Задачи календарного или сетевого планирования

Олимпийские игры 1992 г., Барселона, более 2000 мероприятий за 15 дней.

- частичный порядок на множестве событий (четверть финала, полуфинал, финал);
- мощность спортивных сооружений (число одновременных соревнований, число зрителей);
- транспортные проблемы и доход (максимизировать посещаемость наиболее популярных соревнований — раздвинуть их по времени);
- требования TV (минимум параллельных трансляций);
- обеспечение безопасности (число полицейских ограничено).

Система поддержки решений «SUCCESS–92» Университет г. Барселоны

Задачи календарного или сетевого планирования

PERT – Program Evaluation Review Technique

1950 г., США, метод для управления разработкой и производством подводных лодок с ракетами Polaris

CPM – Critical Path Method

1957 г., разработан американской компанией DuPont производителем химических материалов

Постановка задачи

Дано: $J = \{1,\ldots, n\}$ — множество работ;

$\tau_j \geq 0$ — длительность работы j;

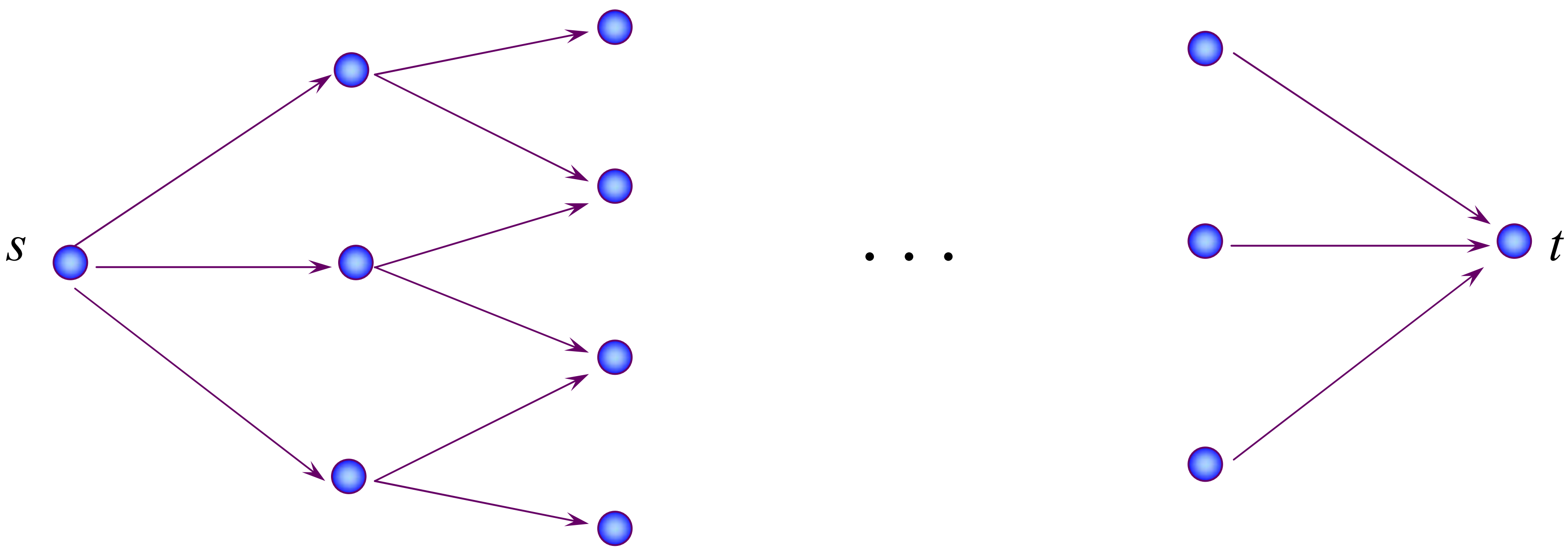
$C = \{(i, j) | \; i, j \in J\}$ — частичный порядок, работа j не может начаться раньше окончания работы i.

Найти:

- Минимальное время завершения всего проекта.
- Наиболее ранний момент начала и завершения каждой работы.
- Множество критических работ, то есть таких работ, задержка хотя бы одной из которых приведет к задержке всего проекта.
- Допустимое запаздывание для некритических работ.
- Вероятность завершения проекта к заданному сроку.

Сетевой график «работы — дуги»

$G = (V, E)$ — ориентированный взвешенный граф без циклов с одним источником s и одним стоком t, каждой дуге $j = (i, k)$ приписан вес $\tau_j \geq 0$.

