	$4,4 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-56.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\epsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	5,68	1	3	8	5100	$1,8 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-19.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\epsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	1,96	1	4	12	2100	$1,8 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-37.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\varepsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	3,72	1	4	16	2800	$1,6 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-20.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\varepsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	2,05	1	1,9	11,5	2970	$2,4 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-23.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\varepsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	2,37	1	5	17	4800	$3,9 \cdot 10^{10}$

### Задача 5-1-36.

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\varepsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	3,65	1	2,7	12	2450	$1,82 \cdot 10^{10}$

**Задача 5-1-28.**

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\epsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	2,88	1	1,75	8,5	1870	$2,3 \cdot 10^{10}$

**Задача 5-1-41.**

Записать задание задачи 5-1-29 с исходными данными:

№ вариант а	$\epsilon$	$\mu$	b, мм	m, мм	$E_m$ , В/м	f, Гц
	4,11	1	3	14	3600	$2,1 \cdot 10^{10}$

## **Библиографический список**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле.- 9-е изд. - М.: Гардарики, 2001.
2. Демирчан К.С., Нейман Л.Р. Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: В 3 т. - 4-е изд.- СПб.: СП, 2003.
3. Миронов В.Г., Бутырин П.А. Теория электрических цепей. - М.: Наука, 2005.
4. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. - М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди, С.Э. Расовская, С.А. Миленина, В.П. Каменская. - М.: Высш. шк., 2003.

## Оглавление

Введение.....	3
Теория электромагнитного поля.....	4
§1. Основные уравнения электромагнитного поля.....	4
§2. Основные уравнения электростатического поля.....	6
§3. Электрическое поле заряженной оси отрезка.....	9
§4. Электрическое поле двух разноимённых заряженных сей...11	
§5. Электрическое поле и ёмкость системы цилиндр- плоскость.....	13
§6. Электрическое поле и ёмкость двухпроводной линии.....	15
§7. Электрическое поле и ёмкость коаксиального кабеля.....	17
§8. Основные уравнения электрического поля в проводящей среде.....	18
§9. Расчёт сферического заземлителя.....	24
§10. Основные уравнения магнитного поля постоянного тока...27	
§11. Векторный потенциал магнитного поля.....	29
§12. Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии....	31
§13. Магнитное поле и индуктивность коаксиального кабеля....	32
§14. Теорема Умова-Пойнтинга.....	35
§15. Уравнение Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме.....	38
§16. Распространение электромагнитных волн.....	40
§17. Поверхностный эффект.....	45
Контрольная работа №5 по ТОЭ, часть 3.....	50
Библиографический список.....	70

Учебное издание

Ребенков Евгений Степанович

## **Теория электромагнитного поля**

Учебное пособие  
по курсу «Теоретические основы электротехники»

Редактор Туманова Е.М.

Подписано в печать

Формат 60 x 81<sup>1/16</sup>

Бумага «Снегурочка». Отпечатано на ризографе.

Усл. Печ. л. 4,7. Уч. Изд. л. 3,1.

Тираж 100 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет  
им. Д.И. Менделеева»

Новомосковский институт (филиал). Издательский центр.

Адрес университета: 125047, Москва, Миусская пл., 9

Адрес института: 301670, Новомосковск, Тульская обл., ул. Дружбы, 8