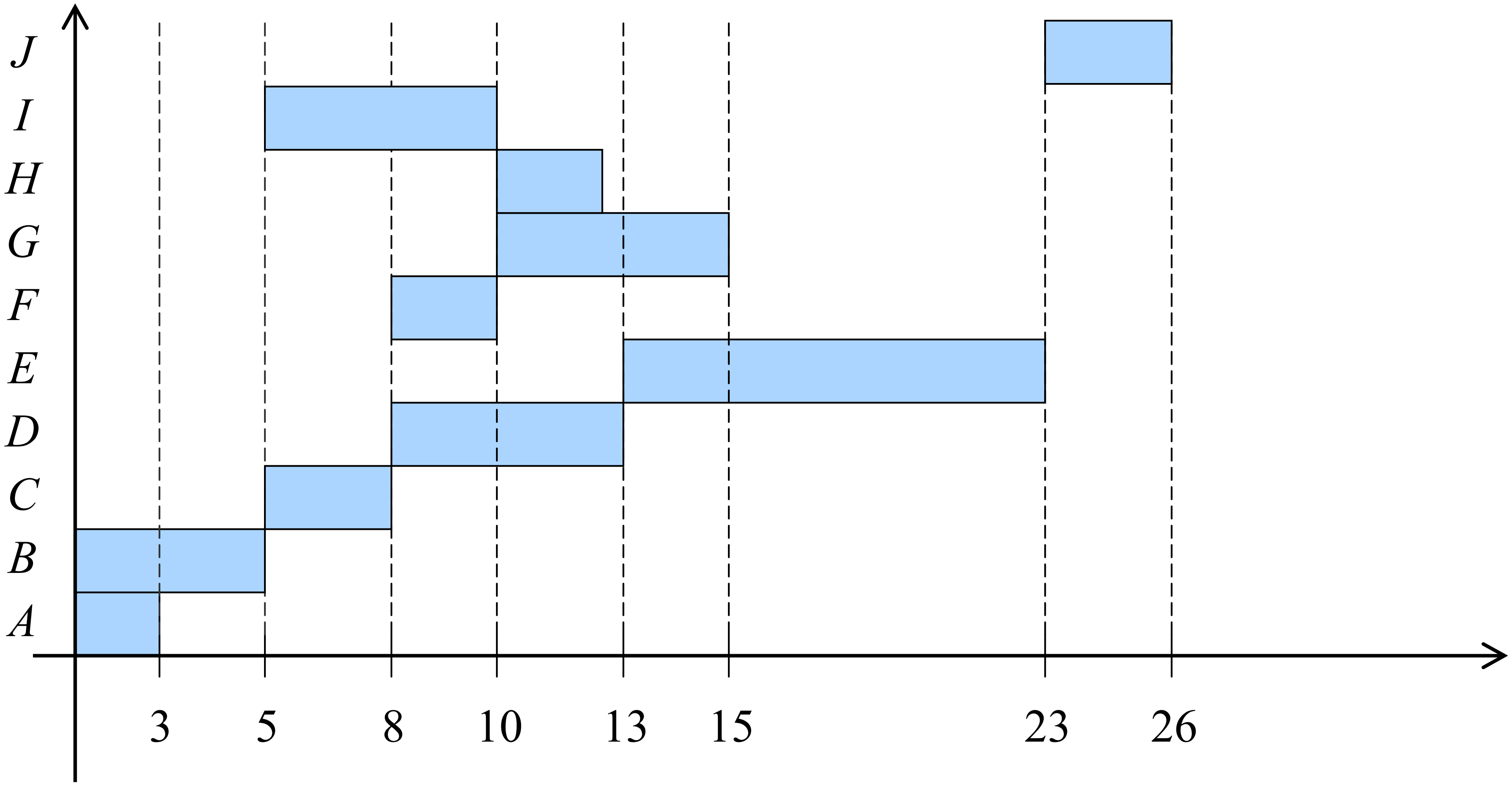


Вершины — события. Дуги — работы.

Пример

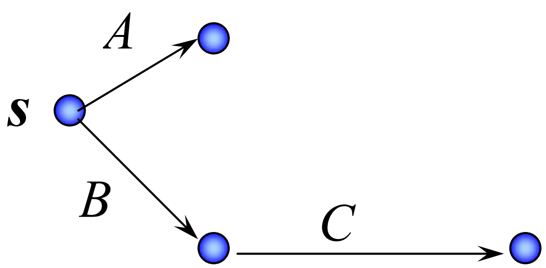
	Предшест-вование	Длитель-ность
A — выбрать место для офиса	—	3
B — создать финансовый и организационный план	—	5
C — определить обязанности персонала	B	3
D — разработать план офиса	A, C	5
E — ремонт помещений	D	10
F — отобрать кандидатов на увольнение	C	2
G — нанять новых служащих	F	5
H — назначить ключевых руководителей	F	2
I — распределить обязанности руководителей	B	5
J — обучить персонал	H, E, G	3

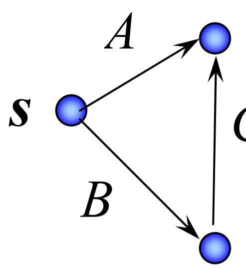
Диаграмма Гантта

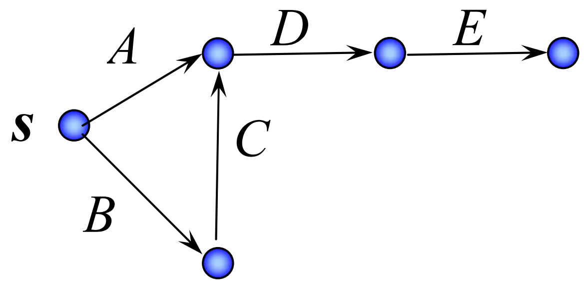


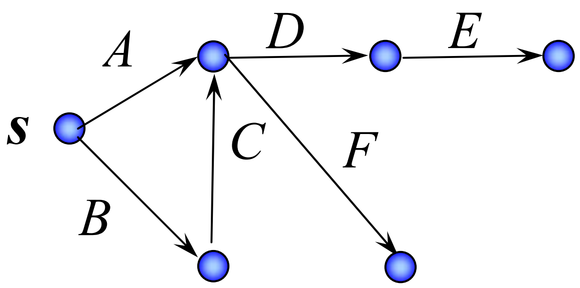
Работа *E* является критической. Задержка работы *F* ведет к задержке работ *G*, *H* , но не работы *J*.

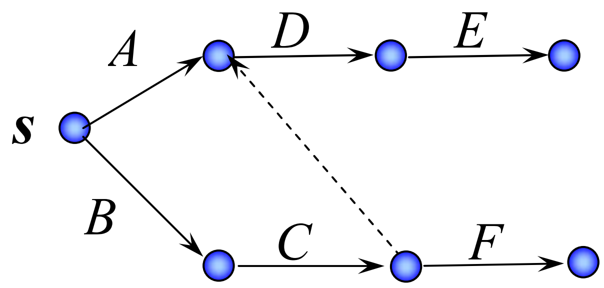
Сетевой график «работы — дуги»





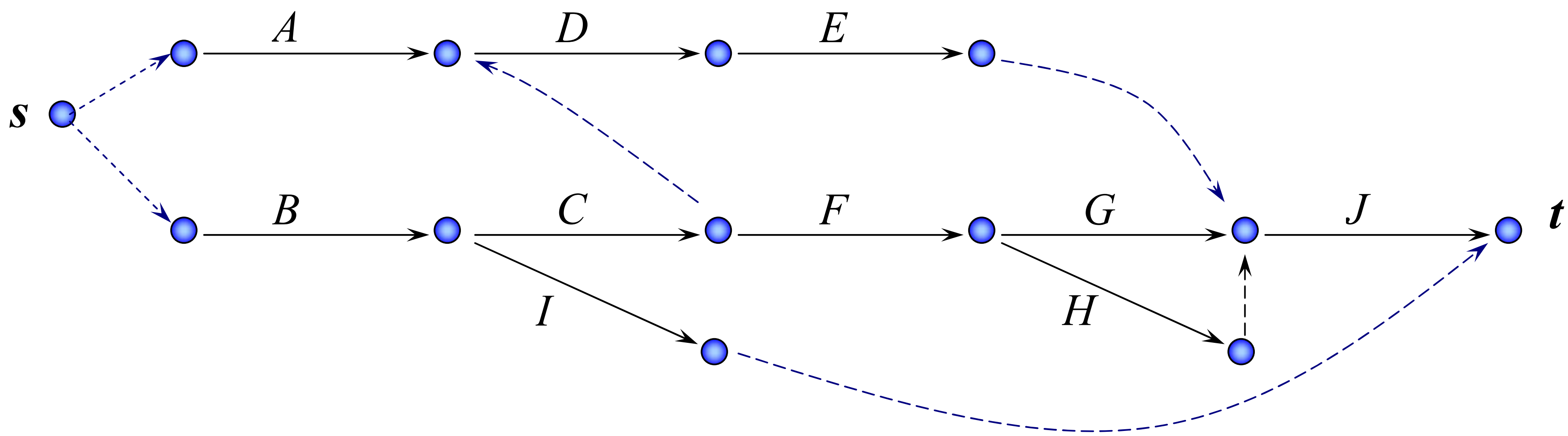




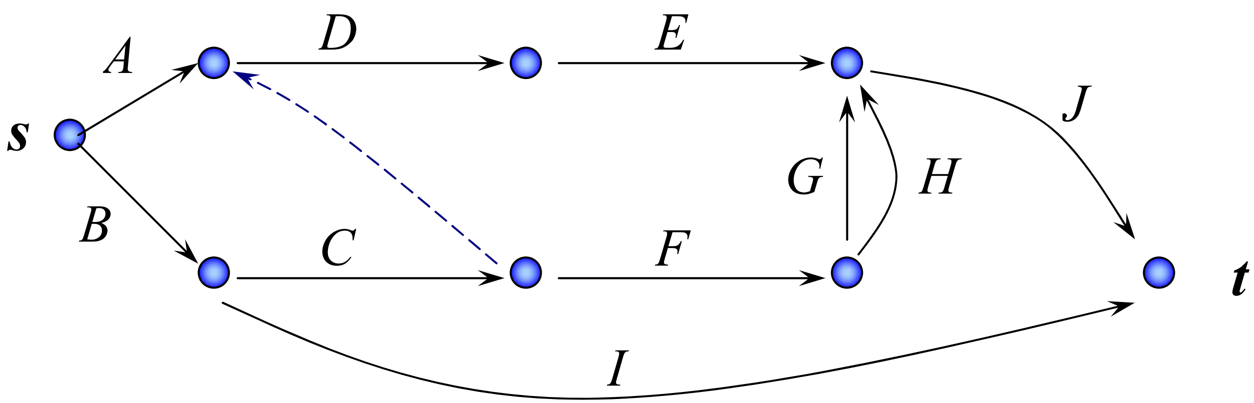


Не верно: *A* не является непосредственным предшественником *F*

Сетевой график «работы — дуги»



Некоторые фиктивные дуги можно исключить



Параметры сетевой модели

Рангом $r(x)$ вершины $x \in V$ называется число дуг в максимальном пути (по числу дуг) из источника s в вершину x.

Рангом проекта R называется ранг стока t: $R = r(t)$.

Рекуррентные соотношения для рангов

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max\{r(y) + 1 \mid (y, x) \in E\}, & x \neq s \end{cases}$$

Топологическая сортировка

Алгоритм

1. для всех $v \in V$ выполнить *color(v)* ← БЕЛЫЙ, $\pi(v)$ ←NIL; *time*←0;
2. для всех $v \in V$ выполнить
   if *color(v)*= БЕЛЫЙ then *Поиск_в_Глубину(v)*
3. вернуть построенный список вершин

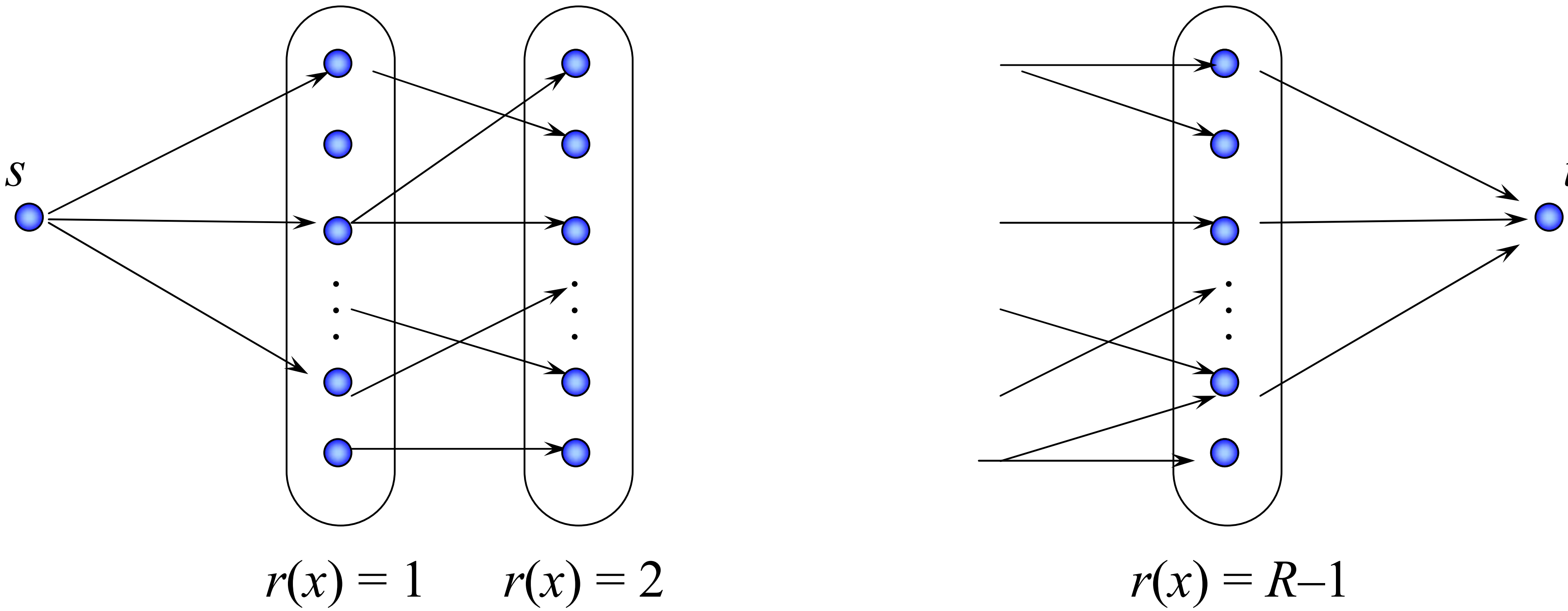
Поиск_в_Глубину(v)

1. *color(v)* ← СЕРЫЙ
2. *d(v)* ← *time*← *time*+1
3. для всех *u* смежных с *v* выполнить
4. if *color(u)*=БЕЛЫЙ
5. then $\pi(u)$ ←*v*, *Поиск_в_Глубину(u)*
6. *color(v)* ← ЧЕРНЫЙ
7. *f(v)* ← *time*← *time*+1
8. *v* добавить в начало списка

T=?

Нумерация вершин сети $G = (V, E)$ называется **правильной**, если для каждой дуги $e = (i(e), k(e)) \in E$ справедливо неравенство $i(e) < k(e)$.

Построение правильной нумерации вершин



В произвольном порядке нумеруем вершины ранга 1, затем ранга 2, и т.д.

Наиболее ранним моментом свершения события *x* называется минимальный момент времени $T_p(x)$, раньше которого данное событие произойти не может.

Обозначим через L_{sx} длину максимального пути из s в x во взвешенном графе $G = (V, E)$, $\tau(e) \geq 0$, $e \in E$. Тогда $T_p(x) = L_{sx}$.

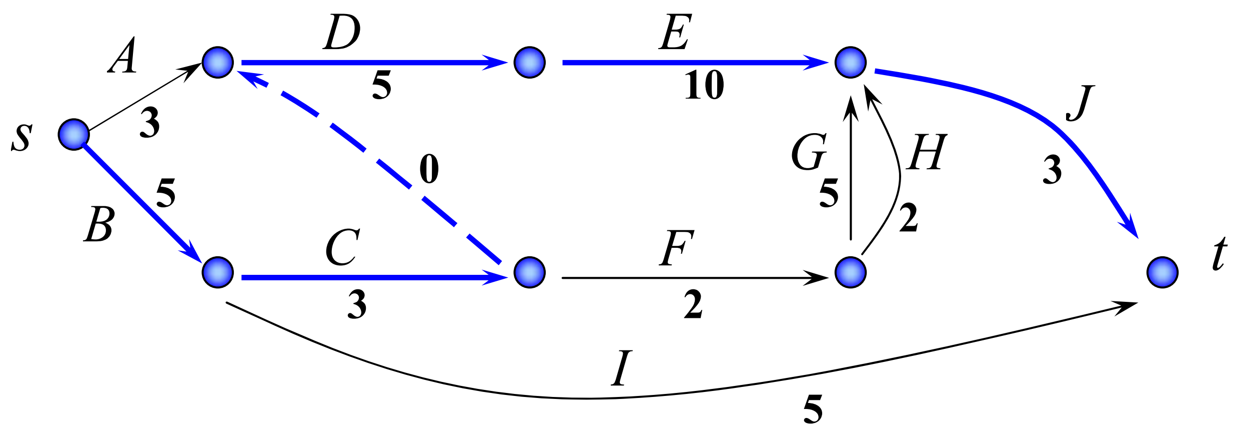
Рекуррентные соотношения

$$T_P(x) = \begin{cases} 0, & x = s \\ \max\{T_P(y) + \tau(y,x) \mid (y,x) \in E\}, & x \neq s \end{cases}$$

Упражнение 1. Используя правильную нумерацию вершин построить алгоритм вычисления всех величин $T_P(x)$ с трудоемкостью $T=O(|V|)$.

Критическое время проекта — наиболее раннее время завершения всего проекта, то есть $T_{Kp} = T_P(t)$.

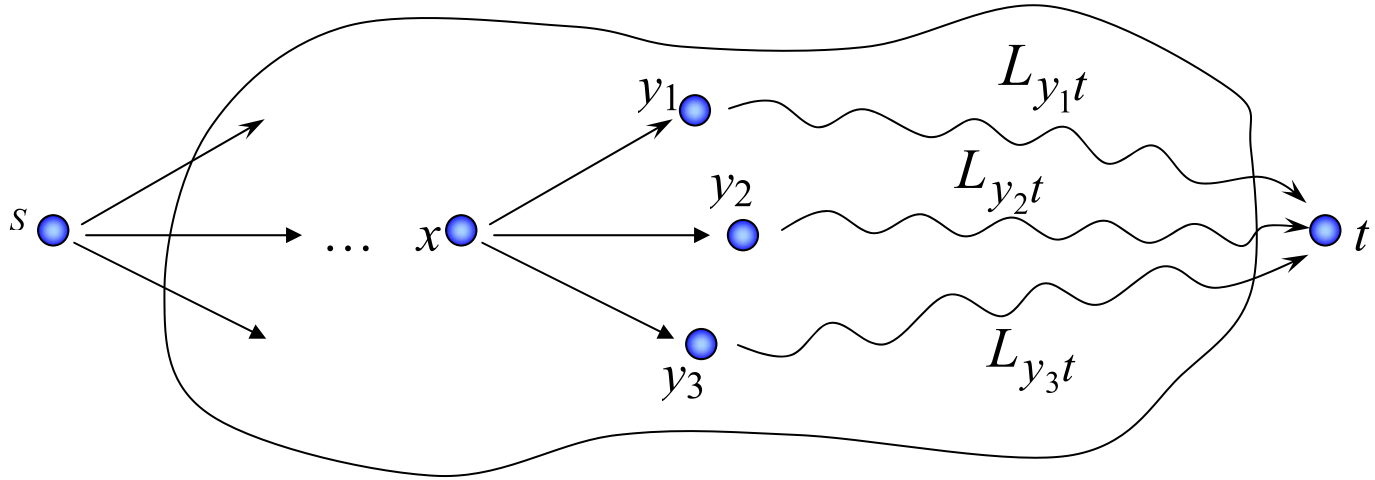
Всякий **путь** в $G = (V, E)$, имеющий длину T_{Kp} называется **критическим**. **Работы и события**, лежащие на критическом пути, называются **критическими**.



Наиболее поздним моментом $T_{П}(x)$ свершения события x называется максимально возможный момент свершения события x, не приводящий к увеличению $T_{Кр}$. Легко заметить, что $T_{П}(x) = T_{Кр} - L_{xt}$.

Рекуррентные соотношения

$$T_{П}(x) = \begin{cases} T_{Кр}, & x = t \\ \min\{T_{П}(y) - \tau(x,y) \mid (x,y) \in E\}, & x \neq t \end{cases}$$



Упражнение 2. Построить алгоритм вычисления величин $T_{П}(x)$ с $T=O(|V|)$.

Полным резервом времени для работы $e = (i, k) \in E$ называется величина $T_П(k) - T_P(i) - \tau(e)$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием принадлежности работы критическому пути является равенство нулю ее полного резерва времени.

Доказательство. Необходимость. Пусть дуга $e = (i, k)$ является критической. Тогда

$$L_{si} + \tau(e) + L_{kt} = L_{Kp}$$

$$\text{и} \quad (T_{Kp} - L_{kt}) - L_{si} - \tau(e) = 0,$$

$$\text{но} \quad T_{Kp} - L_{kt} = T_П(k) \;\; \text{и} \;\; L_{si} = T_P(i),$$

откуда и следует доказательство теоремы. Достаточность доказывается аналогично. ■

Следствие. Событие x является критическим если и только если

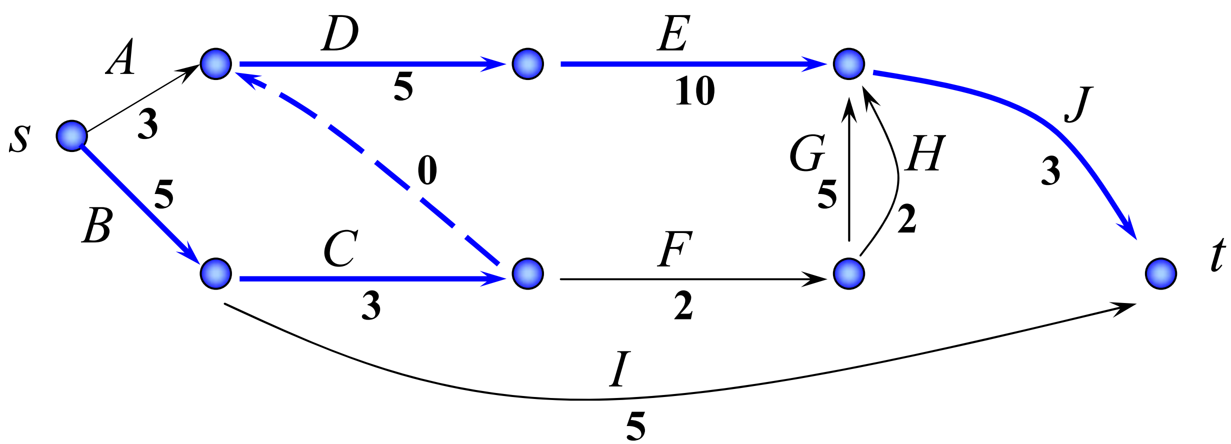
$T_P(x) = T_П(x)$.

Стратегический анализ

Критический путь *B*, *C*, *D*, *E*, *J*. Длина пути $T_{Кр} = 26$.

Работа *J* — обучение персонала. Работа *E* — ремонт помещений.

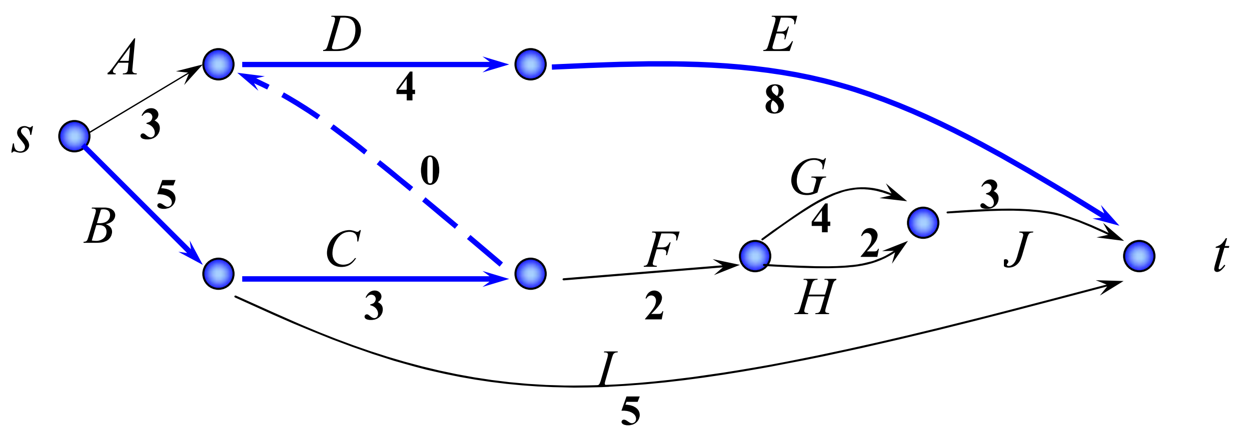
Можно обучать персонал в учебном центре и убрать предшествование *E* для *J*. Длительности работ можно сократить, если привлечь дополнительные средства.



Новая сетевая модель

Сократили длительности работ *D, E, G* и удалили работу *E* из предшественников работы *J*. Новый критический путь *B*, *C*, *D*, *E*.

Длина пути $T_{Кр} = 20$.



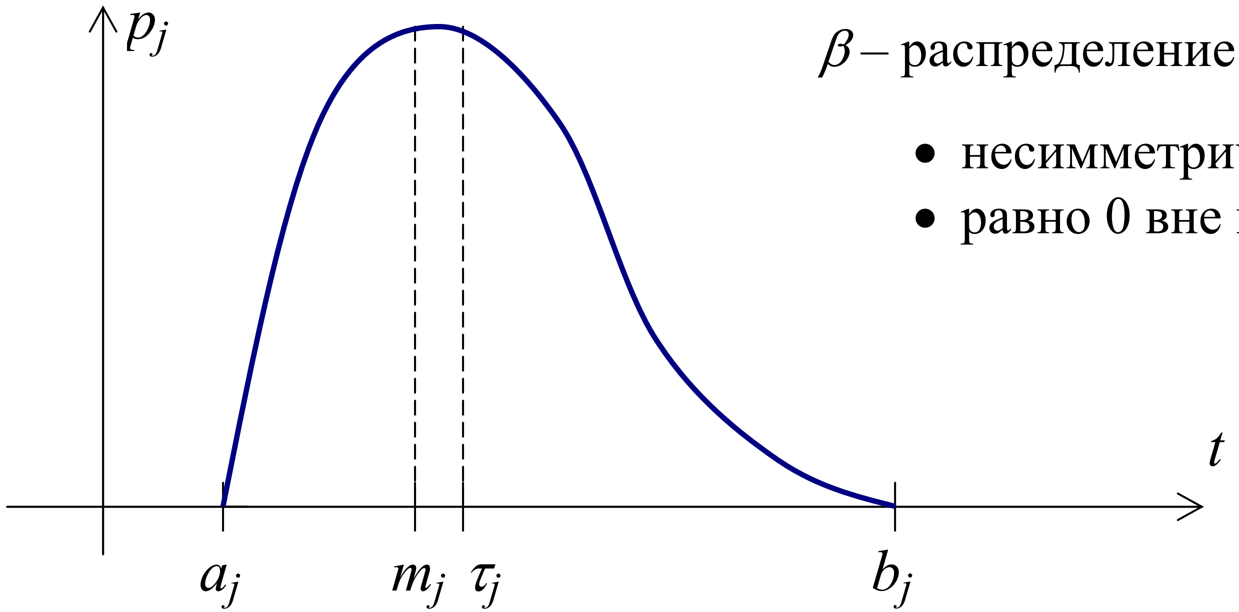
Вероятностная модель

Для каждой работы $j \in J$ кроме τ_j — длительности выполнения (в среднем) зададим три величины:

a_j — оптимальное время завершения;

m_j — наиболее вероятное время завершения;

b_j — пессимистическое время завершения.



β – распределение

- несимметричное
- равно 0 вне интервала $[a, b]$

Оценка параметров для β–распределения

Для работы j среднее значение $\tau_j \approx \frac{(a_j + 4m_j + b_j)}{6}$, дисперсия $\sigma_j \approx \left(\frac{b_j - a_j}{6}\right)^2$,

стандартное отклонение $\sqrt{\sigma_j} \approx \frac{b_j - a_j}{6}$.

j	a	m	b	Среднее	Ст. отклонение	Дисперсия
A	1	3	5	3	2/3	4/9
B	3	4,5	9	5	1	1
C	2	3	4	3	1/3	1/9
D	2	4	6	4	2/3	4/9
E	4	7	16	8	2	4
F	1	1,5	5	2	2/3	4/9
G	2,5	3,5	7,5	4	5/6	25/36
H	1	2	3	2	1/3	1/9
I	4	5	6	5	1/3	1/9
J	1,5	3	4,5	3	1/2	1/4

Вероятность завершения проекта к заданному сроку

Предполагаем, что

- длительности работ являются независимыми случайными величинами;
- случайная величина $\widetilde{T}_{Kp}$ имеет нормальное распределение.

Требуется оценить $Prob\{\widetilde{T}_{Kp} \le T^*\}$ для любого T^*.

Пример. Берем критический путь B, C, D, E и считаем дисперсию для $\widetilde{T}_{Kp}$.

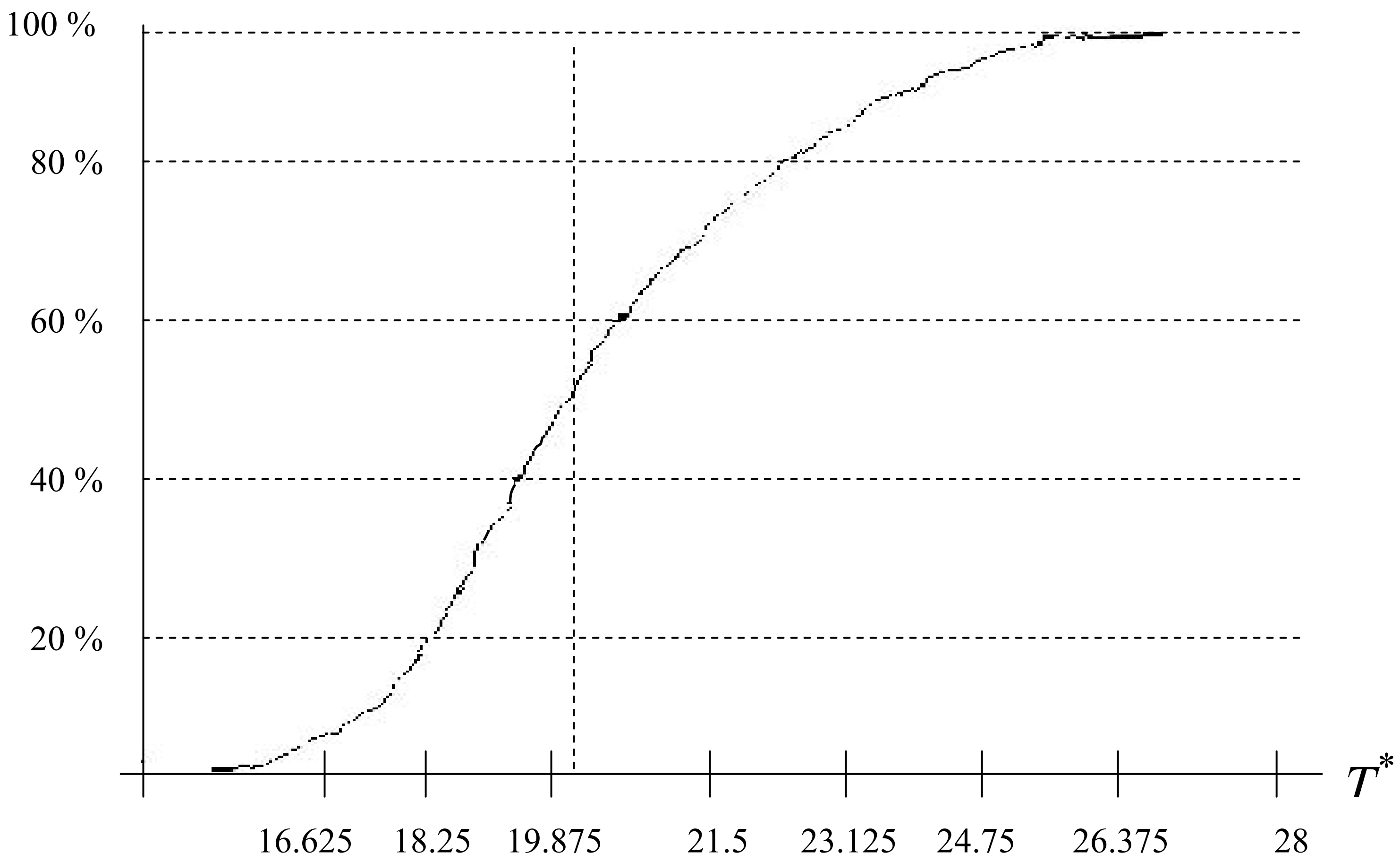
$\sigma(\widetilde{T}_{Kp}) = \sigma(B) + \sigma(C) + \sigma(D) + \sigma(E) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 4 = \frac{50}{9}$. Стандартное отклонение $\sqrt{\sigma(\widetilde{T}_{Kp})} = \sqrt{50/9} = 2{,}357$. Итак, $\widetilde{T}_{Kp}$ – нормально распределенная случайная величина с мат.ожиданием $T_{Kp} = 20$ и стандартным отклонением 2,357. Тогда для $z = (\widetilde{T}_{Kp} - T_{Kp}) / \sqrt{\sigma}$ при $T^* = 22$ получаем

$$Prob\ \{\widetilde{T}_{Kp} \le T^*\} = Prob\ \left\{ \frac{\widetilde{T}_{Kp} - T_{Kp}}{\sqrt{\sigma}} \le \frac{T^* - T_{Kp}}{\sqrt{\sigma}} \right\} = Prob\ \{z \le 0{,}8485\} \approx 0{,}8.$$

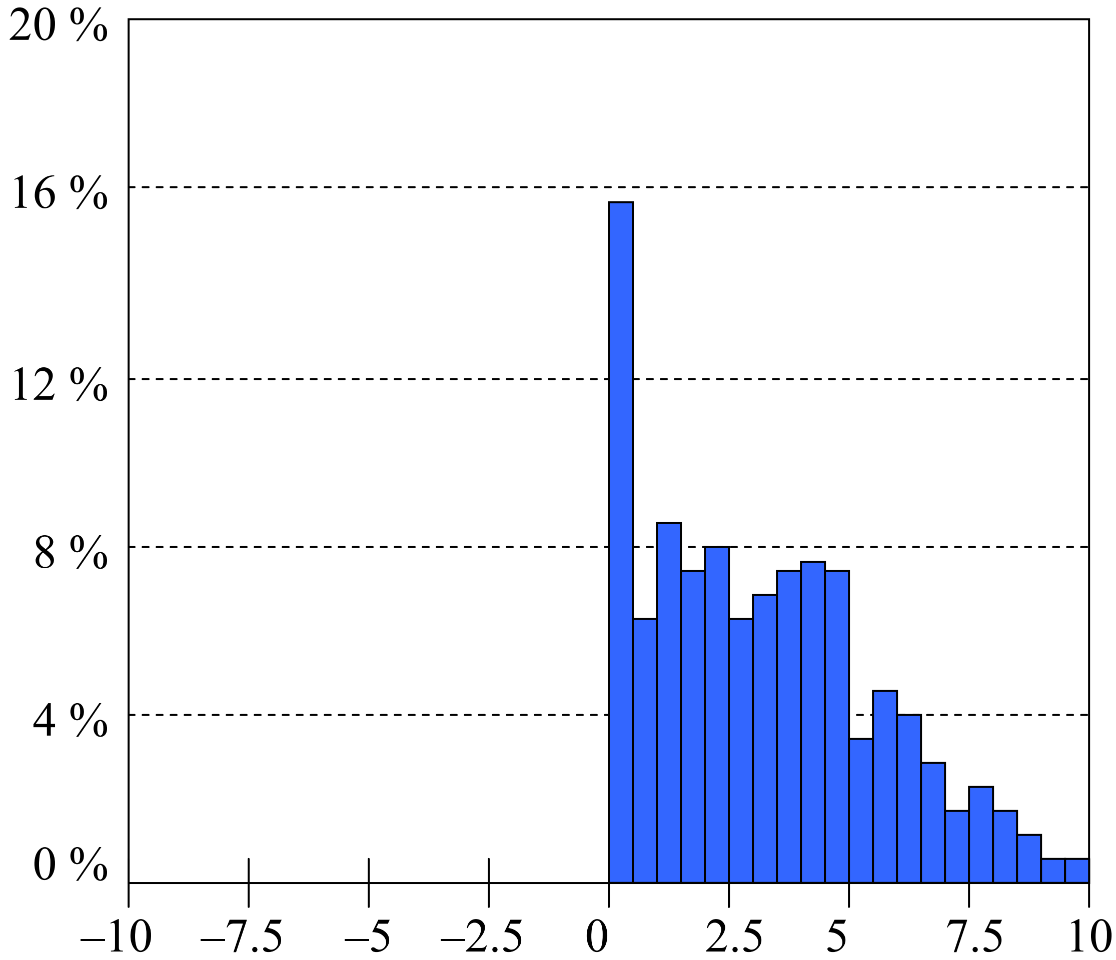
Расчеты по имитационной модели

Функция распределения для вероятности окончания проекта к времени T^*

$Prob\{\widetilde{T}_{Kp} \le T^*\}$ на 400 испытаниях



Распределение резерва времени для работы *F*



Полный резерв для работы *F* равен 3. Среднее значение полного резерва по имитационной модели 3,026, но большая дисперсия. Достаточно часто работа *F* оказывалась критической!

Заключение

При анализе проекта необходимо

1. построить диаграмму Гантта и сетевой график
2. посчитать среднюю длительность каждой работы ($\tau_j = a_j$+4m_j+b_j)/6)
3. вычислить дисперсию ($\sigma_j = (b_j - a_j)^2 / 36$)

Используя полученные данные

1. найти критический путь и его длину
2. вычислить полный резерв времени для каждой работы
3. определить вероятность завершения работ в этом критическом пути для желаемого срока окончания проекта.

Если полученная вероятность слишком мала, то провести стратегический анализ проекта с целью сокращения критического пути за счет изменения условий предшествования и (или) длительностей работ.